Funkcionální rovnice

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

FUNKCIONÁLNÍ ROVNICE

55

Vydal ÚV matematické olympiády v nakladatelství Mladá fronta

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

LJUBOMIR DAVIDOV

Funkcionální rovnice

PRAHA 1984
VYDAL ÚV MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY
V NAKLADATELSTVÍ MLADÁ FRONTA

Recenzoval dr. Josef Kubát

PŘEDMLUVA

Teorie řešení funkcionálních rovnic je jedním z nejstarších odvětví matematické analýzy. K rozpracování této teorie podstatně přispěli matematici Euler, d'Alembert, Cauchy, Gauss, Weierstrass, Abel, Darboux, Hilbert a další. Úlohy vedoucí na funkcionální rovnice vznikají nejčastěji při řešení problémů z geometrie, mechaniky, aerodynamiky apod.

Účelem této knížky je seznámit čtenáře v poměrně elementární formě se základními myšlenkami, jichž se při řešení funkcionálních rovnic užívá. Knížka si přirozeně neklade nároky na úplnost. Teorie funkcionálních rovnic je na jedné straně tak bohatá, že je sotva možné postihnout ji vyčerpávajícím způsobem, na druhé straně je její výklad v této publikaci koncipován tak, aby byl srozumitelný i pro čtenáře, kteří se v matematické analýze orientují jen zcela zběžně.

Knížka je určena především žákům nejvyšších tříd gymnázií a průmyslových škol. Některé partie mohou pochopit i mladší žáci (například začátek první kapitoly), je však třeba, aby se před četbou této knížky seznámili s pojmem limity posloupnosti a s pojmem spojité funkce.

Výklad je založen na řadě příkladů a úloh, jejichž řešení podle autorova mínění nejlépe ilustrují metody, o nichž je zde pojednáno. V závěru první kapitoly se vyšetřuje jistá nikoliv nezajímavá aplikace funkcionálních rovnic. Některé skutečnosti a věty z matematické analýzy jsou dokázány ve *druhé kapitole, přičemž jsou tímto způsobem vyplněny některé mezery ve středoškolské látce z analýzy.*

Autor doufá, že tato knížka pomůže zvídavým žákům v jejich přípravě na různé formy mimoškolské činnosti v matematice, jako jsou matematické olympiády, soutěže, přehlídky tvořivosti mládeže apod.

Závěrem bych rád vyjádřil svou hlubokou vděčnost Petru Kenderovovi a Michailu Kitanovovi, kteří mi jako recenzenti svými poznámkami a připomínkami pomohli a přispěli k definitivní podobě knížky.

Sofie listopad 1976 Autor

ÚVOD

V této knížce se budeme zabývat především funkcemi jedné proměnné, kterou budeme obvykle značit písmenem x. Funkce pak označíme malými latinskými písmeny f, g, h atd. Někdy, půjde-li o známé funkce, použijeme i velkých písmen F, G atd.

Přesnou definici pojmu funkcionální rovnice nejsme s to podat. Lze však říci, že to je rovnice, u níž se hledá jistá neznámá funkce (nebo i více neznámých funkcí) na základě zadaných vlastností této funkce; tyto vlastnosti jsou vyjádřeny rovností, nebo i několika rovnostmi, v nichž nevystupují derivace a neurčité integrály těchto funkcí. Máme-li např. řešit funkcionální rovnici

$$f(x + y) = f(x) + f(y),$$

znamená to, že hledáme všechny funkce $f(x)$, které uvedené rovnosti vyhovují.

Obecná metoda řešení funkcionálních rovnic neexistuje. V dalším se zaměříme především na dva postupy, pomocí nichž je možno řešit jisté třídy funkcionálních rovnic. Tyto metody lze podle autorova mínění považovat za klasické a snad za nejlépe ilustrující podstatu pojmu funkcionální rovnice.

Současně s těmito metodami se na základě řešení konkrétních příkladů zmíníme i o jiných způsobech řešení funkcionálních rovnic; tyto postupy se však od obou zmíněných metod nijak podstatně neodlišují.

Kapitola první

SUBSTITUČNÍ METODA

1. FORMULACE A PODSTATA METODY

Substituční metoda řešení funkcionálních rovnic spočívá — řečeno co „nejobecněji" — v následujícím postupu: Předpokládáme, že daná funkcionální rovnice už nějaké řešení má, a vhodnými záměnami proměnných a dosazováním konkrétních hodnot se snažíme najít explicitní tvar tohoto řešení. Poté ověříme, zda takto získaná funkce dané funkcionální rovnici také skutečně vyhovuje.

Objasníme to na jednom konkrétním příkladu: Řešme funkcionální rovnici

$$f(x + y) + 2f(x - y) - 4f(x) + xf(y) = 3y^2 - x^2 - 2xy + xy^2, \tag{1}$$

přičemž se budeme zajímat jen o taková její řešení $f(x)$, jež jsou definována na celé číselné ose (tj. pro všechna x).

Předpokládejme tedy nejprve, že $f(x)$ je jedno takové řešení, a označme $f(0) = c$. Položíme-li pak v (1) $y = 0$, dostáváme

$$-f(x) + cx = -x^2$$

neboli

$$f(x) = x^2 + cx. \tag{2}$$

Dosadíme-li nyní funkci (2) do rovnice (1), dostaneme vztah

$$-c(x + y) + cxy = 0.$$

Tato rovnost má být splněna pro libovolné reálné hodnoty x a y; to však znamená, že funkce (2) bude funkcionální rovnici (1) řešit tehdy a jen tehdy, bude-li $c = 0$. Rovnice (1) má tedy jediné řešení

$$f(x) = x^2.$$

2. NĚKOLIK PŘÍKLADŮ

Než se budeme zabývat některými obecnými třídami funkcionálních rovnic, jež lze řešit substituční metodou, zastavíme se ještě u několika konkrétních příkladů.

a) Budiž $a > 0$, $a \neq 1$ reálné číslo. Řešme funkcionální rovnici

$$f(x + y) = f(y) . a^x, \tag{3}$$

přičemž i zde budeme hledat jen taková její řešení, jež jsou definována na celé číselné ose.

Předpokládejme, že $f(x)$ je jedno řešení funkcionální rovnice (3). Označíme-li $f(0) = c$ a položíme-li v (3) $y = 0$, dostáváme vztah

$$f(x) = c . a^x.$$

Z rovnosti

$$c . a^{x+y} = (c . a^y) . a^x,$$

která je splněna pro libovolná reálná čísla x a y, naopak plyne, že každá funkce tvaru $f(x) = c . a^x$, kde c je libovolné pevné reálné číslo, je řešením rovnice (3). To tedy ukazuje, že rovnice má nekonečně mnoho řešení, jež jsou dána formulí

$$f(x) = c \, . \, a^x$$

s libovolnou reálnou konstantou c.

Zde je třeba poznamenat, že takto určená řešení rovnice (3) „pokrývají celou rovinu". Tato slova mají následující význam: Nechť je v rovině zadána pravoúhlá souřadnicová soustava $O(x, y)$ a nechť je M libovolný bod roviny o souřadnicích α a β. Pak tvrdíme, že existuje právě jedno řešení rovnice (3), jehož graf prochází bodem M.

Než budeme toto tvrzení dokazovat, poznamenejme, že graf nějaké funkce $f(x)$ prochází bodem $M[\alpha, \beta]$ tehdy a jen tehdy, je-li $\beta = f(\alpha)$. Protože však rovnice

$$ca^\alpha = \beta$$

má pro libovolná α a β jediné řešení vzhledem k c: $c = \beta \, . \, a^{-\alpha}$, existuje jen jediná funkce

$$f(x) = \beta \, . \, a^{-\alpha} \, . \, a^x = \beta \, . \, a^{x-\alpha},$$

která je řešením funkcionální rovnice (3) a jejíž graf prochází bodem $M[\alpha, \beta]$.

b) Řešme funkcionální rovnici

$$(4) \quad f(x + y) - 2f(x - y) + f(x) - 2f(y) = y - 2\,.$$

Připusťme, že $f(x)$ je jedno její řešení, a položme $c = f(0)$. (Opět zde předpokládáme, že funkce $f(x)$ je definována pro všechna $x \in R$.) Položíme-li pak v (4) nejprve $x = 0, y = t$ a potom $x = 0, y = -t$, dostáváme vztahy

$$f(t) - 2f(-t) + c - 2f(t) = t - 2$$

a

$$f(-t) - 2f(t) + c - 2f(-t) = -t - 2\,;$$

po úpravách odtud plyne

$$-f(t) - 2f(-t) = t - 2 - c\,,$$

$$-2f(t) - f(-t) = -t - 2 - c\,.$$

Jestliže druhou z těchto rovností vynásobíme číslem -2 a výsledek přičteme k první rovnosti, dostáváme

$$f(t) = \frac{3t + 2 + c}{3}\,.$$

Jestliže naproti tomu položíme v (4) $y = 0$, $x = t$, dostaneme vztah

$$f(t) - 2f(t) + f(t) - 2c = -2\,,$$

z kterého plyne, že $c = 1$.

Vše, co jsme dosud řekli, nás přesvědčuje o tom, že pokud je $f(x)$ nějaké řešení dané funkcionální rovnice, musí být $f(x) = x + 1$. Bezprostředním ověřením se také přesvědčíme o tom, že tato funkce $f(x)$ je skutečně řešením rovnice (4).

A tak má funkcionální rovnice (4) jediné řešení

$$f(x) = x + 1\,.$$

c) Řešme funkcionální rovnici

$$f(x + y) + f(x - y) - f(x) = f(y) + x - y^2\,. \tag{5}$$

Připusťme, že $f(x)$ je jedno její řešení, a označme stejně jako v předcházejících příkladech $f(0) = c$. Položíme-li pak v (5) $y = 0$, dostaneme $f(x) = c + x$; je-li tedy $f(x)$ řešení funkcionální rovnice (5), je $f(x) = c + x$. Dosadíme-li takto určený výraz pro $f(x)$ do rovnice (5), dostaneme rovnost

$$c + (x + y) + c + (x - y) - (c + x) = \\ = c + y + x - y^2,$$

která je zřejmě ekvivalentní s rovností

$$y - y^2 = 0.$$

Tato rovnost musí být splněna pro libovolné reálné hodnoty y. Toto poslední tvrzení je však nepravdivé, a proto funkcionální rovnice (5) nemá řešení.

3. FUNKCIONÁLNÍ ROVNICE $f(x + y) = F(f(y), x)$

Podívejme se nyní poněkud podrobněji na řešení funkcionální rovnice (3). Je zřejmé, že se jedná o speciální případ obecnější funkcionální rovnice

(6) $$f(x + y) = F(f(y), x),$$

kde $F(u, v)$ značí libovolnou funkci dvou proměnných. (V případě (3) je $F(u, v) = u \cdot a^v$.) Nyní určíme, za jakých podmínek na funkci $F(u, v)$ má rovnice (6) řešení a jak lze toto řešení najít.

Abychom takto formulovanou úlohu vyřešili, začneme hledat řešení rovnice (6); přitom použijeme postupu, jímž jsme řešili funkcionální rovnici

$$f(x + y) = f(y) \cdot a^x.$$

Připusťme tedy, že $f(x)$ je nějaké řešení funkcionální rovnice (6), a označme $f(0) = c$. Položíme-li v (6) $y = 0$, máme

$$f(x) = F(c, x),$$

a odtud dostáváme pro $x = 0$ vztah

$$f(0) = c = F(c, 0).$$

Jinými slovy: Ukázali jsme si, že pokud má funkcionální rovnice (6) řešení, musí funkce $F(u, v)$ splňovat následující podmínku: existuje reálné číslo c, pro něž je

$$F(c, 0) = c. \tag{7}$$

Z rovnosti $f(x) = F(c, x)$ však plyne, že je

$$\begin{aligned} f(x + y) = F(c, x + y) = F(f(y), x) = \\ = F(F(c, y), x), \end{aligned}$$

neboli

$$F(c, x + y) = F(F(c, y), x).$$

To zase ukazuje, že funkce $F(u, v)$ musí splňovat i podmínku

$$F(c, x + y) = F(F(c, y), x). \tag{8}$$

Má-li tedy funkcionální rovnice (6) mít řešení, je nutné, aby funkce $F(u, v)$ vyhovovala rovnostem (7) a (8).

Předpokládáme-li naopak, že funkce dvou proměnných $F(u, v)$ vyhovuje rovnostem (7) a (8), pak je z rovnosti (8) zřejmé, že funkce $f(x) = F(c, x)$ je řešením rovnice (6). Tím jsme však dokázali následující tvrzení:

Věta. *Funkcionální rovnice*

$$f(x + y) = F(f(y), x)$$

má řešení tehdy a jen tehdy, splňuje-li funkce dvou proměnných $F(u, v)$ tyto dvě podmínky:

a) *existuje reálné číslo c, pro něž je*

$$F(c, 0) = c;$$

b) *pro každé reálné číslo c, pro něž platí* a), *platí také*

$$F(c, x + y) = F(F(c, y), x).$$

Všechna řešení výše uvedené funkcionální rovnice jsou dána formulí

$$f(x) = F(c, x),$$

kde c je reálné číslo, pro něž jsou splněny podmínky a) *a* b).

Důsledek. *Je-li funkce $f(x)$ řešením funkcionální rovnice* (6), *je jejím řešením i funkce*

$$g(x) = f(x + a),$$

kde a je libovolné reálné číslo.

Důkaz. Je zřejmě

$$g(x) = f(x + a) = F(c, x + a) = F(F(c, a), x),$$

a odtud dostáváme

$$g(x + y) = F(c, x + y + a) = F(F(c, y + a), x) = \\ = F(g(y), x);$$

to však znamená, že $g(x)$ je řešením dané funkcionální rovnice, a důkaz důsledku je proveden.

Budiž nyní M takový bod v rovině, který má vzhledem k nějaké pravoúhlé soustavě souřadnice α a β.

Zajímá nás, zda funkcionální rovnice (6) má řešení, které „prochází" bodem M, tj. pro něž je splněn vztah $\beta = f(\alpha)$. Protože však všechna řešení rovnice (6) mají tvar $f(x) = F(c, x)$, kde pro reálné číslo c platí rovnosti (7) a (8), musí zřejmě platit: Má-li mít funkcionální rovnice (6) řešení, které prochází bodem $M[\alpha, \beta]$, musí existovat reálné číslo c, pro něž funkce $F(u, v)$ splňuje rovnosti (7) a (8), a kromě toho takové, že platí

$$F(c, \alpha) = \beta .$$

Věta. *Funkcionální rovnice*

$$f(x + y) = F(f(y), x)$$

má řešení $f(x)$, vyhovující navíc podmínce $\beta = f(\alpha)$, tehdy a jen tehdy, existují-li reálná čísla c a x_0, pro něž je

$$F(c, x_0) = \beta ,$$

$$F(c, 0) = c ,$$

$$F(c, x + y) = F(F(c, y), x) .$$

Důkaz. Z úvah, které jsme provedli výše, vyplývá, že pokud má rovnice (6) řešení $f(x)$, pro něž je $f(\alpha) = \beta$, jsou podmínky věty splněny. (Za číslo x_0 můžeme volit číslo α.)

Nechť tedy naopak existují reálná čísla c a x_0, pro něž platí výše uvedené vztahy. Podle předcházející věty je pak funkce $f(x) = F(c, x)$ řešením dané funkcionální rovnice. Podle důsledku této věty je pak řešením i funkce $g(x) = F(c, x + x_0 - \alpha)$, pro niž dále platí

$$g(\alpha) = F(c, \alpha + x_0 - \alpha) = F(c, x_0) = \beta .$$

Věta je tím dokázána.

Podívejme se na závěr na dva příklady, které ilustrují naše obecné poznámky.

a) Řešme funkcionální rovnici

$$f(x + y) = [f(y)]^x. \tag{9}$$

To je zřejmě rovnice tvaru (6), neboť zde je $F(u, v) = u^v$. Ale

$$F(1, 0) = 1^0 = 1,$$

$$F(1, x + y) = 1^{x+y} = 1 = (1^y)^x = \\ = F(F(1, y), x),$$

a kromě toho je jednotka zřejmě jediným reálným číslem, pro něž naše funkce $F(u, v)$ vyhovuje podmínkám (7) a (8).

Funkcionální rovnice (9) má tedy jediné řešení, a tím je konstanta jedna: $f(x) = 1$ pro všechna reálná x.

b) Řešme funkcionální rovnici

$$f(x + y) = x + f(y). \tag{10}$$

Také tato rovnice je tvaru (6), kde $F(u, v) = u + v$. Kromě toho jsou pro každé reálné číslo c splněny rovnosti

$$F(c, 0) = c + 0 = c,$$

$$F(F(c, y), x) = (c + y) + x = c + (x + y) = \\ = F(c, x + y)$$

a odtud vyplývá, že všechna řešení funkcionální rovnice (10) jsou dána vzorcem $f(x) = c + x$.

Ponecháváme na čtenáři, aby rozhodl, jak je možno určit řešení rovnice (10), které prochází např. bodem o souřadnicích [1, 2].

