Nerovnosti v trojúhelníku

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

NEROVNOSTI V TROJÚHELNÍKU

57

matematické olympiády v nakladatelství Mladá fronta

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

STANISLAV HORÁK

Nerovnosti v trojúhelníku

PRAHA 1986
VYDAL ÚV MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY
V NAKLADATELSTVÍ MLADÁ FRONTA

Recenzovali Doc. RNDr. Bruno Budinský, CSc.,
a RNDr. Karel Horák, CSc.

PŘEDMLUVA

Myšlenka napsat pro naše studenty sbírku jednoduchých geometrických nerovností vznikla v geometrickém semináři prof. RNDr. Zbyňka Nádeníka, DrSc., který jsem svého času navštěvoval. Z různých časopisů jsem pak ty nejjednodušší vybíral.

Není možné, aby se v této malé knížce všechny pomocné věty a vztahy odvozovaly, a proto hned vpředu uvádím seznam všech vzorců použitých v knížce a seznam nerovností, které platí o reálných číslech. Pro rychlou orientaci uvádím označení všech důležitých bodů v trojúhelníku a všech potřebných úseček v trojúhelníku.

Na konec mi zbývá milá povinnost poděkovat všem, kteří se přičinili o tom, aby knížka po stránce obsahové i vnější dopadla co nejlépe. Jsou to především prof. RNDr. Zbyněk Nádeník, DrSc., doc. RNDr. Bruno Budinský, CSc., a zejména RNDr. Karel Horák, CSc., z Matematického ústavu ČSAV. Tiskárně děkuji za vzorně provedenou sazbu.

Poslední dík — a nikoliv nejmenší — patří mé manželce Miladě, která mi vždy i v těch nejnepříznivějších podmínkách dovedla připravit klidné pracovní prostředí. Jí také tuto knížku připisuji.

Autor

ÚVOD

V této knížce bude daný trojúhelník vždy označen ABC. V pravoúhlém trojúhelníku bude C vrchol pravého úhlu. Délky stran budou označeny a, b, c, a to tak, že $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$. Střed opsané kružnice označíme S, střed vepsané kružnice O, T těžiště a V ortocentrum. Při odvozování nebo citování různých nerovností mohou a, b, c představovat reálná čísla, která pak ovšem nemají význam délek strany trojúhelníku.

Dále označíme:

α, β, γ velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku, a to tak, že $\alpha = |\sphericalangle CAB|$, $\beta = |\sphericalangle ABC|$, $\gamma = |\sphericalangle BCA|$. Přitom $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

v_a, v_b, v_c výšky trojúhelníku. Přitom v_a je ta výška, která prochází vrcholem A, atd.

t_a, t_b, t_c délky těžnic trojúhelníku, a to tak, že $t_a = |AA'|$, kde A' je střed strany BC, atd.

w_a, w_b, w_c délky os vnitřních úhlů trojúhelníku, přičemž w_a je délka té osy, která půlí úhel $\sphericalangle BAC$, atd.

$s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ poloviční obvod trojúhelníku ABC.

R poloměr kružnice opsané trojúhelníku ABC.

r poloměr kružnice vepsané trojúhelníku ABC.

r_a, r_b, r_c poloměry kružnic vně vepsaných trojúhelníku ABC. Přitom kružnice s poloměrem r_a se dotýká strany BC ve vnitřním bodě, atd.

S obsah trojúhelníku.

V celé knížce pracujeme s reálnými čísly. V zájmu stručnosti budeme proto užívat slova ‚číslo' ve významu ‚reálné číslo'.

Vzorce, které budeme v knížce potřebovat. (Při odvolávání na některý vzorec uvedeme prostě příslušné římské číslo.)

I. $S = \frac{1}{2} a v_a = \frac{1}{2} b v_b = \frac{1}{2} c v_c$.

Je vidět, že stačí znát pouze jeden z těchto tří vzorců, a ostatní dva dostaneme postupným užitím cyklické záměny: $a \to b$, $b \to c$, $c \to a$.

I.a $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, tzv. *Heronův vzorec.*

I.b $S = \frac{1}{2} ab \sin\gamma$ a další dva vzorce cyklickou záměnou: $a \to b$, $b \to c$, $c \to a$ a současně $\alpha \to \beta$, $\beta \to \gamma$, $\gamma \to \alpha$.

I.c $16S^2 = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - (a^4 + b^4 + c^4)$. Tento vzorec je v podstatě vzorec **I.a**.

II. $v_a = c \sin\beta = b \sin\gamma$ a další dva cyklickou záměnou.

II.a $R = abc : (4S)$.

II.b $a = 2R \sin\alpha$ a další dva cyklickou záměnou.

III. $r = S : s$,

$r_a = S : (s - a)$ a další dva cyklickou záměnou.

IV.a $t_a^2 = \frac{1}{2}(b^2 + c^2) - \frac{1}{4}a^2$ a další dva cyklickou záměnou.

IV.b $t_a^2 + t_b^2 + t_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$.

V. $a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$. Tzv. *sinová věta*, která se dá odvodit z rovnic **II** nebo **II.b.**

VI. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ a další dva cyklickou záměnou. Tzv. *kosinová věta*, která je velmi často užívaná v elementární geometrii.

VII. $\frac{1}{v_a} + \frac{1}{v_b} + \frac{1}{v_c} = \frac{1}{r}$.

VIII.a $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$ a další dva cyklickou záměnou.

VIII.b $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$ a další dva cyklickou záměnou.

VIII.c $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$ a další dva cyklickou záměnou.

IX.a $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$ a další dva cyklickou záměnou.

IX.b $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$ a další dva cyklickou záměnou.

IX.c $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$ a další dva cyklickou záměnou.

Vzorce **IX.a, b, c** platí pro úhly z intervalu $\langle 0; \pi)$, tudíž také pro úhly trojúhelníku.

X.a $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$.

X.b $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$.

Vzorce **X.a, b** platí pro úhly α, β, γ, jejichž součet je π, tudíž také pro úhly trojúhelníku.

Nerovnosti, které budeme v knížce potřebovat. (Při odvolávání na některou nerovnost uvedeme prostě příslušné písmeno.)

A.1 $a^2 + b^2 \geqq 2ab$,

kde a, b jsou libovolná čísla. Rovnost platí právě tehdy, když $a = b$. Vztah **A.1** plyne jednoduše ze vztahu $(a-b)^2 \geqq 0$. Je často používán i ve tvaru:

A.2 $a + b \geqq 2\sqrt{ab}$,

kde a, b jsou libovolná nezáporná čísla. Rovnost platí právě tehdy, když $a = b$. Jestliže a, b jsou vzájemně reciproká čísla, potom

A.3 $a + b \geqq 2$.

Rovnost platí právě tehdy, když $a = b$.

Vzorec **A.2** se dá zobecnit pro libovolné přirozené n. Zobecnění budeme potřebovat jen pro $n = 3$:

B. $a+b+c \geqq 3\sqrt[3]{abc}$,

kde a, b, c jsou libovolná nezáporná čísla. Rovnost platí, právě když $a=b=c$.

Důkazy nerovností **A.2, A.3** a **B** a jejich zobecnění najde čtenář v Rozhledech, roč. *51* (1972—73), str. 152 v článku *P. Vihana* Didoniny úlohy. Jsou tam i geometrické aplikace těchto vzorců.

C.1 $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geqq 4$,

kde a, b jsou libovolná kladná čísla. Rovnost platí, právě když $a=b$. I tato nerovnost se dá zobecnit pro libovolný počet členů v závorkách. Budeme používat jen toto zobecnění:

C2. $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geqq 9$,

kde a, b, c jsou libovolná kladná čísla. Rovnost platí právě tehdy, když $a=b=c$.

Důkazy nerovností **C.1** a **C.2** se provedou tak, že se oba mnohočleny vynásobí a použije se nerovnost **A.3.**

D. $a^2+b^2+c^2 \geqq ab+bc+ca$,

kde a, b, c jsou libovolná čísla. Rovnost platí právě tehdy, když $a=b=c$.

Důkaz nerovnosti vyplývá z třikrát použité nerovnosti **A.1.**

E. $|a+b+c| \leqq \sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}$,

kde a, b, c jsou libovolná čísla. Rovnost platí právě tehdy, když $a=b=c$.

Jen stručně *důkaz*. Ze vztahu **D** plyne

$$2(a^2+b^2+c^2) \geqq 2(ab+bc+ca),$$

kde platí rovnost právě tehdy, když $a=b=c$. Upravujme dál:

$$3(a^2+b^2+c^2) \geqq (a+b+c)^2,$$

a to už je v podstatě dokazovaný vztah.

F. $ab+bc+ca \geqq \sqrt{3abc(a+b+c)}$,
kde a, b, c jsou libovolná nezáporná čísla. Rovnost platí právě tehdy, když $a=b=c$.
I zde provedeme stručný *důkaz*. Vyjdeme z identity

$$ab+bc+ca=$$
$$=\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2(a^2bc+ab^2c+abc^2)} \qquad (1)$$

Podle vztahu **D** je

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \geqq a^2bc+ab^2c+abc^2. \qquad (2)$$

Nahradíme-li v (1) pod odmocnítkem první trojčlen pravou stranou nerovnosti (2), dostaneme nerovnost **F.** Tím je důkaz proveden.

G. $x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3 \leqq \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2}$,
kde x_i, y_i $(i=1, 2, 3)$ jsou libovolná čísla.
Rovnost platí právě tehdy, když buď všechna čísla $x_i=0$, nebo všechna čísla $y_i=0$, nebo jestliže existuje takové číslo $k>0$, že $x_i=ky_i$ $(i=1, 2, 3)$. Toto je tzv.

Cauchyho nerovnost. Její *důkaz* (a důkazy mnohých jiných nerovností) najde čtenář v brožure *A. Kufnera* Nerovnosti a odhady (39. svazek knižnice ŠMM) nebo v brožuře *J. Morávka* Dynamické programování (33. svazek knižnice ŠMM).

I. kapitola

NEROVNOSTI MEZI STRANAMI TROJÚHELNÍKU FINSLEROVA-HADWIGEROVA NEROVNOST

1. Uvnitř strany AB daného trojúhelníku ABC je zvolen libovolný bod D, o němž platí

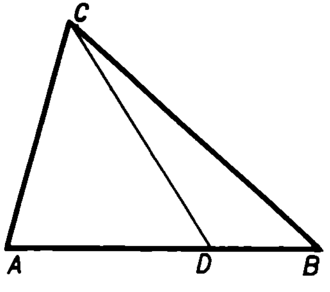
$$|AB| : |AD| = k,$$

kde $k > 1$ je reálné číslo. Dokažte, že pak platí

$$|BC| + (k+1)|AC| > k|CD|.$$

Důkaz. (obr. 1). Podle daného předpokladu platí

$$|AB| = k|AD|.$$



Obr. 1

Z trojúhelníkové nerovnosti pro trojúhelník ABC,

$$|AC|+|BC|>|AB|,$$

plyne

$$|AC|+|BC|>k|AD|. \qquad (1)$$

Podobně z trojúhelníkové nerovnosti $|AD|+|AC|>|CD|$ pro trojúhelník ACD vyplývá

$$k(|AD|+|AC|)>k|CD|. \qquad (2)$$

Spojením vztahů (1) a (2) dostáváme

$$|AC|+|BC|+k(|AD|+|AC|)>k|AD|+k|CD|$$

a po zjednodušení máme

$$|BC|+(k+1)|AC|>k|CD|,$$

což je nerovnost, kterou jsme měli dokázat.

2. Dokažte, že jestliže délky a, b, c stran trojúhelníku ABC splňují podmínku

$$a^2+b^2=kc^2,$$

potom $k>\frac{1}{2}$.

Důkaz. O délkách stran trojúhelníku ABC platí

$$a+b>c.$$

Z této nerovnosti dostaneme

$$a^2+b^2+2ab>c^2.$$

Použijeme-li nerovnost **A.1**, dojdeme k nové nerovnosti

$$2(a^2+b^2)>c^2,$$

a dále

$$2kc^2>c^2,$$

tj. $k>\frac{1}{2}$, jak jsme měli dokázat.

3. Dokažte, že v každém trojúhelníku ABC platí

$$\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s-c}\geqq 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right),$$

přičemž rovnost platí právě tehdy, když $a=b=c$ (tj., právě když trojúhelník je rovnostranný).

Důkaz. V nerovnosti **C.1** pišme $(s-a)$, $(s-b)$ místo a, b. Snadno vypočítáme, že

$$\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-b}\geqq\frac{4}{2s-a-b}=\frac{4}{c}.$$

Znaménko rovnosti platí, právě když $s-a=s-b$, tj., právě když $a=b$. Použijeme-li dvakrát cyklickou záměnu, získáme tyto další dvě nerovnosti:

$$\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s-c}\geqq\frac{4}{a}\quad\text{(rovnost, právě když } b=c\text{)},$$

$$\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-c}\geqq\frac{4}{b}\quad\text{(rovnost, právě když } a=c\text{)}.$$

Sečtením všech tří nerovností dostaneme

$$\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s-c}\geqq 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right),$$

kde rovnost platí, právě když $a=b=c$, tj., právě když trojúhelník je rovnostranný. Tím je důkaz vysloveného tvrzení proveden.

4. Dokažte, že v každém trojúhelníku ABC platí

$$\sqrt{s}<\sqrt{s-a}+\sqrt{s-b}+\sqrt{s-c}\leqq\sqrt{3s},$$

přičemž rovnost platí právě tehdy, když trojúhelník je rovnostranný.

Důkaz. Pro stručnost položme

$$x=\sqrt{s-a},\quad y=\sqrt{s-b},\quad z=\sqrt{s-c}, \tag{1}$$

potom

$$x^2+y^2+z^2=3s-(a+b+c)=s. \tag{2}$$

Poněvadž platí

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}\leqq x+y+z,$$

máme tím dokázánu první nerovnost.

Podle vztahu **E** platí

$$x+y+z\leqq\sqrt{3(x^2+y^2+z^2)}, \tag{3}$$

přičemž rovnost platí právě tehdy, když $x=y=z$. Vyjádříme-li tuto nerovnost s použitím vztahů (1), (2) pomocí čísel

a, b, c, dostaneme druhou nerovnost uvedenou v textu úlohy. Poněvadž rovnost ve vztahu (3) platí právě tehdy, když $x = y = z$, nastane v uvedené nerovnosti rovnost právě tehdy, když jde o rovnostranný trojúhelník.

5. Dokažte, že v každém trojúhelníku platí

$$s^2 \geqq 3S\sqrt{3},$$

přičemž rovnost platí právě tehdy, když daný trojúhelník je rovnostranný.

Důkaz. Vztah **B** použijeme na čísla $s - a$, $s - b$, $s - c$. Tak dostaneme

$$3s - a - b - c \geqq 3\sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)}; \qquad (1)$$

přitom rovnost platí právě tehdy, když $s - a = s - b = s - c$, tj., když jde o rovnostranný trojúhelník. Dalšími úpravami vztahu (1) postupně dostaneme:

$$s \geqq 3\sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)},$$

$$s^3 \geqq 27(s-a)(s-b)(s-c),$$
$$s^4 \geqq 27s(s-a)(s-b)(s-c) = 27S^2,$$

$$s^2 \geqq 3S\sqrt{3},$$

jak jsme měli dokázat.

Poznámky. 1. Snad je vhodné upozornit čtenáře na to, že tato nerovnost udává vztah mezi obvodem a obsahem trojúhelníku.

2. Poněvadž $S = sr$ (viz vztah **III**), můžeme z odvozené nerovnosti dostat nerovnost udávající vztah mezi obvodem a poloměrem vepsané kružnice:

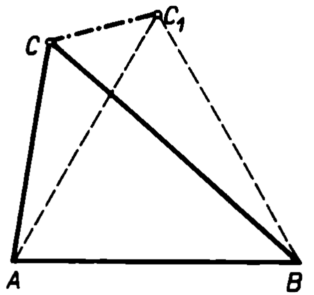
$$s \geqq 3r\sqrt{3}.$$

6. Dokažte, že o prvcích každého trojúhelníku platí

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqq 4S\sqrt{3}.$$

Rovnost platí právě tehdy, když daný trojúhelník je rovnostranný.

Důkaz (obr. 2). Nad stranou AB daného trojúhelníku ABC sestrojme v polorovině ABC rovnostranný trojúhel-



Obr. 2

ník ABC_1. Z trojúhelníku ACC_1 se dá užitím kosinové věty vypočítat velikost úsečky CC_1. Přitom si uvědomíme, že

$|\sphericalangle CAC_1| = \left|\alpha - \frac{\pi}{3}\right|$, a že $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$. Pak můžeme psát

$$|CC_1|^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= b^2 + c^2 - 2bc\left(\frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right).$$

Z kosinové věty pro trojúhelník ABC vyjádříme $\cos\alpha$ a dosadíme:

$$|CC_1|^2 = b^2 + c^2 - bc\,\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} - \sqrt{3}bc\sin\alpha =$$

$$= \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) - 2S\sqrt{3}.$$

O velikosti úsečky CC_1 platí, že $|CC_1| \geqq 0$. Rovnost nastane právě tehdy, když $C = C_1$, a to je jedině tehdy, když daný trojúhelník je rovnostranný. Dospíváme tak k nerovnosti

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqq 4S\sqrt{3}.$$

Znaménko rovnosti platí právě tehdy, když jde o rovnostranný trojúhelník.

V r. 1938 matematikové Finsler a Hadwiger zesílili právě dokázanou nerovnost a odvodili následující větu:

7. V každém trojúhelníku platí

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqq 4S\sqrt{3} + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2.$$

Rovnost platí právě tehdy, když jde o rovnostranný trojúhelník.

Důkaz. Na čísla $s-a$, $s-b$, $s-c$ použijeme nerovnost **F**. Dostaneme tak

$$(s-a)(s-b)+(s-b)(s-c)+(s-c)(s-a)\geqq$$
$$\geqq\sqrt{3s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Rovnost platí právě tehdy, když $s-a=s-b=s-c$, tj., když trojúhelník je rovnostranný.

Pravá strana nerovnosti je rovna $S\sqrt{3}$ a levou stranu budeme postupně upravovat.

$$3s^2-2s(a+b+c)+(ab+bc+ca)\geqq S\sqrt{3},$$
$$4(ab+bc+ca)\geqq 4S\sqrt{3}+4s^2,$$
$$4(ab+bc+ca)\geqq 4S\sqrt{3}+(a+b+c)^2,$$
$$2(ab+bc+ca)\geqq 4S\sqrt{3}+a^2+b^2+c^2,$$
$$2(ab+bc+ca)+(a^2+b^2+c^2)\geqq 4S\sqrt{3}+2(a^2+b^2+c^2),$$
$$a^2+b^2+c^2\geqq 4S\sqrt{3}+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2.$$

Rovnost platí, právě když trojúhelník je rovnostranný. Tím je důkaz proveden.

II. kapitola

NEROVNOSTI TÝKAJÍCÍ SE STRAN A ÚHLŮ TROJÚHELNÍKU

8. Dokažte, že v každém trojúhelníku platí

$$\sin\frac{\alpha}{2} \leqq \frac{a}{2\sqrt{bc}},$$

kde rovnost platí právě tehdy, když $b = c$. Na základě toho pak dokažte, že o úhlech trojúhelníka platí

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \leqq \frac{1}{8},$$

kde rovnost nastane právě tehdy, je-li trojúhelník rovnostranný.

