Hry takmer matematické

HRY takmer matematické

53

Vydal ÚV matematické olympiády v nakladatelství Mladá fronta

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

HRY takmer matematické

JÁN GATIAL
TOMÁŠ HECHT
MILAN HEJNÝ

PRAHA 1982
VYDAL ÚV MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY
V NAKLADATELSTVÍ MLADÁ FRONTA

Recenzovali: RNDr. Jiří Ivánek, RNDr. Juraj Vantuch

ÚVOD

Pod pojmom „hra“ si väčšina ľudí predstavuje zábavnú činnosť detí alebo dospelých ľudí. No aj mnohé činnosti zvierat považujeme za hru. Hru pozorujeme v celej histórii ľudí ako jej sprievodný zjav. Obyčajne sa hry zúčastňujú najmenej dvaja partneri a má formu súťaže. Stráca svoj pôvab, ak sa snažíme hrať sami so sebou. Celý život človeka je hrou s prírodou. Príroda je človekovi „najserióznejším partnerom“, lebo nepodvádza. Partnerom v hre býva často aj spoločenská inštitúcia. Vojna — i keď je to príliš tragická činnosť a so zábavou nemá nič spoločného, je tiež hrou. Má určité pravidlá. Každá z bojujúcich strán volí jednu z viacerých možných spôsobov vedenia boja a chce získať čo najväčšie výhody. Z pozície teórie hier môžeme tiež sledovať javy súvisiace s plánovanou ekonomikou. Vo všeobecnosti môžeme povedať, že každá hra sa zakladá na voľbe jednej z viacerých možností a každý účastník sa snaží voliť takú, aby vyhral.

Ak použijeme k objasneniu pojmu „hra“ matematickej terminológie, tak môžeme konštatovať, že teória hier je vlastne teóriou matematických modelov, slúžiacich ku hľadaniu optimálnych riešení v závislosti od konfliktných situácií. Pod konfliktom rozumieme takú situáciu, ku ktorej je možné zistiť, kto a ako sa v nej zúčastňuje a aká môže byť voľba postupu u zainteresovaných partnerov.

Prvý pokus spracovania teórie hier ako matematickej disciplíny sa viaže k dopisu Pascala Fermatovi v r. 1654. V tomto čase sa objavila aj nová matematická disciplína, teória pravdepodobnosti, ktorá s teóriou hier úzko súvisí. So vznikom nových matematických disciplín, ako teórie množín, teórie informácií, teórie automatov a jazykov, teórie kategórií atď., sa urobili v rámci teórie hier nové výskumy, zamerané na hľadanie a nájdenie optimálnych stratégií. Objav optimálnej stratégie, súvisiaci s tzv. maticovými hrami, sa v niektorých prípadoch podarilo E. Borelovi až v r. 1921. Neskôr sa problematikou strategických hier podrobne zaoberal O. Morgenstern. Výsledky jeho výskumu sa používajú až dodnes.

V našej knižôčke sa snažíme čitateľa prístupnou formou oboznámiť so základmi teórie hier. Rozdelili sme ju do šiestich kapitol. Prvé tri sú venované hre „odoberania kameňov z kôpok". Uviedli sme v nich niekoľko jej variant a jednotne pomenovali NIM. V uvedených kapitolách oboznamujeme čitateľa hľadaním a nájdením vyhrávajúcej stratégie. Kapitola štvrtá sa zaoberá dvojkovou sústavou, ktorá podmieňuje nájdenie víťaznej stratégie NIM s „ľubovoľným počtom kôpok kameňov". V kapitolách päť a šesť sú uvedené niektoré maticové hry. Pri nájdení stratégie hry so sedlovým bodom je názorne vysvetlená tzv. minimaxová metóda. V šiestej kapitole sme sa snažili atraktívnou formou nájsť výpočet zmiešaných stratégií a použili sme k tomu grafické riešenie úloh lineárneho programovania.

Pri spracovaní látky sme volili netradičnú formu. Neservírujeme faktá, ale uvádzame problémy. Niektoré z nich neriešime vyčerpávajúcim spôsobom (na stupni predpokladaných vedomostí čitateľa to nie je ani možné), no knižôčku sme písali tak, aby gradácia úloh viedla čitateľa k zvládnutiu aj zložitejších situácií.

Je nám milou povinnosťou poďakovať sa touto cestou dr. Ivánkovi a dr. Vantúchovi za cenné pripomienky, ktoré prispeli k zlepšeniu publikácie.