4. JEDNO ZOBECNĚNÍ

Zobecněním funkcionální rovnice (6) je funkcionální rovnice

$$f(G(x, y)) = F(f(y), x), \tag{11}$$

kde $G(x, y)$ a $F(u, v)$ jsou dvě dané funkce dvou proměnných. (Rovnici (6) dostaneme z rovnice (11), zvolíme-li za $G(x, y)$ funkci $G(x, y) = x + y$.)

Věta. *Nechť funkce dvou proměnných $G(x, y)$ a $F(u, v)$ splňují tyto podmínky:*

a) *existuje reálné číslo a, pro něž je rovnice*

$$G(x, a) = t$$

řešitelná vzhledem k x, tj. existuje taková funkce $x = g(t)$, pro niž je rovnost

$$G(g(t), a) = t$$

splněna pro všechna t;

b) *existuje reálné číslo b, pro něž platí*

$$F(b, g(a)) = b,$$
$$F(b, g(G(x, y))) = F(F(b, g(y)), x).$$

Pak má funkcionální rovnice

$$F(G(x, y)) = F(f(y), x)$$

řešení $f(x)$, jež je dáno formulí

$$f(x) = F(b, g(x)).$$

Důkaz. Tvrzení věty plyne bezprostředně z rovností

$$f(G(x, y)) = F(b, g(G(x, y))) = F(F(b, g(y)), x) = \\ = F(f(y), x).$$

Ponecháváme na čtenáři, aby prověřil, že pokud funkce $G(x, y)$ splňuje podmínku a) a funkcionální rovnice (11) má řešení, splňuje funkce $F(u, v)$ nutně podmínku b) výše uvedené věty.

Aniž bychom se zaměřili na podrobnosti, ilustrujme to, co jsme uvedli výše, na dvou příkladech; první z těchto příkladů budeme řešit přímo (bez využití právě dokázané věty).

a) Řešme funkcionální rovnici

$$f\left(\frac{y}{x}\right) = [f(y)]^{1/x}. \tag{12}$$

Tato rovnice je rovnicí tvaru (11), kde klademe

$$G(x,y) = \frac{y}{x} \text{ a } F(u,v) = u^{1/v}.$$

Je zřejmé, že pokud je $a \neq 0$ libovolné reálné číslo, má rovnice $a/x = t$ řešení vzhledem k $x : x = a/t$. Předpokládejme tedy, že rovnice (12) má řešení $f(x)$, a položme $y = a$, $x = a/t$. Dostáváme pak

$$f(t) = [f(a)]^{t/a} = ([f(a)]^{1/a})^t.$$

Na druhé straně je už z tvaru funkcionální rovnice (12) vidět, že pro všechna x musí být $f(x) > 0$, neboť by v opačném případě neměl výraz $[f(y)]^{1/x}$ smysl pro každé x. Označíme-li tedy $c = [f(a)]^{1/a}$, bude c kladné reálné číslo.

Je-li tedy $f(x)$ řešení funkcionální rovnice (12), je $f(x) = c^x$, kde c je kladné reálné číslo. A obráceně se můžeme bezprostředně přesvědčit o tom, že každá taková funkce také výše uvedenou funkcionální rovnici splňuje.

b) Řešme funkcionální rovnici

$$f(y^x) = xf(y), \tag{13}$$

kde je $y > 0$.

Tato rovnice je rovnicí tvaru (11), kde klademe

$$G(x, y) = y^x \quad \text{a} \quad F(u, v) = uv.$$

Je známo, že pro každé reálné číslo $a > 0$, $a \neq 1$ má rovnice $a^x = t$ řešení $x = \log_a t$. Dále jsou zřejmě pro každé reálné číslo b splněny rovnosti

$$F(b, \log_a a) = F(b, 1) = b . 1 = b,$$

$$F(b, \log_a y^x) = b \log_a y^x = x(b \log_a y) =$$
$$= F(b \log_a y, x) = F(F(b, \log_a y), x).$$

Pak však z výše dokázané věty plyne, že všechna řešení funkcionální rovnice (13) jsou dána formulí

$$f(x) = b \log_a x,$$

kde a, b jsou reálná čísla, $a > 0$, $a \neq 1$, b libovolné.

5. FUNKCIONÁLNÍ ROVNICE $F(f(x + y), f(x - y), f(x), f(y), x, y) = 0$

Všimneme si nyní podrobněji ještě jedné třídy funkcionálních rovnic, které lze řešit pomocí substituční metody. Jedná se o funkcionální rovnice tvaru

$$F(f(x + y), f(x - y), f(x), f(y), x, y) = 0, \tag{14}$$

kde $F(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6)$ je daná funkce šesti proměnných. (K rovnicím tohoto typu patří rovnice, které jsme vyšetřovali v odstavcích 1, 2b a 2c.) Zde nejsme schopni vyšetřit tyto rovnice podrobně a ve vší úplnosti a odpovědět na otázku, jaké jsou nutné a postačující podmínky, za nichž má takto zapsaná funkcionální rovnice řešení — tak, jak jsme to učinili v případě rovnice $f(x + y) = F(f(y), x)$. Přesto zde pojednáme o dvou cestách, jimiž lze funkcionální rovnici (14) řešit — za jistých dalších předpokladů o funkci $F(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6)$.

I. Předpokládejme, že $f(x)$ je nějaké řešení funkcionální rovnice (14), přičemž je funkce $f(x)$ definována pro $x = 0$, a označme $f(0) = c$. Položíme-li pak v (14) $y = 0$ a $f(0) = c$, dostáváme vztah

$$F(f(x), f(x), f(x), c, x, 0) = 0,$$

a odtud lze případně určit tvar funkce $f(x)$.

A tak vidíme, že *pokud funkce* $F(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6)$ *má tuto vlastnost: existuje reálné číslo c, pro něž má rovnice*

$$F(z, z, z, c, x, 0) = 0$$

jediné řešení vzhledem k $z : z = f(x)$, *pak tato funkce* $f(x)$ *— a jen ona — může být řešením funkcionální rovnice* (14). Pochopitelně zde netvrdíme, že pokud funkce $F(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6)$ tuto vlastnost má, má už také rovnice (14) nutně řešení, a netvrdíme ani to, že pokud řešení rovnice (14) existuje, má už funkce $F(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6)$ výše uvedenou vlastnost.

Podívejme se na dva příklady.

a) Řešme funkcionální rovnici

$$(15)\quad f(x + y) + f(x - y) = f(x) + 6xy\sqrt[3]{f(y)} + x^3.$$

Funkce $F(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6)$ zde má tvar

$$F = u_1 + u_2 - u_3 - 6u_5u_6 \sqrt[3]{u_4} - u_5^3 .$$

Pak je

$$F(z, z, z, c, x, 0) = z - x^3$$

a odtud plyne, že pokud je $f(x)$ řešení funkcionální rovnice (15), je $f(x) = x^3$. Na druhé straně platí

$$(x + y)^3 + (x - y)^3 = 2x^3 + 6xy^2 = x^3 + \\ + 6xy \sqrt[3]{y^3} + x^3$$

a to ukazuje, že funkce $f(x) = x^3$ je skutečně řešením funkcionální rovnice (15) a že tato rovnice jiná řešení nemá.

b) Řešme funkcionální rovnici

$$f(x + y) + 2f(x - y) + f(x) + 2f(y) = \\ = 4x + y . \tag{16}$$

V tomto případě má funkce $F(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6)$ tvar

$$F = u_1 + 2u_2 + u_3 + 2u_4 - 4u_5 - u_6$$

a je

$$F(z, z, z, c, x, 0) = 4z + 2c - 4x .$$

Rovnice

$$F(z, z, z, c, x, 0) = 4z + 2c - 4x = 0$$

má tedy jediné řešení vzhledem k z:

$$z = - \frac{c}{2} + x$$

pro libovolnou reálnou hodnotu c.

Na druhé straně by rovnost

$$-\frac{c}{2} + (x + y) + 2\left(-\frac{c}{2} + (x - y)\right) + \left(-\frac{c}{2} + x\right) + 2\left(-\frac{c}{2} + y\right) = 4x + y,$$

tj. rovnost $4x + y - 3c = 4x + y$, měla být splněna pro libovolné hodnoty proměnných x a y. Je tedy $c = 0$, a to nakonec ukazuje, že funkcionální rovnice (16) má jen jedno řešení, a tím je funkce

$$f(x) = x.$$

Příklad z odstavce 2c ukazuje, že se může stát, že rovnice

$$F(z, z, z, c, x, 0) = 0$$

má jediné řešení vzhledem k z, ale přesto nemá funkcionální rovnice (14) řešení.

II. Vraťme se znovu k obecné funkcionální rovnici

$$F(f(x + y), f(x - y), f(x), f(y), x, y) = 0$$

a předpokládejme, že $f(x)$ je nějaké řešení této rovnice, přičemž je funkce $f(x)$ definována v bodě $x = 0$. Označíme-li $f(0) = c$ a položíme-li v naší rovnici jednak $x = 0$, $y = t$, jednak $x = 0$, $y = -t$ (viz příklad z odstavce 2b), dostaneme vztahy

$$F(f(t), f(-t), c, f(t), 0, t) = 0$$

a

$$F(f(-t), f(t), c, f(-t), 0, -t) = 0,$$

z nichž bychom mohli případně odvodit explicitní výraz pro funkci $f(t)$.

Tyto úvahy nám umožňují vyslovit toto tvrzení: *Nechť má funkce $F(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6)$ následující vlastnost: Existuje reálné číslo c, pro něž má soustava rovnic*

$$F(z, u, c, z, 0, t) = 0,$$
$$F(u, z, c, u, 0, -t) = 0$$

jediné řešení vzhledem k $z : z = f(t)$. Pak tato funkce $f(t)$ — a jen ona — může být řešením funkcionální rovnice (14).

Nebudeme tento obecný případ už dále rozebírat a podíváme se na dva příklady.

a) Řešme funkcionální rovnici

$$(17) \quad f(x + y) - 3f(x - y) = x^2\left[f(y) + 1 - \frac{1}{2}y^2\right] - $$
$$- 2f(x) + y(4x - y).$$

Předpokládejme, že $f(x)$ je nějaké řešení této rovnice, přičemž je funkce $f(x)$ definována v bodě $x = 0$, a označme $f(0) = c$. Za těchto předpokladů položíme v (17) $x = 0$, $y = t$ a poté $x = 0$, $y = -t$. Dostaneme soustavu

$$f(t) - 3f(-t) = -2c - t^2,$$
$$f(-t) - 3f(t) = -2c - t^2.$$

Vynásobíme-li druhou rovnici třemi a výsledek přičteme k první rovnici, dostáváme

$$-8f(t) = -8c - 4t^2$$

neboli

$$f(t) = c + \frac{1}{2}t^2.$$

Položíme-li naproti tomu v (17) $y = 0$, vidíme, že musí být

$$f(x) - 3f(x) = x^2(c + 1) - 2f(x),$$

tj. musí platit $c = -1$. Jedině funkce $f(x) = -1 + \frac{1}{2}x^2$ tedy může být řešením naší funkcionální rovnice (17). Z rovnosti

$$\frac{1}{2}(x + y)^2 - 1 - \frac{3}{2}(x - y)^2 + 3 = x^2\left(\frac{1}{2}y^2 - 1 + \right.$$
$$\left. + 1 - \frac{1}{2}y^2\right) - 2\left(\frac{1}{2}x^2 - 1\right) + y(4x - y),$$

která zřejmě platí pro libovolné reálné hodnoty x a y, plyne, že funkce $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1$ tím řešením také skutečně je.

Na závěr tedy můžeme říci, že funkcionální rovnice (17) má jediné řešení

$$f(x) = -1 + \frac{1}{2}x^2.$$

b) Řešme funkcionální rovnici

$$(18) \qquad f(x) \, . \, f(x + y) = [f(y)]^2 \, [f(x - y)]^2 \, a^{v+4},$$

kde $a > 0$, $a \neq 1$ je pevné, jinak libovolné reálné číslo. Je zřejmé, že tato rovnice patří k rovnicím typu (14); v našem případě má soustava

$$F(z, u, c, z, 0, t) = 0,$$

$$F(u, z, c, u, 0, -t) = 0$$

tvar

$$cz = u^2z^2a^{t+4},$$

$$cu = u^2z^2a^{-t+4}.$$

Tuto soustavu můžeme řešit vzhledem k z při $c \neq 0$ např. tak, že první rovnici vydělíme čtvercem druhé rovnice. Dostáváme pak

$$\frac{cz}{c^2u^2} = \frac{u^2z^2a^{t+4}}{u^4z^4a^{-2t+8}}$$

a odtud plyne

$$z = \sqrt[3]{c}\,.\,a^{t-4/3},$$

pokud je c libovolné nenulové reálné číslo. Je-li $c = 0$, má výše uvedená soustava zřejmě řešení $z = 0$.

Z toho, co dosud bylo řečeno, plyne, že pokud je $f(x)$ nenulová funkce, která vyhovuje funkcionální rovnici (18) (konstantní nulová funkce tuto rovnici zřejmě řeší), platí

$$f(x) = \sqrt[3]{c}\,.\,a^{x-4/3},$$

a kromě toho je $f(0) = c$. Pak však platí

$$c = \sqrt[3]{c}\,.\,a^{-4/3},$$

čili nakonec $c = \pm\, a^{-2}$. Řešeními funkcionální rovnice (18) tedy mohou být pouze funkce

$$f(x) = a^{x-2},\ f(x) = -a^{x-2},\ f(x) = 0.$$

Bezprostředním dosazením do rovnice (18) se přesvědčíme o tom, že tyto funkce danou rovnici také skutečně řeší.

Nakonec ještě poznamenejme, že stejně jako v případě I, i zde může mít soustava

$$F(z, u, c, z, 0, t) = 0,$$

$$F(u, z, c, u, 0, -t) = 0$$

jediné řešení vzhledem k z při některé reálné hodnotě c, ale funkcionální rovnice

$$F(f(x + y), f(x - y), f(x), f(y), x, y) = 0$$

přesto nemusí mít řešení.

Skutečně: podívejme se na rovnici

$$f(x + y) + f(x - y) + f(y) = x^2 - y + f(x).$$

To je zřejmě rovnice tvaru (14), přičemž je

$$F(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6) = u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - \\ - u_5^2 + u_6.$$

Odpovídající soustava má tvar

$$2z + u + t - c = 0,$$

$$2u + z - t - c = 0,$$

a jak je vidět, má pro každé reálné c jediné řešení vzhledem k z:

$$z = \frac{c}{3} - t.$$

Má-li tedy daná funkcionální rovnice řešení $f(x)$, pak je

$$f(x) = \frac{c}{3} - x \quad \text{a} \quad f(0) = c = \frac{c}{3},$$

tj. $c = 0$ a $f(x) = -x$. Na druhé straně ovšem rovnice

$$-(x + y) - (x - y) - y = x^2 - y - x,$$

jež je ekvivalentní s rovnicí

$$x^2 + x = 0,$$

zřejmě neplatí pro libovolné reálné hodnoty x a y. Daná funkcionální rovnice tedy nemá řešení.

6. FUNKCIONÁLNÍ ROVNICE $F(f(x + y), f(x - y), f(x), x, y) = 0$

Často se můžeme setkat s funkcionálními rovnicemi tvaru (14),

$$F(f(x + y), f(x - y), f(x), f(y), x, y) = 0,$$

v nichž se však nevyskytuje výraz $f(y)$. Zastavíme se nyní podrobněji u této třídy funkcionálních rovnic. Jinými slovy: budeme vyšetřovat funkcionální rovnice tvaru

$$F(f(x + y), f(x - y), f(x), x, y) = 0, \tag{19}$$

kde $F(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ je daná funkce pěti proměnných. Každou takovou rovnici lze pochopitelně řešit metodami, které jsme popsali výše; zde se však budeme věnovat dvěma novým metodám řešení rovnic tvaru (19), které lze použít i v případě, kdy metody popsané před chvílí nevedou ke konkrétnímu výsledku.

I. Předpokládejme, že funkce $f(x)$ je řešením rovnice

$$F(f(x + y), f(x - y), f(x), x, y) = 0,$$

přičemž funkce $f(x)$ je definována v bodě $x = 0$, a označme $f(0) = c$. Položíme-li pak v (19) postupně $x = 0$, $y = t$; $x = t$, $y = 2t$ a $x = t$, $y = -2t$, dostaneme soustavu

$$F(f(t), f(-t), c, 0, t) = 0,$$
$$F(f(3t), f(-t), f(t), t, 2t) = 0,$$
$$F(f(-t), f(3t), f(t), t, -2t) = 0,$$

z níž lze případně určit funkci $f(t)$.

Vidíme tedy, že ***pokud funkce** $F(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ **splňuje následující podmínku**: existuje reálné číslo c, pro něž má soustava tří rovnic*

$$F(z, u, c, 0, t) = 0,$$
$$F(v, u, z, t, 2t) = 0,$$
$$F(u, v, z, t, -2t) = 0$$

o třech neznámých u, z, v jediné řešení vzhledem k z : $z = f(t)$, pak tato funkce $f(x)$ — a jen ona — může být řešením dané funkcionální rovnice

$$F(f(x + y), f(x - y), f(x), x, y) = 0.$$

Pochopitelně stejně jako v předcházejícím odstavci, ani zde není tato podmínka ani nutná, ani postačující k tomu, aby funkcionální rovnice (19) měla řešení. Nicméně však toto tvrzení ukazuje jednu z možných cest k řešení této rovnice.