Důkaz. Vyjdeme z kosinové věty pro trojúhelník ABC a tu budeme vhodně upravovat:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha = (b-c)^2 + 2bc(1-\cos\alpha) =$$
$$= (b-c)^2 + 4bc\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

(to jsme použili vzorec **IX.a**). Odtud vyplývá, vynecháme-li dvojčlen v závorce, že

$$a^2 \geqq 4bc\sin^2\frac{\alpha}{2}, \quad \text{čili} \quad \sin\frac{\alpha}{2} \leqq \frac{a}{2\sqrt{bc}}.$$

Přitom rovnost nastane právě tehdy, když $b=c$, tj. pro rovnoramenný trojúhelník s rameny AC, AB.

Jestliže na odvozený vztah použijeme dvakrát po sobě cyklickou záměnu, dostaneme

$$\sin\frac{\beta}{2}\leqq\frac{b}{2\sqrt{ca}}, \quad \sin\frac{\gamma}{2}\leqq\frac{c}{2\sqrt{ab}}.$$

Vynásobením všech tří vztahů dojdeme k nerovnosti uvedené v textu úlohy. Poznamenejme ještě, že rovnost platí právě tehdy, když $a=b=c$.

Nyní uvedeme dvě věty, které jsou důsledkem věty 8.

9. O úhlech každého trojúhelníku platí

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\leqq\frac{3}{2},$$

kde rovnost platí právě tehdy, když trojúhelník je rovnostranný. Dokažte.

Důkaz tohoto tvrzení pouze naznačíme. Podle **X.b** platí

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1+4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}.$$

Dál už může čtenář pokračovat sám.

10. Dokažte, že o úhlech každého trojúhelníku platí

$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\leqq\frac{1}{8},$$

přičemž rovnost platí právě tehdy, když je trojúhelník rovnostranný.

Důkaz. V 8. úloze jsme dokázali, že o úhlech každého trojúhelníku platí

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\leqq\frac{1}{8}. \tag{1}$$

Položme

$$\frac{\alpha}{2}=\frac{\pi}{2}-x, \quad \frac{\beta}{2}=\frac{\pi}{2}-y, \quad \frac{\gamma}{2}=\frac{\pi}{2}-z. \tag{2}$$

Úhly x, y, z můžeme považovat za úhly trojúhelníku, neboť o jejich velikostech platí

$$x+y+z=\pi,$$

jak se můžeme přesvědčit sečtením rovnic (2). Dosadíme-li z (2) do (1), obdržíme

$$\cos x\cos y\cos z\leqq\frac{1}{8}.$$

Podle úlohy 8 rovnost platí právě tehdy, když $x=y=z$, tj. právě tehdy, když trojúhelník je rovnostranný. Vyslovené tvrzení můžeme považovat za dokázané, neboť jeho platnost nezávisí na označení prvků (úhlů) trojúhelníku.

11. Dokažte, že v trojúhelníku, který není pravoúhlý, platí

$$\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{tg}^2\beta+\mathrm{tg}^2\gamma\geqq 9.$$

Rovnost platí právě tehdy, když trojúhelník je rovnostranný.

Důkaz. Levou stranu dané nerovnosti — pro stručnost ji označíme L — budeme postupně upravovat. Přitom použijeme známý vzorec $1+\mathrm{tg}^2 x=\cos^{-2} x$, z něhož plyne

$$\mathrm{tg}^2 x=\cos^{-2} x-1.$$

Podle toho lze s použitím nerovnosti **B** výraz L upravit

$$L=\cos^{-2}\alpha+\cos^{-2}\beta+\cos^{-2}\gamma-3\geqq$$
$$\geqq 3\sqrt[3]{\cos^{-2}\alpha\,\cos^{-2}\beta\,\cos^{-2}\gamma}-3,$$

kde rovnost platí právě tehdy, když $\cos^2\alpha=\cos^2\beta=\cos^2\gamma$. Avšak podle úlohy 10 platí

$$\cos\alpha\,\cos\beta\,\cos\gamma\leqq\frac{1}{8},$$

kde rovnost platí právě tehdy, když $\alpha=\beta=\gamma$. Proto

$$\cos^{-2}\alpha\,\cos^{-2}\beta\,\cos^{-2}\gamma\geqq 64.$$

Tudíž

$$L=\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{tg}^2\beta+\mathrm{tg}^2\gamma\geqq 3\cdot 4-3=9,$$

jak jsme měli dokázat. Dodejme, že rovnost platí právě tehdy, když trojúhelník je rovnostranný.

Poznámka. Z rovností $\cos^2\alpha=\cos^2\beta=\cos^2\gamma$ už plyne, že $\alpha,\beta,\gamma\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Jinak by totiž nutně bylo $\alpha+\beta+\gamma>\pi$, což není možné. Můžeme tedy psát $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma$. Protože funkce cos je na intervalu $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ prostá, plyne odtud $\alpha=\beta=\gamma$.

Dokázali jsme tak, že platí: Jestliže v dokazované nerovnosti nastane rovnost, potom $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{6}$. Pouhým dosazením zjistíme, že platí i obrácená implikace: Jestliže $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{6}$, potom v dokazované nerovnosti platí rovnost.

12. V ostroúhlém trojúhelníku platí

$$\cos^{-1}\alpha+\cos^{-1}\beta+\cos^{-1}\gamma\geqq 6.$$

Rovnost platí právě tehdy, když daný trojúhelník je rovnostranný. Dokažte.

Důkaz. Poněvadž jde o ostroúhlý trojúhelník,

$$\cos\alpha>0,\quad \cos\beta>0,\quad \cos\gamma>0.$$

Použijeme-li nerovnost **B** na náš případ, dostaneme

$$\cos^{-1}\alpha+\cos^{-1}\beta+\cos^{-1}\gamma\geqq 3\sqrt[3]{\cos^{-1}\alpha\,\cos^{-1}\beta\,\cos^{-1}\gamma}, \tag{1}$$

přičemž rovnost platí právě tehdy, když $\cos^{-1}\alpha=\cos^{-1}\beta=$ $=\cos^{-1}\gamma$, tj. právě tehdy, když $\alpha=\beta=\gamma$. Podle úlohy 10

$$\cos\alpha\,\cos\beta\,\cos\gamma\leqq\frac{1}{8},$$

tj.

$$\sqrt[3]{\cos\alpha\,\cos\beta\,\cos\gamma}\leqq\frac{1}{2},$$

čili, jinak, psáno

$$\sqrt[3]{\cos^{-1}\alpha \cos^{-1}\beta \cos^{-1}\gamma} \geqq 2. \tag{2}$$

Ze vztahů (1), (2) obdržíme už vztah uvedený v textu úlohy. Dodejme, že rovnost platí právě tehdy, když jde o rovnostranný trojúhelník.

13. Dokažte, že o úhlech každého trojúhelníku platí

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\beta}{2}+\sin^2\frac{\gamma}{2}\geqq\frac{3}{4}.$$

Znaménko rovnosti platí právě tehdy, když trojúhelník je rovnostranný.

Důkaz. Na levou stranu nerovnosti — označme ji pro stručnost L — použijeme vztah **IX.a** a hned budeme dál upravovat:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}(3-\cos\alpha-\cos\beta-\cos\gamma) = \\ &= \frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left(1+4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\right) = \\ &= 1-2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}. \end{aligned}$$

Při úpravě jsme použili identitu **X.b.** V úloze 8 jsme ukázali, že

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\leqq\frac{1}{8},$$

kde rovnost platí právě tehdy, když jde o rovnostranný trojúhelník.

Tudíž

$$L \geqq 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4},$$

což jsme měli dokázat.

14. O úhlech trojúhelníku platí

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leqq \frac{3}{2}\sqrt{3},$$

kde rovnost platí právě tehdy, když trojúhelník je rovnostranný. Dokažte.

Důkaz. Vyjdeme z výsledku úlohy 13:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\gamma}{2} \geqq \frac{3}{4},$$

kde znaménko rovnosti platí právě tehdy, když trojúhelník je rovnostranný. V této nerovnosti nahradíme funkce sinus funkcemi kosinus:

$$3 - \left(\cos^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\beta}{2} + \cos^2\frac{\gamma}{2}\right) \geqq \frac{3}{4},$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\beta}{2} + \cos^2\frac{\gamma}{2} \leqq \frac{9}{4}.$$

Nyní použijeme vztah **B** a dostaneme tak řetěz nerovností

$$\frac{9}{4} \geqq \cos^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\beta}{2} + \cos^2\frac{\gamma}{2} \geqq$$

$$\geqq 3\sqrt[3]{\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2}}.$$

Rovnost nalevo i napravo platí právě tehdy, když $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \cos^2 \frac{\beta}{2} = \cos^2 \frac{\gamma}{2}$, tj., jak se dá snadno ukázat (viz poznámku v úloze 11), právě tehdy, když $\alpha = \beta = \gamma$. Vynecháme-li prostřední člen řetězu, dostaneme po jednoduché úpravě

$$\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \leqq \frac{3}{8} \sqrt{3}.$$

S použitím vztahu **X.a** dostaneme konečný tvar nerovnosti

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \leqq \frac{3}{2} \sqrt{3}.$$

Znaménko rovnosti platí právě tehdy, když jde o rovnostranný trojúhelník.

15. Dokažte, že o úhlech každého trojúhelníku platí

$$\sin^{-2} \frac{\alpha}{2} + \sin^{-2} \frac{\beta}{2} + \sin^{-2} \frac{\gamma}{2} \geqq 12,$$

přičemž rovnost nastane právě tehdy, když jde o rovnostranný trojúhelník.

Důkaz. Z příkladu 8 víme, že

$$\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \leqq \frac{1}{8},$$

kde rovnost platí právě tehdy, když je trojúhelník rovnostranný. Z této nerovnosti dostaneme jinou, s ní ekvivalentní:

$$\sin^{-2}\frac{\alpha}{2}\sin^{-2}\frac{\beta}{2}\sin^{-2}\frac{\gamma}{2}\geqq 64.$$

S použitím této nerovnosti a nerovnosti **B** dojdeme k nové nerovnosti

$$\sin^{-2}\frac{\alpha}{2}+\sin^{-2}\frac{\beta}{2}+\sin^{-2}\frac{\gamma}{2}\geqq$$

$$\geqq 3\sqrt[3]{\sin^{-2}\frac{\alpha}{2}\sin^{-2}\frac{\beta}{2}\sin^{-2}\frac{\gamma}{2}}\geqq 3\sqrt[3]{64}=12.$$

Znaménko rovnosti platí právě tehdy, když $\alpha=\beta=\gamma$. Důkaz věty je proveden.

1. pomocná věta. *Jestliže α, β, γ jsou velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku, potom*

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=1.$$

Důkaz. Podle **VIII.c** platí

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

a další dva analogické vztahy dostaneme cyklickou záměnou. Dosadíme-li tyto vztahy do daného výrazu na levé straně dokazované rovnosti, snadno tuto rovnost odvodíme.

Větu použijeme při důkazu další nerovnosti.

16. O úhlech každého trojúhelníku platí

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\geqq\sqrt{3}.$$

Rovnost platí právě tehdy, když $\alpha=\beta=\gamma$. Dokažte.

Důkaz. Vyjdeme ze samozřejmě správné nerovnosti

$$\frac{1}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}-\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)^2\geqq 0,$$

v níž rovnost platí právě tehdy, když $\alpha=\beta=\gamma$. K této nerovnosti připišme identitu z 1. pomocné věty, znásobenou třemi:

$$3\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)=3.$$

Sečtením obou posledních vztahů dostaneme

$$\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right)^2\geqq 3,$$

a to je už v podstatě vztah, který jsme měli dokázat.

17. O úhlech každého trojúhelníku platí

$$\cos^{-2}\frac{\alpha}{2}+\cos^{-2}\frac{\beta}{2}+\cos^{-2}\frac{\gamma}{2}\geqq 4,$$

přičemž rovnost platí právě tehdy, když trojúhelník je rovnostranný. Dokažte.

Důkaz. Víme, že

$$\cos^{-2}\frac{\alpha}{2}=1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}.$$

Cyklickou záměnou obdržíme analogické vzorce pro $\cos^{-2}\frac{\beta}{2}$ a $\cos^{-2}\frac{\gamma}{2}$. Pro stručnost označme levou stranu dokazované nerovnosti písmenem V. Potom po dosazení je

$$V=3+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{\beta}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{\gamma}{2}=$$

$$=3+\frac{1}{2}\left[\left(\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{\beta}{2}\right)+\left(\mathrm{tg}^2\frac{\beta}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{\gamma}{2}\right)+\left(\mathrm{tg}^2\frac{\gamma}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)\right].$$

Podle vztahu **A.1** je

$$\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{\beta}{2}\geqq 2\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\frac{\beta}{2},$$

kde znaménko rovnosti platí právě tehdy, když $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}$, tj. právě tehdy, když $\alpha=\beta$. Podobně

$$\mathrm{tg}^2\frac{\beta}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{\gamma}{2}\geqq 2\,\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}\,\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2},$$

kde rovnost platí právě tehdy, když $\beta=\gamma$,

$$\mathrm{tg}^2\frac{\gamma}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}\geqq 2\,\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2},$$

kde rovnost platí právě tehdy, když $\gamma=\alpha$. Použijeme-li těchto tří nerovností pro úpravu výrazu V, dostaneme

$$V \geqq 3 + \left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right) = 4.$$

To jsme na výraz v okrouhlé závorce použili výsledek 1. pomocné věty. Ve výsledné nerovnosti platí rovnost právě tehdy, když $\alpha = \beta = \gamma$, tj. právě tehdy, když trojúhelník je rovnostranný. Tím je také důkaz skončen.

18. O úhlech trojúhelníku platí

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} \geqq \frac{1}{3},$$

přičemž rovnost platí právě tehdy, když je trojúhelník rovnostranný. Dokažte.

Důkaz. Levou stranu nerovnosti označíme pro stručnost písmenem M. Použijeme vzorec **VIII.c**

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

a analogické vzorce pro $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$, které dostaneme cyklickou záměnou. Potom

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2} = \frac{(s-b)(s-c)(s-c)(s-a)}{s(s-a)s(s-b)} =$$

$$= \left(\frac{s-c}{s}\right)^2 = \left(1 - \frac{c}{s}\right)^2.$$

Obdobné vzorce pro druhé dva součiny dostaneme cyklickou záměnou. Nyní můžeme psát, čemu se rovná výraz M:

$$M = 3 + \frac{a^2+b^2+c^2}{s^2} - \frac{2(a+b+c)}{s} =$$

$$= 3 + \frac{a^2+b^2+c^2}{s^2} - 4 = \frac{a^2+b^2+c^2}{s^2} - 1,$$

$$M + 1 = \frac{4(a^2+b^2+c^2)}{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)}. \qquad \text{(a)}$$

Podle nerovnosti **E** je

$$a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) \leqq 3(a^2+b^2+c^2), \qquad \text{(b)}$$

kde rovnost platí právě tehdy, když $a=b=c$. Ze vztahů (a), (b) dostaneme

$$M + 1 \geqq \frac{4}{3}$$

a odtud

$$M \geqq \frac{1}{3},$$

čímž jsme s důkazem hotovi. Ještě je potřebí připomenout, že rovnost platí právě tehdy, když $a=b=c$, tj. pro rovnostranný trojúhelník.

19. V každém trojúhelníku platí

$$\frac{\pi}{3} \leqq \frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{a+b+c} < \frac{\pi}{2}.$$

Přitom rovnost vlevo platí právě tehdy, když je daný trojúhelník rovnostranný. Dokažte. (α, β, γ jsou velikosti úhlů v obloukové míře.)

Důkaz. Nejprve dokážeme správnost nerovnosti stojící vlevo. Vyjdeme z nerovnosti, která je takřka na první pohled zřejmá:

$$(a-b)(\alpha-\beta)+(b-c)(\beta-\gamma)+(c-a)(\gamma-\alpha)\geqq 0.$$

(Ověřte si sami, že žádný ze tří součinů není záporný.) Znaménko rovnosti platí, právě když $a=b=c$. Po vynásobení můžeme mnohočlen na levé straně nerovnosti nahradit mnohočlenem ekvivalentním

$$a(3\alpha-\pi)+b(3\beta-\pi)+c(3\gamma-\pi)\geqq 0,$$

a odtud už po kratší úpravě plyne

$$\frac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{a+b+c}\geqq\frac{\pi}{3}, \tag{1}$$

kde rovnost platí právě tehdy, když $a=b=c$. Tím jsme dokázali nerovnost stojící vlevo. Zbývá důkaz druhé nerovnosti.

Z trojúhelníkové nerovnosti

$$b+c>a$$

dostaneme nerovnost s ní ekvivalentní

$$a(b+c-a)>0.$$

Cyklickou záměnou dojdeme k dalším dvěma nerovnostem, a tak posléze dojdeme k nerovnosti

$$\alpha(b+c-a)+\beta(c+a-b)+\gamma(b+a-c)>0.$$

Tento vztah nahradíme vztahem ekvivalentním:

$$a(\pi-2\alpha)+b(\pi-2\beta)+c(\pi-2\gamma)>0.$$

Odtud už snadno dojdeme k výsledku

$$\frac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{a+b+c}<\frac{\pi}{2}, \tag{2}$$

což je druhá část daného vztahu. Spojením (1) a (2) dostaneme vztah, který je uveden v textu úlohy.

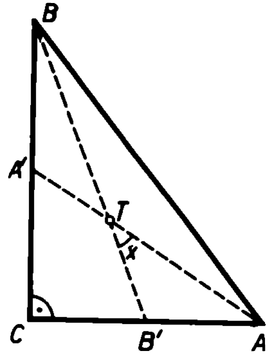
III. kapitola

NEROVNOSTI MEZI STRANAMI, ÚHLY A DALŠÍMI PRVKY TROJÚHELNÍKU EULEROVA NEROVNOST

20. V pravoúhlém trojúhelníku jsou sestrojeny těžnice AA', BB', jejichž koncové body půlí odvěsny. Dokažte, že

$$\frac{1}{2} < \frac{t_a}{t_b} < 2.$$

Důkaz (obr. 3). Úhly $AA'B$ a $TA'B$ jsou tupé, a proto je strana TB v trojúhelníku $TA'B$ nejdelší. Z téhož důvodu je TA nejdelší stranou v trojúhelníku $TB'A$.



Obr. 3

I platí

a) $|BT|>|TA'|$, z čehož postupně dostaneme $\frac{2}{3}t_b>\frac{1}{3}t_a$, $t_a:t_b<2$. Tím je dokázána nerovnost vpravo.

b) $|AT|>|TB'|$ a z toho postupně $\frac{2}{3}t_a>\frac{1}{3}t_b$ a $t_a:t_b>\frac{1}{2}$, čímž je dokázána nerovnost vlevo. Spojením obou částečných výsledků obdržíme vztahy uvedené v textu úlohy.

21. V pravoúhlém trojúhelníku jsou sestrojeny těžnice AA', BB', jejichž koncové body A', B' půlí odvěsny. Dokažte, že pro ostrý úhel x, který tyto dvě těžnice svírají, platí

$$\cos x \geqq \frac{4}{5}.$$

Rovnost platí právě tehdy, kdy je trojúhelník rovnoramenný.

Důkaz (viz obr. 3). Použijeme vzorec **IV.a** a Pythagorovu větu:

$$|AA'|^2=t_a^2=\frac{1}{2}(c^2+b^2)-\frac{1}{4}a^2=\frac{1}{4}(c^2+3b^2).$$

Analogicky

$$t_b^2=\frac{1}{4}(c^2+3a^2).$$

Dále víme, že $|TA|=\frac{2}{3}t_a$, $|TB'|=\frac{1}{3}t_b$. A nyní na trojúhelník TAB' použijeme kosinovou větu:

$$|AB'|^2=|TA|^2+|TB'|^2-2\cdot|TA|\cdot|TB'|\cos x. \quad (1)$$

Dosadíme-li do této rovnice z předešlých vzorců $\left(|AB'| = \frac{1}{2} b\right)$, dojdeme po úpravě k rovnici

$$\cos x = 2c^2 : \sqrt{4c^4 + 9a^2b^2}.$$

Avšak podle **A.1** platí

$$ab \leqq \frac{1}{2}(a^2 + b^2) = \frac{1}{2} c^2,$$

s rovností právě tehdy, když $a = b$. Odtud

$$9a^2b^2 \leqq \frac{9}{4} c^4$$

a potom

$$\cos x \geqq \frac{2c^2}{\sqrt{4c^4 + \frac{9}{4} c^4}} = \frac{4}{5}.$$

Tím je vyslovená věta dokázána. Nutno ještě dodat, že rovnost platí právě tehdy, když $a = b$, tj., právě tehdy, když daný pravoúhlý trojúhelník je zároveň rovnoramenný.