V Bratislave dňa 1. novembra 1980.

Autori

1. kapitola

ANKA S BORISOM HRAJÚ NIM

Hra NIM sa hrá tak, že dvaja hráči striedavo berú z kopy kameňov — začal vysvetlovať Boris pravidlá novej hry, ktorú sa včera naučil.

Aha — povedala Anka — to mi je jasné.

Ty tú hru poznáš? — čudoval sa Boris.

Nepoznám, ale viem, prečo sa volá NIM — povedala Anka a vysvetlila — sloveso „brať“ sa po nemecky povie „nehmen“ (čítaj: némen) a rozkaz „ber!“ sa povie „nimm!“.

Poznáš meno toho, čo ešte nepoznáš — podpichol Boris a začal vysvetlovať Aničke.

1.1. Pravidlá NIM. Na kope je 17 kameňov. Dvaja hráči, Anička (A) a Boris (B), striedavo berú z kopy. Hráč, ktorý je na ťahu, berie 1, 2 alebo 3 kamene. Vyhráva ten hráč, ktorý berie posledný kameň.

Príklad partie. Anička s Borisom sa zahrali. Začínala Anka, lebo dievčatá majú prednosť. Vzala 2 kamene, potom Boris vzal 3, A vzala 3, B vzal 1, A vzala 1, B vzal 2, A vzala 2 a B vzal posledné 3 kamene a tým partiu vyhral (radosť mali obaja).

Ak čitateľa nahnevalo priveľa slov „vzal“ a „vzala“ v uvedenom opise partie, tak ponúkneme stručnejší a snáď aj prehľadnejší zápis.

Zápis partie: $17 \xrightarrow{A} 15 \xrightarrow{B} 12 \xrightarrow{A} 9 \xrightarrow{B} 8 \xrightarrow{A} 7 \xrightarrow{B} 5 \xrightarrow{A}$ $\to 3 \xrightarrow{B} 0$; Boris vyhral.

I keď v tomto zápise nie je priamo uvedené, kto koľko kameňov bral, dá sa toto číslo ľahko vypočítať ako rozdiel susedných pozícií.

Úloha 1.1. V siedmom ťahu partie zahrala Anka $5 \longrightarrow 3$ a prehrala. Mohla hrať lepšie? Mohla zvíťaziť?

Úloha 1.2. V šiestom ťahu partie zahral Boris $7 \longrightarrow 5$ a mohol prehrať, keby Anka ťahala ako v riešení úlohy 1. Teda Borisov ťah nebol správny. Ako mal hrať správne?

Úloha 1.3. Bol štvrtý ťah partie $9 \xrightarrow{B} 8$ dobrý? Mohol Boris zahrať lepšie?

1.2. Ako hrať NIM? Z úloh vidíme, že dve pozície sú nebezpečné: 4 a 8. Ak na kope ostalo 8 či 4 kamene, tak hráč, ktorý je na ťahu, prehrá — ak jeho súper vie, ako na to. Skutočne, po ťahu $4 \xrightarrow{A} *$ zahrá Boris $* \xrightarrow{B} 0$ a vyhrá; hviezdičkou $*$ tu označujeme ktorúkoľvek z možných pozícií: na kope ostane 3, 2 alebo 1 kameň. Podobne po ťahu $8 \xrightarrow{A} *$ zahrá Boris $* \xrightarrow{B} 4$ a prevedie tak pozíciu na predošlú, o ktorej sme už ukázali, že je pre Borisa vyhratá. V tomto druhom prípade bola $*$ rovná 7, 6 alebo 5.

Dve nebezpečné pozície už poznáme. Sú ešte ďalšie? Pozície 9, 10 a 11 to nie sú, lebo z každej z týchto pozícií je možné potiahnuť do vyhratej pozície 8. Čo ale pozícia 12? Skutočne, keď na kope ostane 12 kameňov, tak po ťahu $12 \xrightarrow{A} *$ nasleduje $* \xrightarrow{B} 8$ a Boris víťazí. Teda aj 12 je nebezpečná pozícia. Rovnako nebezpečná je aj pozícia 16, lebo po $16 \xrightarrow{A} *$ nasleduje $* \xrightarrow{B} 12$. Nebezpečné pozície sú dané číslami, ktoré sú násobkami štvorky. Teraz už vieme dať Aničke

návod na výhru. Musíš ťahať tak, aby po tvojom ťahu ostalo na kope 16, 12, 8, 4 alebo 0 kameňov.