Podívejme se na dva příklady:

a) Řešme funkcionální rovnici

$$f(x + y) + 2f(x - y) = 3f(x) - y. \tag{20}$$

To je zřejmě rovnice vyšetřovaného tvaru, přičemž je

$$F(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) = u_1 + 2u_2 - 3u_3 + u_5.$$

Odpovídající soustava má tvar

$$z + 2u - 3c + t = 0,$$

$$v + 2u - 3z + 2t = 0,$$

$$u + 2v - 3z - 2t = 0.$$

Snadno se můžeme přesvědčit o tom, že tato soustava má jediné řešení vzhledem k z, a to

$$z = c + t.$$

To ukazuje na to, že pokud má funkcionální rovnice (20) řešení $f(x)$, musí být

$$f(x) = c + x,$$

kde c je libovolné reálné číslo.

Z rovnosti

$$c + (x + y) + 2(c + (x - y)) = 3c + 3x - y,$$

která platí pro libovolné reálné hodnoty c, x, y, pak naopak plyne, že takto určená funkce $f(x) = c + x$ (s libovolným reálným číslem c) skutečně vyhovuje dané funkcionální rovnici (20).

b) Řešme funkcionální rovnici

$$(21) \qquad 2f(x + y) + f(x - y) = f(x)\,(2a^v + a^{-v}),$$

kde a je pevné reálné číslo, $a > 0$, $a \neq 1$.

V tomto případě je

$$F(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) = 2u_1 + u_2 - u_3(2a^{u_5} + a^{-u_5}).$$

Odpovídající soustava má tvar

$$F(z, u, c, 0, t) = 2z + u - c(2a^t + a^{-t}) = 0,$$

$$F(v, u, z, t, 2t) = 2v + u - z(2a^{2t} + a^{-2t}) = 0,$$

$$F(u, v, z, t, -2t) = 2u + v - z(2a^{-2t} + a^{2t}) = 0.$$

Tato soustava však má pro libovolné reálné c jediné řešení vzhledem k z, a to

$$z = ca^t.$$

Proto může být každá z funkcí

$$f(x) = ca^x$$

(c je reálné číslo) řešením rovnice (21). Bezprostředním ověřením se přesvědčíme o tom, že tomu skutečně tak je.

II. Někdy můžeme rovnici (19) řešit i následujícím způsobem: Předpokládejme, že $f(x)$ je jedno řešení této rovnice, a nechť je funkce $f(x)$ definována pro $x = 0$. Nechť dále existuje takové reálné číslo α, pro něž výraz

$$F(f(t + 2\alpha), f(t), f(t + \alpha), t + \alpha, \alpha)$$

nezávisí na $f(t + \alpha)$ ani na α, tj. nechť existuje taková funkce tří proměnných $G(v_1, v_2, v_3)$, že je

$$F(f(t + 2\alpha), f(t), f(t + \alpha), t + \alpha, \alpha) = \\ = G(f(t + 2\alpha), f(t), t + \alpha).$$

Označíme-li pak $f(0) = a$, $f(\alpha) = b$ a položíme-li ve vztahu

$$F(f(x + y), f(x - y), f(x), x, y) = 0$$

postupně $x = 0$, $y = t$; $x = t + \alpha$, $y = \alpha$; $x = \alpha$, $y = t + \alpha$, dostaneme soustavu

$$F(f(t), f(-t), a, 0, t) = 0,$$

$$F(f(t + 2\alpha), f(t), f(t + \alpha), t + \alpha, \alpha) = \\ = G(f(t + 2\alpha), f(t), t + \alpha) = 0,$$

$$F(f(t + 2\alpha), f(-t), b, \alpha, t + \alpha) = 0,$$

z níž lze případně odvodit explicitní vyjádření pro funkci $f(x)$.

Lze tedy vyslovit toto tvrzení: *Nechť má funkce $F(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ tyto vlastnosti:*

(**A**) *existuje reálné číslo α, pro něž je*

$$F(u_1, u_2, u_3, u_4, \alpha) = G(u_1, u_2, u_4),$$

***kde** $G(v_1, v_2, v_3)$ je jistá funkce tří proměnných;*

(**B**) *existují reálná čísla a, b, pro něž má soustava rovnic*

$$F(z, u, a, 0, t) = 0,$$

$$G(v, z, t + \alpha) = 0,$$

$$F(v, u, b, \alpha, t + \alpha) = 0$$

jediné řešení vzhledem k $z : z = f(t)$.

Pak takto definovaná funkce $f(x)$ — a jen ona — může být řešením dané funkcionální rovnice

$$F(f(x + y), f(x - y), f(x), x, y) = 0.$$

Podívejme se na dva příklady.

a) Řešme funkcionální rovnici

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x) \cos y. \tag{22}$$

To je rovnice uvažovaného typu, neboť zde je

$$F(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) = u_1 + u_2 - 2u_3 \cos u_5 .$$

Kromě toho pro $u_5 = \frac{1}{2} \pi$ platí

$$F\left(u_1, u_2, u_3, u_4, \frac{1}{2} \pi\right) = u_1 + u_2 ,$$

tj. je splněna podmínka (A), a soustava z podmínky (B) pak má tvar

$$z + u - 2a \cos t = 0 ,$$

$$v + z = 0 ,$$

$$v + u - 2b \cos \left(\frac{1}{2} \pi + t\right) = 0 .$$

Není těžké dokázat, že tato soustava má jediné řešení vzhledem k z, a to

$$z = a \cos t + b \sin t .$$

Má-li tedy funkcionální rovnice (22) řešení $f(x)$, má toto řešení tvar

$$f(x) = a \cos x + b \sin x ,$$

kde a a b jsou jistá reálná čísla.

Z vlastností trigonometrických funkcí na druhé straně plyne, že je

$$a \cos (x + y) + b \sin (x + y) + a \cos (x - y) + \\ + b \sin (x - y) = 2a \cos x \cos y + 2b \sin x \cos y = \\ = 2(a \cos x + b \sin x) \cos y .$$

Tímto postupem jsme s konečnou platností dokázali, že všechna řešení funkcionální rovnice (22) jsou dána formulí

$$f(x) = a \cos x + b \sin x,$$

kde a a b jsou libovolná reálná čísla.

b) Řešme funkcionální rovnici

$$(23) \qquad f(x + y) + f(x - y) - f(x)(y + 2) + \\ + y(x^2 - 2y) = 0.$$

Také tato rovnice je tvaru (19), neboť zde je

$$F(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) = u_1 + u_2 - u_3(u_5 + 2) + \\ + u_5(u_4^2 - 2u_5).$$

Položíme-li zde $u_5 = -2$, dostáváme

$$F(u_1, u_2, u_3, u_4, -2) = u_1 + u_2 - 2(u_4^2 + 4).$$

Je tedy splněna podmínka (**A**) a soustava z podmínky (**B**) má tvar

$$z + u - a(t + 2) - 2t^2 = 0,$$

$$v + z - 2((t - 2)^2 + 4) = 0,$$

$$v + u - bt + (t - 2)(4 - 2(t - 2)) = 0.$$

Po úpravách odtud dostáváme soustavu

$$z + u = a(t + 2) + 2t^2,$$

$$v + z = 2(t^2 - 4t + 8),$$

$$v + u = bt + 2(2 - t)(4 - t),$$

která má jediné řešení vzhledem k z, a to

$$z = t^2 + \frac{a - b + 4}{2} t + a.$$

Jinými slovy: ukázali jsme, že pokud je $f(x)$ nějaké řešení funkcionální rovnice (23), je

$$f(x) = x^2 + \frac{a - b + 4}{2} x + a,$$

kde a a b jsou reálná čísla.

Na druhé straně je rovnost

$$(x + y)^2 + \frac{a - b + 4}{2} (x + y) + a + (x - y)^2 +$$
$$+ \frac{a - b + 4}{2} (x - y) + a -$$
$$- \left(x^2 + \frac{a - b + 4}{2} x + a\right) (y + 2) + y(x^2 - 2y) = 0$$

ekvivalentní rovnosti

$$\frac{a - b + 4}{2} xy + ay = 0,$$

a tato poslední rovnost platí pro libovolné reálné hodnoty x a y pouze tehdy, je-li $a = 0$ a $b = 4$.

Funkcionální rovnice (23) má tedy jediné řešení

$$f(x) = x^2.$$

7. JEDNA APLIKACE

Všimneme si množiny R_3 všech vektorů v trojrozměrném prostoru. Budeme předpokládat, že čtenář je seznámen s tím, jak se takové vektory sčítají a jak se násobí číslem*). Současně budeme předpokládat, že mu jsou známy pojmy jako úhel dvou vektorů, délka vektoru a jednotkový vektor.

Položme si úkol zavést v R_3 dvě nové operace. První z těchto operací (budeme jí říkat *skalární součin*) přiřazuje každé dvojici vektorů $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ jediné reálné číslo $\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b}$, druhá operace (budeme jí říkat *vektorový součin*) přiřazuje každé dvojici vektorů $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ jediný vektor $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$; přitom požadujeme, aby byly splněny následující axiómy:

A$_1$. *Pro každé dva vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in R_3$ a pro každé reálné číslo α je*

$$\alpha(\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b}) = (\alpha\boldsymbol{a}).\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}.(\alpha\boldsymbol{b});$$

$$\alpha(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = (\alpha\boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \times (\alpha\boldsymbol{b}).$$

A$_2$. *Pro každou trojici vektorů $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c} \in R_3$ je*

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}).\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}.\boldsymbol{c} + \boldsymbol{b}.\boldsymbol{c};$$

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}).$$

A$_3$. *Skalární součin libovolných dvou vektorů závisí pouze na délkách těchto vektorů a na úhlu, který spolu svírají. Je-li $\mathbf{e}$ jednotkový vektor, je $\mathbf{e}.\mathbf{e} = 1$.*

A$_4$. *Délka vektorového součinu libovolných dvou vektorů $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ závisí pouze na délkách těchto vektorů a na úhlu, který spolu svírají.*

Jsou-li $\mathbf{e}_1$ a $\mathbf{e}_2$ dva kolmé jednotkové vektory, je $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$ jednotkový vektor, který je kolmý k rovině definované vektory $\mathbf{e}_1$ a $\mathbf{e}_2$, a vektory $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ a $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$ tvoří pravou (orientovanou) trojici.

---

*) Viz např. *Bruno Budinský - Stanislav Šmakal:* Vektory v geometrii. Škola mladých matematiků, svazek 28, Mladá fronta 1971. (Pozn. překl.)

Poznámka 1. Jsou-li $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ tři vektory, které neleží v jedné rovině, řekneme, že tvoří *pravou* (orientovanou) *trojici*, jestliže při pohledu z vrcholu vektoru $\boldsymbol{c}$ má úhel mezi vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ (ve směru od vektoru $\boldsymbol{a}$ k vektoru $\boldsymbol{b}$) směr opačný ke směru oběhu hodinových ručiček.

2. Z axiómů A_3 a A_4 je vidět, že když je ϱ libovolné otáčení v prostoru a $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ jsou libovolné vektory, platí

$$(\boldsymbol{a}\varrho).(\boldsymbol{b}\varrho) = \boldsymbol{a}.\boldsymbol{b};$$

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\,\varrho = (\boldsymbol{a}\varrho) \times (\boldsymbol{b}\varrho).$$

Předpokládejme především, že operace skalárního a vektorového součinu vyhovující výše uvedeným axiómům skutečně existují, a dokážeme, že pak je

$$\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos\varphi$$

a

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\sin\varphi)\,\mathbf{e},$$

kde φ je úhel mezi vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ a $\mathbf{e}$ je jednotkový vektor kolmý na rovinu tvořenou vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ a vytvářející s těmito vektory pravou trojici.

Nechť jsou tedy $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ libovolné vektory. Pak je $\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\,\mathbf{e}_1$ (symbolem $|\boldsymbol{a}|$ značíme délku vektoru $\boldsymbol{a}$) a $\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{b}|\,\mathbf{e}_2$, kde $\mathbf{e}_1$ a $\mathbf{e}_2$ jsou jednotkové vektory. Z axiómu A_1 pak plyne, že je

$$\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\,(\mathbf{e}_1.\mathbf{e}_2)$$

a

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\,(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2).$$

Stačí tedy, když určíme součiny $\mathbf{e}_1.\mathbf{e}_2$ a $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$.

Označme φ úhel mezi vektory $\mathbf{e}_1$ a $\mathbf{e}_2$. Z axiómu A_3 pak plyne, že skalární součin $\mathbf{e}_1 . \mathbf{e}_2$ závisí pouze na úhlu φ: $\mathbf{e}_1 . \mathbf{e}_2 = f(\varphi)$. Označíme-li nyní symbolem $\mathbf{e}$ jednotkový vektor kolmý k rovině určené vektory $\mathbf{e}_1$ a $\mathbf{e}_2$ a vytvářející s těmito dvěma vektory pravou trojici, pak existují taková reálná čísla α, β, γ, pro něž platí

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \alpha \mathbf{e}_1 + \beta \mathbf{e}_2 + \gamma \mathbf{e}.$$

(Zde jsme využili následujícího tvrzení: *Jsou-li* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ *tři vektory, které neleží v jedné rovině, pak ke každému vektoru* $\mathbf{d} \in R_3$ *existují reálná čísla* α, β, γ *tak, že je* $\mathbf{d} = \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c}$. Důkaz tohoto tvrzení lze nalézt v každé knize, v níž se hovoří o vektorech, ale zainteresovaný čtenář si je může dokázat i samostatně. K tomu stačí umístit čtyři vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ do společného počátku, poté proložit koncem vektoru $\mathbf{d}$ roviny rovnoběžné s rovinami určenými postupně dvojicemi vektorů $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$, $\mathbf{b}$ a $\mathbf{c}$, $\mathbf{c}$ a $\mathbf{a}$, a nakonec použít definice součtu vektorů v prostoru.)

Na druhé straně je zřejmě

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = (-\mathbf{e}_1) \times (-\mathbf{e}_2) = -\alpha \mathbf{e}_1 - \beta \mathbf{e}_2 + \gamma \mathbf{e},$$

a tudíž je

$$\alpha = \beta = 0 \quad \text{a} \quad \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \gamma \mathbf{e}.$$

Podle axiómu A_4 závisí γ pouze na úhlu φ, tj. $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = g(\varphi) . \mathbf{e}$.

Abychom určili funkce $f(\varphi)$ a $g(\varphi)$, zvolme libovolné reálné číslo ψ z intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ a označme symboly $\mathbf{e}_3$ a $\mathbf{e}_4$ jednotkové vektory, které svírají s vektorem $\mathbf{e}_1$ úhly $\varphi + \psi$ a $\varphi - \psi$ a leží v rovině určené vektory $\mathbf{e}_1$ a $\mathbf{e}_2$. (Nakreslete si obrázek.) Pak svírají vektory $\mathbf{e}_3$ a $\mathbf{e}_4$ s vektorem $\mathbf{e}_2$ úhel ψ. Protože rovnoběžník utvořený vektory $\mathbf{e}_3$ a $\mathbf{e}_4$ je kosočtverec (je totiž $|\mathbf{e}_3| = |\mathbf{e}_4| = 1$) a úhlopříčka kosočtverce půlí odpovídající úhel u vrcholu kosočtverce, leží vektor $\mathbf{e}_2$ na této úhlopříčce. Odtud ihned plyne, že je kolineární s vektorem $\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4$, tj. že platí

$$\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4 = \lambda \mathbf{e}_2,$$

kde $|\lambda|$ je délka úhlopříčky kosočtverce. Je-li přitom $\psi < \frac{1}{2}\pi$, mají vektory $\mathbf{e}_2$ a $\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4$ stejný směr a je $\lambda > 0$, je-li $\psi > \frac{1}{2}\pi$, mají opačný směr a je $\lambda < 0$. Na druhé straně dostáváme pomocí kosinové věty vztah

$$|\lambda| = 2\,|\cos\psi|,$$

a odtud konečně plyne, že je

$$\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4 = (2\cos\psi)\,\mathbf{e}_2.$$

Je tedy

$$\mathbf{e}_1 . \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_1 . \mathbf{e}_4 = 2(\mathbf{e}_1 . \mathbf{e}_2)\cos\psi$$

a

$$(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3) + (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_4) = (2\cos\psi)(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2)$$

neboli — což je totéž —

$$f(\varphi + \psi) + f(\varphi - \psi) = 2f(\varphi)\cos\psi$$

a

$$g(\varphi + \psi) + g(\varphi - \psi) = 2g(\varphi)\cos\psi.$$

My jsme však už viděli, že funkcionální rovnice

$$h(x + y) + h(x - y) = 2h(x)\cos y$$

má nekonečně mnoho řešení

$$h(x) = A\cos x + B\sin x.$$

Funkce $f(\varphi)$ a $g(\varphi)$ tedy mají tvar

$$f(\varphi) = c_1 \cos \varphi + c_2 \sin \varphi$$

a

$$g(\varphi) = d_1 \cos \varphi + d_2 \sin \varphi,$$

kde c_1, c_2, d_1, d_2 jsou jistá reálná čísla. Abychom tato čísla určili, musíme si uvědomit, že podle axiómů $\mathbf{A}_3$ a $\mathbf{A}_4$ je $f(0) = 1$ a $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Ukážeme, že kromě toho je $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ a $g(0) = 0$: Jsou-li $\mathbf{e}_1$ a $\mathbf{e}_2$ dva kolmé jednotkové vektory ($\mathbf{e}_1 \perp \mathbf{e}_2$), provedeme rotaci ϱ okolo osy $\mathbf{e}_2$ o úhel π. Pak bude

$$\mathbf{e}_1 . \mathbf{e}_2 = (\mathbf{e}_1\varrho) . (\mathbf{e}_2\varrho) = (-\mathbf{e}_1) . \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1 . \mathbf{e}_2,$$

což znamená, že je $\mathbf{e}_1 . \mathbf{e}_2 = 0$, tj. $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Budiž nakonec $\mathbf{e}$ libovolný jednotkový vektor. Pak z axiómu $\mathbf{A}_4$ plyne, že je $\mathbf{e} \times \mathbf{e} = k\mathbf{e}$, kde k je reálné číslo. Odtud však dostáváme

$$k\mathbf{e} = \mathbf{e} \times \mathbf{e} = (-\mathbf{e}) \times (-\mathbf{e}) = -k . \mathbf{e},$$

tj. $k = 0$ a $g(0) = 0$.