Poznámka. Pro $\cos x_0 = \frac{4}{5} = 0{,}8$ je $x_0 \doteq 36°52'12''$, což je (nikoliv absolutně přesně) největší možná hodnota úhlu x.

22. Dokažte, že o prvcích trojúhelníku platí

$$6sr \leqq at_a + bt_b + ct_c \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}(a^2 + b^2 + c^2),$$

kde rovnosti platí právě tehdy, když trojúhelník je rovnostranný.

Důkaz. Jistě platí

$$v_a \leqq t_a, \quad v_b \leqq t_b, \quad v_c \leqq t_c,$$

kde ve všech nerovnostech zároveň platí rovnost právě tehdy, když $a = b = c$. Z napsaných tří nerovností plyne

$$6sr = 6S = av_a + bv_b + cv_c \leqq at_a + bt_b + ct_c,$$

přičemž rovnost platí právě tehdy, když jde o rovnostranný trojúhelník. Tím jsme dokázali první nerovnost.

K důkazu druhé nerovnosti použijeme Cauchyho nerovnost **G**, v níž položíme

$$x_1 = a, \quad x_2 = b, \quad x_3 = c;$$
$$y_1 = t_a, \quad y_2 = t_b, \quad y_3 = t_c.$$

Tím dojdeme k nerovnosti

$$at_a + bt_b + ct_c \leqq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{t_a^2 + t_b^2 + t_c^2}.$$

Rovnost platí právě tehdy, když existuje takové kladné číslo k, že $t_a = ka$, $t_b = kb$, $t_c = kc$. Avšak podle vzorce **IV.b** je

$$t_a^2 + t_b^2 + t_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2), \tag{a}$$

a proto po dosazení máme

$$at_a + bt_b + ct_c \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Rovnost platí právě tehdy, když existuje $k > 0$, že

$$t_a = ka, \quad t_b = kb, \quad t_c = kc.$$

Dosazením těchto hodnot do (a) vyjde $k^2 = \frac{3}{4}$. Tudíž rovnost nastane právě jen při $t_a = \frac{\sqrt{3}}{2} a$, $t_b = \frac{\sqrt{3}}{2} b$, $t_c = \frac{\sqrt{3}}{2} c$. Dosazením těchto hodnot do prvních dvou vzorců **IV.a** obdržíme po kratší úpravě

$$a^2 = \frac{1}{2}(b^2 + c^2), \quad b^2 = \frac{1}{2}(c^2 + a^2).$$

Obě tyto rovnosti odečteme a po kratší úpravě máme

$$a^2 - b^2 = 0, \quad \text{tedy} \quad a = b.$$

Analogicky dostaneme $b = c$ a odtud už vyplývá, že rovnost i v druhém případě platí právě tehdy, když jde o rovnostranný trojúhelník. Tím je také důkaz dokončen.

2. pomocná věta. *O úhlech α, β, γ trojúhelníku platí*

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma.$$

Důkaz. Levou stranu předložené ekvivalence upravme takto:

$$\begin{aligned}
&(\sin 2\alpha + \sin 2\beta) + \sin 2\gamma = \\
&= 2 \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) - \sin(2\alpha + 2\beta) = \\
&= -2 \sin(\alpha + \beta) [\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)] = \\
&= -2 \sin(\alpha + \beta)[-2 \sin\alpha \sin\beta] = \\
&= 4 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma,
\end{aligned}$$

a to jsme měli dokázat.

3. pomocná věta. *O úhlech každého trojúhelníku platí*

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma \leqq \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma,$$

kde rovnost platí právě tehdy, když $\alpha = \beta = \gamma$.

Důkaz. Vyjdeme z nerovnosti dokázané v úloze 8:

$$8 \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2} \leqq 1, \tag{1}$$

kde rovnost platí právě tehdy, když $\alpha = \beta = \gamma$. Obě strany nerovnosti (1) vynásobíme kladným číslem

$$\cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma}{2}$$

a při použití známých goniometrických vzorců dostaneme

$$\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma \leqq \cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma}{2}.$$

Z 2. pomocné věty víme, že

$$4 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma = \sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma,$$

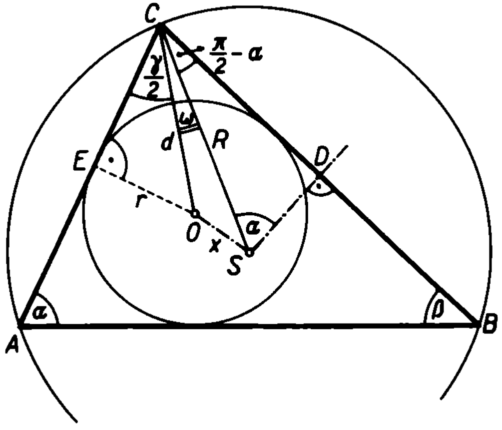
a ze vzorce **X.a**, že

$$4 \cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma}{2} = \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma,$$

a tím jsme v podstatě s důkazem hotovi. Nutno ovšem dodat, že rovnost platí právě tehdy, když $\alpha = \beta = \gamma$.

23. V libovolném trojúhelníku vyjádřete vzdálenost středů vepsané a opsané kružnice pomocí délek jejich poloměrů.

Řešení. a) Předpokládejme nejprve, že jde o ostroúhlý trojúhelník a že $\alpha \geqq \beta$. Kdyby platilo $\beta > \alpha$, zaměnili bychom označení vrcholů A, B, a tím by se změnilo i označení úhlů (obr. 4a). Nejprve zjistíme velikost úhlu OCS. Z vlastnosti středu O kružnice vepsané plyne, že $|\sphericalangle ACO| = \frac{\gamma}{2}$. V pravoúhlém trojúhelníku SCD (D je střed strany BC) platí $|\sphericalangle CSD| = \alpha$ (je to polovina středového úhlu nad stranou BC), a proto $|\sphericalangle SCD| = \frac{\pi}{2} - \alpha$.



Obr. 4a

Tudíž

$$|\sphericalangle OCS| = \omega = \gamma - \frac{\gamma}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

V trojúhelníku OCS je podle toho

$$d = |OC| = r : \sin\frac{\gamma}{2}, \quad |SC| = R,$$

$$|\sphericalangle OCS| = \omega = \frac{\alpha - \beta}{2},$$

a můžeme použít kosinovou větu:

$$x^2 = |OS|^2 = R^2 + d^2 - 2Rd\cos\omega =$$
$$= R^2 + d^2 - 2Rr\cos\omega : \sin\frac{\gamma}{2}.$$

Poměr $\cos\omega : \sin\frac{\gamma}{2}$ vyjádříme pomocí velikostí stran daného trojúhelníku. Protože

$$\cos\omega : \sin\frac{\gamma}{2} = \cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}\right) : \sin\frac{\gamma}{2} =$$

$$= \left(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right) : \sin\frac{\gamma}{2}.$$

Použijeme-li teď vzorce **VIII.a, b**, dojdeme po kratší úpravě k rovnosti

$$\cos\omega : \sin\frac{\gamma}{2} = (a + b) : c.$$

Podle toho

$$x^2 = R^2 + d^2 - \frac{2Rr(a + b)}{c}. \tag{1}$$

Avšak (znovu používáme vzorec **VIII.a**)

$$d^2 = r^2 : \sin^2\frac{\gamma}{2} = r^2 ab : [(s - a)(s - b)] =$$
$$= r^2 abc : [c(s - a)(s - b)].$$

Poněvadž (viz vzorec **II.a** a vzorec **III**)

$$abc = 4RS, \qquad r = S : s,$$

dostáváme

$$\begin{aligned} d^2 &= r \cdot 4RS \cdot r : [c(s-a)(s-b)] = \\ &= r \cdot 4RS \frac{S}{s} : [c(s-a)(s-b)] = \\ &= rS^2 \cdot 4R : [sc(s-a)(s-b)] = \\ &= 4Rr(s-a)(s-b)(s-c) : [c(s-a)(s-b)] = \\ &= 2Rr(a+b-c) : c. \end{aligned}$$

Dosadíme-li takto vypočítanou hodnotu do rovnosti (1), dojdeme po jednoduché úpravě k žádanému výsledku:

$$x^2 = R(R-2r).$$

To je známý Eulerův vzorec.

b) Jestliže trojúhelník je tupoúhlý (obr. 4b), pak

$$|\sphericalangle OCS| = \frac{\gamma}{2} + \left(\frac{\pi}{2} - \pi + \alpha\right) = \frac{\gamma}{2} + \alpha - \frac{\pi}{2} = \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$d = |OC| = r : \sin\frac{\gamma}{2}, \quad |SC| = R,$$

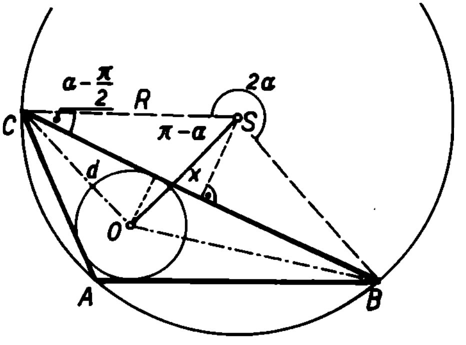
a dál postupujeme jako v případě a). Je přirozené, že i zde dospějeme k Eulerovu vzorci

$$x^2 = R(R-2r).$$

Velikost úsečky x může být rovna nule, a to jedině tehdy, když $O = S$, což nastane právě tehdy, když trojúhelník je rovnostranný. Poněvadž vždy platí $x^2 \geqq 0$, docházíme tak k Eulerově nerovnosti

$$R \geqq 2r,$$

kde rovnost platí právě tehdy, když trojúhelník je rovnostranný.



Obr. 4b

24. Ukažte, že v každém trojúhelníku vzdálenost d jeho ortocentra V od středu S jemu opsané kružnice je dána vzorcem

$$d^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2). \qquad (1)$$

Důkaz. a) Je-li daný trojúhelník pravoúhlý s přeponou c, je

$$a^2 + b^2 = c^2, \quad d = \frac{1}{2}c, \quad R = \frac{1}{2}c$$

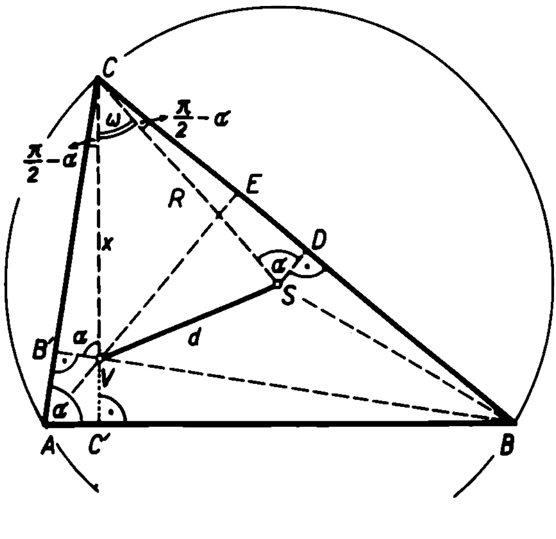
a uvedený vztah platí.

b) Je-li daný trojúhelník rovnostranný, je

$$a = b = c, \quad d = 0, \quad R = \frac{a}{3}\sqrt{3},$$

a náš vzorec opět platí.

c) Předpokládejme, že jde o ostroúhlý trojúhelník ABC, nikoliv však o rovnostranný nebo rovnoramenný (obr. 5a). Bez újmy na obecnosti budeme předpokládat, že $\alpha > \beta$. Kdyby totiž platilo $\beta > \alpha$, pak by stačilo změnit označení vrcholů A, B, a tím by se změnilo i označení úhlů.



Obr. 5a

Nejprve vypočítáme velikost úhlu VCS. Z pravoúhlého trojúhelníku ACC' dostaneme $|\sphericalangle ACC'| = \frac{\pi}{2} - \alpha$. V pravoúhlém trojúhelníku SCD je $|\sphericalangle CSD| = \alpha$, a proto $|\sphericalangle SCD| = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Tudíž

$$|\sphericalangle VCS| = \omega = \gamma - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha + \frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \gamma + 2\alpha - \pi = \alpha - \beta.$$

Dále je nutné vypočítat velikost úsečky $|CV| = x$. Zde platí

$$x = |CE| : \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = |AC| \cos\gamma : \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) =$$

$$= b \cos\gamma : \sin\beta = 2R \cos\gamma.$$

Teď jsme použili vzorec **II.b.** Po této přípravě můžeme přistoupit k vlastnímu výpočtu. Na trojúhelník CVS použijeme kosinovou větu, v níž budeme hned upravovat pravou stranu.

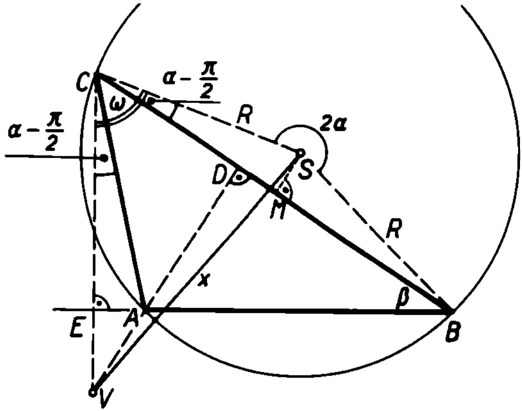
$$\begin{aligned} d^2 &= R^2 + x^2 - 2Rx \cos\omega = \\ &= R^2 + 4R^2 \cos^2\gamma - 4R^2 \cos\gamma \cos\omega = \\ &= R^2 + 4R^2(1 - \sin^2\gamma) - 4R^2 \cos\gamma \cos\omega = \\ &= 5R^2 - 4R^2 [\sin^2\gamma + \cos\gamma \cos(\alpha - \beta)] = \\ &= 5R^2 - 4R^2 [\sin^2\gamma - \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)] = \\ &= 5R^2 - 4R^2 [\sin^2\gamma - \cos^2\alpha \cos^2\beta + \sin^2\alpha \sin^2\beta] = \\ &= 5R^2 - 4R^2 [\sin^2\gamma - 1 + \sin^2\alpha + \sin^2\beta] = \\ &= 9R^2 - 4R^2 [\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma]. \end{aligned}$$

Použijeme-li ještě vzorec **II.b**, dojdeme k žádanému výsledku:

$$d^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2).$$

d) Všimněme si teď případu, kdy trojúhelník ABC je tupoúhlý (nikoliv rovnoramenný), a body S, V leží tedy vně trojúhelníku (obr. 5b). Z obrázku je patrno, že nekonvexní úhel BSC má velikost 2α, z čehož plyne, že

$$|\sphericalangle CSM| = \pi - \alpha, \quad \text{což znamená, že} \quad |\sphericalangle BCS| = \alpha - \frac{\pi}{2}.$$



Obr. 5b

Dále

$$|\sphericalangle VCB| = \frac{\pi}{2} - \beta,$$

a tudíž

$$|\sphericalangle VCS| = \omega = 2\alpha - \pi + \gamma = \alpha - \beta.$$

Ještě potřebujeme velikost úsečky CD.

$$|CD| = |CV| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = |CV| \sin\beta.$$

Avšak $|CD| = b \cos\gamma$, a tak z obou rovností a zároveň s použitím vzorce **II.b**:

$$|CV| = b \cos\gamma : \sin\beta = 2R \cos\gamma.$$

Další postup je týž jako v odst. c). Rozumí se, že dojdeme k témuž výsledku:

$$d^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2).$$

e) Stále jsme se vyhýbali rovnoramennému trojúhelníku. Jestliže trojúhelník je rovnoramenný s osou souměrnosti, která prochází vrcholem C, pak body C, S, V leží v přímce, leží v ose souměrnosti trojúhelníku, a netvoří trojúhelník. Potom velikosti úsečky SV se dá vypočítat z trojúhelníku ASV. To přenechávám čtenářům, jen je potřebí rozlišit případ, kdy trojúhelník je ostroúhlý a kdy tupoúhlý.

Poznámky. 1. Poněvadž $d^2 \geqq 0$, kde rovnost platí právě tehdy, když je trojúhelník rovnostranný (neboť jenom v něm splyne ortocentrum se středem opsané kružnice), můžeme psát

$$9R^2 \geqq a^2 + b^2 + c^2,$$

kde rovnost platí právě tehdy, když trojúhelník je rovnostranný.

2. Velikost úsečky VS jsme mohli vypočítat i pomocí R a α, β, γ. Začátek je stejný jako prve, ale pak je postup poněkud jiný:

$$\begin{aligned} d^2 &= R^2 + x^2 - 2Rx \cos\omega = \\ &= R^2 + 4R^2 \cos^2\gamma - 4R^2 \cos\gamma \cos\omega = \\ &= R^2 + 4R^2 \cos\gamma\,[\cos\gamma - \cos(\alpha - \beta)] = \end{aligned}$$

$$= R^2 + 4R^2 \cos\gamma[-\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)] =$$
$$= R^2 - 8R^2 \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma. \qquad (2)$$

To už je výsledek. Porovnáme-li oba vzorce (1) a (2) pro d^2, dojdeme k zajímavé identitě platící o úhlech trojúhelníku:

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2(1 + \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma).$$

(To jsme v prvním vzorci položili $a = 2R \sin\alpha$, $b = 2R \sin\beta$, $c = 2R \sin\gamma$.)

A ještě jedné věci si všimněme. Poněvadž $d^2 \geqq 0$, kde rovnost platí, právě když je trojúhelník rovnostranný, dostáváme

$$R^2 - 8R^2 \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma \geqq 0,$$

což je ekvivalentní s nerovností

$$\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma \leqq \frac{1}{8},$$

kde znaménko rovnosti platí právě tehdy, když $\alpha = \beta = \gamma$. Tak jsme jinou cestou dospěli k výsledku úlohy 10.

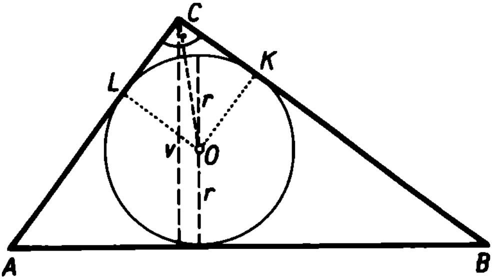
25. V pravoúhlém trojúhelníku ABC označme v velikost výšky kolmé na přeponu. Pak platí

$$0{,}4 < \frac{r}{v} < 0{,}5.$$

Dokažte.

Důkaz (obr. 6). Jestliže kružnice vepsaná pravoúhlému trojúhelníku ABC se odvěsen BC, AC dotýká po řadě v bodech K, L a jestliže střed této kružnice označíme O, pak čtyřúhelník $OKCL$ je čtverec. V něm $|OC| = r\sqrt{2}$. I platí

$$v \leqq r + |OC| = r(1 + \sqrt{2}).$$



Obr. 6

Rovnost platí právě tehdy, když daný trojúhelník je rovnoramenný ($|AC| = |BC|$). Z toho máme první nerovnost

$$\frac{r}{v} \geqq \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1 \doteq 0{,}414 > 0{,}4. \qquad (1)$$

Nyní ukážeme, že výška trojúhelníku (nejen pravoúhlého) je vždy větší než průměr vepsané kružnice. Východiskem bude trojúhelníková nerovnost:

$$a + b > c,$$
$$a + b + c > 2c,$$
$$2s > 2c,$$
$$\frac{2}{c} > \frac{2}{s},$$

$$\frac{2S}{c} > \frac{2S}{s}.$$

Na levou stranu nerovnosti použijeme vztah **I** a na pravou vztah **III**. Dostaneme tak

$$v_c > 2r \quad \text{čili} \quad r : v < 0{,}5,$$

čímž je dokázána i druhá nerovnost.