Poučená Anka zvíťazí nad bezmocným Borisom v 9 ťahoch takto (hviezdičkami označujeme ľubovoľné prípustné pozície): $17 \xrightarrow{A} 16 \xrightarrow{B} * \xrightarrow{A} 12 \xrightarrow{B} * \xrightarrow{A} 8 \xrightarrow{B} * \xrightarrow{A}$ $\longrightarrow 4 \xrightarrow{B} * \xrightarrow{A} 0$.

Úloha 1.4. Začnime NIM s kopou 31 kameňov a nie 17 kameňov. Aké budú nebezpečné pozície v tomto prípade?

Úloha 1.5. Napíšte návod na víťaznú hru NIM, pričom na začiatku je na kope 1983 kameňov (ste Anička)!

1.3. NIM s braním do 5 kameňov. Pozmeníme trošku pravidlá hry NIM. Na kope bude 23 kameňov a pri braní je dovolené vziať ľubovoľný počet kameňov od 1 do 5.

Príklad partie. $23 \xrightarrow{A} 22 \xrightarrow{B} 17 \xrightarrow{A} 13 \xrightarrow{B} 8 \xrightarrow{A} 6 \xrightarrow{B} 3 \xrightarrow{A}$ $\longrightarrow 0$, Anka vyhrala.

Úloha 1.6. Zistite, či v šiestom ťahu $6 \xrightarrow{B} 3$ mohol zahrať Boris lepšie.

Úloha 1.7. Mohol Boris zahrať v štvrtom ťahu lepšie ako $13 \xrightarrow{B} 8$?

Úloha 1.8. Nájdite všetky nebezpečné pozície novéj hry NIM.

Úloha 1.9. Napíšte návod na výhru, ako začnete hrať novú hru NIM s kopou 1984 kameňov.

1.4. NIM s dvoma kopami. Tretí NIM, ktorý sa naučíme, sa hrá na dve, a nie na jednu kopu.

Pravidlá hry. Dané sú dve kopy kameňov. Na prvej je 7 a na druhej 5 kusov. Hráč na ťahu berie z jednej z kôp ľubovoľný nenulový počet kameňov. Vyhráva ten, kto zoberie posledný kameň.

Príklad partie. Použijeme podobný zápis, ako pri predchádzajúcich hrách. Stav obidvoch kôpok zapíšeme dvojicou čísel v zátvorke. Prvé číslo znamená, koľko kameňov je na prvej kope, a druhé znamená počet kameňov na druhej kope. $(7,5) \xrightarrow{A} (6,5) \xrightarrow{B} (1,5) \xrightarrow{A} (1,2) \xrightarrow{B} (1,0) \xrightarrow{A} (0,0)$; Anka vyhrala. Teda: A vzala z prvej kopy 1 kameň, potom B vzal z prvej kopy 5 kameňov, ďalej A z druhej kopy 3 kamene, B z druhej kopy posledné 2 kamene a konečne A z prvej kopy posledný kameň.

Úloha 1.10. Borisov ťah $(1,2) \xrightarrow{B} (1,0)$ bol zlý. Ako mohol hrať lepšie?

Úloha 1.11. Zistite, či v pozícii (2,2) vyhrá hráč na ťahu alebo súper.

Úloha 1.12. Začínate zo situácie (3,4). Ako budete hrať?

Návod na výhru. Pri riešení poslednej úlohy sme si všimli, že nebezpečné pozície sú (n,n), teda také, kde na oboch kopách je rovnaký počet kameňov. Ak sa nám podarí do takej pozície dostať súpera, zvíťazíme veľmi jednoducho: budeme sa po súperovi opičiť. Zopakujeme každý súperov ťah, iba na druhej z kôp. Ak napríklad súper zoberie z druhej kopy 2 kamene, my zoberieme z prvej kopy dva kamene. Ak súper zoberie z prvej kopy 9 kameňov, my zoberieme z druhej kopy 9 kameňov, atď. Napríklad (my sme A) $(17,13) \xrightarrow{A} (13,13) \xrightarrow{B} (9,13) \xrightarrow{A} (9,9) \xrightarrow{B} (9,2) \xrightarrow{A} (2,2) \xrightarrow{B} (0,2) \xrightarrow{A} (0,0)$.