Tímto postupem jsme určili konstanty c_1, c_2, d_1, d_2:

$$c_1 = d_2 = 1,$$
$$c_2 = d_1 = 0,$$

a to ukazuje, že $f(\varphi) = \cos \varphi$ a $g(\varphi) = \sin \varphi$.

Z toho, co zde dosud bylo řečeno, můžeme tedy odvodit tento závěr: Existuje-li skalární a vektorový součin vyhovující axiómům $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$, $\mathbf{A}_4$, pak pro libovolné dva vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ platí rovnosti

$$\boldsymbol{a} . \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}| \cos \varphi,$$

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}| \sin \varphi)\, \boldsymbol{e},$$

kde φ je úhel mezi vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$.

Naopak můžeme bezprostředně ověřit, že takto definované součiny skutečně vyhovují uvedeným axiómům.

Tím jsme tedy vyřešili úkol, který jsme si dali na začátku tohoto odstavce.

Kapitola druhá

CAUCHYHO METODA

1. HUSTÉ MNOŽINY NA ČÍSELNÉ OSE

Než budeme formulovat a objasňovat Cauchyho metodu řešení funkcionálních rovnic, uvedeme několik definic a vět z matematické analýzy.

Množina A reálných čísel se nazývá *hustá*, jestliže každý interval, který má nenulovou délku (tj. který nezdegeneruje v jeden jediný bod), obsahuje prvky množiny A.

Věta. *Množina Q racionálních čísel je hustá množina.*

Důkaz. Budiž $\Delta = (a, b)$ libovolný interval na číselné ose. Označme ε jeho délku: $\varepsilon = b - a > 0$. Pak je zřejmé, že existuje přirozené číslo n_0, pro něž je $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ neboli — což je totéž — $0 < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Předpokládejme dále, že je $b > 0$ (v případě $b < 0$ probíhají úvahy analogicky). Protože posloupnost $\frac{m}{n_0}$ pro $m = 1, 2, \ldots$, neomezeně roste, existuje takové přirozené číslo m_0, pro něž je $\frac{m_0}{n_0} < b \leqq \frac{m_0 + 1}{n_0}$. Jestliže nyní předpokládáme, že je $\frac{m_0}{n_0} \leqq a$, dostaneme nerovnosti

$$\varepsilon = b - a \leqq \frac{m_0 + 1}{n_0} - \frac{m_0}{n_0} = \frac{1}{n_0} < \varepsilon,$$

které vedou ke sporu $\varepsilon < \varepsilon$.

Musí tedy platit $a < \frac{m_0}{n_0} < b$, tj. interval (a, b) obsahuje racionální číslo $\frac{m_0}{n_0}$.

Věta je dokázána.

Účelnost právě zavedeného pojmu husté množiny je patrna z následující věty:

Věta. *Budiž A hustá množina reálných čísel. Pak ke každému reálnému číslu α existuje konvergentní posloupnost*

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

čísel náležejících do množiny A, která má za limitu číslo α.

Důkaz. Protože množina A je hustá, existuje ke každému přirozenému číslu n číslo $a_n \in A$ tak, že je $a_n \in \left(\alpha - \frac{1}{n}, \alpha + \frac{1}{n}\right)$, tj. že platí

$$\alpha - \frac{1}{n} < a_n < \alpha + \frac{1}{n}.$$

Z těchto posledních dvou nerovností však už plyne, že posloupnost

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

konverguje a má za limitu číslo α.

Věta je dokázána.

2. SPOJITÉ FUNKCE

Připomeňme, že funkce f s definičním oborem D se nazývá *spojitá v bodě* $x_0 \in D$, jestliže má limitu pro $x \to x_0$ a jestliže tato limita je totožná s její hodnotou v bodě x_0, tj. s hodnotou $f(x_0)$. Jinými slovy: Funkce $f(x)$ je spojitá v bodě x_0, jestliže pro každou konvergentní posloupnost

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots,$$

která má za limitu číslo x_0 a je tvořena body, jež patří do definičního oboru funkce $f(x)$, je také odpovídající posloupnost funkčních hodnot

$$f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$$

konvergentní a má za limitu číslo $f(x_0)$.

Věta. *Jestliže spojité funkce $f(x)$ a $g(x)$ se společným definičním oborem nabývají stejných funkčních hodnot na nějaké husté množině reálných čísel A, pak jsou totožné.*

Důkaz. Budiž α libovolné reálné číslo. Víme už, že existuje konvergentní posloupnost

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

čísel patřících do množiny A, která má za limitu číslo α. Pak však ze spojitosti funkcí $f(x)$ a $g(x)$ a ze skutečnosti, že pro každé $a \in A$ je $f(a) = g(a)$, plyne, že je

$$f(\alpha) = \lim_{n \to \infty} f(a_n) = \lim_{n \to \infty} g(a_n) = g(\alpha).$$

Věta je dokázána.

8. PODSTATA A FORMULACE CAUCHYHO METODY ŘEŠENÍ FUNKCIONÁLNÍCH ROVNIC

Neřekneme-li výslovně opak, budeme všude v dalším hledat jen taková řešení zkoumaných funkcionálních rovnic, která jsou spojitými funkcemi.

Cauchyho metoda tkví — řečeno co nejobecněji — v tom, že se nejprve určí řešení uvažované funkcionální rovnice, které je definováno na nějaké husté množině reálných čísel. Poté se využije spojitosti tohoto řešení a podle poslední z výše dokázaných vět se řešení definuje pro libovolná reálná čísla.

Obvykle se řešení hledá nejprve na množině všech racionálních čísel (která je, jak jsme před chvílí viděli, hustá). Za tímto účelem se často postupuje podle následujícího schématu:

1. Nějakým vhodným postupem (například substituční metodou) se určí řešení $f(x)$ dané funkcionální rovnice na množině všech přirozených čísel.

2. Dokáže se, že takto nalezené řešení vyhovuje rovnici také

a) pro $x = 0$,
b) pro všechny celé záporné hodnoty proměnné x,
c) pro všechny racionální hodnoty proměnné x.

3. Využije se hustoty množiny racionálních čísel a spojitosti funkce $f(x)$; tím bude zaručeno, že takto určené řešení vyhovuje rovnici pro libovolné reálné hodnoty x.

Takto formulovaná Cauchyho metoda je vhodná pouze pro takové funkcionální rovnice, jejichž řešení je definováno a spojité na celé číselné ose. Lze se ale lehko přesvědčit o tom, že se touto metodou dají řešit i rovnice, jejichž řešení jsou definována a spojitá na nějaké množině D, jíž může být interval nebo sjednocení intervalů. Je-li totiž A hustá množina reálných čísel, je množina $A_1 = A \cap D$ hustá v D v tom smyslu, že pro každé číslo $\alpha \in D$ existuje konvergentní posloupnost

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

čísel ležících v A_1, která má za limitu číslo α.

Důkaz této skutečnosti přenecháváme čtenáři.

4. NĚKOLIK KLASICKÝCH PŘÍKLADŮ

Budeme Cauchyho metodu ilustrovat na několika funkcionálních rovnicích, které Cauchy řešil už počátkem minulého století.

a) Řešme funkcionální rovnici

$$f(x + y) = f(x) + f(y). \tag{1}$$

Budeme hledat taková řešení této rovnice, která jsou definována a (v souladu s úmluvou, kterou jsme učinili výše) spojitá na celé číselné ose. Předpokládejme tedy, že $f(x)$ je jedno takové řešení rovnice (1). Nejprve dokážeme, že pro každé reálné číslo $n \geqq 2$ platí

$$(2) \qquad f(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = \\ = f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n).$$

Pro $n = 2$ je tato rovnost totožná s rovností (1), a tedy skutečně platí.

Nechť rovnost (2) platí pro nějaké přirozené n. Využijeme-li vztahu (1), dostáváme

$$f(x_1 + x_2 + \ldots + x_n + x_{n+1}) = \\ = f(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + f(x_{n+1}) = \\ = f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n) + f(x_{n+1}),$$

a odtud už plyne hledaná rovnost (2) matematickou indukcí.

Zvolme v (2) $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = x$. Pak bude pro každé přirozené číslo n a pro každé reálné číslo x platit

$$f(nx) = nf(x).$$

Označíme-li tedy $f(1) = c$, dostáváme, že platí

$$f(n) = cn$$

pro každé přirozené n.

Nechť jsou dále m a n libovolná přirozená čísla. Pak je

$$nf\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(n.\frac{m}{n}\right) = f(m) = cm,$$

tj.

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = c\frac{m}{n};$$

je tedy $f(x) = cx$ pro libovolné kladné racionální číslo x.

Položíme-li na druhé straně v (1) $x = y = 0$, vidíme, že je

$$f(0) = 2f(0),$$

neboli — což je totéž — $f(0) = 0$. Odtud plyne, že je

$$f(x - x) = f(0) = 0 = f(x) + f(-x),$$

čili $f(x) = -f(-x)$. Pro každou racionální hodnotu proměnné x tedy platí

$$f(x) = cx.$$

A vezmeme-li nakonec v úvahu, že množina racionálních čísel je hustá a že funkce $f(x)$ je spojitá, zjistili jsme toto: Je-li funkce $f(x)$ řešením funkcionální rovnice (1), je $f(x) = cx$, kde c je libovolné reálné číslo. Naopak z rovnosti

$$c(x + y) = cx + cy$$

plyne, že každá taková funkce také skutečně naši funkcionální rovnici řeší.

Zde je třeba poznamenat, že kdybychom hledali řešení rovnice (1), které by mělo být spojité pouze v jednom pevném bodě, dostali bychom opět týž výsledek. Je-li totiž $f(x)$ funkce, pro niž platí

$$f(x + y) = f(x) + f(y),$$

a je-li tato funkce spojitá v bodě α, pak pro libovolné reálné číslo x_0 platí

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} f(x) &= \lim_{x\to x_0} f((x - x_0 + \alpha) + (x_0 - \alpha)) = \\ &= \lim_{x\to x_0} (f(x - x_0 + \alpha) + f(x_0 - \alpha)) = \\ &= \lim_{x - x_0 + \alpha\to\alpha} f(x - x_0 + \alpha) + f(x_0 - \alpha) = \\ &= f(\alpha) + f(x_0 - \alpha) = f(x_0);\end{aligned}$$

to však ukazuje, že funkce $f(x)$ je spojitá všude, a má tudíž tvar $f(x) = cx$.

b) Řešme funkcionální rovnici

$$f(x + y) = f(x) . f(y) . \tag{3}$$

Opět budeme hledat taková řešení této rovnice, která jsou definována pro všechna reálná x.

Především je zřejmé, že nulová konstantní funkce je jedním z řešení rovnice (3). Zajímá nás nyní, zda má také nenulová řešení. Předpokládejme, že $f(x)$ je jedno takové řešení; z (3) pak plyne, že je

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 > 0,$$

tj. je-li $f(x)$ nenulová hodnota, nabývá funkce $f(x)$ kladných hodnot pro každé x.

Označme nyní $f(1) = c > 0$. Předpokládejme, že pro nějaké přirozené číslo n platí

$$f(n) = c^n.$$

Pak je

$$f(n + 1) = f(n) . f(1) = c^n . c = c^{n+1},$$

a odtud plyne matematickou indukcí, že platí

$$f(x) = c^x \tag{4}$$

pro každé přirozené číslo x.

Analogicky se indukcí snadno dokáže, že pro každé přirozené číslo n a pro každé reálné číslo x platí

$$f(nx) = [f(x)]^n .$$

Jsou-li tedy m a n přirozená čísla, je

$$\left[f\left(\frac{m}{n}\right)\right]^n = f\left(n.\frac{m}{n}\right) = f(m) = c^m = c^{\frac{m}{n}.n} = \left(c^{\frac{m}{n}}\right)^n,$$

tj. rovnost (4) je splněna pro libovolná kladná racionální čísla.

Vezmeme-li na druhé straně v úvahu, že je $f(0) = [f(0)]^2$, tj. že je $f(0) = 1$ a

$$1 = f(0) = f(x - x) = f(x).f(-x),$$

dostáváme, že pro každé záporné racionální číslo x platí

$$f(x) = \frac{1}{f(-x)} = \frac{1}{c^{-x}} = c^x.$$

Je tedy $f(x) = c^x$ pro libovolné racionální hodnoty proměnné x. Využijeme-li ještě hustoty množiny racionálních čísel a spojitosti funkce $f(x)$, docházíme k závěru, že řešeními funkcionální rovnice (3) mohou být všechny funkce tvaru $f(x) = c^x$, kde c je libovolné kladné reálné číslo. Ze zřejmé rovnosti

$$c^{x+y} = c^x.c^y$$

je pak vidět, že tomu skutečně tak je. Nakonec dostáváme tento výsledek: Funkcionální rovnice

$$f(x + y) = f(x).f(y)$$

má nekonečně mnoho řešení, jež jsou dána vzorcem

$$f(x) = c^x,$$

kde c je kladné reálné číslo; navíc je řešením nulová konstantní funkce.

Zde je na místě poznamenat, že výše uvedenou funkcionální rovnici lze řešit též pomocí funkcionální rovnice (1). Je-li totiž $f(x)$ nenulové řešení rovnice (3), pak je, jak jsme viděli, $f(x) > 0$ pro všechna x, a tudíž můžeme utvořit funkci $g(x) = \log f(x)$. Je též zřejmé, že pro libovolná dvě reálná čísla x a y platí

$$g(x + y) = \log f(x + y) = \log (f(x) . f(y)) =$$
$$= \log f(x) + \log f(y) = g(x) + g(y),$$

a proto má funkce $g(x)$ tvar $g(x) = ax$, kde a je libovolné reálné číslo. Odtud pak nakonec dostáváme, že je

$$f(x) = 10^{ax} = (10^a)^x = c^x.$$

Současně je odtud opět patrno, že pokud bychom žádali jen tolik, aby funkce $f(x)$ byla spojitá pouze v jediném bodě (a tedy nikoliv spojitá všude), znovu bychom dostali $f(x) = c^x$.

c) Řešme funkcionální rovnici

$$f(xy) = f(x) + f(y). \tag{5}$$

Nejprve poznamenejme, že pokud hledáme taková řešení této rovnice, která jsou definována a spojitá pro všechna x, pak jediným takovým řešením je nulová konstanta. Vskutku: předpokládáme-li, že $f(x)$ je řešení rovnice (5), pak pro $y = 0$ dostáváme

$$f(0) = f(x . 0) = f(x) + f(0),$$

odkud plyne, že je $f(x) = 0$ pro všechna x, tj. že $f(x)$ je nulová konstanta.

Připusťme nyní, že $f(x)$ je funkce, která je definována a spojitá pro všechna $x \neq 0$ a která je řešením funkcionální rovnice (5). Položme

$$g(t) = f(10^t).$$

Je zřejmé, že funkce $g(t)$ je definována a spojitá pro všechna t a že kromě toho vyhovuje rovnosti

$$g(u + v) = f(10^{u+v}) = f(10^u . 10^v) =$$
$$= f(10^u) + f(10^v) = g(u) + g(v);$$

to ovšem zase ukazuje, že je $g(t) = ct$, kde c je libovolné reálné číslo. Pak však pro $x > 0$ máme

$$f(x) = f(10^{\log x}) = g(\log x) = c \log x.$$

Nechť je konečně $x \neq 0$ libovolné reálné číslo. Využijeme-li toho, že pak je $x^2 > 0$, dostáváme vztah

$$2\, f(x) = f(x^2) = c \log x^2 = 2c \log |x|,$$

neboli

$$f(x) = c \log |x| .$$

Na druhé straně z vlastností logaritmické funkce plyne

$$c \log |xy| = c \log |x| + c \log |y|$$

pro všechny dvojice reálných čísel $x \neq 0$ a $y \neq 0$.