26. Dokažte, že v trojúhelníku platí

$$v_a + v_b + v_c \geqq 9r,$$

kde rovnost platí právě tehdy, když je trojúhelník rovnostranný.

Důkaz. Podle vzorce **VII** je

$$\frac{1}{v_a} + \frac{1}{v_b} + \frac{1}{v_c} = \frac{1}{r}. \tag{1}$$

Podle **C.2** platí

$$(v_a + v_b + v_c)\left(\frac{1}{v_a} + \frac{1}{v_b} + \frac{1}{v_c}\right) \geqq 9. \tag{2}$$

Rovnost tu platí právě tehdy, když $v_a = v_b = v_c$, což nastane právě tehdy, je-li trojúhelník rovnostranný. O tom se přesvědčíme následujícím způsobem: Poněvadž

$$v_a = \frac{2S}{a}, \quad v_b = \frac{2S}{b}, \quad v_c = \frac{2S}{c},$$

plyne odtud, že rovnost $v_a = v_b = v_c$ je ekvivalentní s rovností $a = b = c$.

Spojením vztahů (1), (2) docházíme k výsledku

$$v_a + v_b + v_c \geqq 9r.$$

Rovnost platí právě tehdy, když jde o rovnostranný trojúhelník.

27. Dokažte, že o prvcích trojúhelníku platí

$$\frac{a^2}{v_b^2 + v_c^2} + \frac{b^2}{v_c^2 + v_a^2} + \frac{c^2}{v_a^2 + v_b^2} \geqq 2.$$

Rovnost nastane právě tehdy, když trojúhelník je rovnostranný.

Důkaz. Pro stručnost označme levou stranu dané nerovnosti písmenem M. A nyní zaveďme

$$N = \frac{v_b^2 + v_c^2}{a^2} + \frac{v_c^2 + v_a^2}{b^2} + \frac{v_a^2 + v_b^2}{c^2}.$$

Jeho souvislost s výrazem M je evidentní. Užitím vzorců I upravíme výraz N a po kratší úpravě dostaneme

$$N = 8S^2(a^2 + b^2 + c^2) : (a^2b^2c^2). \tag{1}$$

Avšak v poznámce 1 úlohy 24 jsme ukázali, že platí

$$a^2 + b^2 + c^2 \leqq 9R^2, \tag{2}$$

s rovností právě tehdy, když trojúhelník je rovnostranný. Ze vztahů (1) a (2) dostaneme

$$N \leqq 72R^2S^2 : (a^2b^2c^2).$$

Nyní použijeme vzorec **II.a**:

$$RS=\frac{1}{4}abc, \quad \text{tj.} \quad 72R^2S^2=\frac{9}{2}a^2b^2c^2,$$

a tudíž

$$N \leqq \frac{9}{2}; \tag{3}$$

přitom rovnost platí právě tehdy, když trojúhelník je rovnostranný.

Z nerovnosti (3) dostaneme nerovnost s ní ekvivalentní

$$MN \leqq \frac{9}{2}M.$$

Jestliže si uvědomíme, co představují výrazy M, N, poznáme, že se tu nabízí aplikovat nerovnost **C.2.** Podle ní je totiž $MN \geqq 9$, kde rovnost platí právě tehdy, když jednotliví sčítanci mnohočlenu M (a tedy i všichni sčítanci mnohočlenu N) si jsou rovni. To však vede na rovnostranný trojúhelník, jak vyplývá z následujícího výpočtu:

$$\frac{a^2}{v_b^2+v_c^2}=\frac{b^2}{v_c^2+v_a^2},$$

zbavíme se zlomků, a poněvadž $av_a=bv_b=2S$, dojdeme k rovnici

$$a^2v_c^2=b^2v_c^2,$$

a z ní už plyne $a=b$. Podobně bychom dostali $b=c$, a tím je tvrzení dokázáno.

Na základě dosavadních výsledků můžeme napsat následující řetěz nerovností:

$$9 \leqq MN \leqq \frac{9}{2} M,$$

takže

$$M \geqq 2,$$

kde rovnost nastane právě tehdy, když je trojúhelník rovnostranný. Při známém významu M máme předloženou nerovnost dokázanou.

28. O prvcích v trojúhelníku platí

$$9r \leqq t_a + t_b + t_c \leqq \frac{9}{2} R;$$

rovnost na obou stranách platí právě tehdy, když jde o rovnostranný trojúhelník. Dokažte.

Důkaz. Je okamžitě patrno, že

$$t_a \geqq v_a, \quad t_b \geqq v_b, \quad t_c \geqq v_c,$$

přičemž rovnosti ve všech třech vztazích platí zároveň právě tehdy, když je trojúhelník rovnostranný. Sečtením všech tří vztahů přicházíme k nerovnosti

$$t_a + t_b + t_c \geqq v_a + v_b + v_c \geqq 9r,$$

jak vyplývá z úlohy 26. Tím je dokázána první nerovnost. Důkaz druhé nerovnosti začneme nám známým vztahem (viz poznámka 1 úlohy 24)

$$9R^2 \geqq a^2 + b^2 + c^2, \tag{1}$$

kde rovnost platí právě tehdy, když jde o rovnostranný trojúhelník. Podle vzorce **IV.b** je

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{4}{3}(t_a^2 + t_b^2 + t_c^2). \qquad (2)$$

Vztahy (1), (2) nás přivádějí k nerovnosti

$$\frac{27}{4}R^2 \geqq t_a^2 + t_b^2 + t_c^2,$$

kde rovnost platí právě tehdy, když trojúhelník je rovnostranný. Nyní použijeme nerovnost **E**:

$$t_a + t_b + t_c \leqq \sqrt{3(t_a^2 + t_b^2 + t_c^2)}.$$

Použijeme-li znovu vzorec **IV.b**, dojdeme k žádanému vztahu:

$$t_a + t_b + t_c \leqq \frac{9}{2}R,$$

kde rovnost platí právě tehdy, když je daný trojúhelník rovnostranný, neboť za této podmínky platila rovnost v předcházející nerovnosti.

29. Dokažte, že v rovnoramenném trojúhelníku ABC ($AC = BC$) platí

$$\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{c}{w_a} < \frac{3}{2}.$$

Důkaz (obr. 7). Především si uvědomme, že o vnitřním úhlu α při základně platí

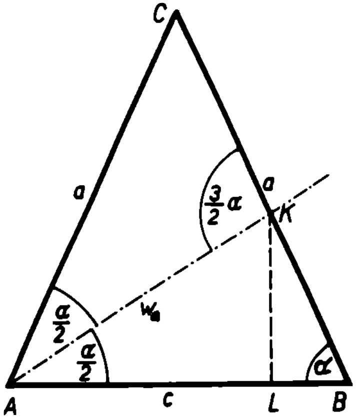
$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \quad \text{a tedy též} \quad 0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{4}$$

a potom

$$1 > \cos\frac{\alpha}{2} > \frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

Osa úhlu CAB protne stranu BC v bodě K. Patu kolmice spuštěné z bodu K na základnu AB označme L. Pro stručnost zaveďme ještě toto označení:

$$|AK| = w_a, \quad |AL| = c'.$$



Obr. 7

Ihned je patrno, že

$$c : w_a > c' : w_a = \cos\frac{\alpha}{2} > \frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

Tím jsme dokázali levou část vztahu. Abychom dokázali i druhou nerovnost, použijeme sinovou větu na trojúhelník *ABK*:

$$c : w_a = \sin\frac{3\alpha}{2} : \sin\alpha = \left(4\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1\right) : \left(2\cos\frac{\alpha}{2}\right). \quad (1)$$

Napišme nyní dvě nerovnosti, které s ohledem na to, že $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, jsou jistě pravdivé:

$$4\cos\frac{\alpha}{2} + 1 > 0, \quad 1 - \cos\frac{\alpha}{2} > 0.$$

Součin levých stran je kladné číslo:

$$1 + 3\cos\frac{\alpha}{2} - 4\cos^2\frac{\alpha}{2} > 0.$$

Tuto nerovnost nahradíme nerovností ekvivalentní

$$3\cos\frac{\alpha}{2} > 4\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$$

a dále

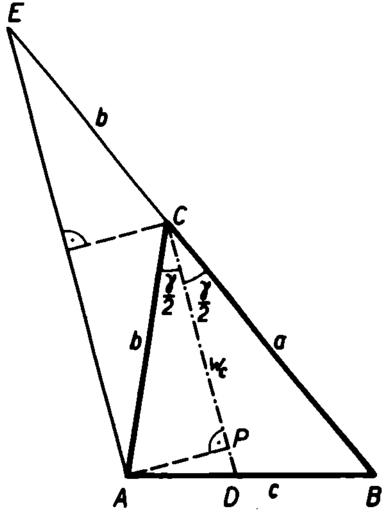
$$\frac{3}{2} > \frac{4\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1}{2\cos\frac{\alpha}{2}} = c : w_a,$$

jak plyne z (1). Tím jsme s důkazem hotovi.

4. pomocná věta. *Délka osy vnitřního úhlu ACB v trojúhelníku ABC je dána vzorcem*

$$w_c = 2ab\cos\frac{\gamma}{2} : (a + b).$$

Důkaz (obr. 8). V trojúhelníku ABC je přímka CD osou vnitřního úhlu ACB. Její délka je $w_c = |CD|$. Vrcholem A veďme přímku rovnoběžnou s CD a její průsečík s přímkou BC označme E. Kromě toho z vrcholu A spusťme kolmici na CD a její patu označme P. Pak ještě



Obr. 8

spusťme z vrcholu C kolmici na přímku AE. Z podobnosti trojúhelníků $\triangle CDB \sim \triangle EAB$ plyne

$$|CD| : |CB| = |EA| : |EB|,$$

jinak psáno

$$w_c : a = |EA| : (a + b).$$

Avšak

$$|EA| = 2|CP| = 2|AC| \cos\frac{\gamma}{2} = 2b \cos\frac{\gamma}{2}.$$

Dosadíme-li tuto hodnotu do předešlé úměry, dostaneme

$$w_c : a = 2b \cos\frac{\gamma}{2} : (a + b),$$

což jsme měli dokázat.

Poznámka. Z dosaženého výsledku můžeme odvodit větu: Nutná a postačující podmínka pro to, aby velikost úhlu ACB byla $\frac{2}{3}\pi$, je

$$\frac{1}{w_c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

30. Dokažte, že v trojúhelníku platí

$$\frac{a^2 + b^2}{w_c^2} + \frac{b^2 + c^2}{w_a^2} + \frac{c^2 + a^2}{w_b^2} \geqq 8,$$

kde rovnost nastane právě tehdy, když trojúhelník je rovnostranný.

Důkaz. Ve 4. pomocné větě jsme ukázali, že

$$w_c = 2ab \cos\frac{\gamma}{2} : (a + b),$$

z čehož dostaneme

$$\cos\frac{\gamma}{2} = w_c(a + b) : (2ab).$$

Tento vzorec budeme upravovat a přitom použijeme nerovnosti **C.1**:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqq\frac{4}{a+b},$$

v níž rovnost platí, právě když $a=b$. Píšeme tedy

$$\cos\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{2}\,w_c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geqq w_c\,\frac{2}{a+b},$$

takže

$$\cos^{-2}\frac{\gamma}{2}\leqq\frac{(a+b)^2}{4w_c^2}\leqq\frac{a^2+b^2}{2w_c^2},$$

kde rovnost platí právě tehdy, když $a=b$. Analogické nerovnosti platí i pro $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\beta}{2}$. Nyní už můžeme psát (viz úlohu 17)

$$4\leqq\cos^{-2}\frac{\alpha}{2}+\cos^{-2}\frac{\beta}{2}+\cos^{-2}\frac{\gamma}{2}\leqq$$

$$\leqq\frac{1}{2}\left(\frac{b^2+c^2}{w_a^2}+\frac{c^2+a^2}{w_b^2}+\frac{a^2+b^2}{w_c^2}\right),$$

kde rovnost platí právě tehdy, když $a=b=c$.

31. Dokažte, že v každém trojúhelníku platí

$$(a+b+c)\sqrt{3}\geqq2(w_a+w_b+w_c),$$

kde rovnost platí právě tehdy, když jde o rovnostranný trojúhelník.

Důkaz. Vzorec pro w_c ze 4. pomocné věty upravíme pro náš účel. Při tom použijeme vzorec **VIII.b:**

$$w_c = 2ab \cos\frac{\gamma}{2} : (a+b) = 2ab \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}} : (a+b) =$$

$$= \frac{2}{a+b} \sqrt{abs(s-c)}.$$

Podle **A.2**

$$w_c \leqq \frac{2}{2\sqrt{ab}} \sqrt{abs(s-c)} = \sqrt{s(s-c)},$$

kde rovnost nastane jen pro $a = b$. Odtud opět podle **A.2**

$$\frac{w_c}{\sqrt{3}} \leqq \sqrt{\frac{1}{3} s(s-c)} \leqq \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3} s + (s-c)\right] = \frac{1}{6}(2a + 2b - c)$$

s rovností ve druhé nerovnosti právě tehdy, když $\frac{1}{3} s = s - c$, tj. právě tehdy, jestliže $2c = a + b$. Rovnost v obou nerovnostech současně tudíž nastane právě tehdy, když $a = b = c$.

Z toho a ze vztahů získaných cyklickou záměnou vychází

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(w_a + w_b + w_c) \leqq \frac{1}{6}(3a + 3b + 3c) = \frac{1}{2}(a + b + c).$$

Odtud už výsledek

$$(a + b + c)\sqrt{3} \geqq 2(w_a + w_b + w_c),$$

kde rovnost platí právě tehdy, když je trojúhelník rovnostranný. Tím je také důkaz proveden.

32. O délkách os vnitřních úhlů trojúhelníka platí

$$3S\sqrt{3} \leqq w_a^2 + w_b^2 + w_c^2 \leqq s^2,$$

kde znaménko rovnosti v obou nerovnostech má platnost právě tehdy, když trojúhelník je rovnostranný. Dokažte.

Důkaz. Ve 4. pomocné větě jsme odvodili vzorec

$$w_c = 2ab \cos \frac{\gamma}{2} : (a + b),$$

odtud

$$w_c^2 = 4a^2b^2 \cos^2 \frac{\gamma}{2} : (a + b)^2.$$

Použijeme-li nyní vzorec **VIII.b,** dostaneme rovnost s touto ekvivalentní a tu hned upravujeme:

$$w_c^2 = \frac{4a^2b^2}{(a+b)^2} \frac{s(s-c)}{ab} = \frac{ab}{(a+b)^2} (a+b+c)(a+b-c) =$$

$$= \frac{ab}{(a+b)^2} [(a+b)^2 - c^2] = ab - \frac{ab}{(a+b)^2} c^2.$$

Analogicky

$$w_a^2 = bc - \frac{bc}{(b+c)^2} a^2, \quad w_b^2 = ac - \frac{ac}{(a+c)^2} b^2.$$

Avšak podle **A.1** platí

$$2ab \leqq a^2 + b^2.$$

Odtud plyne, že

$$4ab \leqq (a+b)^2 \quad \text{a posléze} \quad \frac{ab}{(a+b)^2} \leqq \frac{1}{4},$$

kde rovnost platí právě tehdy, když $a=b$. Analogicky máme

$$\frac{bc}{(b+c)^2} \leqq \frac{1}{4}, \quad \text{rovnost právě tehdy, když } b=c,$$

$$\frac{ca}{(c+a)^2} \leqq \frac{1}{4}, \quad \text{rovnost právě tehdy, když } c=a.$$

Podle toho tedy platí

$$w_a^2 + w_b^2 + w_c^2 \geqq ab + bc + ca - \frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2), \tag{1}$$

přičemž rovnost platí právě tehdy, když $a=b=c$. Z Finslerovy—Hadwigerovy nerovnosti (úloha 7) po úpravě dostaneme

$$\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2) \leqq \frac{1}{2}(ab+bc+ca) - S\sqrt{3}. \tag{2}$$

Vztahy (1) a (2) dají

$$w_a^2 + w_b^2 + w_c^2 \geqq \frac{1}{2}(ab+bc+ca) + S\sqrt{3}. \tag{3}$$

Tento vztah je nutné ještě upravit. Ze vztahu (2) vyplývá

$$2(ab+bc+ca) \geqq a^2+b^2+c^2+4S\sqrt{3}.$$

Avšak podle **D** platí

$$a^2+b^2+c^2 \geqq ab+bc+ca.$$

Rovnost zde platí právě tehdy, když $a=b=c$. Obě posledně napsané nerovnosti vedou k novému vztahu

$$ab + bc + ca \geqq 4S\sqrt{3}.$$

Spojením této nerovnosti s nerovností (3) máme posléze

$$w_a^2 + w_b^2 + w_c^2 \geqq 3S\sqrt{3},$$

čímž jsme s důkazem hotovi. V nerovnosti (1), stejně jako v (2) a v nerovnosti **D,** platí rovnost právě tehdy, když $a = b = c$. Tudíž i výsledná nerovnost platí právě tehdy, když trojúhelník je rovnostranný.

Zbývá dokázat druhou nerovnost. V úloze 31 jsme odvodili vztah

$$w_c \leqq \sqrt{s(s-c)},$$

kde rovnost platí právě tehdy, když $a = b$. Cyklickou záměnou obdržíme vztahy platící pro délky druhých dvou os:

$$w_a \leqq \sqrt{s(s-a)} \quad \text{s rovností, právě když} \quad b = c,$$

$$w_b \leqq \sqrt{s(s-b)} \quad \text{s rovností, právě když} \quad a = c.$$

Odtud už vyplývá

$$w_a^2 + w_b^2 + w_c^2 \leqq s(s - a + s - b + s - c) = s^2.$$

Dodejme, že rovnost nastane právě tehdy, když $a = b = c$, tj. pro rovnostranný trojúhelník. Tím jsme s důkazem hotovi.

33. Dokažte, že o prvcích každého trojúhelníku platí

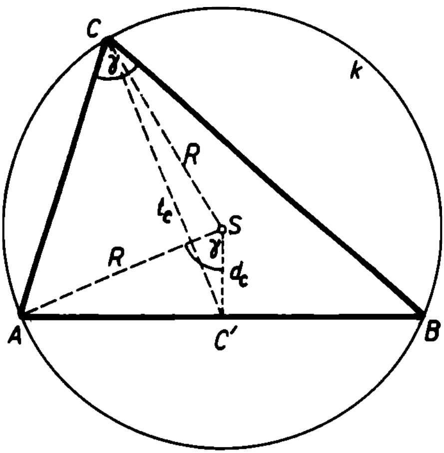
$$at_a + bt_b + ct_c \leqq 3Rs,$$

přičemž rovnost platí právě tehdy, když trojúhelník je rovnostranný.