1.5. Urobme poriadok v označení NIM. Poznali sme už viac hier, ktoré sa volajú rovnako — NIM. V budúcnosti sa rodina NIM rozrastie ešte mohutnejšie. Preto je načase začať jednotlivých členov rodiny rozlišovať pomocou krstných mien. Budú to rímske číslice, ku ktorým prípadne ešte pridáme ďalší upresňujúci údaj v zátvorke. Tak NIM z odseku 1.1 budeme označovať NIM I, alebo presnejšie NIM I(17;3), aby sme uviedli, že na kope bolo na začiatku 17 kameňov a v jednom ťahu bolo povolené brať do 3 kameňov vrátane. Podobne NIM z odseku 1.3 má meno NIM I(23;5). Teda NIM I $(n;k)$ je nimovská hra s jednou kopou, na ktorej je na začiatku n kameňov a pri jednom ťahu je povolené brať od 1 po k kameňov vrátane.

Dvojkopový NIM z odseku 1.4 bude označovaný NIM II(7,5;∞). To znamená, že v začiatočnej pozícii bolo na prvej kope 7 a na druhej 5 kameňov, pričom v každom ťahu bolo povolené z jednej kopy brať neobmedzený počet kameňov (∞ je znak pre nekonečno). Teda NIM II$(m,n;k)$ je nimovská hra s dvoma kopami; na prvej je m a na druhej n kameňov; pri jednom ťahu sa smie brať iba z jednej kopy a počet braných kameňov nesmie prekročiť počet k.

Všimnite si, že NIM II$(n,0;k)$ je to isté, ako NIM I $(n;k)$. V zátvorke je raz čiarka a raz bodkočiarka. Posledná oddeľuje počty kameňov na kopách od čísla určujúceho maximálny počet braných kameňov. Toto číslo môže byť aj „nekonečno", t. j. branie nie je obmedzené.

V ďalšom texte budeme písmená NIM často vynechávať a písať iba I(9;2) či II(51,36;9) a pod.

Úloha 1.13. Zistite, či v nasledujúcich hrách zvíťazí začínajúci hráč A alebo jeho súper B. Ak zvíťazí A, zapíšte aj vyhrávajúci ťah:
a) I(35;5), b) I(35;6), c) I(35;7), d) II(12,12;∞),
e) II(12,15;∞).

1.6. Zovšeobecnenie. Keď sa Anka s Borisom naučili pár nimovských hier, povedal Boris, že hoci sú tieto hry rôzne, majú niečo spoločné.

— To vidí aj slepý, dodala Anka, že sa hrajú s kopami kameňov.

— Nie to mám na mysli, oponoval Boris. Niečo závažnejšie je tu spoločné. Niečo, čo budeme vidieť aj pri niektorých nie nimovských hrách.

— Túžbu zvíťaziť, skočila Borisovi do reči Anka.

— Áno, to je to spoločné, potvrdil Boris a pokračoval. No nielen túžbu, ale aj akýsi návod na to, ako nájsť návod na výhru. Znamená to nájsť všetky tie pozície, ktoré sme pomenovali „nebezpečné". To sú všetky pozície, v ktorých hráč na ťahu prehrá...

— Ak ovšem jeho súper vie, ako ho zdolať, doplnila Anka.

— Múdro by sa to dalo povedať asi takto...

— Odpusť Boris, že ti skáčem do reči aj ja, prerušil tok vyslovovaných Borisových myšlienok autor, ale treba povedať dva termíny, ktoré ešte asi nepoznáš, lebo si ich nepočul. To, čo voláš *návod na výhru*, budeme volať *stratégia hry*. Stratégiou hry teda rozumieme predpis, ako danú hru hrať čo najlepšie. To, čomu hovoríš *nebezpečná situácia či pozícia*, sa bude volať *kritická pozícia*. Je to každá taká pozícia, v ktorej hráč, ktorý je na ťahu, určite prehrá, ak jeho súper je „dokonalý".

— Takže, berie si znovu slovo Boris, poznať stratégiu hry vlastne znamená poznať množinu všetkých kritických pozícií. Stratégia je potom daná jednoduchým pravidlom:

ŤAHAJ VŽDY TAK, ABY SI VYTVORIL KRITICKÚ POZÍCIU.

Nájsť všetky kritické pozície bude niekedy asi ťažké. No vieme, ako na to pôjdeme. Najprv si vypíšeme vôbec všetky možné pozície a potom jednu za druhou preveríme, či je alebo nie je kritická.

Úloha 1.14. Koľko prvkov má množina všetkých pozícií hry a) $II(7,5;\infty)$, b) $II(7,5;3)$?

Úloha 1.15. Vypíšte množinu všetkých kritických pozícií hry $II(7,5;3)$.