Všechna řešení funkcionální rovnice

$$f(xy) = f(x) + f(y),$$

jež jsou definována a spojitá pro $x \neq 0$, jsou tedy dána formulí

$$f(x) = c \log |x|,$$

kde c je libovolné reálné číslo.

d) Řešme funkcionální rovnici

(6) $$f(xy) = f(x) . f(y).$$

Položme zde nejprve $y = 0$. Dostáváme vztah

$$f(0) = f(x) . f(0),$$

ze kterého plyne, že je buď $f(0) = 0$, nebo $f(x) = 1$, tj. funkce $f(x)$ je totožná s konstantní jednotkovou funkcí, jež je zřejmě řešením funkcionální rovnice (6).

Předpokládejme, že $f(x)$ je nekonstantní funkce, která je definována a spojitá pro všechna x a jež řeší výše uvedenou funkcionální rovnici (6). Pak je funkce

$$g(t) = f(10^t)$$

zřejmě též spojitá a kromě toho vyhovuje následující rovnosti:

$$g(u + v) = f(10^{u+v}) = f(10^u . 10^v) =$$
$$= f(10^u) . f(10^v) = g(u) . g(v);$$

odtud plyne, že funkce $g(t)$ má tvar

$$g(t) = a^t,$$

kde a je libovolné kladné reálné číslo.

Pro $x > 0$ máme

$$f(x) = f(10^{\log x}) = g(\log x) = a^{\log x} =$$
$$= (10^{\log a})^{\log x} = (10^{\log x})^{\log a} = x^{\log a};$$

označíme-li $c = \log a$, bude

$$f(x) = x^c.$$

Je-li x libovolné nenulové reálné číslo, je

$$(f(x))^2 = f(x^2) = x^{2c},$$

a odtud plyne, že pro $x < 0$ je

$$f(x) = |x|^c.$$

Řešením rovnice (6) je tedy funkce definovaná takto:

$$f(x) = x^c \text{ pro } x > 0,$$

$$f(x) = |x|^c \text{ pro } x < 0,$$

$$f(0) = 0.$$

Tato funkce je ovšem pro c < 0 nespojitá v bodě $x = 0$. Protože naopak tato funkce pro $c > 0$ zřejmě vyhovuje rovnici (6), tvoří spolu s konstantou 1 všechna řešení této rovnice.

5. INVERZNÍ FUNKCE

Než přejdeme k jistým zobecněním metod řešení výše uvedených příkladů, podíváme se ještě na jeden pojem z matematické analýzy.

Budiž $f(x)$ funkce s definičním oborem D a nechť M je obor hodnot funkce f (množina hodnot $f(x)$ pro $x \in D$).

Funkce $g(t)$ (existuje-li) se nazývá *inverzní funkcí k funkci* $f(x)$, je-li jejím definičním oborem množina M, oborem hodnot množina D a jsou-li pro všechna $x \in D$ a $t \in M$ splněny rovnosti

$$f(g(t)) = t; \quad g(f(x)) = x.$$

Připomeňme dále, že funkce $f(x)$ definovaná na intervalu Δ se nazývá *nerostoucí (neklesající)* v intervalu Δ, jestliže pro libovolná dvě čísla $x_1, x_2 \in \Delta$ plyne ze vztahu $x_1 < x_2$ nerovnost $f(x_1) \geqq f(x_2)$ ($f(x_1) \leqq f(x_2)$). Jestliže z ostré nerovnosti $x_1 < x_2$ plyne ostrá nerovnost $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$), nazývá se funkce $f(x)$ *rostoucí (klesající)* funkcí.

Věta. *Je-li funkce $f(x)$ definována, spojitá a rostoucí (klesající) v uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$, pak k ní existuje inverzní funkce, která je opět spojitá a rostoucí (klesající).*

Důkaz. Předpokládejme, že funkce $f(x)$ je rostoucí (úvahy v případě, že $f(x)$ je klesající, jsou analogické). Je zřejmé, že množina funkčních hodnot funkce $f(x)$ je tvořena všemi body uzavřeného intervalu $\langle f(a), f(b) \rangle$. Ukážeme, že ke každému číslu $t \in \langle f(a), f(b) \rangle$ existuje jediné číslo $x_0 \in \langle a, b \rangle$ tak, že platí $f(x_0) = t$.

Je-li $t = f(a)$ nebo $t = f(b)$, je hledaná hodnota x_0 totožná s hodnotou a nebo s hodnotou b. Nechť je tedy $f(a) < t < f(b)$. Budeme nyní vyšetřovat množinu T všech čísel $x \in \langle a, b \rangle$, pro něž je $f(x) < t$. Tato množina je neprázdná, neboť $f(a) < t$, a tedy $a \in T$. Množina T je také omezená, neboť je částí uzavřeného intervalu $\langle a, b \rangle$, který je zřejmě omezenou množinou. Označme nyní x_0 supremum množiny T (tj. nejmenší z horních odhadů této množiny). Protože $a \in T$ a b je horní odhad množiny T, je $a < x_0 < b$. Ukážeme, že množina T je totožná s intervalem $\langle a, x_0)$: Zřejmě $\langle a, x_0) \supset T$. Nechť je naopak $x \in \langle a, x_0)$. Pak je $x < x_0$, a x tedy není horní odhad množiny T, tj. existuje číslo $y \in T$ tak, že platí $y > x$. Protože funkce $f(x)$ je rostoucí, je $f(x) < f(y) < t$, a tedy je $y \in T$ a $T = \langle a, x_0)$.

Nyní můžeme vybrat posloupnost čísel

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

tak, že pro všechna n je $a < x_n < x_0$ a že platí $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$. Ze spojitosti funkce $f(x)$ plyne, že je také

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0),$$

a protože bylo $f(x_n) < t$, je $f(x_0) \leqq t$.

Jelikož bylo $x_0 \leqq b$, můžeme vybrat posloupnost

$$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n, \ldots$$

tak, že pro všechna n je $x_0 \leqq \bar{x}_n \leqq b$ a že platí $\lim_{n\to\infty} \bar{x}_n = x_0$. Ale protože $\bar{x}_n \notin T$, je $f(\bar{x}_n) \geqq t$, a tedy $f(x_0) \geqq t$, což nakonec ukazuje, že platí $f(x_0) = t$.

Jestliže připustíme, že existují dvě různá čísla $x_1 < x_2$ z intervalu $\langle a, b\rangle$, pro něž je $f(x_1) = f(x_2) = t$, dostaneme spor s tím, že funkce $f(x)$ je rostoucí:

$$t = f(x_1) < f(x_2) = t.$$

Nyní označíme symbolem $g(t)$ pro každé $t \in \langle f(a), f(b)\rangle$ ono jednoznačně určené číslo z intervalu $\langle a, b\rangle$, pro něž je $f(g(t)) = t$. Tímto postupem získáme funkci $g(t)$, která je zřejmě inverzní k funkci $f(x)$. Zbývá dokázat, že tato funkce je spojitá a rostoucí.

Nechť jsou především t_1, t_2, $t_1 < t_2$ dvě libovolná čísla z intervalu $\langle f(a), f(b)\rangle$. Připustíme-li, že je $g(t_1) \geqq g(t_2)$, dostaneme z předpokladu, že funkce $f(x)$ je rostoucí, nerovnost

$$t_1 = f(g(t_1)) \geqq f(g(t_2)) = t_2\,,$$

a to je ve sporu s volbou čísel t_1 a t_2. Tudíž je funkce $g(t)$ rostoucí.

A konečně nechť je t_0 libovolný bod intervalu $\langle f(a), f(b)\rangle$ a nechť je

$$t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots; \quad t_n \in \langle f(a), f(b)\rangle$$

posloupnost čísel, která má za limitu číslo t_0. Označíme-li $g(t_n) = x_n$ pro $n = 1, 2, \ldots$ a $g(t_0) = x_0$, dostáváme posloupnost

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots .$$

Tato posloupnost je omezená, neboť leží celá v intervalu $\langle a, b \rangle$, a proto existuje hromadný bod této posloupnosti. Předpokládejme, že y_1, $y_2 \in \langle a, b \rangle$, $y_1 \neq y_2$ jsou dva hromadné body této posloupnosti. Pak existují dvě podposloupnosti

$$x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_n}, \ldots ,$$
$$x_{m_1}, x_{m_2}, \ldots, x_{m_n}, \ldots ,$$

pro něž platí $\lim_{n \to \infty} x_{k_n} = y_1$, $\lim_{n \to \infty} x_{m_n} = y_2$. Ze spojitosti funkce $f(x)$ nyní plyne, že je

$$f(y_1) = f(\lim_{n\to\infty} x_{k_n}) = \lim_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = \lim_{n\to\infty} t_{k_n} = t_0 =$$
$$= \lim_{n\to\infty} t_{m_n} = \lim_{n\to\infty} f(x_{m_n}) = f(\lim_{n\to\infty} x_{m_n}) = f(y_2),$$

a odtud dostáváme rovnost $y_1 = y_2$. To však ukazuje, že posloupnost

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

konverguje; kromě toho ze vztahu $\lim_{x_n \to x_0} f(x_n) = f(x_0) = t_0$ plyne, že $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Tato poslední rovnost však neříká nic jiného, než že platí $\lim_{t_n \to t_0} g(t_n) = g(t_0)$. Funkce $g(t)$ je tedy spojitá.

Tím je věta dokázána.

Ponecháváme na čtenáři, aby si uvědomil, jak je větu možno dokázat v případě, že místo uzavřeného (a tedy konečného) intervalu $\langle a, b \rangle$ budeme uvažovat interval otevřený nebo neomezený.

Uvedeme několik příkladů inverzních funkcí.

a) Uvažujme funkci $\sin x$ v intervalu $\langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$.

Jak je známo, je tato funkce v uvažovaném intervalu spojitá a rostoucí. Podle právě dokázané věty tedy existuje inverzní funkce, která je definována, spojitá a rostoucí v intervalu $\langle -1, 1 \rangle$ a nabývá hodnot z intervalu $\langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$. Tato funkce se označuje obvykle $\arcsin t$ (čti arkus sínu).

Zde je třeba poznamenat, že protože funkce $\sin x$ je definována pro všechna reálná čísla x a nabývá hodnot z intervalu $\langle -1, 1 \rangle$, můžeme pro všechna x utvořit výraz $\arcsin (\sin x)$. Rovnost $\arcsin (\sin x) = x$ však bude splněna pouze pro $x \in \langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$. Není těžké dokázat (přenecháváme to čtenáři), že pro libovolné reálné číslo x platí

$$\arcsin (\sin x) = (-1)^k (x + k\pi),$$

kde k je celá část čísla $\dfrac{\pi - x}{2\pi}$.

b) K funkci $\cos x$ uvažované na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ taktéž existuje inverzní funkce, která se značí $\arccos t$. Analogicky jako v bodě a) lze ukázat, že funkce $\arccos t$ je spojitá a klesající v intervalu $\langle -1, 1 \rangle$ a že pro všechna $t \in \langle -1, 1 \rangle$ platí $0 \leqq \arccos t \leqq \pi$.

c) Také k funkcím $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$, které uvažujeme v intervalech $(-\pi/2, \pi/2)$, resp. $(0, \pi)$, existují inverzní funkce, které značíme $\operatorname{arctg} x$ a $\operatorname{arccotg} x$.

6. FUNKCIONÁLNÍ ROVNICE $f(x + y) = F(f(x), f(y))$

První dva příklady uvažované v odstavci 4 měly společné to, že na levé straně odpovídající funkcionální rovnice vystupoval výraz $f(x + y)$. Řešení těchto příkladů byla zcela analogická, a to nás vede k tomu, že si klademe otázku: Je-li $F(u, v)$ funkce dvou proměnných, za jakých podmínek má funkcionální rovnice

$$f(x + y) = F(f(x), f(y)) \tag{7}$$

řešení a jak lze toto řešení najít?

Lemma. *Má-li funkcionální rovnice*

$$f(x + y) = F(f(x), f(y))$$

řešení $f(x)$ a je-li M obor hodnot funkce $f(x)$, pak funkce $F(u, v)$ vyhovuje následujícím podmínkám:

a) *pro všechny dvojice čísel $u, v \in M$ je*

$$F(u, v) = F(v, u);$$

b) *pro všechny trojice čísel $u, v, w \in M$ platí*

$$F(F(u, v), w) = F(u, F(v, w));$$

c) *existuje číslo $e \in M$ tak, že platí*

$$F(e, u) = u$$

pro všechna $u \in M$;

d) *ke každému $u \in M$ existuje $v \in M$ tak, že platí*

$$F(u, v) = e\,.$$

Důkaz. a) Nechť je $u, v \in M$. Pak existují reálná čísla x, y taková, že je $f(x) = u$ a $f(y) = v$, a tedy je

$$F(u, v) = F(f(x), f(y)) = f(x + y) = f(y + x) = \\ = F(f(y), f(x)) = F(v, u)\,.$$

b) Nechť je $u, v, w \in M$. Pak existují reálná čísla x, y a z taková, že je $f(x) = u$, $f(y) = v$, $f(z) = w$. Dále je

$$F(u, v) = F(f(x), f(y)) = f(x + y) \in M$$

a

$$F(v, w) = F(f(y), f(z)) = f(y + z) \in M.$$

Je tedy

$$\begin{gathered} f(F(u, v), w) = F(f(x + y), f(z)) = \\ = f(x + y + z) = F(f(x), f(y + z)) = \\ = F(u, F(v, w)). \end{gathered}$$

c) Označme $e = f(0)$. Protože $f(x) = u \in M$, je

$$F(e, u) = F(f(0), f(x)) = f(0 + x) = f(x) = u.$$

d) Nechť je $u \in M$ a $f(x) = u$. Položme $v = f(-x)$. Pak je

$$F(u, v) = F(f(x), f(-x)) = f(x - x) = f(0) = e.$$

Tím je lemma dokázáno.

Toto lemma však udává jen nutnou podmínku řešitelnosti rovnice (7); není z něj vidět, jak by se dalo najít explicitní vyjádření pro řešení $f(x)$.

Pomocí metod, jichž bylo použito při řešení funkcionálních rovnic z odstavce 4, můžeme nyní popsat následující postup pro určení řešení funkcionální rovnice (7):

Předpokládejme, že $f(x)$ je spojitá funkce, pro niž platí

$$f(x + y) = F(f(x), f(y)),$$

a předpokládejme přitom, že $f(x)$ je definováno pro libovolné reálné hodnoty proměnné x. (Jak jsme viděli v příkladech z odstavce 4, lze tyto úvahy snadno modifikovat pro případ, že funkce $f(x)$ není definována všude.)

Definujme funkce $F_n(t)$ následujícím způsobem:

$$F_1(t) = t, \quad F_n(t) = F(F_{n-1}(t), t) \quad \text{pro } n \geqq 2.$$

Pak je zřejmě $F_1(f(x)) = f(x)$; předpokládáme-li, že pro každé přirozené n platí $F_n(f(x)) = f(nx)$, pak pro $n + 1$ dostáváme

$$f((n+1)\,x) = f(nx + x) = F(f(nx), f(x)) = \\ = F(F_n(f(x)), f(x)) = F_{n+1}(f(x)).$$

Indukcí jsme tedy dokázali, že platí

$$f(nx) = F_n(f(x))$$

pro všechna přirozená n. Speciálně dostáváme pro $x = 1$ vztah

$$f(n) = F_n(c),$$

kde jsme položili $c = f(1)$. Tímto postupem je funkce $f(x)$ definována pro všechny přirozené hodnoty n.

Nechť jsou nyní m a n libovolná přirozená čísla. Pak je

$$F_m(c) = f(m) = f\left(n.\frac{m}{n}\right) = F_n\left(f\left(\frac{m}{n}\right)\right).$$

Budeme-li navíc ještě předpokládat, že k funkci $F_n(t)$ existuje inverzní funkce $G_n(u)$, bude

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = G_n(F_m(c)),$$

a funkce $f(x)$ je tedy definována pro všechny kladné racionální hodnoty proměnné x. Použijeme-li rovnosti

$$f(0) = F(f(x), f(-x)),$$

můžeme $f(x)$ definovat pro libovolné racionální hodnoty proměnné x. A vezmeme-li v úvahu hustotu množiny racionálních čísel a spojitost funkce $f(x)$, můžeme funkci $f(x)$ považovat za definovanou pro všechny reálné hodnoty proměnné x.

Pochopitelně je nakonec třeba ověřit, zda takto určená funkce $f(x)$ rovnici (7) také skutečně vyhovuje.

Metoda řešení funkcionálních rovnic tvaru (7), kterou jsme právě vyložili, je ovšem popsána velice schematicky a vyžaduje ještě řadu upřesnění. Tak není například vůbec jasné, jak je možno definovat funkce $F_n(t)$, zda tyto funkce vůbec existují, zda k nim existují funkce inverzní atd. Zde však nebudeme na tyto otázky v obecném případě odpovídat; odpovíme na ně v každém konkrétním případě.