Důkaz. V obr. 9a, b jsou narýsovány trojúhelníky a jim je opsána kružnice $k = (S; R)$. Označme C' střed strany AB a d_c vzdálenost středu S od strany AB.

a) Předpokládejme nejprve, že trojúhelník je ostroúhlý (obr. 9a). Pokud body C, S, C' leží na jedné přímce, pak $AC = BC$ a trojúhelník je rovnoramenný. Platí potom

$$t_c = R + d_c.$$



Obr. 9a

Jestliže body C, S, C' jsou vrcholy trojúhelníku, je zřejmě

$$t_c < R + d_c.$$

V každém případě tedy je

$$t_c \leqq R + d_c,$$

přičemž rovnost nastane právě tehdy, když trojúhelník ABC je rovnoramenný ($AC = BC$). Cyklickou záměnou dojdeme k analogickým relacím:

$$t_a \leqq R + d_a,$$

kde rovnost platí právě tehdy, když $AB = AC$,

$$t_b \leqq R + d_b,$$

kde rovnost platí právě tehdy, když $BC = BA$. Poslední tři nerovnosti znásobme postupně čísly c, a, b a sečtěme:

$$at_a + bt_b + ct_c \leqq R(a + b + c) + ad_a + bd_b + cd_c.$$

Rovnost platí právě tehdy, když $AC = BA = CB$, tj. právě tehdy, když trojúhelník je rovnostranný.

Z pravoúhlého trojúhelníku SAC' dostaneme (viz vzorce **II.b**)

$$c = 2R \sin\gamma, \quad d_c = R \cos\gamma,$$

a tedy $cd_c = R^2 \sin 2\gamma$. Cyklickou záměnou dostaneme obdobná vyjádření součinů ad_a, bd_b. Po dosazení nabude naše nerovnost tvaru

$$at_a + bt_b + ct_c \leqq 2Rs + R^2 (\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma).$$

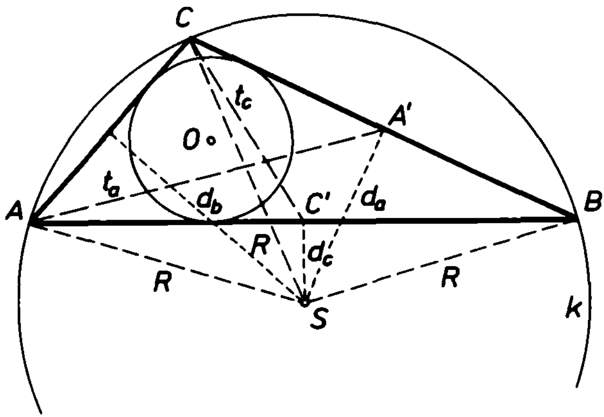
Podle 3. pomocné věty se dá tato nerovnost upravit na tvar

$$at_a + bt_b + ct_c \leqq 2Rs + R^2 (\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) = 3Rs,$$

kde znaménko rovnosti platí právě tehdy, když trojúhelník je rovnostranný.

b) Předpokládejme nyní, že trojúhelník ABC je tupoúhlý, a nechť např. $\gamma > \frac{\pi}{2}$ (obr. 9b). Podobně jako v případě ostroúhlého trojúhelníka, platí i zde

$$t_a \leqq R + d_a, \quad t_b \leqq R + d_b.$$



Obr. 9b

Protože však nyní $\cos\gamma < 0$, je odhad $t_c \leqq R + d_c$ příliš hrubý. My však vystačíme s nerovností

$$t_c < R$$

(v trojúhelníku $SC'C$ proti většímu úhlu leží větší strana).

Máme tedy nerovnost

$$at_a + bt_b + ct_c \leqq 2Rs + ad_a + bd_b = 2Rs + 2rs + cd_c,$$

neboť

$$ad_a = 2S_{BSC} \quad \text{a} \quad bd_b = 2S_{ASC},$$

takže podle **III** je

$$ad_a + bd_b = 2S_{ABC} + 2S_{ASB} = 2S + cd_c = 2rs + cd_c.$$

Nyní zřejmě platí, že $d_c \leqq |SO| - r$, takže podle úlohy 23 a nerovnosti **A.2** máme

$$d_c \leqq \sqrt{R(R-2r)} - r \leqq \frac{1}{2}(R + R - 2r) - r = R - 2r.$$

Protože podle trojúhelníkové nerovnosti je zároveň $c \leqq s$, máme tedy nerovnost

$$\begin{aligned} at_a + bt_b + ct_c &\leqq 2Rs + 2rs + cd_c \leqq \\ &\leqq 2Rs + 2rs + s(R - 2r) = 3Rs. \end{aligned}$$

Vyslovená poučka platí tedy i pro trojúhelník, který je tupoúhlý. Že platí i pro pravoúhlý, dokáže si čtenář sám.

34. Dokažte, že o prvcích trojúhelníku platí

$$\frac{r_a - r}{a} + \frac{r_b - r}{b} + \frac{r_c - r}{c} \geqq \sqrt{3},$$

přičemž rovnost platí právě tehdy, když trojúhelník je rovnostranný.

Důkaz. Podle vzorců **III** platí

$$r_a - r = \frac{S}{s-a} - \frac{S}{s} = \frac{aS}{s(s-a)},$$

a tudíž

$$\frac{r_a - r}{a} = \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s(s-a)} =$$

$$= \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

V posledním kroku jsme použili vzorec **VIII.c.** Cyklickou záměnou odvodíme podobné vzorce:

$$\frac{r_b - r}{b} = \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} \quad \text{a} \quad \frac{r_c - r}{c} = \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}.$$

Z úlohy 16 víme, že

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \geqq \sqrt{3},$$

s rovností právě jen pro rovnostranný trojúhelník. Tuto nerovnost lze nahradit nerovností ekvivalentní

$$\frac{r_a - r}{a} + \frac{r_b - r}{b} + \frac{r_c - r}{c} \geqq \sqrt{3},$$

v níž rovnost platí právě tehdy, když jde o rovnostranný trojúhelník. Tím jsme s důkazem hotovi.

35. Dokažte, že o prvcích trojúhelníku platí

a) $r(r_a + r_b + r_c) \geqq S\sqrt{3}$;

b) $r(4R + r) \geqq S\sqrt{3}$.

Rovnost v obou případech platí právě tehdy, když jde o rovnostranný trojúhelník.

Důkaz. a) V úloze 7 jsme dokázali, že

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqq 4S\sqrt{3} + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2, \tag{1}$$

kde rovnost platí právě tehdy, když trojúhelník je rovnostranný. Po kratší úpravě dostaneme nerovnost ekvivalentní:

$$2(ab + bc + ca) - (a^2 + b^2 + c^2) \geqq 4S\sqrt{3}. \tag{2}$$

A nyní upravujme výraz

$$V = 4r(r_a + r_b + r_c)$$

s použitím vzorců **III** a **I.a**:

$$V = \frac{4S}{s}\left(\frac{S}{s-a} + \frac{S}{s-b} + \frac{S}{s-c}\right) =$$

$$= \frac{4S^2}{s} \cdot \frac{3s^2 - 2s(a+b+c) + (ab + bc + ca)}{(s-a)(s-b)(s-c)} =$$

$$= \frac{4S^2(-s^2 + ab + bc + ca)}{S^2} =$$

$$= 2(ab + bc + ca) - (a^2 + b^2 + c^2).$$

Výsledek našich úprav je levá strana nerovnosti (2), což znamená, že platí

$$r(r_a + r_b + r_c) \geqq S\sqrt{3},$$

kde rovnost platí právě tehdy, když jde o rovnostranný trojúhelník, neboť tento vztah byl odvozen ze vztahu (1), v němž rovnost platí právě za těchto podmínek.

b) Důkaz spočívá v úpravě levé strany právě dokázané nerovnosti. Použijeme k tomu opět vzorce **I.a, II.a, III:**

$$r_a + r_b + r_c = \frac{S}{s-a} + \frac{S}{s-b} + \frac{S}{s-c} =$$

$$= \frac{S[3s^2 - 2s(a+b+c) + ab + bc + ca]}{(s-a)(s-b)(s-c)} =$$

$$= \frac{Ss(ab + bc + ca - s^2)}{S^2} =$$

$$= \frac{s(ab + bc + ca) - s^3}{S} = \frac{s(ab + bc + ca) + s^3 - 2s^3}{S} =$$

$$= \frac{s^3 - s^2(a+b+c) + s(ab + bc + ca) - abc + abc}{S} =$$

$$= \frac{abc}{S} + \frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{sS} = 4R + \frac{S}{s} = 4R + r.$$

Podle toho

$$r(4R + r) \geqq S\sqrt{3},$$

kde rovnost platí právě tehdy, když $a = b = c$, neboť získaná nerovnost je pouze modifikací nerovnosti odst. a).

V některých sbírkách matematických vzorců jsou uváděny i tyto zajímavé vzorce:

5. pomocná věta.

$$r = 4R \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2}, \tag{1}$$

$$r_a = 4R \sin\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma}{2}, \tag{2}$$

vzorce pro r_b, r_c získáme z tohoto vzorce cyklickou záměnou,

$$s = 4R \cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma}{2}, \tag{3}$$

$$s - a = 4R \cos\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2}, \tag{4}$$

vzorce pro $s - b$, $s - c$ získáme opět cyklickou záměnou.

Dokážeme pouze vzorec (1), ostatní se dokazují obdobně. Podle vzorců **I—X** je

$$r = \frac{S}{s} = ab \sin\gamma : (a + b + c) =$$

$$= 4R^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma : [2R (\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)] =$$

$$= 16R \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2} \cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma}{2} :$$

$$: \left[4 \cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma}{2}\right],$$

čímž je důkaz proveden.

36. O prvcích trojúhelníku platí

$$\frac{v_b + v_c}{r_a + v_a} \cdot \frac{v_c + v_a}{r_b + v_b} \cdot \frac{v_a + v_b}{r_c + v_c} \leqq 1,$$

kde rovnost platí právě tehdy, když trojúhelník je rovnostranný. Dokažte.

Důkaz. S použitím vzorců **II, II.b** a známých goniometrických vzorců upravíme nejprve čitatele prvního zlomku:

$$v_b = c \sin\alpha = 2R \sin\gamma \sin\alpha,$$
$$v_c = 2R \sin\alpha \sin\beta,$$
$$v_b + v_c = 2R (\sin\beta + \sin\gamma) \sin\alpha =$$
$$= 2R \sin\alpha \cdot 2 \sin \frac{\beta + \gamma}{2} \cos \frac{\beta - \gamma}{2} =$$
$$= 4R \sin\alpha \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) \cos \frac{\beta - \gamma}{2} =$$
$$= 4R \sin\alpha \cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta - \gamma}{2}.$$

A nyní jmenovatele (používáme 5. pomocnou větu):

$$r_a = 4R \sin\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma}{2},$$

$$v_a = 2R \sin\beta \sin\gamma = 8R \sin\frac{\beta}{2} \cos\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2} \cos\frac{\gamma}{2},$$

$$r_a + v_a = 4R \cos\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma}{2} \left(\sin\frac{\alpha}{2} + 2 \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2}\right) =$$

$$= 4R \cos\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma}{2} \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\beta + \gamma}{2}\right) + 2 \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2}\right] =$$

$$=4R\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\left(\cos\frac{\beta+\gamma}{2}+2\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\right)=$$

$$=4R\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\left(\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}+\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\right)=$$

$$=4R\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}.$$

Po kratší úpravě docházíme k částečnému výsledku

$$\frac{v_b+v_c}{r_a+v_a}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}.$$

Hodnoty dalších dvou obdobných zlomků dostaneme cyklickou záměnou. Součinem všech tří rovností obdržíme na pravé straně po krátké úpravě součin

$$8\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2},$$

který, jak víme z úlohy 8, je menší než 1. Dodejme, že rovnost platí právě tehdy, když $\alpha=\beta=\gamma$.

37. Dokažte, že v trojúhelníku platí

$$(r_b+r_c)(r_c+r_a)(r_a+r_b)\leqq 27R^3,$$

kde rovnost platí právě tehdy, když daný trojúhelník je rovnostranný.

Důkaz. Opět použijeme vzorce z 5. pomocné věty.

$$r_b + r_c = 4R\left(\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\right) =$$

$$= 4R\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2} = 4R\cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

Cyklickou záměnou dostaneme obdobné vyjádření pro $(r_c + r_a)$ a pro $(r_a + r_b)$. Můžeme proto psát

$$(r_b + r_c)(r_c + r_a)(r_a + r_b) = 64R^3\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2}.$$

Použijeme-li však nerovnosti

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} \leqq \frac{3}{8}\sqrt{3},$$

která se vyskytuje v řešení úlohy 14 a kde rovnost platí právě tehdy, když $\alpha = \beta = \gamma$, dostaneme

$$(r_b + r_c)(r_c + r_a)(r_a + r_b) \leqq 27R^3,$$

kde rovnost platí právě jen pro $\alpha = \beta = \gamma$. Tím jsme s důkazem hotovi.

38. V trojúhelníku platí

$$\frac{w_a}{v_a + 2r_a} + \frac{w_b}{v_b + 2r_b} + \frac{w_c}{v_c + 2r_c} \geqq 1;$$

rovnost nastane právě tehdy, když jde o rovnostranný trojúhelník. Dokažte.

Důkaz. Podle 4. pomocné věty platí

$$w_a = 2bc \cos\frac{\alpha}{2} : (b + c).$$

Tento vzorec ještě s použitím **II.b** upravíme pro naše účely. Pišme tedy

$$w_a = 8R^2 \sin\beta \sin\gamma \cos\frac{\alpha}{2} : [2R\,(\sin\beta + \sin\gamma)] =$$

$$= 8R \sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha}{2} : \left[\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\right] \geqq$$

$$\geqq 8R \sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}, \qquad (1)$$

Použili jsme nerovnost

$$0 < \cos\frac{\beta-\gamma}{2} \leqq 1$$

s rovností právě tehdy, když $\beta = \gamma$, tj. pro rovnoramenný trojúhelník, a dále jsme použili rovnost

$$\sin\frac{\beta+\gamma}{2} = \cos\frac{\alpha}{2}.$$

Ještě upravíme jmenovatele:

$$v_a = c \sin\beta = 2R \sin\beta \sin\gamma = 8R \sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2},$$

$$2r_a = 8R \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

Protože

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\cos\frac{\beta+\gamma}{2}=\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}-\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2},$$

je

$$v_a+2r_a=8R\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\left[\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right]=$$

$$=8R\cos^2\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2}. \qquad (2)$$

Podle (1) a (2) můžeme tedy psát

$$\frac{w_a}{v_a+2r_a}\geqq\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}:\left(\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\right)=\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2},$$

kde rovnost platí, právě když $\beta=\gamma$.

Po této přípravě je už vidět, že pro součet uvedený v textu úlohy je

$$\frac{w_a}{v_a+2r_a}+\frac{w_b}{v_b+2r_b}+\frac{w_c}{v_c+2r_c}\geqq$$

$$\geqq\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=1.$$

To jsme teď použili 1. pomocnou větu. Musíme dodat, že rovnost platí právě tehdy, když $\alpha=\beta=\gamma$, tj. pro rovnostranný trojúhelník. Tím jsme také důkaz tvrzení skončili.

6. pomocná věta. *O prvcích trojúhelníku platí*

$$\frac{r_a}{v_a+2r_a}+\frac{r_b}{v_b+2r_b}+\frac{r_c}{v_c+2r_c}=1.$$

Důkaz. Pro stručnost označíme levou stranu identity písmenem L. Podle 5. pomocné věty je

$$r_a = 4R \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

a podle (2) z úlohy 38

$$v_a + 2r_a = 8R\cos^2\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2},$$

takže

$$\frac{r_a}{v_a + 2r_a} = \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} : \left[2\cos^2\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2}\right] =$$

$$= \cos\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}\right) : \left(2\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\right) =$$

$$= \left(\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} - \sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\right) : \left(2\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right).$$

A už můžeme psát

$$\frac{r_a}{v_a + 2r_a} + \frac{r_b}{v_b + 2r_b} + \frac{r_c}{v_c + 2r_c} =$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right).$$

Přihlédneme-li k pomocné větě 1, dostaneme výsledek, který jsme chtěli dokázat.

Tuto pomocnou větu použijeme v další úloze.

39. Dokažte, že o prvcích trojúhelníku platí

$$\left(\frac{r_a}{v_a + 2r_a}\right)^2 + \left(\frac{r_b}{v_b + 2r_b}\right)^2 + \left(\frac{r_c}{v_c + 2r_c}\right)^2 \geqq \frac{1}{3},$$

kde rovnost platí, právě když jde o rovnostranný trojúhelník.

Důkaz. Levou stranu nerovnosti označíme N. Z důkazu 6. pomocné věty už víme, že

$$\left(\frac{r_a}{v_a+2r_a}\right)^2=\frac{1}{4}\left(1-2\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}\right),$$

a podle toho

$$N=\frac{1}{4}\left[3-2\left(\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+\ldots\right)+\left(\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}+\ldots\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{4}\left[1+\left(\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}\right)\right]\geqq$$

$$\geqq\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3},$$

jak plyne z pomocné věty 1 a z výsledku úlohy 18. Odtud také vyplývá, že rovnost nastane jedině tehdy, když jde o rovnostranný trojúhelník.

Poznámky. 1. Při úpravě výrazu N jsme v okrouhlých závorkách použili teček místo vypsání celého mnohočlenu. Čtenáře, který sleduje text s tužkou v ruce, jistě toto zkrácené vyjadřování nezmýlilo.

2. Jen pro zajímavost. Právě dokázaná nerovnost byla zobecněna pro libovolný celý exponent $k>0$ a její formulace je pak tato:

Pro libovolné celé $k>0$ platí mezi prvky trojúhelníku

$$\left(\frac{r_a}{v_a+2r_a}\right)^k+\left(\frac{r_b}{v_b+2r_b}\right)^k+\left(\frac{r_c}{v_c+2r_c}\right)^k\geqq 3^{1-k},$$

kde rovnost platí právě tehdy, jestliže trojúhelník je rovnostranný, anebo pro $k=1$. Rovnost také triviálně platí pro $k=0$.

Porovnejte tento vzorec s naším výpočtem, který jsme provedli pro $k=1$ a $k=2$.

NEROVNOSTI MEZI PRVKY A RŮZNÝMI PŘÍČKAMI TROJÚHELNÍKU

ERDŐSOVA–MORDELLOVA VĚTA SCHREIBEROVA NEROVNOST STEWARTOVA VĚTA

40. Nechť O je libovolný bod uvnitř trojúhelníku ABC. Označme $R_1 = |OA|$, $R_2 = |OB|$, $R_3 = |OC|$, $BC \vdash O = r_1$, $CA \vdash O = r_2$, $AB \vdash O = r_3$. Potom platí

$$R_1 + R_2 + R_3 \geqq 2(r_1 + r_2 + r_3).$$

Rovnost platí právě tehdy, když trojúhelník je rovnostranný a bod O je jeho střed. Dokažte.