2. kapitola

HĽADAČI STRATÉGIE

Borisov návod na hľadanie stratégie bude potrebné preveriť v praxi. Skúsime to s celou sériou nových hier NIM.

2.1. Séria hier NIM III $(a,b;k)$. Doteraz sme vždy dávali pravidlá jedinej hry. Teraz opíšeme pravidlá pre celú sériu hier. Dané sú dve kopy kameňov: na prvej je a kameňov, na druhej b kameňov. Hráč na ťahu si môže vybrať jednu z troch možností: zoberie

1. z prvej kopy ľubovoľný počet kameňov,
2. z druhej kopy ľubovoľný počet kameňov,
3. z oboch kôp zoberie po p kameňoch, pričom $p \leqq k$.

Príklad partie III(5,6;1). $(5,6) \xrightarrow{A} (5,3) \xrightarrow{B} (4,2) \xrightarrow{A} (1,2) \xrightarrow{B} (1,1) \xrightarrow{A} (0,0)$, zvíťazila Anička, lebo ona vzala posledný kameň.

Príklad partie III(7,11;4). $(7,11) \xrightarrow{A} (4,8) \xrightarrow{B} (4,6) \xrightarrow{A} (4,4) \xrightarrow{B} (0,0)$, zvíťazil Boris.

Príklad partie III(27,16;3). $(27,16) \xrightarrow{A} (16,16) \xrightarrow{B} (16,13) \xrightarrow{A} (10,13) \xrightarrow{B} (10,12) \xrightarrow{A} (9,11) \xrightarrow{B} (6,8) \xrightarrow{A} (6,7) \xrightarrow{B} (6,6) \xrightarrow{A} (4,4) \xrightarrow{B} (4,3) \xrightarrow{A} (2,1) \xrightarrow{B} (1,1) \xrightarrow{A} (0,0)$, zvíťazila Anička.

2.2. Tabuľka — pomocník. Pustíme sa do hľadania stratégií hier NIM III. Pre začiatok si zoberieme iba jednu z nich, napríklad hru III(5,6;1), ktorú sme videli už v prvej z troch partií.

Podľa Borisovho návodu bude potrebné najprv vypísať množinu všetkých možných pozícií hry. To sa dá urobiť pomocou prehľadnej tabuľky (pozri obrázok 1). Z nej okamžite vidieť, že pozícií je presne $6 \times 7 = 42$.

0,6	1,6	2,6	3,6	4,6	5,6
0,5	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5
0,4	1,4	2,4	3,4	4,4	5,4
0,3	1,3	2,3	3,3	4,3	5,3
0,2	1,2	2,2	3,2	4,2	5,2
0,1	1,1	2,1	3,1	4,1	5,1
0,0	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0

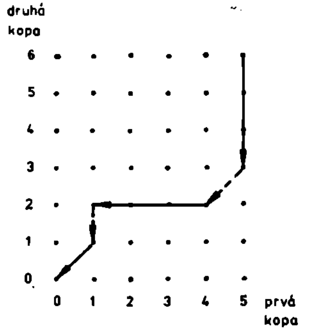
Obr. 1

Tabuľku možno použiť aj na hľadanie stratégie alebo na záznam partie. Pritom netreba všetky políčka tabuľky vypisovať, stačí napísať čísla po okraji tak, ako je uvedené na obrázku 2, na ktorom je šípkami zaznamenaný priebeh partie z prvého príkladu odseku 2.1. Šípky sú troch druhov: 1. sprava naľavo, 2. zhora nadol a 3. šikmo doľava nadol, podľa toho, či berieme 1. z prvej kopy, 2. z druhej kopy, 3. z oboch kôp.
Každá šípka začína v poli, ktoré prislúcha pozícii, z ktorého príslušný ťah začínal, a končí v poli, kde ťah končil. Pritom ťahy Anky sú značené plnou šípkou, ťahy Borisa bodkovanou.

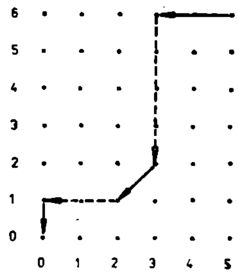
Úloha 2.1. Tabuľkovým spôsobom zapíšte partiu hry III(5,6;1): $(5,6) \xrightarrow{A} (4,5) \xrightarrow{B} (2,5) \xrightarrow{A} (2,4) \xrightarrow{B} (2,2) \xrightarrow{A}$
$\longrightarrow (1,2) \xrightarrow{B} (1,0) \xrightarrow{A} (0,0)$.