Vyšetříme nyní co možná nejpodrobněji případ, kdy je funkce $F(u, v)$ mnohočlenem ve dvou proměnných. Pak má $F(u, v)$ tvar

$$F(u, v) = a_1 u^{\lambda_1} v^{\mu_1} + a_2 u^{\lambda_2} v^{\mu_2} + \ldots + a_s u^{\lambda_s} v^{\mu_s},$$

kde jsou $a_1, a_2, \ldots, a_s$ libovolná nenulová reálná čísla a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_s$ jsou celá nezáporná čísla. Jak známo, nazývá se největší z čísel $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ (bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že to je číslo λ_1) stupněm polynomu $F(u, v)$ vzhledem k proměnné u a největší z čísel $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_s$ (nechť je to třeba číslo μ_t) stupněm polynomu $F(u, v)$ vzhledem k proměnné v.

Jestliže má funkcionální rovnice

$$f(x + y) = F(f(x), f(y))$$

řešení, musí především funkce $F(u, v)$ vyhovovat rovnosti

$$F(u, v) = F(v, u),$$

tj. musí splňovat podmínku

$$a_1 u^{\lambda_1} v^{\mu_1} + \ldots + a_t u^{\lambda_t} v^{\mu_t} + \ldots + a_s u^{\lambda_s} v^{\mu_s} =$$
$$= a_1 u^{\mu_1} v^{\lambda_1} + \ldots + a_s u^{\mu_s} v^{\lambda_s},$$

z níž ihned plyne, že je $\lambda_1 = \mu_t$; stupně polynomu $F(u, v)$ vzhledem k proměnným u i v jsou tedy stejné. Označme tento stupeň n ($\lambda_1 = n$).

Dále musí polynom $F(u, v)$ splňovat rovnost

$$F(u, F(v, w)) = F(F(u, v), w).$$

Nyní je

$$F(u, F(v, w)) = a_1 u^n (F(v, w))^{\mu_1} + a_2 u^{\lambda_2} (F(v, w))^{\mu_2} +$$
$$+ \ldots + a_s u^{\lambda_s} (F(v, w))^{\mu_s}$$

a

$$F(F(u, v), w) = a_1 (F(u, v))^n w^{\mu_1} + a_2 (F(u, v))^{\lambda_2} w^{\mu_2} +$$
$$+ \ldots + a_s (F(u, v))^{\lambda_s} w^{\mu_s} =$$
$$= a_1 a_1^n u^{n^2} v^{n\mu_1} w^{\mu_1} + \ldots ;$$

obě poslední rovnosti ukazují, že polynom $F(u, F(v, w))$ je vzhledem k proměnné u stupně n a polynom $F(F(u, v), w)$ je vzhledem k proměnné u stupně n^2. A protože oba tyto polynomy jsou si rovny, musí být $n = n^2$ čili $n = 1$.

Je-li tedy $F(u, v)$ polynom a má-li rovnice (7) řešení, pak má $F(u, v)$ tvar

$$F(u, v) = \alpha uv + \beta u + \beta v + \gamma. \tag{8}$$

Z rovnosti

$$F(F(u, u), v) = F(u, F(u, v))$$

přitom po jednoduchých úpravách dostáváme vztah

$$(\alpha\gamma - \beta^2 + \beta)(u - v) = 0,$$

který má platit pro libovolná u a v; to znamená, že koeficienty polynomu $F(u, v)$ musí navíc splňovat podmínku

$$\alpha\gamma = \beta^2 - \beta. \tag{9}$$

Nyní jsou dvě možnosti:

1. $\alpha = 0$. Pak je $\beta \neq 0$ a $\beta^2 - \beta = 0$, tj. $\beta = 1$, a rovnice (7) má tvar

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + \gamma. \tag{10}$$

Položme $g(x) = f(x) + \gamma$. Je zřejmé, že funkce $f(x)$ je řešením rovnice (10) tehdy a jen tehdy, je-li funkce $g(x)$ řešením rovnice

$$g(x + y) = g(x) + g(y).$$

Všechna řešení funkcionální rovnice

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + \gamma$$

jsou tedy dána vzorcem

$$f(x) = cx - \gamma,$$

kde c je libovolné reálné číslo.

2. $\alpha \neq 0$. Pak je $\gamma = \dfrac{\beta^2 - \beta}{\alpha}$ a rovnice (7) má tvar

$$f(x + y) = \alpha f(x)\, f(y) + \beta f(x) + \beta f(y) + \frac{\beta^2 - \beta}{\alpha},$$

neboli tvar

$$(11) \qquad f(x + y) = \frac{(\alpha f(x) + \beta)\, (\alpha f(y) + \beta) - \beta}{\alpha}.$$

Položíme-li zde $g(x) = \alpha f(x) + \beta$, vidíme, že $f(x)$ je řešením funkcionální rovnice (11) tehdy a jen tehdy, je-li funkce $g(x)$ řešením rovnice

$$g(x + y) = g(x) . g(y).$$

Všechna řešení dané funkcionální rovnice tvoří tedy funkce (viz příklad b, str, 48-49)

$$f(x) = -\frac{\beta}{\alpha} \quad \text{a} \quad f(x) = \frac{c^x - \beta}{\alpha},$$

kde c je libovolné reálné kladné číslo.

Podívejme se například na funkcionální rovnici

$$(12) \qquad f(x + y) = f(x) . f(y) + f(x) + f(y).$$

Ta je zřejmě tvaru (7) s funkcí $F(u, v)$ tvaru (8), kde volíme $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 0$. V tomto případě je podmínka (9) splněna, neboť je $\alpha\gamma = 0 = 1 - 1 = \beta^2 - \beta$; všechna řešení funkcionální rovnice (12) tedy tvoří funkce

$$f(x) = -1 \quad \text{a} \quad f(x) = c^x - 1,$$

kde c je libovolné reálné kladné číslo.

Ještě v jednom případě lze funkcionální rovnici (7) převést na některý z klasických příkladů, které jsme vyšetřovali v odstavci 4, a to tehdy, existuje-li funkce $G(t)$, pro niž platí jedna z rovností

$$G(F(u, v)) = G(u) + G(v),$$

$$G(F(u, v)) = G(u) . G(v).$$

Jestliže totiž v tomto případě předpokládáme, že spojitá funkce $f(x)$ splňuje rovnici

$$f(x + y) = F(f(x), f(y)),$$

pak funkce $g(x) = G(f(x))$ zřejmě splňuje rovnici

$$g(x + y) = g(x) + g(y)$$

nebo rovnici

$$g(x + y) = g(x) . g(y).$$

Řešme například funkcionální rovnici

$$f(x + y) = \frac{f(x) . f(y)}{f(x) + f(y)} . \tag{13}$$

Předpokládejme, že $f(x)$ je nějaké řešení této rovnice. Nejprve je třeba poznamenat, že je $f(x) \neq 0$ pro všechna x, pro něž je funkce $f(x)$ definována: Je-li totiž pro nějaké α hodnota $f(\alpha) = 0$, platí pro každé x

$$f(x) = \frac{f(x - \alpha) f(\alpha)}{f(x - \alpha) + f(\alpha)} = 0,$$

tj. $f(x)$ je nulová konstanta, a ta nevyhovuje rovnici (13).

Funkce $f(x)$ však nemůže být definována pro $x = 0$, neboť kdyby tomu tak bylo, dostali bychom

$$f(0) = \frac{f^2(0)}{2f(0)} , \text{ tj. } 1 = \frac{1}{2} ,$$

a to není možné (předpokládáme, že bylo $f(0) \neq 0$).

Utvořme nyní funkci $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$. Ta je pak definována a spojitá pro všechna ta x, pro něž má stejné vlastnosti i funkce $f(x)$, a kromě toho je $f(x)$ řešením rovnice (13) tehdy a jen tehdy, je-li

$$g(x+y) = \frac{1}{f(x+y)} = \frac{f(x)+f(y)}{f(x).f(y)} = \frac{1}{f(x)} + \frac{1}{f(y)} = g(x) + g(y),$$

tj. vyhovuje-li $g(x)$ funkcionální rovnici

$$g(x+y) = g(x) + g(y).$$

Všechna řešení dané funkcionální rovnice tedy tvoří funkce

$$f(x) = \frac{1}{cx},$$

kde $c \neq 0$ je reálné číslo.

7. JEŠTĚ JEDNO ZOBECNĚNÍ

Rovnici (7) můžeme zobecnit, a to tak, že budeme vyšetřovat funkcionální rovnici

$$f(G(x, y)) = F(f(x), f(y)), \tag{14}$$

kde $G(x, y)$ a $F(u, v)$ jsou funkce dvou proměnných. Na několika konkrétních příkladech ukážeme, jak lze tuto rovnici převést na některou z výše uvedených funkcionálních rovnic.

a) Vyšetřujme funkcionální rovnici

$$f(a(x - y) + b) = Af(x) + Bf(y) + C, \tag{15}$$

kde a, b, A, B, C jsou pevná reálná čísla. Mohou nastat tyto eventuality:

1. $a = A = B = 0$. Pak je

$$f(b) = C$$

a řešením rovnice (15) je každá spojitá funkce $f(x)$, pro kterou platí $f(b) = C$.

2. $A = B = 0$, ale $a \neq 0$. Pak je jediným řešením rovnice (15) konstanta C.

3. $a = 0$, ale čísla A a B nejsou současně rovna nule. Jestliže v tomto případě položíme $x = y$, dostáváme vztah

$$f(b) = (A + B)\,f(x) + C,$$

a odtud plyne: Je-li $A + B \neq 0$, je $f(x) = \text{const}$, a je-li $A + B = 0$, je řešením dané funkcionální rovnice každá funkce $f(x)$, pro niž je $f(b) = C$.

4. $a \neq 0$ a čísla A a B nejsou současně rovna nule. Pak pro $x = y$ dostáváme vztah

$$f(b) = (A + B)\,f(x) + C,$$

který ukazuje: Pokud má rovnice (15) nekonstantní řešení, musí být splněna podmínka $A + B = 0$ čili $A = -B$. Pak však má daná funkcionální rovnice tvar

$$f(a(x - y) + b) = Af(x) - Af(y) + C.$$

Položme zde $y = 0$ a označme $f(0) = l$. Pak máme vztah

$$f(ax + b) = Af((x) - l) + C,$$

a odtud plyne

$$f(a(x - y) + b) = A(f(x - y) - l) + C,$$

čili

$$Af(x - y) - Al = A(f(x) - f(y)),$$

neboli nakonec

$$f(x - y) = f(x) - f(y) + l.$$

Pro $x = 0$ a $y = -z$ však dostáváme

$$f(z) = -f(-z) + 2l, \quad \text{tj.} \quad f(-z) = -f(z) + 2l,$$

a tedy je

$$f(x + z) = f(x) + f(z) - l.$$

Pak platí

$$f(x + z) - l = (f(x) - l) + (f(z) - l)$$

a z toho plyne, že je

$$f(x) = dx + l,$$

kde d je libovolné reálné číslo.

Z rovnosti

$$d(a(x - y) + b) + l = A(dx + l) - A(dy + l) + C,$$

která je ekvivalentní s rovností

$$(da - dA)x - (da - dA)y + db + l - C = 0,$$

naopak plyne, že hledaná funkce $f(x)$ je řešením uvažované funkcionální rovnice pouze pro $a = A$ a $l = C - db$.

A tak má tedy funkcionální rovnice

$$f(a(x - y) + b) = Af(x) - Af(y) + C$$

nekonstantní řešení pouze pro $a = A$. V tomto případě jsou řešeními uvedené rovnice funkce

$$f(x) = dx + C - db,$$

kde d je libovolné reálné číslo.

b) Řešme funkcionální rovnici

$$f\left(\frac{x+y}{1+\frac{xy}{c^2}}\right) = f(x) . f(y) \quad (c \neq 0) . \tag{16}$$

Nejprve upravíme výraz

$$\frac{x+y}{1+\frac{xy}{c^2}}$$

následujícím způsobem:

$$\frac{x+y}{1+\frac{xy}{c^2}} = \frac{c^2x + c^2y}{c^2 + xy} = c\frac{2cx + 2cy}{2c^2 + 2xy} =$$

$$= c\,\frac{2cx + 2cy + c^2 - c^2 + xy - xy}{2c^2 + 2xy + cx - cx + cy - cy} =$$

$$= c\,\frac{(c+x)(c+y) - (c-x)(c-y)}{(c+x)(c+y) + (c-x)(c-y)} =$$

$$= c\,\frac{\frac{c+x}{c-x} \cdot \frac{c+y}{c-y} - 1}{\frac{c+x}{c-x} \cdot \frac{c+y}{c-y} + 1} .$$

Předpokládáme-li nyní, že $f(x)$ je řešení rovnice (16), a položíme-li v této rovnici

$$\frac{c+x}{c-x} = u\,,\ \frac{c+y}{c-y} = v\,,$$

neboli

$$x = c\,\frac{u-1}{u+1}\,,\quad y = c\,\frac{v-1}{v+1}\,,$$

dostaneme:

$$f\left(c\,\frac{uv-1}{uv+1}\right) = f\left(c\,\frac{u-1}{u+1}\right) f\left(c\,\frac{v-1}{v+1}\right).$$

Odtud plyne, že funkce $f(x)$ je řešením dané rovnice tehdy a jen tehdy, vyhovuje-li funkce $g(t) = f\left(c\,\dfrac{t-1}{t+1}\right)$ funkcionální rovnici

$$g(uv) = g(u).g(v);$$

řešením této poslední rovnice jsou, jak víme, funkce

$$g(t) = |t|^a,\quad g(t) = 0.$$

Všechna řešení rovnice (16) jsou tedy tvořena funkcemi

$$f(x) = \left|\frac{c+x}{c-x}\right|^a,\ f(x) = 0\,,$$

kde a je libovolné reálné číslo.

c) Řešme funkcionální rovnici

(17) $$f(\sqrt{x^2+y^2}) = f(x).f(y)\,.$$

Předpokládáme-li, že $f(x)$ je nějaké řešení této rovnice, můžeme ji přepsat následujícím způsobem:

$$f(\sqrt{x^2 + y^2}) = f(\sqrt{x^2}) . f(\sqrt{y^2}) .$$

(Výraz $\sqrt{y^2}$ zde chápeme nikoliv jako $|y|$, jak to bývá obvyklé, nýbrž jako y.) Položíme-li nyní pro $t \geqq 0$

$$g(t) = f(\sqrt{t}) ,$$

máme rovnici

$$g(u^2 + v^2) = f(\sqrt{u^2 + v^2}) =$$
$$= f(\sqrt{u^2}) . f(\sqrt{v^2}) = g(u^2) . g(v^2) .$$

Odtud plyne, že je

$$g(t) = 0 \quad \text{nebo} \quad g(t) = a^{t^2} ,$$

kde a je libovolné kladné číslo.

Pak však jsou řešeními výše uvedené funkcionální rovnice funkce tvaru

$$f(x) = a^{x^2} \quad \text{a} \quad f(x) = 0.$$

8. JEŠTĚ DVĚ FUNKCIONÁLNÍ ROVNICE

Budeme nyní řešit dvě funkcionální rovnice, které se, třebaže vypadají v jistém smyslu komplikovaněji než dosud uvažované rovnice, dají též řešit pomocí Cauchyho metody.

a) Určeme všechny funkce $f(x)$, které jsou spojité na celé číselné ose a řeší funkcionální rovnici

(18) $$f(x + y) + f(x - y) = 2(f(x) + f(y)).$$

Předpokládejme, že $f(x)$ je některá z těchto funkcí. Položíme-li pak v (18) $x = y = 0$, dostáváme vztah $2f(0) = 4f(0)$, z něhož plyne, že musí být $f(0) = 0$.

Podobně dostaneme z rovnice (18) postupně vztahy

$$f(2x) = 4f(x) - f(x - x) = 4f(x),$$
$$f(3x) = 2f(2x) + 2f(x) - f(2x - x) =$$
$$= 8f(x) + 2f(x) - f(x) = 9f(x).$$

Budiž nyní n přirozené číslo, $n > 2$, a předpokládejme, že pro všechna přirozená čísla m, $2 \leqq m \leqq n$, platí

$$f(mx) = m^2 f(x).$$

Pak je

$$f((n + 1)x) = f(nx + x) = 2f(nx) + 2f(x) -$$
$$- f((n - 1)x) = 2n^2 f(x) + 2f(x) - (n - 1)^2 f(x) =$$
$$= (n^2 + 2n + 1)f(x) = (n + 1)^2 f(x);$$

to však znamená, že rovnost

$$f(nx) = n^2 f(x)$$

je splněna pro všechna reálná čísla x a pro každé přirozené číslo n. Označme písmenem c hodnotu funkce $f(x)$ pro $x = 1$, tj. $c = f(1)$. Z uvedené rovnosti pak plyne, že jsou-li m a n libovolná přirozená čísla, je

$$f(n) = cn^2$$

a

$$f\left(n \frac{m}{n}\right) = n^2 f\left(\frac{m}{n}\right) = m^2 f(1).$$

Jinými slovy:

$$f(x) = cx^2 \tag{19}$$

pro každou kladnou racionální hodnotu proměnné x.