Důkaz (obr. 10a). Předpokládejme, že trojúhelník ABC je ostroúhlý. Označme $P(Q)$ patu kolmice spuštěné z bodu O na stranu $AC(AB)$. Potom čtyřúhelník $AQOP$ je tětivový, a lze mu tedy opsat kružnici. Střed této kružnice označíme M, poloměr má velikost $\frac{1}{2} R_1$. Proto (viz vztah **II.b)**)

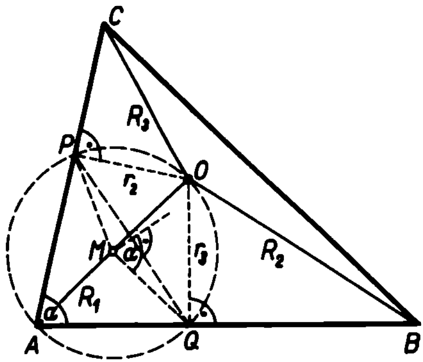
$$|PQ| = R_1 \sin \alpha .$$

Dříve než postoupíme dál, všimněme si vnitřních úhlů čtyřúhelníka $AQOP$. Dva z nich jsou pravé, $|\sphericalangle PAQ| = \alpha$, a proto $|\sphericalangle POQ| = \pi - \alpha = \beta + \gamma$. Proto $\cos |\sphericalangle POQ| = -\cos \alpha$. Kosinová věta použitá na trojúhelník OPQ je

$$|PQ|^2 = r_2^2 + r_3^2 - 2r_2r_3 \cos(\beta + \gamma),$$

takže můžeme psát

$$\begin{aligned}|PQ|^2 = r_2^2(\sin^2\gamma + \cos^2\gamma) + r_3^2(\sin^2\beta + \cos^2\beta)&\\ + 2r_2r_3(\sin\beta\sin\gamma - \cos\beta\cos\gamma) &=\\ = (r_2\sin\gamma + r_3\sin\beta)^2 + (r_2\cos\gamma - r_3\cos\beta)^2&\\ \geqq (r_2\sin\gamma + r_3\sin\beta)^2&.\end{aligned}$$



Obr. 10a

Rovnost platí právě tehdy, když

$$r_2\cos\gamma - r_3\cos\beta = 0, \quad \text{čili} \quad r_2 : r_3 = \cos\beta : \cos\gamma.$$

Přitom si uvědomíme, že $\beta < \frac{\pi}{2}$, $\gamma < \frac{\pi}{2}$, a tudíž $\cos\beta > 0$, $\cos\gamma > 0$.

Můžeme psát

$$|PQ| = R_1 \sin\alpha \geqq r_2 \sin\gamma + r_3 \sin\beta \tag{1}$$

a k tomu připíšeme další dvě nerovnosti, které z nerovnosti (1) dostaneme cyklickou záměnou:

$$R_2 \sin\beta \geqq r_3 \sin\alpha + r_1 \sin\gamma, \tag{2}$$

$$R_3 \sin\gamma \geqq r_1 \sin\beta + r_2 \sin\alpha. \tag{3}$$

Rovnost v druhé (třetí) nerovnosti nastane právě tehdy, když

$$r_3 \cos\alpha = r_1 \cos\gamma, \quad \text{jinak psáno} \quad r_3 : r_1 = \cos\gamma : \cos\alpha,$$
$$(r_1 \cos\gamma = r_2 \cos\alpha, \quad \text{jinak psáno} \quad r_1 : r_2 = \cos\alpha : \cos\beta).$$

Vztahy (1), (2), (3) jsou ekvivalentní se vztahy

$$R_1 \geqq r_2 \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} + r_3 \frac{\sin\beta}{\sin\alpha},$$

$$R_2 \geqq r_3 \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} + r_1 \frac{\sin\gamma}{\sin\beta},$$

$$R_3 \geqq r_1 \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} + r_2 \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}.$$

Jejich sečtením dostaneme jedinou nerovnost

$$R_1 + R_2 + R_3 \geqq r_1 \left(\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} + \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}\right) + r_2 \left(\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\right) +$$

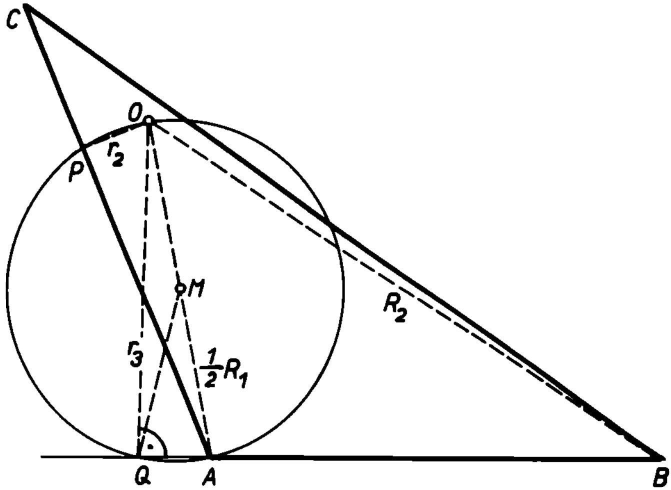
$$+ r_3 \left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} + \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\right) \geqq 2(r_1 + r_2 + r_3).$$

To jsme na dvojčleny v jednotlivých závorkách použili vztah **A.3**, v němž rovnost nastane právě tehdy, když $\sin\alpha = \sin\beta = \sin\gamma$, tj. pro rovnostranný trojúhelník. Z úměr

$$r_2 : r_3 = \cos\beta : \cos\gamma,$$
$$r_3 : r_1 = \cos\gamma : \cos\alpha,$$

které jsme během důkazu použili, pak po dosazení za $\alpha = \beta = \gamma$ vyplývá $r_1 = r_2 = r_3$. To však znamená, že v daném vztahu platí rovnost, právě když trojúhelník ABC je rovnostranný a bod O je jeho střed.

b) Věnujme se ještě případu, kdy $\alpha > \frac{\pi}{2}$. Situace je znázorněna na obr. 10b. Patu kolmice spuštěné z bodu O



Obr. 10b

na stranu AC (AB) označme P (Q). Čtyřúhelníku $OPQA$ lze opsat kružnici, neboť $|\sphericalangle OPA| = |\sphericalangle OQA| = \frac{\pi}{2}$. Jestliže M je střed kružnice opsané tomuto čtyřúhelníku, platí

$$|MO| = |MA| = |MQ| = |MP| = \frac{1}{2} R_1.$$

Dále je

$$|\sphericalangle PAQ| = \pi - \alpha = |\sphericalangle POQ|$$

a z toho vyplývá

$$|\sphericalangle PMQ| = 2(\pi - \alpha).$$

Z rovnoramenného trojúhelníku PMQ máme:

$$\frac{|PQ|}{R_1} = \sin \frac{2(\pi - \alpha)}{2}, \quad \text{tj.} \quad |PQ| = R_1 \sin \alpha.$$

Nyní na trojúhelník OPQ použijeme kosinovou větu:

$$|PQ|^2 = r_2^2 + r_3^2 - 2r_2r_3 \cos |\sphericalangle POQ| = r_2^2 + r_3^2 + 2r_2r_3 \cos \alpha.$$

Další postup je týž jako v případě ostroúhlého trojúhelníku; dojde se ovšem k témuž výsledku.

Poznámka. Tuto úlohu formuloval v r. 1935 P. Erdös a důkaz provedli ještě v témže roce současně Angličan Mordell a Američan D. F. Barow. Důkaz zde uvedený je původní důkaz Mordellův. Větě se říká *Erdösova—Mordellova*.

41. Při stejném označení jako v předešlé 40. úloze platí

$$R_1 + R_2 + R_3 \geqq 6r,$$

kde rovnost nastane, právě když trojúhelník je rovnostranný. Dokažte.

Důkaz (obr. 10a, b). Z obrázků je ihned patrno, že

$$R_1 + r_1 \geqq v_a, \quad R_2 + r_2 \geqq v_b, \quad R_3 + r_3 \geqq v_c.$$

Rovnost v každé nerovnosti nastane právě tehdy, když bod O leží na příslušné výšce trojúhelníku. Tedy rovnost ve všech nerovnostech zároveň platí, právě když bod O splývá s ortocentrem trojúhelníku.

Napsané tři vztahy sečteme:

$$R_1 + R_2 + R_3 + r_1 + r_2 + r_3 \geqq v_a + v_b + v_c \geqq 9r. \qquad \text{(a)}$$

V posledním kroku úprav jsme použili výsledek úlohy 26. Rovnost v nerovnosti (a) platí právě tehdy, když bod O splývá s ortocentrem trojúhelníku. Podle Erdösovy–Mordellovy věty platí

$$\frac{1}{2}(R_1 + R_2 + R_3) \geqq r_1 + r_2 + r_3. \qquad \text{(b)}$$

Znaménko rovnosti platí jedině tehdy, jde-li o rovnostranný trojúhelník a bod O je jeho středem. Sečtením vztahů (a) a (b) dojdeme po kratší úpravě k výsledku

$$R_1 + R_2 + R_3 \geqq 6r,$$

v němž rovnost nastane právě tehdy, když trojúhelník je rovnostranný a bod O je jeho střed.

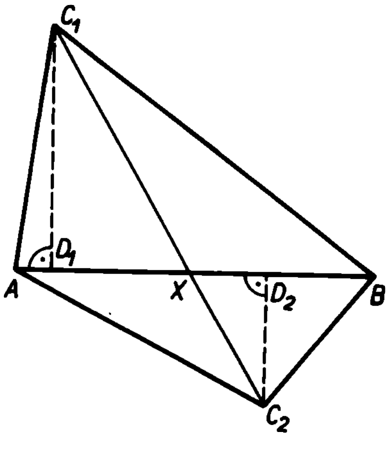
Poznámka. Právě dokázané nerovnosti se říká *Schreiberova nerovnost.*

7. pomocná věta. *Nechť dva trojúhelníky ABC_1, ABC_2 mají společnou stranu AB a nechť přímka C_1C_2 protne přímku AB v bodě X. Potom pro poměr obsahů S_1, S_2 těchto dvou trojúhelníků platí*

$$S_1 : S_2 = |XC_1| : |XC_2|.$$

Důkaz (obr. 11). Sestrojme výšku C_1D_1 v trojúhelníku ABC_1 a výšku C_2D_2 v trojúhelníku ABC_2. Pro obsahy obou trojúhelníků platí

$$S_1 : S_2 = \frac{1}{2}\,|AB|\cdot|C_1D_1| : \left(\frac{1}{2}\,|AB|\cdot|C_2D_2|\right)$$
$$= |C_1D_1| : |C_2D_2|.$$



Obr. 11a

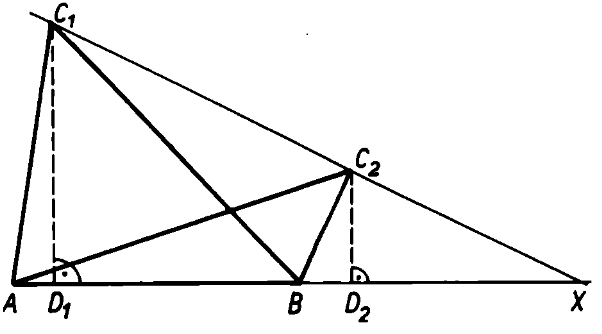
Z podobnosti trojúhelníků XC_1D_1, XC_2D_2 dostáváme

$$|C_1D_1| : |C_2D_2| = |XC_1| : |XC_2|,$$

a tudíž

$$S_1 : S_2 = |XC_1| : |XC_2|,$$

jak jsme měli dokázat.



Obr. 11b

42. Při stejném označení, jaké bylo v úloze 40 a 41, platí

$$R_1R_2R_3 \geqq 8r_1r_2r_3,$$

kde rovnost nastane právě tehdy, když trojúhelník je rovnostranný a O je jeho střed. Dokažte.

Důkaz (obr. 12). Přímka AO (BO; CO) protne stranu BC (CA; AB) v bodě A' (B'; C'). Označme

$$|OA'| = u_1, \quad |OB'| = u_2, \quad |OC'| = u_3.$$

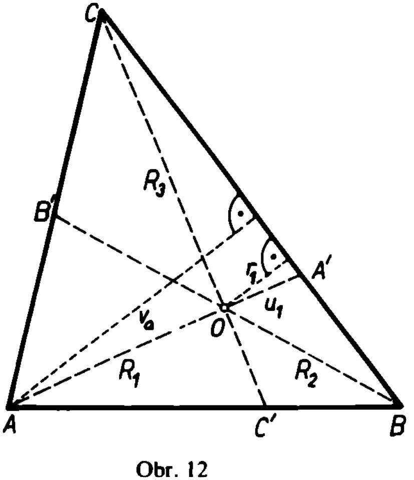
I platí

$$\frac{R_1}{R_1+u_1}=\frac{R_1+u_1-u_1}{R_1+u_1}=1-\frac{u_1}{R_1+u_1},$$

a proto

$$V=\frac{R_1}{R_1+u_1}+\frac{R_2}{R_2+u_2}+\frac{R_3}{R_3+u_3}=$$

$$=3-\left(\frac{u_1}{R_1+u_1}+\frac{u_2}{R_2+u_2}+\frac{u_3}{R_3+u_3}\right).$$



Obr. 12

Označme ještě S obsah trojúhelníku ABC, S_1 obsah trojúhelníku BCO, S_2 obsah trojúhelníku CAO a S_3 obsah trojúhelníku ABO. Podle 7. pomocné věty platí

$$\frac{u_i}{R_i+u_i}=\frac{S_i}{S} \quad \text{pro} \quad i=1,2,3.$$

Po tomto nutném odbočení můžeme pokračovat v úpravě našeho výrazu V:

$$V = 3 - \left(\frac{S_1}{S} + \frac{S_2}{S} + \frac{S_3}{S}\right) = 3 - 1 = 2.$$

Všimněme si, že platí $u_1 \geqq r_1$, kde rovnost platí právě tehdy, když bod O leží na výšce procházející vrcholem A. Potom též

$$R_1 + u_1 \geqq R_1 + r_1, \quad \text{čili} \quad \frac{1}{R_1 + r_1} \geqq \frac{1}{R_1 + u_1}$$

a také

$$\frac{R_1}{R_1 + r_1} \geqq \frac{R_1}{R_1 + u_1}.$$

Znaménko rovnosti platí, právě když bod O leží na výšce z vrcholu A. Cyklickou záměnou dostaneme další dva obdobné vztahy:

$$\frac{R_2}{R_2 + r_2} \geqq \frac{R_2}{R_2 + u_2}, \quad \frac{R_3}{R_3 + r_3} \geqq \frac{R_3}{R_3 + u_3},$$

kde rovnost v každé nerovnosti platí, právě když bod O leží na příslušné výšce. Sečtením všech tří nerovností dostaneme

$$\frac{R_1}{R_1 + r_1} + \frac{R_2}{R_2 + r_2} + \frac{R_3}{R_3 + r_3} \geqq$$

$$\geqq \frac{R_1}{R_1 + u_1} + \frac{R_2}{R_2 + u_2} + \frac{R_3}{R_3 + u_3} = 2. \tag{1}$$

kde rovnost platí právě tehdy, když bod O splývá s ortocentrem trojúhelníku. Protože bod O leží uvnitř trojúhelníku, může rovnost nastat jen pro ostroúhlý trojúhelník. V získané nerovnosti se zbavme zlomků a po kratším výpočtu dojdeme k nerovnosti

$$R_1R_2R_3 \geqq R_1r_2r_3 + R_2r_3r_1 + R_3r_1r_2 + 2r_1r_2r_3$$

a odtud jednoduchou úpravou

$$\frac{R_1R_2R_3}{r_1r_2r_3} \geqq 2 + \left(\frac{R_1}{r_1} + \frac{R_2}{r_2} + \frac{R_3}{r_3}\right) \geqq 2 + 3\sqrt[3]{\frac{R_1R_2R_3}{r_1r_2r_3}}\,, \tag{U}$$

kde jsme použili vztah **B.** Znaménko rovnosti platí, právě když

$$\frac{R_1}{r_1} = \frac{R_2}{r_2} = \frac{R_3}{r_3}\,. \tag{2}$$

Položme

$$\sqrt[3]{\frac{R_1R_2R_3}{r_1r_2r_3}} = X > 0,$$

pak je vztah (U) ekvivalentní s nerovnostmi

$$X^3 - 3X - 2 \geqq 0, \quad \text{jinak} \quad (X+1)^2(X-2) \geqq 0.$$

Odtud tedy dostáváme, že

$$X - 2 \geqq 0, \quad \text{čili} \quad X^3 \geqq 8,$$

jinak

$$\frac{R_1R_2R_3}{r_1r_2r_3} \geqq 8.$$

Znaménko rovnosti platí právě tehdy, když bod O splývá s ortocentrem trojúhelníka. V dalším ukážeme, že to stačí k tomu, aby trojúhelník byl rovnostranný.

Všimněme si obr. 13, v němž je znázorněn ostroúhlý trojúhelník ABC a jeho ortocentrum $V \equiv O$. Označme D (E) patu výšky z vrcholu A (B). Potom

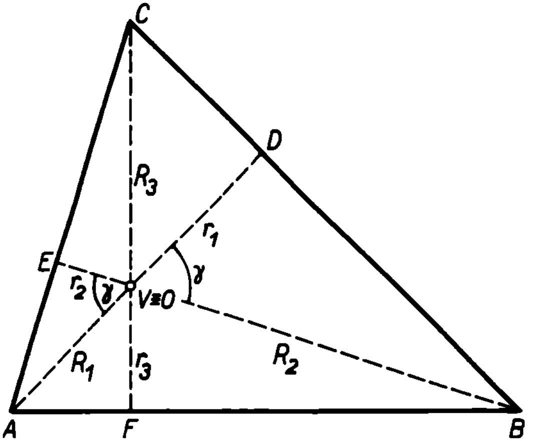
$$\triangle OBD \sim \triangle OAE \quad \text{(podle věty } \mathbf{uu}\text{)}$$

a odtud

$$|OB| : |OD| = |OA| : |OE|,$$

tj.

$$R_2 : r_1 = R_1 : r_2.$$



Obr. 13

Přihlédneme-li k rovnicím (2), dostáváme $r_1 = r_2$ a $R_1 = R_2$. Bod O je tedy středem kružnice vepsané i opsané, a trojúhelník ABC je nutně rovnostranný.

43. Danému trojúhelníku ABC je opsána kružnice k. Osa vnitřního úhlu BAC (CBA ; ACB) protne stranu BC (CA ; AB) v bodě D (E ; F) a kružnici k ještě v bodě D' (E' ; F'). Těžnice jdoucí vrcholem A (B ; C) protne stranu BC (CA ; AB) v bodě K (L ; M) a kružnici k ještě v bodě K' (L' ; M'). Pro stručnost označme

$$w'_a = |AD'|, \quad w'_b = |BE'|, \quad w'_c = |CF'| ;$$
$$t'_a = |AK'|, \quad t'_b = |BL'|, \quad t'_c = |CM'|.$$

Potom platí

$$\sqrt{w_a w'_a} + \sqrt{w_b w'_b} + \sqrt{w_c w'_c} \leqq 2s \leqq \sqrt{t_a t'_a} + \sqrt{t_b t'_b} + \sqrt{t_c t'_c}.$$

Znaménko rovnosti na obou stranách platí právě tehdy, když jde o rovnostranný trojúhelník. Dokažte.

Důkaz (obr. 14). Všimněme si, že

$$\triangle ABD \sim \triangle AD'C,$$

neboť

$$|\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle AD'C| = \beta$$
$$\text{a } |\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle CAD'| = \frac{1}{2}\alpha.$$

Jsou tedy podobné podle věty **uu**. Z této podobnosti dostáváme

$$|AB| : |AD| = |AD'| : |AC|, \quad \text{čili} \quad c : w_a = w'_a : b,$$

z čehož

$$w_a w'_a = bc$$

a cyklicky

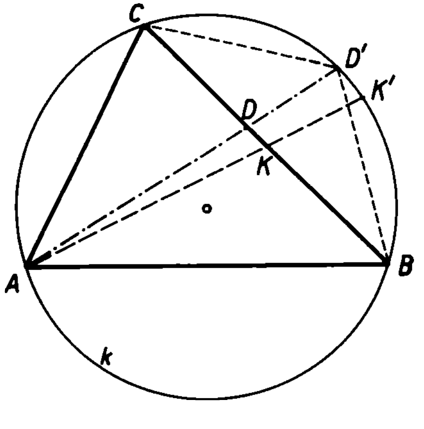
$$w_b w'_b = ca, \quad w_c w'_c = ab.$$

Tudíž

$$\sqrt{w_a w'_a} + \sqrt{w_b w'_b} + \sqrt{w_c w'_c} = \sqrt{bc} + \sqrt{ca} + \sqrt{ab} \leqq$$

$$\leqq \frac{c+a}{2} + \frac{a+b}{2} + \frac{b+c}{2} = 2s.$$

(V posledním kroku úpravy jsme použili vztah **A.2** třikrát.) Rovnost platí, právě když $a = b = c$.