Úloha 2.2. Na obrázku 3 je tabuľkovým spôsobom zaznamenaná partia hry III(5,6;1). Zapíšte túto partiu obyčajne, ako sú písané napríklad partie z odseku 2.1.

2.3. Statégia hry III(5,6;1). Spôsob, ktorým budeme hľadať kritické pozície, môžeme nazvať „račí", lebo



Obr. 2



Obr. 3

pôjdeme od konca. Celý postup je prehľadne zachytený na tabuľkách obrázku 4. Políčka kritických pozícií budeme označovať kolieskom ○, políčka nekritických pozícií krížikom × a neprebádané políčka označíme bodkou ●.

Predovšetkým vieme, že políčko (0,0) je kritické, lebo v podmienkach NIM je pravidlo „kto berie posledný kameň, vyhráva". Teda každé políčko, z ktorého sa do kritického políčka (0,0) môžeme dostať jediným ťahom, je nekritické. To sú všetky políčka dolného riadku, krajného ľavého stĺpca a pole (1,1), spolu 12 polí. Situácia je znázornená na obrázku 4a. Všimnime si teraz pole (2,1). Akýmkoľvek ťahom sa z tohto poľa dostaneme iba na pole označené ×, teda na pole nekritické. Preto pole (2,1) je kritické. Podobne i pole (1,2). Na tieto dve polia teda nakreslíme ○ a značku × dokreslíme do každého poľa, z ktorého sa jediným ťahom dostaneme do (2,1) či (1,2). Takých polí je 15. Vzniklá situácia je zobrazená na obrázku 4b. Neprebádaných ostalo už iba 12 polí. Z nich ľavé dolné — (3,3) — je zrejme kritické, pretože z neho sa dá ťahať výlučne na nekritické polia.

6	×	·	·	·	·	·
5	×	·	·	·	·	·
4	×	·	·	·	·	·
3	×	·	·	·	·	·
2	×	·	·	·	·	·
1	×	×	·	·	·	·
0	o	×	×	×	×	×
	0	1	2	3	4	5

Obr. 4a

6	×	×	×	·	·	·
5	×	×	×	·	·	·
4	×	×	×	·	·	·
3	×	×	×	·	·	·
2	×	o	×	×	×	×
1	×	×	o	×	×	×
0	o	×	×	×	×	×
	0	1	2	3	4	5

Obr. 4b

6	×	×	×	×	·	·
5	×	×	×	×	·	·
4	×	×	×	×	×	·
3	×	×	×	o	×	×
2	×	o	×	×	×	×
1	×	×	o	×	×	×
0	o	×	×	×	×	×
	0	1	2	3	4	5

Obr. 4c

6	×	×	×	×	×	×
5	×	×	×	×	o	×
4	×	×	×	×	×	o
3	×	×	×	o	×	×
2	×	o	×	×	×	×
1	×	×	o	×	×	×
0	o	×	×	×	×	×
	0	1	2	3	4	5

Obr. 4d

Nakreslime teda do poľa (3,3) značku ○, a do ďalších šiestich polí, z ktorých sa do (3,3) možno dostať jediným ťahom, napíšeme značku ×. Získame situáciu z obrázku 4c. Konečne vidíme, že polia (5,4) a (4,5) sú obe kritické a ostávajúce tri polia potom nekritické. Tak sme získali výslednú tabuľku 4d, ktorú pomenujeme tabuľkou stratégie hry NIMI II(5,6;1).

Pomocou tabuľky 4d ľahko vyhráme (ak budeme hrať začínajúceho hráča) každú partiu. V prvom ťahu zahráme buď na (5,4), alebo na (4,5). Potom v každom ďalšom ťahu zahráme tak, aby náš ťah končil v políčku označenom kolieskom ○, teda v kritickej pozícii.

— To je skvelé, potešila sa objavu Anka, a dodala — teraz mám dojem, že takouto tabuľkovou metódou budem vedieť nájsť stratégiu každej hry NIM.

— Viete čo, skúste nám dať nejaké úlohy, aby sme si tento nový objav preverili vlastnými silami — požiadal Boris.

— Prečo nie, súhlasí autor.

Úloha 2.3. Nájdite víťazný ťah v hre III(5,6;1) v pozícii a) (2,6), b) (5,5), c) (2,3).

Úloha 2.4. Nakreslite tabuľku stratégie hry III(9,7;1) a napíšte prvý ťah partie (samozrejme, že ten vyhrávajúci!).