Položíme-li nyní znovu v (18) $y = -x$, dostáváme

$$f(0) + f(2x) = 2f(x) + 2f(-x),$$

čili

$$f(x) = f(-x),$$

což ukazuje, že rovnost (19) platí pro libovolné racionální hodnoty proměnné x. Využijeme-li nakonec toho, že funkce $f(x)$ je spojitá a že množina racionálních čísel je hustá, dostáváme jako výsledek, že (19) platí pro každé reálné x.

Z identity

$$c(x + y)^2 + c(x - y)^2 = 2(cx^2 + cy^2)$$

pak naopak definitivně plyne, že všechna řešení funkcionální rovnice (18), která jsou definována a spojitá pro všechna x, mají tvar

$$f(x) = cx^2,$$

kde c je libovolná reálná konstanta.

b) Budiž $a > 0$, $a \neq 1$ pevné reálné číslo. Určeme všechny funkce $f(x)$, které jsou definovány a spojité na celé číselné ose a které vyhovují funkcionální rovnici

$$f(x + y) = a^{xy} f(x)\, f(y). \tag{20}$$

Budiž tedy $f(x)$ některá z těchto funkcí. Postupně pak dostáváme:

$$f(2x) = f(x + x) = a^{x^2}[f(x)]^2 = a^{\frac{2^2 - 2}{2}x^2}[f(x)]^2\,;$$

$$f(3x) = f(2x + x) = a^{2x^2} f(2x)\, f(x) =$$

$$= a^{2x^2}\, a^{x^2}\, [f(x)]^2 f(x) = a^{3x^2}[f(x)]^3 =$$

$$= a^{\frac{3^2 - 3}{2}x^2}[f(x)]^2\,;$$

$$f(4x) = f(3x + x) = a^{3x^2}f(3x)\,f(x) = a^{6x^2}[f(x)]^4 =$$

$$= a^{\frac{16-4}{2}x^2}[f(x)]^4 = a^{\frac{4^2-4}{2}x^2}[f(x)]^4 .$$

Předpokládejme, že pro každé přirozené číslo n platí

$$f(nx) = a^{\frac{n^2-n}{2}x^2}[f(x)]^n . \tag{21}$$

Pak je

$$f((n + 1)x) = f(nx + x) = a^{nx^2}f(nx)\,f(x) =$$

$$= a^{\left(\frac{n^2-n}{2}+n\right)x^2}[f(x)]^{n+1} = a^{\frac{(n+1)^2-(n+1)}{2}x^2}[f(x)]^{n+1} ,$$

a odtud indukcí plyne, že rovnost (21) je splněna pro všechna přirozená čísla n a pro všechna reálná čísla x.

Z (21) nyní dostáváme, že pro libovolná dvě přirozená čísla m a n v důsledku rovnosti

$$f(n) = a^{\frac{n^2-n}{2}}[f(1)]^n$$

platí

$$f\left(n\frac{m}{n}\right) = a^{\frac{m^2-m}{2}}[f(1)]^m = a^{\frac{n^2-n}{2}\cdot\frac{m^2}{n^2}}\left[f\left(\frac{m}{n}\right)\right]^n ,$$

tj.

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = a^{\frac{\frac{m^2}{n^2}-\frac{m}{n}}{2}}\,[f\,(1)]^{\frac{m}{n}} .$$

Na druhé straně je

$$f(1) = f\left(2\,.\,\frac{1}{2}\right) = a^{\frac{1}{4}}\left[f\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 \geqq 0 .$$

Budeme-li předpokládat, že je $f(1) = 0$, dostáváme pro každé reálné číslo x vztah

$$f(x) = f((x-1)+1) = a^{x-1} f(x-1)\, f(1) = 0,$$

tj. dostáváme triviální řešení $f(x) = 0$.

Nechť je tedy $f(1) > 0$. Položíme-li

$$c = -\frac{1}{2} + \log_a f(1)\,,$$

bude $f(1) = a^{c+\frac{1}{2}}$ a

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = a^{\frac{\frac{m^2}{n^2}-\frac{m}{n}}{2}} \left(a^{c+\frac{1}{2}}\right)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{1}{2}\cdot\frac{m^2}{n^2}+c\cdot\frac{m}{n}},$$

neboli

$$f(x) = a^{\frac{x^2}{2}+cx} \tag{22}$$

pro každou kladnou racionální hodnotu proměnné x.

Podobně je z rovnice (20) vidět, že je

$$f(1) = f(1+0) = f(1)\,.\,f(0),$$

neboli $f(0) = 1$. Pak platí

$$1 = f(0) = f(x-x) = a^{-x^2} f(x)\, f(-x).$$

Jinými slovy: je

$$f(-x) = a^{x^2}.\,a^{-\frac{x^2}{2}-cx} = a^{\frac{(-x)^2}{2}+c(-x)},$$

což znamená, že rovnost (22) platí pro všechny racionální hodnoty proměnné x; odtud už plyne, že tato rovnost platí pro libovolnou reálnou hodnotu proměnné x.

Z identity

$$a^{\frac{(x+y)^2}{2} + c(x+y)} = a^{xy} \, . \, a^{\frac{x^2}{2} + cx} \, . \, a^{\frac{y^2}{2} + cy}$$

naopak s definitivní platností plyne, ze všechna řešení funkcionální rovnice

$$f(x + y) = a^{xy} f(x) \, f(y)$$

jsou tvořena funkcemi

$$f(x) = 0 \quad \text{a} \quad f(x) = a^{\frac{x^2}{2} + cx} \, ,$$

kde c je libovolné reálné číslo.

9. DYADICKÁ RACIONÁLNÍ ČÍSLA

Budiž n libovolné celé číslo a m libovolné přirozené číslo nebo nula. Každé číslo tvaru $n/2^m$ nazýváme *dyadickým racionálním číslem.*

Věta. *Množina T dyadických racionálních čísel je hustá množina.*

Důkaz. Budiž $\Delta = (\alpha, \beta)$ libovolný interval na číselné ose. Budeme zkoumat následující tři možnosti:

1. $0 \leqq \alpha < \beta$. Označme písmenem ε délku intervalu Δ, tj. $\varepsilon = \beta - \alpha > 0$. Protože $\lim\limits_{k \to \infty} \frac{1}{2^k} = 0$, je zřejmé, že existuje přirozené číslo m, pro něž je $\frac{1}{2^m} < \varepsilon$. Utvořme číselnou posloupnost

$$\frac{1}{2^m}, \frac{2}{2^m}, \frac{3}{2^m}, \ldots, \frac{n}{2^m}, \ldots .$$

Ta zřejmě neomezeně roste, a proto existuje přirozené číslo n tak, že platí $\frac{n-1}{2^m} \leqq \alpha < \frac{n}{2^m}$. Kdyby přitom bylo $\beta \leqq \frac{n}{2^m}$, došli bychom ke sporu: $\varepsilon = \beta - \alpha \leqq \frac{n}{2^m} - \frac{n-1}{2^m} = \frac{1}{2^m} < \varepsilon$. Musí tedy být $\alpha < \frac{n}{2^m} < \beta$, a to znamená, že interval Δ obsahuje dyadické racionální číslo.

2. $\alpha < \beta \leqq 0$. Označíme-li znovu písmenem ε délku intervalu Δ, zvolíme-li přirozené číslo m tak, aby bylo $\frac{1}{2^m} < \varepsilon$, a budeme-li uvažovat posloupnost

$$\frac{-1}{2^m}, \frac{-2}{2^m}, \frac{-3}{2^m}, \ldots, \frac{-n}{2^m}, \ldots,$$

vidíme, že interval Δ obsahuje dyadické racionální číslo.

3. $\alpha < 0 < \beta$. Na základě toho, co jsme právě dokázali, obsahuje každý z intervalů $(0, \beta)$ a $(\alpha, 0)$ dyadické racionální číslo. Tudíž obsahuje takové číslo i samotný interval Δ.

A tak vidíme, že každý interval na číselné ose, který nezdegeneruje v jediný bod, obsahuje prvek množiny T. To však znamená, že T je hustá množina.

Věta je dokázána.

Důsledek. *Je-li a libovolné nenulové reálné číslo, pak je množina*

$$S = \left\{ \frac{an}{2^m} \,\middle|\, m \geqq 0, n \text{ jsou celá čísla} \right\}$$

hustá.

Důkaz. Předpokládejme pro určitost, že je $a > 0$. (Případ $a < 0$ se vyšetřuje analogicky.) Budiž $\Delta = (\alpha, \beta)$ libovolný interval na číselné ose. Pak podle právě dokázané věty existují celá čísla n a $m \geqq 0$ tak, že platí

$$\frac{\alpha}{a} < \frac{n}{2^m} < \frac{\beta}{a} .$$

Odtud plyne, že je $\alpha < \dfrac{an}{2^m} < \beta$, tj. interval Δ obsahuje číslo z množiny S.

Důsledek je dokázán.

10. LOBAČEVSKÉHO FUNKCIONÁLNÍ ROVNICE

Určíme nyní všechny funkce, které jsou definovány a spojité na celé číselné ose a které vyhovují funkcionální rovnici

$$f(x + y) \cdot f(x - y) = [f(x)]^2. \tag{23}$$

Tuto rovnici řešil poprvé N. I. Lobačevskij při vyšetřování některých problémů neeuklidovské geometrie.

Je zřejmé, že každá konstantní funkce je řešením rovnice (23). Předpokládejme nyní, že $f(x)$ je nekonstantní spojitá funkce, která vyhovuje rovnici (23), označme a hodnotu funkce $f(x)$ v bodě 0 a předpokládejme, že je $a > 0$. (Je-li $a = 0$, dostáváme řešení $f(x) = 0$, a případ $a < 0$ se vyšetřuje analogicky jako případ $a > 0$.)

Pro každé x bude platit

$$f(x) \cdot f(0) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 .$$

Je tedy $f(x) \geqq 0$ pro všechna x a kromě toho platí

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{f(x) \cdot f(0)}\,.$$

Označíme-li $b = f(1)$, dostáváme:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{ab} = a\sqrt{\frac{b}{a}} = a\,c^{\frac{1}{2}}\,,$$

$$f\left(\frac{1}{2^2}\right) = \sqrt{a\,f\left(\frac{1}{2}\right)} = a\,c^{\frac{1}{2^2}},$$

kde jsme použili označení $\dfrac{b}{a} = c$.

Předpokládejme nyní, že pro nějaké přirozené číslo m platí

$$f\left(\frac{1}{2^m}\right) = a\,c^{\frac{1}{2^m}}\,.$$

Pak je

$$f\left(\frac{1}{2^{m+1}}\right) = \sqrt{a\,f\left(\frac{1}{2^m}\right)} = a^{\frac{1}{2}}\left(a\,c^{\frac{1}{2^m}}\right)^{\frac{1}{2}} = a\,c^{\frac{1}{2^{m+1}}}$$

a odtud plyne indukcí, že pro každé přirozené číslo m platí rovnost

$$f\left(\frac{1}{2^m}\right) = a\,c^{\frac{1}{2^m}}\,.$$

Budiž nyní n libovolné přirozené číslo, a předpokládejme, že platí

$$f\left(\frac{k}{2^m}\right) = a\,c^{\frac{k}{2^m}}$$

pro každé přirozené číslo m a pro každé přirozené číslo $k \leqq n$. Položíme-li ve funkcionální rovnici (23) $x = \frac{n}{2^m}$ a $y = \frac{1}{2^m}$, dostáváme

$$f\left(\frac{n+1}{2^m}\right) f\left(\frac{n-1}{2^m}\right) = \left[f\left(\frac{n}{2^m}\right)\right]^2,$$

tj.

$$f\left(\frac{n+1}{2^m}\right) = \frac{a^2 c^{\frac{2n}{2^m}}}{a c^{\frac{(n-1)}{2^m}}} = a c^{\frac{(n+1)}{2^m}},$$

a odtud je pomocí indukce vidět, že pro každé kladné dyadické racionální číslo x platí

(24) $$f(x) = ac^x.$$

Položíme-li pak v (23) $x = 0$, dostáváme

$$f(y) . f(-y) = [f(0)]^2 = a^2,$$

neboli

$$f(-y) = \frac{a^2}{f(y)},$$

a odtud plyne, že rovnost (24) platí pro libovolné dyadické racionální hodnoty proměnné x. A vezmeme-li nakonec v úvahu, že $f(x)$ je spojitá funkce a že množina dyadických racionálních čísel je hustá, dostáváme tento výsledek: Řešeními Lobačevského funkcionální rovnice mohou být nejvýše funkce

$$f(x) = 0 \quad \text{a} \quad f(x) = ac^x,$$

kde c je libovolné kladné číslo.

Naopak se můžeme bezprostředně přesvědčit o tom, že tyto funkce Lobačevského rovnici také skutečně řeší.

11. D'ALEMBERTOVA FUNKCIONÁLNÍ ROVNICE

Při zkoumání jistých problémů z mechaniky dospěl francouzský matematik d'Alembert k funkcionální rovnici

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)\, f(y). \tag{25}$$

Budeme tuto rovnici řešit, přičemž budeme hledat jen taková její řešení $f(x)$, jež jsou definována a spojitá pro všechna x a navíc splňují podmínku $|f(x)| \leqq 1$.

Jedním takovým řešením je zřejmě konstantní nulová funkce. Předpokládejme nyní, že $f(x)$ je nějaké nekonstantní řešení rovnice (25). Především z této rovnice pro $y = 0$ dostáváme, že je

$$2f(x) = 2f(0)\, f(x)$$

pro každé x, a to znamená, že je $f(0) = 1$. Pro $x = 0$ dostáváme

$$f(y) + f(-y) = 2f(y),$$

tj.

$$f(y) = f(-y),$$

a odtud je vidět, že funkce $f(x)$ je sudá.

Pro $x = y$ máme

$$f(2x) + f(0) = 2f^2(x),$$

čili

$$f^2(x) = \frac{f(2x) + 1}{2}.$$

Funkce $f(x)$ je spojitá, nekonstantní, splňuje podmínku $|f(x)| \leqq 1$, je sudá a platí $f(0) = 1 > 0$. Odtud plyne, že existuje číslo $a > 0$, pro které je $1 > f(a) > 0$. Pak však existuje číslo c, $0 < c < \frac{\pi}{2}$, pro něž platí $f(a) = \cos c$. Dokážeme, že je

$$(26) \qquad f\left(\frac{n}{2^m}a\right) = \cos\left(\frac{c}{a} \cdot \frac{n}{2^m}\,a\right)$$

pro všechny dvojice přirozených čísel n a m. Důkaz této skutečnosti provedeme pomocí „dvojnásobné" indukce podle n a m.

Nechť je nejprve $n = 1$. Indukcí podle m dokážeme, že platí

$$(27) \qquad f\left(\frac{1}{2^m}\,a\right) = \cos\left(\frac{c}{a} \cdot \frac{1}{2^m}\,a\right).$$

Skutečně: Pro $m = 1$ máme

$$\left[f\left(\frac{a}{2}\right)\right]^2 = \frac{f(a) + 1}{2},$$

a tedy

$$f\left(\frac{a}{2}\right) = \sqrt{\frac{\cos c + 1}{2}} = \cos\frac{c}{2} = \cos\left(\frac{c}{a} \cdot \frac{1}{2}a\right).$$

Předpokládejme, že rovnost (27) platí pro nějaké přirozené číslo m. Pak je

$$f\left(\frac{a}{2^{m+1}}\right) = \sqrt{\frac{f\left(\frac{a}{2^m}\right) + 1}{2}} = \sqrt{\frac{\cos\left(\frac{c}{a} \cdot \frac{1}{2^m}a\right) + 1}{2}} =$$

$$= \cos\left(\frac{c}{a} \cdot \frac{1}{2^{m+1}}\,a\right),$$

a rovnost (27) tedy platí i pro $m + 1$.

Dokázali jsme tak, že rovnost (26) platí pro $n = 1$ a pro libovolné m. Nyní předpokládejme, že platí pro každé přirozené číslo m a pro každé přirozené číslo $n \leqq N$ (N je pevné přirozené číslo). Využijeme-li pak rovnosti

$$f((N+1)\,x) = 2f(Nx)\,f(x) - f((N-1)x),$$

dostáváme

$$f\left(\frac{N+1}{2^m}\,a\right) = 2f\left(\frac{N}{2^m}\,a\right)f\left(\frac{1}{2^m}\,a\right) - f\left(\frac{N-1}{2^m}\,a\right) =$$

$$= 2\cos\left(\frac{c}{a}\cdot\frac{N}{2^m}\,a\right)\cos\left(\frac{c}{a}\cdot\frac{1}{2^m}\,a\right) - \cos\left(\frac{c}{a}\cdot\frac{N-1}{2^m}\,a\right) =$$

$$= \cos\left(\frac{c}{a}\cdot\frac{N+1}{2^m}\,a\right) + \cos\left(\frac{c}{a}\cdot\frac{N-1}{2^m}\,a\right) -$$

$$- \cos\left(\frac{c}{a}\cdot\frac{N-1}{2^m}\,a\right) = \cos\left(\frac{c}{a}\cdot\frac{N+1}{2^m}\,a\right).$$

Odtud už plyne, že je

$$f(x) = \cos\frac{c}{a}\,x$$

pro každé x tvaru $\frac{n}{2^m}\,a$ (n a m jsou přirozená čísla).