Obr. 14

Tím jsme dokázali nerovnost stojící vlevo. Ještě je potřebí dokázat druhou nerovnost. Víme, že (vzorec **IV.a**)

$$|AK|^2 = t_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2).$$

Nyní vyjádříme mocnost bodu K ke kružnici k:

$$|KA| \cdot |KK'| = |KB| \cdot |KC| = \frac{1}{4} a^2.$$

Můžeme psát:

$$\begin{aligned} t_a t'_a = |AK| \cdot |AK'| &= |AK| \cdot (|AK| + |KK'|) = \\ &= |AK|^2 + |AK| \cdot |KK'| = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2) + \frac{1}{4} a^2 = \frac{1}{2}(b^2 + c^2) \geqq \left(\frac{b+c}{2}\right)^2.$$

Poslední krok úpravy spočíval v použití vzorce **A.1.** Rovnost platí, právě když $b = c$. Máme tedy částečný výsledek

$$\sqrt{t_a t'_a} \geqq \frac{b+c}{2}.$$

Cyklickou záměnou dojdeme k dalším dvěma analogickým nerovnostem

$$t_b t'_b \geqq \frac{c+a}{2}, \quad t_c t'_c \geqq \frac{a+b}{2},$$

přičemž znaménko rovnosti platí právě tehdy, když $a = c$ v první nerovnosti a pro $a = b$ v druhé nerovnosti. Sečtením všech tří nerovností docházíme k výsledku

$$\sqrt{t_a t'_a} + \sqrt{t_b t'_b} + \sqrt{t_c t'_c} \geqq 2s; \tag{b}$$

rovnost nastane právě tehdy, když $a = b = c$. Spojením nerovností (a) a (b) dostaneme žádaný výsledek.

44. Středem O kružnice, která je vepsána trojúhelníku ABC, jsou sestrojeny rovnoběžky se stranami trojúhelníku ABC. Rovnoběžka se stranou AB (BC; AC) protne strany AC, BC (BA, CA; CB, AB) po řadě ve vnitřních bodech K, L (P, Q; N, M). Dokažte, že

$$|KL|^2 + |MN|^2 + |PQ|^2 \geqq 8Rr.$$

Znaménko rovnosti platí právě tehdy, když trojúhelník je rovnostranný. Dokažte.

Důkaz (obr. 15). Sestrojme ještě v trojúhelníku ABC výšku, která prochází vrcholem C. Její patu označme F a její průsečík s přímkou KL označme F_1. Je ihned patrno, že

$$|KL| : |AB| = |CF_1| : |CF|,$$

tj.

$$|KL| : c = (v_c - r) : v_c.$$

Tudíž

$$|KL| = c(v_c - r) : v_c = c\left(1 - \frac{r}{v_c}\right) = c\left(1 - \frac{rc}{2S}\right).$$

Přihlédneme-li ke vztahu **III**, dostaneme

$$|KL| = c\left(1 - \frac{c}{2s}\right) = \frac{c(a+b)}{2s} \geqq \frac{c}{s}\sqrt{ab},$$

kde rovnost platí právě tehdy, když $a = b$.

Podobně platí

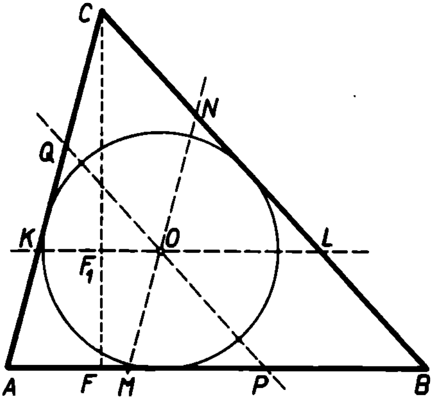
$$|MN| \geqq \frac{b}{s}\sqrt{ac} \quad \text{s rovností jedině, když} \quad a = c,$$

$$PQ \geqq \frac{a}{s}\sqrt{bc} \quad \text{s rovností jedině, když} \quad b = c.$$

Podle toho

$$|KL|^2+|MN|^2+|PQ|^2 \geqq (abc^2+ab^2c+a^2bc):s^2=$$
$$=abc(a+b+c):s^2=2abc:s=8RS:s=8Rr,$$

jak jsme měli dokázat. Dodejme, že rovnost platí právě tehdy, když $a=b=c$. (V posledních krocích důkazu jsme použili vzorce **II.a** a **III.**)



Obr. 15

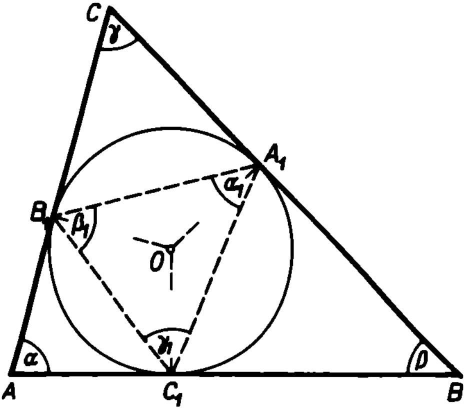
45. Do trojúhelníku je vepsána kružnice, která se stran BC, CA, AB dotýká po řadě v bodech A_1, B_1, C_1. Délky stran trojúhelníku $A_1B_1C_1$ označme a_1, b_1, c_1 ($a_1=|B_1C_1|$ atd.). Dokažte, že

$$\frac{a^2}{a_1^2}+\frac{b^2}{b_1^2}+\frac{c^2}{c_1^2} \geqq 12. \qquad (1)$$

Rovnost platí právě tehdy, když jde o rovnostranný trojúhelník.

Důkaz (obr. 16). Především vypočítáme velikosti úhlů trojúhelníku $A_1B_1C_1$.

$$\alpha_1 = |\sphericalangle B_1A_1C_1| = \frac{1}{2}\,|\sphericalangle B_1OC_1| = \frac{1}{2}(\pi - \alpha).$$



Obr. 16

Analogicky

$$\beta_1 = \frac{1}{2}(\pi - \beta), \quad \gamma_1 = \frac{1}{2}(\pi - \gamma).$$

Na trojúhelník $A_1B_1C_1$ použijeme vzorce **II.b** a dostaneme

$$a_1 = 2r\sin\alpha_1 = 2r\cos\frac{\alpha}{2},$$

$$b_1 = 2r\cos\frac{\beta}{2}, \quad c_1 = 2r\cos\frac{\gamma}{2}.$$

Tyto hodnoty dosadíme do levé strany nerovnosti (1) a hned budeme upravovat s použitím **II.b**:

$$\frac{R^2}{r^2}\left(\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}+\frac{\sin^2\beta}{\cos^2\frac{\beta}{2}}+\frac{\sin^2\gamma}{\cos^2\frac{\gamma}{2}}\right)=$$

$$=\frac{4R^2}{r^2}\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\beta}{2}+\sin^2\frac{\gamma}{2}\right).$$

Z Eulerovy nerovnosti (úloha 23) dostaneme

$$R^2 : r^2 \geqq 4$$

s rovností právě tehdy, když jde o rovnostranný trojúhelník. Z výsledku úlohy 13 plyne

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\beta}{2}+\sin^2\frac{\gamma}{2}\geqq\frac{3}{4},$$

kde rovnost platí, právě když $\alpha=\beta=\gamma$. Proto můžeme napsat:

$$\frac{4R^2}{r^2}\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\beta}{2}+\sin^2\frac{\gamma}{2}\right)\geqq 4\cdot 4\cdot\frac{3}{4}=12.$$

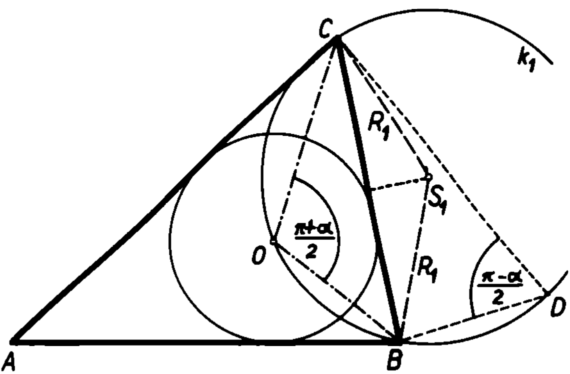
Rovnost nastane, právě když trojúhelník je rovnostranný.

46. Střed kružnice vepsané danému trojúhelníku ABC označme O. Střed a poloměr kružnice k_1 (k_2; k_3) opsané trojúhelníku BCO (CAO; ABO) označme po řadě S_1, R_1 (S_2, R_2; S_3, R_3). Ukažte, že platí

$$R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 \geqq 3R^2.$$

Znaménko rovnosti má platnost právě tehdy, když jde o rovnostranný trojúhelník.

Důkaz (obr. 17). V trojúhelníku BCO je $|\sphericalangle BOC| = = \pi - \frac{\beta + \gamma}{2} = \frac{\pi + \alpha}{2}$. Proto velikost středového úhlu



Obr. 17

$|\sphericalangle BS_1C| = \pi + \alpha$. Jestliže D je libovolný bod kružnice k_1, který leží v polorovině opačné k polorovině BCO, ale nesplývá s body B, C, pak $|\sphericalangle BDC| = \frac{1}{2}(\pi - \alpha)$. I platí

$$a : 2R_1 = \sin \frac{\pi - \alpha}{2} = \cos \frac{\alpha}{2},$$

$$a : 2R = \sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Odtud už snadno vypočítáme

$$R_1 = 2R \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Analogicky platí

$$R_2 = 2R \sin \frac{\beta}{2}, \quad R_3 = 2R \sin \frac{\gamma}{2}.$$

Tím docházíme k rovnosti

$$R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 = 4R^2 \left(\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\beta}{2} + \sin^2 \frac{\gamma}{2} \right).$$

Přihlédneme-li nyní k výsledku úlohy 13, v němž rovnost platí, právě když $\alpha = \beta = \gamma$, máme

$$R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 \geqq 4 \cdot \frac{3}{4} R^2 = 3R^2,$$

kde znaménko rovnosti platí ovšem právě tehdy, když $\alpha = \beta = \gamma$.

8. pomocná věta. *V trojúhelníku ABC proložme vrcholem C přímku p, která protíná stranu AB ve vnitřním bodě D. Označíme-li $|AD| = m$, $|BD| = n$, $|CD| = r$, pak platí tzv. Stewartova věta:*

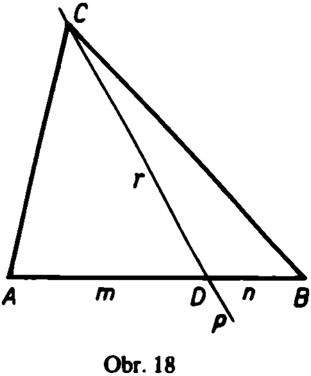
$$cr^2 = a^2 m + b^2 n - cmn.$$

Důkaz (obr. 18). Označme $\omega = |\sphericalangle ADC|$. Potom z trojúhelníku ACD plyne $b^2 = m^2 + r^2 - 2rm \cos\omega$ a z trojúhelníku BCD plyne $a^2 = n^2 + r^2 + 2rn \cos\omega$. Z obou rovnic vyloučíme $\cos\omega$ a po kratší úpravě, při níž použijeme rovnosti $m + n = c$, dostaneme

$$cr^2 = a^2m + b^2n - cmn,$$

jak jsme měli dokázat.

Tuto větu použijeme při odvození další nerovnosti.



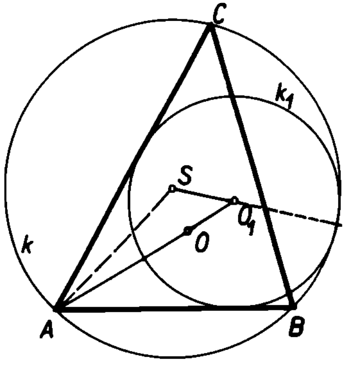
Obr. 18

47. Trojúhelníku je opsána kružnice k poloměru R. Dále je sestrojena kružnice $k_1 = (O_1; r_1)$ $[k_2 = (O_2; r_2)$; $k_3 = (O_3; r_3)]$, která má s kružnicí k vnitřní dotyk a zároveň se dotýká polopřímek AB, AC $[BA, BC; CA, CB]$. Pak platí

$$r_1 + r_2 + r_3 \geqq 4r,$$

kde rovnost platí právě tehdy, když jde o rovnostranný trojúhelník. Dokažte.

Důkaz (obr. 19). Označme po řadě O, O_1 střed kružnice vepsané danému trojúhelníku a střed kružnice k_1. Body O, O_1 leží na ose vnitřního úhlu CAB. Přitom $AO < AO_1$, a proto bod O je vnitřním bodem úsečky AO_1.



Obr. 19

A nyní si všimněme trojúhelníku ASO_1. Podle Stewartovy věty platí

$$|SO|^2 \cdot |AO_1| = |SO_1|^2 \cdot |AO| + |AS|^2 |OO_1| - \\ - |AO_1| \cdot |AO| \cdot |OO_1|. \qquad (1)$$

Avšak

$$|SO|^2 = R^2 - 2Rr \quad \text{(Eulerova věta, viz úloha 23)},$$

$$|AO_1| = r_1 : \sin\frac{\alpha}{2}, \quad |SO_1| = R - r_1,$$

$$|AO| = r : \sin\frac{\alpha}{2}, \quad |AS| = R,$$

$$|OO_1| = |AO_1| - |AO| = (r_1 - r) : \sin\frac{\alpha}{2}.$$

Přihlédneme-li k výsledku úlohy 17, dojdeme ke konci řešení naší úlohy. Poznamenejme ještě, že rovnost platí právě tehdy, když trojúhelník je rovnostranný, neboť za tohoto předpokladu platila i rovnost v úloze 17.

CVIČENÍ

1. Dokažte, že v ostroúhlém trojúhelníku platí

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma + \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma > 2\pi.$$

2. Dokažte, že o úhlech trojúhelníku platí:

a) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \geqq \dfrac{\pi^2}{3}$;

b) $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha \leqq \dfrac{\pi^2}{3}$.

Rovnost platí právě tehdy, když $\alpha = \beta = \gamma$.

3. O úhlech trojúhelníku platí

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\gamma}{2} + 3\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \leqq \frac{9}{8}.$$

Rovnost platí právě tehdy, když $\alpha = \beta = \gamma$. Dokažte.

4. O úhlech trojúhelníku platí

$$\operatorname{cotg}^2\frac{\alpha}{2} + \operatorname{cotg}^2\frac{\beta}{2} + \operatorname{cotg}^2\frac{\gamma}{2} \geqq 9;$$

rovnost platí právě tehdy, když $\alpha = \beta = \gamma$. Dokažte.

5. Dokažte, že o úhlech každého trojúhelníku platí

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta - \cos 2\gamma \leqq \frac{3}{2},$$

kde rovnost nastane, právě když $\alpha=\beta=\frac{1}{6}\pi$, $\gamma=\frac{2}{3}\pi$.

6. Dokažte, že o úhlech každého trojúhelníku platí

$$\sin\alpha+\sin\beta>\sin\gamma.$$

7. (Vztahuje se k úloze 2.) Pro které hodnoty čísla k má trojúhelník při vrcholu C a) ostrý úhel, b) tupý úhel?

8. (Týká se úlohy 4.) Dokažte, že v trojúhelníku platí

$$\sqrt{\frac{1}{r}}<\sqrt{\frac{1}{r_a}}+\sqrt{\frac{1}{r_b}}+\sqrt{\frac{1}{r_c}}\leqq\sqrt{\frac{3}{r}}.$$

Rovnost v nerovnosti napravo platí právě tehdy, když jde o rovnostranný trojúhelník.

9. Dokažte, že v trojúhelníku platí

$$\sqrt{a\sin\alpha}+\sqrt{b\sin\beta}+\sqrt{c\sin\gamma}\leqq\sqrt{3s\sqrt{3}}.$$

Rovnost platí právě tehdy, když $\alpha=\beta=\gamma$.

10. Pro každý pravoúhlý trojúhelník platí

$$c\geqq\frac{a+b}{\sqrt{2}};$$

rovnost platí právě tehdy, když jde o rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník.

11. O výškách trojúhelníku platí

$$\frac{1}{v_a}+\frac{1}{v_b}+\frac{1}{v_c}\geqq\frac{2}{R}.$$

Rovnost platí právě tehdy, když jde o rovnostranný trojúhelník. Dokažte.

12. O výškách trojúhelníku platí

$$\sqrt{v_a} + \sqrt{v_b} + \sqrt{v_c} \geqq \frac{3}{2}\sqrt{6R}.$$

Znaménko rovnosti platí, právě když trojúhelník je rovnostranný. Dokažte.

13. Trojúhelníku je vepsána kružnice $k = (O; r)$. Kolmice sestrojená v bodě O k přímce AO (BO; CO) protne stranu AB (BC; CA) v bodě C' (A'; B'). Dokažte, že platí

$$|OA'|^2 + |OB'|^2 + |OC'|^2 \geqq 4r^2.$$

Rovnost platí právě tehdy, když jde o rovnostranný trojúhelník.

14. Důkazů věty Hadwigerovy—Finslerovy je několik. Velmi stručně tu uvedeme jeden z nich.
V nerovnosti **F**

$$xy + yz + zx \geqq \sqrt{3xyz(x + y + z)},$$
$$x, y, z \geqq 0,$$

kde rovnost platí, právě když $x = y = z$, položme

$$x = s - a, \quad y = s - b, \quad z = s - c \quad \text{atd.}$$

15. K Hadwigerově—Finslerově větě: Dokažte, že v trojúhelníku platí

$$a \sin\alpha + \beta \sin\beta + c \sin\gamma \geqq 2S\sqrt{3} : R.$$

Rovnost platí právě tehdy, když jde o rovnostranný trojúhelník.

16. Dokažte, že o prvcích trojúhelníku platí

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geqq 32RS.$$

Rovnost platí právě tehdy, když $a=b=c$.

17. Dokažte, že o úhlech trojúhelníku platí

$$\sin^{-1}\alpha + \sin^{-1}\beta + \sin^{-1}\gamma \geqq 2\sqrt{3}.$$

Rovnost platí právě tehdy, když $\alpha=\beta=\gamma$.

18. Na základě výsledku předešlého cvičení dokažte, že

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geqq \frac{\sqrt{3}}{R}.$$

Přitom rovnost platí právě tehdy, když $a=b=c$.

19. Dokažte, že o úhlech trojúhelníku platí

$$\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma \leqq \frac{3}{8}\sqrt{3}.$$

Kdy platí znaménko rovnosti?

20. O úhlech trojúhelníku platí

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \geqq 4 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma,$$

kde rovnost platí právě tehdy, když $\alpha=\beta=\gamma$. Dokažte.

21. Dokažte, že v trojúhelníku platí

$$v_a v_b v_c \leqq r_a r_b r_c .$$

Kdy platí rovnost?

22. Dokažte, že o úhlech každého trojúl.elníka platí

$$\mathrm{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + \mathrm{tg}^2 \frac{\beta}{2} + \mathrm{tg}^2 \frac{\gamma}{2} \geqq 1,$$

kde rovnost platí právě tehdy, když trojúhelník je rovnostranný.

23. Na základě výsledku předchozího cvičení dokažte:

a) $Z = \left(\frac{r_a - r}{a}\right)^2 + \left(\frac{r_b - r}{b}\right)^2 + \left(\frac{r_c - r}{c}\right)^2 \geqq 1$;

b) $U = \frac{r_a - r}{r_b + r_c} + \frac{r_b - r}{r_c + r_a} + \frac{r_c - r}{r_a + r_b} \geqq 1$.