Úloha 2.5. Anička tvrdí, že v partii hry III(9,7;1) zvíťazí najpozdejšie za 10 ťahov. Boris tvrdí, že vydrží vzdorovať 10 ťahov a prehrá najskôr až jedenástym ťahom. Kto má pravdu?

Úloha 2.6. Nakreslite tabuľku stratégie hry III(5,6;2).

Úloha 2.7. Nakreslite tabuľku stratégie hry III(9,7;2).

Úloha 2.8. Koľko (minimálne) ťahov potrebuje Anička k tomu, aby v hre III(9,7;2) porazila vzdorovitého Borisa, ktorý oddiaľuje svoj koniec, ako sa len dá.

Úloha 2.9. Nakreslite tabuľku stratégie hry
a) III(3,3;3), b) III(3,5;3), c) III(6,5;3), d) III(9,9;3), e) III(14,14;3).

Úloha 2.10. Vypíšte všetky víťazné ťahy v hre III(14,14;3) v pozícii a) (5,6), b) (5,5), c) (10,13), d) (14,12).

Úloha 2.11. Nakreslite tabuľku stratégie hry III(20, 20;4).

Úloha 2.12. Nakreslite tabuľku stratégie hry III(20, 15; ∞).

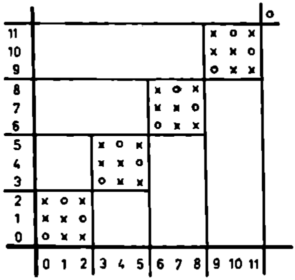
2.4. Stratégia veľkých hier. Boris vyriešil všetky úlohy a prišiel za Ankou predviesť svoju mužskú dokonalosť.

Boris: Anička, povedz si hociktorú hru NIM a ja ju vyhrám aj proti počítaču, ak mi ovšem nedáš začať v kritickej pozícii.

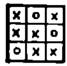
Anka: Tak ma skús nabiť v hre III(611,612;2).

B: Momentík, chvíločku strpenia, len čo si vyrobím tabuľku stratégie.

A: Koľko hodín chceš maľovať na štvorčekových plachtách obdĺžnik 611 × 612?



Obr. 5



Obr. 6

B: (sklamane) Ty si ale protiva!

A: Nemal si sa vystatovať!

B: Moment! Ja to predsa skúsim! Boris po chvíli ukázal Anke obrázok 5.

B: Nepotrebujem veľký obdĺžnik. Už z tohoto vidím, že koliesko sú rozmiestnené len pozdĺž diagonály. Vyrobím si takúto tapetu (obrázok 6) a ženiem ju hore diagonálou, ako bača ovce hore grúňom!

A: No dobre, tak mi povedz prvý ťah v partii III(611, 612;2)!

B: Strpenie, hneď to bude.

Boris po chvíli počítania vyrobil tento papierik:

diagonála	(0,0), (3,3), (6,6), ...	t.j.	$(3n, 3n)$
pod diagonálou	(2,1), (5,4), (8,7), ...	t.j.	$(3n + 2, 3n + 1)$
nad diagonálou	(1,2), (4,5), (7,8), ...	t.j.	$(3n + 1, 3n + 2)$
$611 = 3.203 + 2$, $612 = 3.204$			

B: Aha! Už to viem! Môj prvý ťah je (611,612) → → (611,610), teda beriem z druhej kopy dva kamene a ty si v kritickej pozícii!

A: Dokáž!

B: Veď to máš tu pred nosom. Pozri $611 = 3.203 + 2$, $610 = 3.203 + 1$.

A: Áno, to súhlasí.

B: Podľa tohoto riadku (Boris ukázal na druhý riadok lístka, označeného na začiatku „pod diagonálou") dvojica (611,610) sem patrí, lebo je presne tohoto tvaru, ak za n položíš 203. Teda je kritická.

A: (uznanlivo) To sa ti podarilo!

B: A nielen to, teraz už ľahko napíšem stratégiu pre hociktorú hru NIM typu III(a,b;2).

A: Ty píš stratégiu a mňa tiež niečo napadlo, len si to potrebujem preveriť.

Chvíľu bolo ticho, obaja počítali, písali. Potom skoro súčasne zvolali „hotovo" a vymenili si výsledky svojej práce. Boris napísal stratégiu hry a Anka našla elegantný zápis množiny kritických pozícií. Autor obidve myšlienky trochu kozmeticky upravil a ponúka ich čitateľovi.