Na druhé straně jsme už zjistili, že funkce $f(x)$ je sudá, a proto platí poslední rovnost i pro libovolné hodnoty x tvaru $\frac{n}{2^m}\,a$, kde n a $m \geqq 0$ jsou celá čísla.

Už dříve jsme dokázali, že množina

$$S = \left\{\frac{n}{2^m}\,a \;\middle|\; m \geqq 0,\ n \text{ jsou celá čísla}\right\}$$

je hustá. Tím tedy nakonec dostáváme, že pokud spojitá funkce $f(x)$ vyhovuje podmínkám

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)\,f(y); \quad |f(x)| \leqq 1,$$

je nutně tvaru

$$f(x) = \cos Ax,$$

kde A je libovolné reálné číslo.

Naopak se lze bezprostředně přesvědčit o tom, že každá taková funkce skutečně vyhovuje oběma výše uvedeným podmínkám.

Tím je d'Alembertova rovnice řešena.

12. JEŠTĚ JEDNA METODA ŘEŠENÍ FUNKCIONÁLNÍCH ROVNIC

Nakonec se ještě krátce zastavíme u další metody řešení funkcionálních rovnic; tato metoda je v jistém smyslu modifikací substituční metody.

Nechť jsou $G(x)$, $F(x)$ a $H(x)$ tři dané funkce jedné proměnné. Pak lze funkcionální rovnici

$$f(G(x)) = H(x) + F(x) \, . \, f(x)$$

řešit tímto postupem:

1. Najdeme jedno její řešení $\varphi(x)$ (často se to děje tak, že je „uhádneme").

2. Předpokládáme, že $f(x)$ je libovolné řešení výše uvedené rovnice, a položíme $\psi(x) = f(x) - \varphi(x)$.

Je zřejmé, že funkce $f(x)$ bude řešením dané funkcionální rovnice tehdy a jen tehdy, bude-li $\psi(x)$ řešením funkcionální rovnice

$$\psi(G(x)) = F(x) \,.\, \psi(x).$$

3. Vyřešíme tuto poslední rovnici a najdeme funkci $\psi(x)$; tím určíme i funkci $f(x)$.

Nebudeme se pouštět do dalších podrobností a všimneme si několika příkladů.

a) Řešme funkcionální rovnici

$$f(x) + \frac{1}{\sin x} = f\left(\frac{x}{2}\right). \tag{28}$$

Z vlastností trigonometrických funkcí plynou rovnosti

$$\operatorname{cotg} x + \frac{1}{\sin x} = \frac{1 + \cos x}{\sin x} = \frac{2 \cos^2 \frac{x}{2}}{2 \cos \frac{x}{2} \,.\, \sin \frac{x}{2}} =$$

$$= \operatorname{cotg} \frac{x}{2},$$

které ukazují, že jedním z řešení funkcionální rovnice (28) je funkce $\operatorname{cotg} x$.

Budiž nyní $f(x)$ libovolné řešení této rovnice a položme $\psi(x) = f(x) - \operatorname{cotg} x$. Pak bude funkce $\psi(x)$ řešením rovnice

$$\psi(x) = \psi\left(\frac{x}{2}\right),$$

a tedy je $\psi(x) = \text{const.}$

A tak jsou všechna řešení funkcionální rovnice (28) tvořena funkcemi

$$f(x) = \operatorname{cotg} x + c\,,$$

kde c je libovolné reálné číslo.

Právě popsanou metodu lze použít i u „složitějších" funkcionálních rovnic.

b) Řešme funkcionální rovnici

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x) + f(y) - \\ &- 4\cos\frac{x+y}{2}\,.\,\sin\frac{x}{2}\,.\,\sin\frac{y}{2} - 1\,. \end{aligned} \tag{29}$$

Protože platí

$$\cos x + \cos y - 4\cos\frac{x+y}{2}\,.\,\sin\frac{x}{2}\,.\,\sin\frac{y}{2} - 1 =$$

$$= 2\cos\frac{x+y}{2}\,.\,\cos\frac{x-y}{2} - 4\cos\frac{x+y}{2}\,.\,\sin\frac{x}{2}\,.$$

$$.\,\sin\frac{y}{2} - 1 = 2\cos\frac{x+y}{2}\left(\cos\frac{x}{2}\,.\,\cos\frac{y}{2} + \sin\frac{x}{2}\,.\right.$$

$$\left.\,.\,\sin\frac{y}{2} - 2\sin\frac{x}{2}\,.\,\sin\frac{y}{2}\right) - 1 = 2\cos^2\frac{x+y}{2} - 1 =$$

$$= \cos(x+y)\,,$$

je jedním řešením rovnice (29) funkce $\cos x$.

Předpokládejme nyní, že $f(x)$ je libovolné řešení rovnice (29), a položme $\psi(x) = f(x) - \cos x$. Pak funkce $f(x)$ splňuje danou funkcionální rovnici tehdy a jen tehdy, splňuje-li funkce $\psi(x)$ funkcionální rovnici

$$\psi(x+y) = \psi(x) + \psi(y).$$

Řešeními této poslední rovnice jsou všechny funkce tvaru $\psi(x) = cx$, kde c je libovolné reálné číslo, a proto jsou všechna řešení funkcionální rovnice

$$f(x + y) = f(x) + f(y) - 4 \cos \frac{x + y}{2} . \sin \frac{x}{2} . \sin \frac{y}{2} - 1$$

tvaru

$$f(x) = \cos x + cx,$$

kde c je libovolné reálné číslo.

c) Řešme funkcionální rovnici

$$(30) \quad f(x + y) = f(x) . f(y) + xy - xf(y) - yf(x) + x + y .$$

Není těžké ověřit, že jedním řešením této rovnice je funkce $f(x) = x$. Proto bude funkce $f(x)$ řešením rovnice (30) tehdy a jen tehdy, řeší-li funkce $\psi(x) = f(x) - x$ funkcionální rovnici

$$\psi(x + y) = \psi(x) . \psi(y).$$

Jak jsme už viděli, mají všechna řešení této poslední rovnice tvar

$$\psi(x) = a^x,$$

kde a je libovolné nezáporné reálné číslo.

Řešeními funkcionální rovnice (30) jsou tedy všechny funkce tvaru

$$f(x) = x + a^x,$$

kde a je libovolné nezáporné reálné číslo.

ÚLOHY K PROCVIČENÍ

1. Určete všechny funkce $f(x)$ definované na celé číselné ose a vyhovující funkcionální rovnici

$$f(x + y) - 2f(xy) - 3f(x) + (2x^2 - 1) f(y) = \\ = 2x(xy - 1) - 5.$$

Odpověď: $f(x) = x^2 + x + 1$.

2. Určete všechny funkce definované na intervalu $(0, \infty)$, jež jsou řešeními funkcionální rovnice

$$f(x^y) = yf(x).$$

Odpověď: $f(x) = C \log_a x$.

3. Určete všechny funkce $f(x)$, které vyhovují následujícím podmínkám:

a) je-li funkce $f(x)$ definována a spojitá v jistém bodě α, pak existuje okolí Δ bodu α tak, že $f(x)$ je definována a spojitá pro všechna $x \in \Delta$;

b) není-li funkce $f(x)$ v bodě α definována, pak existuje okolí Δ bodu α tak, že funkce $f(x)$ je definována a spojitá pro všechna $x \in \Delta$, $x \neq \alpha$, a platí $\lim\limits_{x \to \alpha} |f(x)| = \infty$;

c) funkce $f(x)$ je řešením funkcionální rovnice

$$f(x + y) = \frac{f(x) + f(y)}{1 - f(x) f(y)} \,.$$

Návod: Nejprve dokažte, že pokud funkce $f(x)$ splňuje uvedené tři požadavky, je už nutně definována v bodě 0. Poté dokažte, že existují čísla $a > 0$ a c, $0 < c < \frac{\pi}{2}$, tak, že platí $f(a) = \operatorname{tg} c$. Nakonec dokažte indukcí, že platí $f(x) = \operatorname{tg} \frac{c}{a} x$ pro každé x tvaru $x = \frac{na}{2^m}$, kde n a $m \geqq 0$ jsou celá čísla.

Odpověď: $f(x) = \operatorname{tg} Ax$, kde A je libovolné reálné číslo.

4. Určete všechny funkce $f(x)$, které vyhovují následujícím podmínkám:

a) je-li funkce $f(x)$ definována a spojitá v jistém bodě α, pak existuje okolí Δ bodu α tak, že funkce $f(x)$ je definována a spojitá pro všechna $x \in \Delta$;

b) není-li funkce $f(x)$ v bodě α definována, pak existuje okolí Δ bodu α tak, že funkce $f(x)$ je definována a spojitá pro všechna $x \in \Delta$, $x \neq \alpha$, a platí $\lim\limits_{x \to \alpha} |f(x)| = \infty$;

c) funkce $f(x)$ je řešením funkcionální rovnice

$$f(x + y) = \frac{f(x)\, f(y) - 1}{f(x) + f(y)}\,.$$

Odpověď: $f(x) = \operatorname{cotg} Ax$, kde A je libovolné reálné číslo.

5. Určete všechny funkce $f(x)$, které vyhovují podmínkám a) a b) z obou předcházejících úloh a jsou řešeními funkcionální rovnice

$$f(x + y) = \frac{f(x) + f(y) - 2f(x)\, f(y)}{1 - 2\, f(x)\, f(y)}\,.$$

Návod: Ukažte, že funkce $g(x) = \frac{1}{f(x)} - 1$ je řešením funkcionální rovnice

$$g(x + y) = \frac{g(x)\, g(y) - 1}{g(x) + g(y)}\,.$$

Odpověď: $f(x) = \frac{1}{1 + \operatorname{cotg} Ax}$, kde A je reálné číslo.

6. Určete všechny funkce $f(x)$, které vyhovují podmínkám a) a b) z úlohy 4 a jsou řešeními funkcionální rovnice

$$f(x + y) = \frac{f(x) + f(y) - 1}{2f(x) + 2f(y) - 2f(x)f(y) - 1}\,.$$

Odpověď: $f(x) = \frac{1}{1 + \operatorname{tg} Ax}$, kde A je reálné číslo.

7. Určete všechny funkce $f(x)$, které vyhovují podmínkám a) a b) z úlohy 4 a jsou řešeními funkcionální rovnice

$$f(x + y) = \frac{f(x) + f(y) + 2f(x)f(y)}{1 - f(x)f(y)}\,.$$

Návod: Dokažte nejprve, že funkce $f(x)$ je definována v bodě 0, a pak definujte $f(x)$ pro racionální hodnoty proměnné x.

Odpověď: $f(x) = \frac{cx}{1 - c(x - 1)}\,.$

8. Za stejných podmínek jako v předcházející úloze určete všechna řešení funkcionální rovnice

$$f(x + y) = \frac{f(x) + f(y) - 2f(x)f(y)}{1 - f(x)f(y)}\,.$$

Odpověď: $f(x) = \dfrac{cx}{1 + c(x - 1)}$.

9. Určete všechny funkce $f(x)$, které jsou definovány a spojité na celé číselné ose a řeší funkcionální rovnici

$$f(x + y) = f(x)f(y) - \sqrt{1 - f^2(x)} \cdot \sqrt{1 - f^2(y)}.$$

Návod: Metodou, jíž jsme řešili d'Alembertovu rovnici, dokažte, že všechna řešení uvedené funkcionální rovnice jsou tvořena funkcemi $f(x) = \cos Ax$, kde A je libovolné reálné číslo.

10. Dokažte, že všechny funkce $f(x)$, které jsou definovány a spojité pro všechna x, řeší funkcionální rovnici

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)f(y)$$

a splňují podmínku $f(x) \geqq 1$ pro všechna x, mají tvar

$$f(x) = \frac{a^x + a^{-x}}{2},$$

kde a je kladné reálné číslo.

Návod: Využijte metody, kterou jsme řešili d'Alembertovou rovnici. Dokažte nejprve, že pokud je $a > 0$, $a \neq 1$ libovolné reálné číslo, existují kladná reálná čísla c a b tak, že platí

$$f(b) = \frac{a^c + a^{-c}}{2}.$$

11. Dokažte, že všechny funkce $f(x)$, které jsou definovány a spojité pro všechna x a vyhovují funkcionální rovnici

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y) + \sqrt{f^2(x) - 1} \cdot \sqrt{f^2(y) - 1},$$

mají tvar

$$f(x) = \frac{a^x + a^{-x}}{2},$$

kde a je kladné reálné číslo.

12. Dokažte, že všechny funkce, které jsou definovány a spojité v intervalu $\langle -1, 1 \rangle$ a řeší funkcionální rovnici

$$f(xy - \sqrt{1 - x^2} \cdot \sqrt{1 - y^2}) = f(x) + f(y),$$

jsou tvaru $f(x) = C \arccos x$, kde C je libovolné reálné číslo.

13. Určete všechny funkce $f(x)$, jež jsou řešeními funkcionální rovnice

$$f(x + y + axy) = f(x)f(y),$$

kde a je pevné reálné číslo.

Odpověď: $f(x) = (1 + ax)^c$.

14. Určete všechny funkce, které řeší funkcionální rovnici

$$f(\sqrt[n]{x^n + y^n}) = f(x) + f(y).$$

Odpověď: $f(x) = cx^n$; c je libovolné reálné číslo.

15. Určete všechna řešení funkcionální rovnice

$$f\left(\frac{x - y}{\ln \frac{x}{y}}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

Odpověď: $f(x) = \text{const.}$

OBSAH

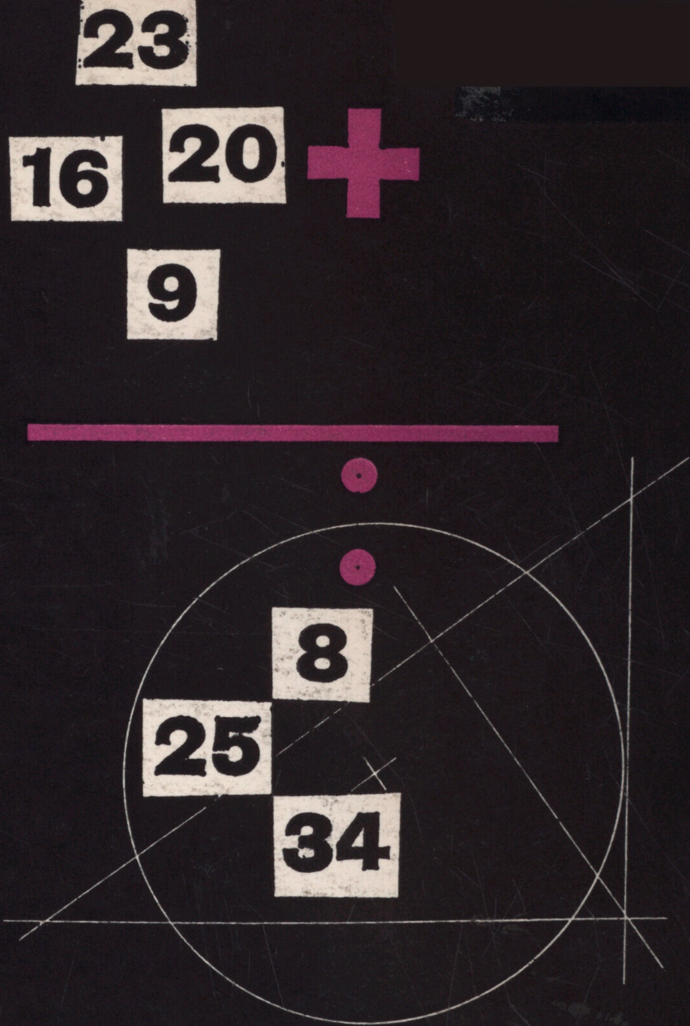
ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

LJUBOMIR DAVIDOV

Funkcionální rovnice

Pro účastníky matematické olympiády
vydává ÚV matematické olympiády
v nakladatelství Mladá fronta
Řídí akademik Josef Novák
Z bulharského originálu Funkcionalni uravnenija
vydaného nakladatelstvím Narodna prosveta
v Sofii roku 1977
přeložili Zlata Kufnerová a Alois Kufner
Obálku navrhl Jaroslav Příbramský
K tisku připravil Vladimír Doležal
Technický redaktor Vladimír Vácha
Odpovědná redaktorka Zdena Šmídová
Publikace číslo 4627
Edice Škola mladých matematiků, svazek 55
Vytiskl Mír, n. p., závod 1, Praha 1, Václavské nám. 15
3,77 AA, 4,14 VA, 1. vydání. 96 stran
Náklad 6 000 výtisků. Praha 1984. 508/21/82.5

23-046-84 03/2 Cena brož. výtisku 6 Kčs



23-046-84
03/2
Cena brož.
6 Kčs