Rovnost v obou případech nastane právě tehdy, když jde o rovnostranný trojúhelník.

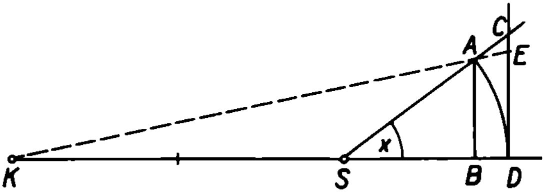
24. O prvcích trojúhelníku platí

$$a w_a + b w_b + c w_c \geqq 6 s r,$$

kde rovnost platí právě tehdy, když jde o rovnostranný trojúhelník. Dokažte.

ŘEŠENÍ A NÁVODY K ŘEŠENÍ

1. K důkazu je potřeba znát vztah platící o ostrých úhlech (obr. 20):



Obr. 20

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

Ověřit si můžete toto tvrzení užitím tabulek. V obr. 20 je dokonce provedena přibližná rektifikace oblouku DA, takže $DA \doteq |DE|$, a ta by vás měla ve vysloveném tvrzení utvrdit. Ale pozor, to není důkaz! Ten je mimo rámec našich možností. (Uvedená rektifikace je vhodná pro úhly, jejichž velikost je mezi nulou a $\frac{\pi}{6}$, $|DK| = 3|SD|$.)

Nejprve upravme výraz

$$\sin x + \operatorname{tg} x = \sin x \left(1 + \frac{1}{\cos x}\right) =$$

$$=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\cdot 2\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{4\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^4\frac{x}{2}}.$$

K tomuto výsledku se za chvíli vrátíme. Jistěže platí

$$0<\operatorname{tg}\frac{x}{2}<1,$$

$$-1<\operatorname{tg}^4\frac{x}{2}-1<0,$$

$$1>1-\operatorname{tg}^4\frac{x}{2}>0,$$

$$\frac{1}{1-\operatorname{tg}^4\frac{x}{2}}>1,$$

$$\frac{4\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^4\frac{x}{2}}>4\operatorname{tg}\frac{x}{2}>4\cdot\frac{x}{2}=2x.$$

Tedy jinak psáno,

$$\sin x+\operatorname{tg}x>2x.$$

Do této nerovnosti dosadíme postupně α, β, γ za x. Získané tři nerovnosti sečteme a jsme s důkazem hotovi.

2. a)
$$\alpha+\beta+\gamma=\pi,$$
$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=\pi^2 \qquad \text{(a)}$$
$$2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\geqq 2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha), \qquad \text{(b)}$$

rovnost platí právě tehdy, když $\alpha=\beta=\gamma$. Sečtením posledních dvou vztahů máme

$$3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\geqq\pi^2,$$

kde rovnost platí právě tehdy, když $\alpha=\beta=\gamma$.

b)
$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha\leqq\alpha^2+\beta^2+\gamma^2. \qquad \text{(c)}$$

Rovnost platí právě tehdy, když $\alpha=\beta=\gamma$. Sečtením (a) a (c) máme

$$3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\leqq\pi^2,$$

přičemž rovnost platí, právě když $\alpha=\beta=\gamma$.

3.
$$\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\beta}{2}+\sin^2\frac{\gamma}{2}=$$
$$=\frac{1}{2}(1-\cos\alpha)+\frac{1}{2}(1-\cos\beta)+\sin^2\frac{\gamma}{2}=$$
$$=1-\frac{1}{2}(\cos\alpha+\cos\beta)+\sin^2\frac{\gamma}{2}=$$
$$=1-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}=$$
$$=1+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\left[\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right]=$$
$$=1+\sin\frac{\gamma}{2}\left[-2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right].$$

Podle toho výraz uvedený v textu úlohy je roven (viz úloha 8)

$$1+\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\leqq 1+\frac{1}{8}=\frac{9}{8}.$$

4. S přihlédnutím k **D**:

$$\operatorname{cotg}^2\frac{\alpha}{2}+\operatorname{cotg}^2\frac{\beta}{2}+\operatorname{cotg}^2\frac{\gamma}{2}\geqq$$

$$\geqq\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}.$$

Podle **C.2**:

$$\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\right)\geqq 9.$$

Podle 1. pomocné věty je

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=1,$$

a tudíž

$$\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\geqq 9.$$

Rovnost nastane právě tehdy, když $\alpha=\beta=\gamma$. Odtud vyplývá i správnost vysloveného tvrzení.

5. Na levou stranu nerovnosti převedeme $\frac{3}{2}$ a potom tuto levou stranu nahradíme ekvivalentními výrazy:

$$2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)-\cos^2\gamma+\sin^2\gamma-\frac{3}{2}=$$
$$=2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)-\frac{1}{2}-2\cos^2(\alpha+\beta)=$$
$$=-2\left[\cos(\alpha+\beta)-\frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)\right]^2-\frac{1}{2}\sin^2(\alpha-\beta)\leqq 0.$$

Rovnost nastává právě tehdy, když jsou splněny tyto dvě podmínky:

$$\sin(\alpha-\beta)=0, \quad \text{tj.} \quad \alpha=\beta,$$
$$2\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=0.$$

Řešením této soustavy je $\alpha=\beta=\frac{\pi}{6}$, $\gamma=\frac{2}{3}\pi$.

6. 1. řešení. O délkách stran platí

$$a+b>c,$$

což vzhledem k **II.b** lze nahradit vztahem ekvivalentním

$$2R(\sin\alpha+\sin\beta)>2R\sin\gamma.$$

2. řešení. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že úhly α, β jsou ostré. Pak

$$0<\cos\alpha<1, \quad 0<\cos\beta<1.$$
$$\sin\gamma=\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha<\sin\alpha+\sin\beta.$$

7. a) Pro $k>1$ je trojúhelník ostroúhlý, b) pro $k<1$ je tupoúhlý.

8. Obě nerovnosti z úlohy 4 vynásobte číslem $\frac{1}{\sqrt{S}}$.

9. Použijeme vzorec **II.b**:

$$\sqrt{a \sin\alpha} = a : \sqrt{2R}$$

a další dva vztahy cyklickou záměnou.

$$(a + b + c) : \sqrt{2R} = 2s : \sqrt{2R} = \sqrt{2s} \cdot \sqrt{2s : (2R)} =$$

$$= \sqrt{2s\,(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)} \leqq \sqrt{3s\sqrt{3}}.$$

V posledním kroku jsme použili nerovnost z úlohy 14.

10. $$c^2 = a^2 + b^2 = \frac{(a+b)^2}{2} + \frac{(a-b)^2}{2} \geqq \frac{(a+b)^2}{2}.$$

Odtud už máme $c \geqq (a+b) : \sqrt{2}$. Rovnost nastane právě tehdy, když $a = b$.

11. Levou stranu nerovnosti upravujeme:

$$\frac{1}{v_a} + \frac{1}{v_b} + \frac{1}{v_c} = \frac{a+b+c}{2S} = \frac{s}{S} = \frac{1}{r} \geqq \frac{2}{R}.$$

Při posledním kroku jsme použili Eulerovu nerovnost. Rovnost platí, právě když jde o rovnostranný trojúhelník.

12. Platí

$$\sqrt{v_a} + \sqrt{v_b} + \sqrt{v_c} \leqq \sqrt{t_a} + \sqrt{t_b} + \sqrt{t_c} \leqq$$

$$\leqq \sqrt{3(t_a + t_b + t_c)} \leqq \sqrt{3 \cdot \frac{9}{2} R} = \frac{3}{2}\sqrt{6R}.$$

V průběhu úprav jsme použili nerovnost **E** a výsledek úlohy 28.

13. $$|OA'| = r : \cos\frac{\beta}{2}, \quad |OB'| = r : \cos\frac{\gamma}{2},$$

$$|OC'| = r : \cos\frac{\alpha}{2}.$$

Dosadíme do levé strany dané nerovnosti a použijeme výsledek úlohy 17.

14. Po uvedené substituci nabude nerovnost **F** tento tvar:

$$ab + bc + ca \geqq S\sqrt{3} + s^2.$$

Rovnost platí, právě když $s - a = s - b = s - c$, tj. právě tehdy, když trojúhelník je rovnostranný. Obě strany nerovnosti znásobíme číslem 4 a potom k oběma stranám přičteme $(a^2 + b^2 + c^2)$. Dostaneme

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqq 4S\sqrt{3} + 2(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) =$$
$$= 4S\sqrt{3} + (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2.$$

Tím jsme s důkazem hotovi. Čtenář by si měl celý důkaz znovu projít a každý krok propočítat.

15. V nerovnosti úlohy 6 položíme $a^2 = a \cdot 2R \sin\alpha$ atd.

16. $a + b \geqq 2\sqrt{ab}$ a další dva analogické vztahy. Rovnost platí, právě když $a = b$ $(b = c\,;\ c = a)$. Podle **II.a** je $abc = 4RS$.

17. $$\sin^{-1}\alpha + \ldots = 2R\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) =$$

$$= 2R(ab + bc + ca) : (abc) = 2R(ab + bc + ca) : (4RS) =$$
$$= (ab + bc + ca) : (2S).$$

Z výsledku úlohy 7 plyne

$$ab + bc + ca \geqq \frac{1}{2}(4S\sqrt{3} + a^2 + b^2 + c^2) \geqq 4S\sqrt{3},$$

jak vyplývá z úlohy 6. Tím je úloha v podstatě rozřešená. Rovnost nastane, právě když $a = b = c$.

19. $\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma = abc : (8R^3) = 4RS : (8R^3) =$

$$= S : (2R^2) \leqq (a^2 + b^2 + c^2) : (2R^2 \cdot 4\sqrt{3}) \leqq$$

$$\leqq 9R^2 : (8R^2\sqrt{3}) = \frac{3}{8}\sqrt{3}.$$

Postupně bylo použito: **II.b, II.a,** výsledku úlohy 6 a poznámky 1 úlohy 24.

20. $$S = \frac{1}{2}ab \sin\gamma = 2R^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma.$$

Avšak také:

$$S = rs = rR(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma).$$

Porovnáním máme:

$$r(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) = 2R \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma.$$

A nyní se použije Eulerova nerovnost $R \geqq 2r$.

21. 1. řešení.

$$v_a = c \sin\beta = 2R \sin\beta \sin\gamma =$$

$$= 8R \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2} \cos\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma}{2}.$$

Potom

$$v_a v_b v_c = 8^3 R^3 \sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2}.$$

S přihlédnutím k pomocné větě 5 je

$$r_a r_b r_c = 4^3 R^3 \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2}.$$

Poměr obou součinů je podle úlohy 8:

$$2^3 \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \leqq 2^3\cdot\frac{1}{8} = 1.$$

Rovnost nastane právě tehdy, když $\alpha = \beta = \gamma$.

2. řešení. $v_a v_b v_c = 8S^3 : (abc) = 2S^2 : R$. Dále

$$r_a r_b r_c = S^3 : [(s-a)(s-b)(s-c)] = S^3 s : S^2 = Ss = S^2 : r.$$

Odtud

$$v_a v_b v_c : (r_a r_b r_c) = 2r : R \leqq 1 \quad \text{(Eulerova nerovnost).}$$

Rovnost platí, právě když jde o rovnostranný trojúhelník.

22. Všimněte si postupu při řešení úlohy 16.

23. a) S použitím 5. pomocné věty a vzorce **II.b** dostaneme po kratší úpravě

$$(r_a - r) : a = \left(\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} - \sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\right) : \cos\frac{\alpha}{2} =$$

$$= \sin\frac{\alpha}{2} : \cos\frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

b) $$r_a - r = a \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 4R\sin^2\frac{\alpha}{2};$$

$$r_b + r_c = 4R\cos^2\frac{\alpha}{2}\,.$$

24. $w_a \geqq v_a$ s rovností pro rovnoramenný trojúhelník s osou souměrnosti jdoucí vrcholem A. Dále

$$aw_a \geqq av_a = 2S = 2rs\,.$$

Odtud vyplývá výsledek. Rovnost platí právě tehdy, když trojúhelník je rovnostranný.

Použitá literatura

Většina příkladů je převzata z těchto časopisů:

Matematika v škole
Matematyka
Elemente der Mathematik
Publikacije elektrotehničkog fakulteta, univerzitet u Beogradu

Seznam dosud vydaných svazků edice

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

v nakladatelství Mladá fronta

---

1. *František Hradecký—Milan Koman—Jan Vyšín:* Několik úloh z geometrie jednoduchých těles, 1961, 1963 a 1977
2. *Jiří Sedláček:* Co víme o přirozených číslech, 1961, 1965 a 1976
3. *Jaroslav Šedivý:* Shodná zobrazení v konstruktivních úlohách, 1962
4. *Miroslav Šisler—Jiří Jarník:* O funkcích, 1962 a 1963
5. *František Veselý:* O nerovnostech, 1963
6. *Rudolf Výborný:* Matematická indukce, 1963 a 1966
7. *Jaroslav Šedivý:* O podobnosti v geometrii, 1963 a 1967
8. *Jiří Váňa:* O rovnicích s parametry, 1964 a 1970
9. *Jan Vyšín:* Konvexní útvary, 1964
10. *Jiří Sedláček:* Faktoriály a kombinační čísla, 1964
11. *Josef Holubář:* Geometrická místa bodů v prostoru, 1965
12. *Karel Havlíček:* Prostory o čtyřech a více rozměrech, 1965
13. *Miroslav Šisler—Josef Andrys:* O řešení algebraických rovnic, 1966
14. *František Veselý:* O dělitelnosti čísel celých, 1966
15. *Milan Koman:* Jak vyšetřujeme geometrická místa metodou souřadnic, 1966
16. *Stanislav Horák:* Kružnice, 1966
17. *Jaromír Hroník:* Úlohy o maximech a minimech funkcí, 1967
18. *Karel Havlíček:* Analytická geometrie a nerovnosti, 1967
19. *Jiří Jarník:* Komplexní čísla a funkce, 1967
20. *Bruno Budinský—Stanislav Šmakal:* Goniometrické funkce, 1968
21. *Alois Apfelbeck:* Kongruence, 1968

22. *Tibor Šalát*: Dokonalé a spriatelené čísla, 1969
23. *Jaroslav Morávek—Milan Vlach*: Oddělitelnost množin, 1969
24. *Ján Gatial—Milan Hejný*: Stavba Lobačevského planimetrie, 1969
25. *Leo Bukovský—Igor Kluvánek*: Dirichletov princíp, 1970
26. *Karel Hruša*: Polynomy v moderní algebře, 1970
27. *Stanislav Horák*: Mnohostěny, 1970
28. *Bruno Budinský—Stanislav Šmakal*: Vektory v geometrii, 1971
29. *František Zítek*: Vytvořující funkce, 1972
30. *Milan Koman—Jan Vyšín*: Malý výlet do moderní matematiky, 1972 a 1974
31. *Oldřich Odvárko*: Booleova algebra, 1973
32. *Jan Vyšín—Jitka Kučerová*: Druhý výlet do moderní matematiky, 1973
33. *Jaroslav Morávek*: O dynamickém programování, 1973
34. *Ladislav Rieger*: O grupách, 1974
35. *Alois Kufner*: Co asi nevíte o vzdálenosti, 1974
36. *Ján Černý*: O aplikáciach matematiky, 1976
37. *Boleslav Riečan—Zdena Riečanová*: O pravdepodobnosti, 1976
38. *Juraj Bosák*: Latinské štvorce, 1976
39. *Alois Kufner*: Nerovnosti a odhady, 1975
40. *Antonín Vrba*: Princip matematické indukce, 1977
41. *Bohdan Zelinka*: Rovinné grafy, 1977
42. *Ladislav Beran*: Uspořádané množiny, 1978
43. *Jiří Jarník*: Posloupnosti a řady, 1979
44. *Bohdan Zelinka*: Matematika hrou i vážně, 1979
45. *Antonín Vrba*: Kombinatorika, 1980
46. *Jaroslav Šedivý*: Shodnost a podobnost v konstrukčních úlohách, 1980
47. *Arnošt Niederle*: Zajímavé dvojice trojúhelníků, 1980
48. *František Veselý*: O nerovnostech a nerovnicích, 1982
49. *Pavel Vít*: Řetězové zlomky, 1982
50. *Adam Płocki*: O náhodě a pravděpodobnosti, 1982
51. *N. B. Vasiljev—V. L. Gutenmacher*: Přímky a křivky, 1982
52. *Alois Kufner*: Symetrické funkce, 1982

53. *Ján Gatial—Tomáš Hecht—Milan Hejný:* Hry takmer matematické, 1982
54. *Josef Holubář:* Množiny bodů v prostoru, 1983
55. *Ljubomir Davidov:* Funkcionální rovnice, 1984
56. *Jiří Sedláček:* Faktoriály a kombinační čísla, 1985

Příští svazek:

58. *Herbert Kästner, Peter Göthner:* Algebra – každý začátek je lehký, 1987

OBSAH

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

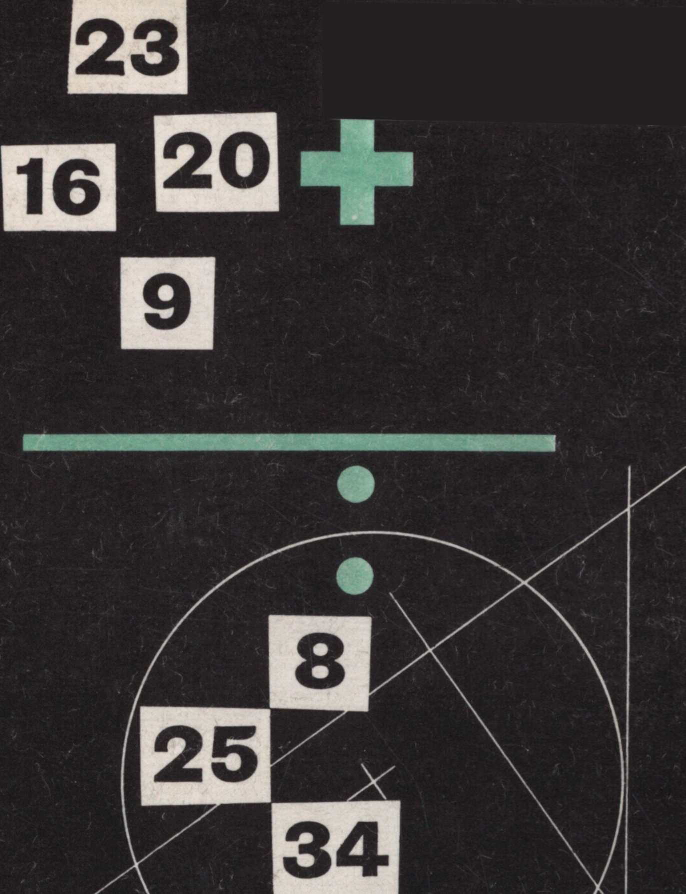
STANISLAV HORÁK

Nerovnosti v trojúhelníku

Pro účastníky matematické olympiády
vydává ÚV matematické olympiády
v nakladatelství Mladá fronta
Řídí akademik Josef Novák
Obálku navrhl Jaroslav Příbramský
K tisku připravil Vladimír Doležal
Odpovědná redaktorka Zdena Šmídová
Technický redaktor Vladimír Vácha
Publikace číslo 4778
Edice Škola mladých matematiků, svazek 57
Vytiskly Západoslovenské tlačiarne, n. p.,
závod 20 Svornosť,
Februárového víťazstva 20, Bratislava
4,06 AA, 4,84 VA. 128 stran
Náklad 6000 výtisků. 1. vydání
Praha 1986. 508/21/82.5

23-034-86 03/2

Cena brožovaného výtisku 6 Kčs



23—034—86
03/2
Cena brož.
6 Kčs