Stratégia hry III(a,b;2). Som na ťahu v pozícii (p,q), pričom $p \leqq q$. Vypočítam si najprv číslo $i = \mathrm{zv}(p : 3)$ a potom idem do pozície, ktorá je opísaná v príslušnom okienku tabuľky

<table>
<tr><th></th><th>$i = 0$</th><th>$i = 1$</th><th>$i = 2$</th></tr>
<tr><td>$p = q$</td><td>prehrám</td><td>$(p - 1, p - 1)$</td><td>$(p - 2, p - 2)$</td></tr>
<tr><td>$p + 1 = q$</td><td rowspan="2">(p, p)</td><td>prehrám</td><td rowspan="2">$(p, p - 1)$</td></tr>
<tr><td>$p + 1 < q$</td><td>$(p, p + 1)$</td></tr>
</table>

Symbolom zv$(p : 3)$ označujeme zvyšok pri delení $p : 3$. *Množina kritických pozícií hry* III$(a,b;2)$. Označme túto množinu K. Potom

$$(p,q) \in K \Leftrightarrow |p - q| < 2 \text{ a } \mathrm{zv}[(p + q) : 3] = 0 .$$

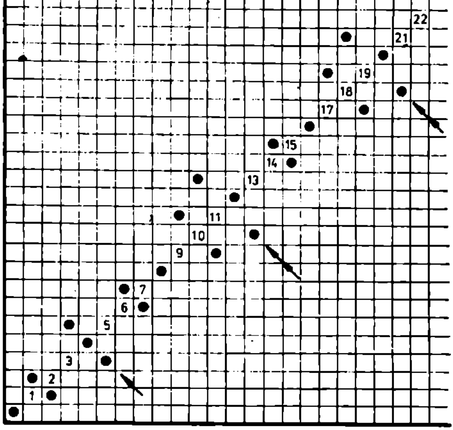
Podmienka zv$[(p + q) : 3] = 0$ hovorí, že číslo $p + q$ sa dá deliť číslom 3 bez zvyšku.

Úloha 2.13. Pre každú z nasledujúcich pozícií hry III$(a,b;2)$ zistite podľa Ankinho kritéria, či je kritická. Pre nekritické pozície nájdite podľa Borisovho návodu víťazný ťah: (35,35), (37,35), (52,50), (111,121), (454,545) (759,760), (760,759), (1984,1985).

Úloha 2.14. Nájdite stratégiu hry III(611,612;1).

2.5. Funguje fígeľ s tapetou pre každý NIM-III? Fígeľ s tapetou, ktorý tak báječne pomohol rozriešiť hľadanie stratégie NIM III$(*,*;2)$, by sa mohol vyskúšať aj v iných prípadoch. Boris navrhol skúsiť NIM III$(*,*;3)$. Anka súhlasila. Začali každý osobitne pre uvedenú hru NIM kresliť tabuľku stratégie. Prácu končili — výsledky si porovnali a boli rovnaké. Anka celú tabuľku pekne prekreslila a vznikol obrázok 7.

Po chvíli tichého pozerania na obrázok 7 Boris ukázal na trojicu bodiek (jednoduchá šípka) a povedal, že táto sa už neopakuje.



Obr. 7

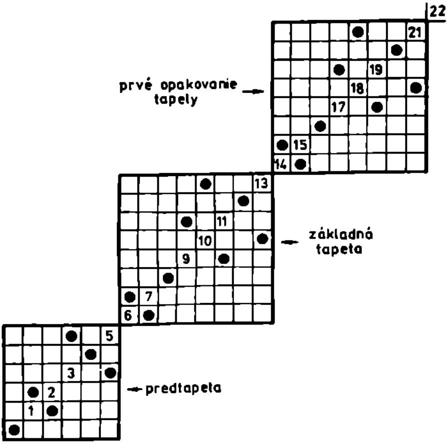
Anka: Možno sme urobili tabuľku krátku, možno, že k opakovaniu dôjde až od 25 či tridsiatky.

Boris: Nemyslím. Pozri sem! Porovnaj tieto dve miesta (ukázal na miesta označené dvojšípkou)! Tieto sú rovnaké, tie sa budú opakovať.

A: Máš pravdu. Keď to takto vyznačíme (nakreslila do obrázku 7 pár čiar, takže vznikol obrázok 8), vidíme veci jasne.

B: Znova sa tu periodicky opakuje „tapeta", ale táto nezačína na kraji. Najprv treba odstrihnúť akúsi „predtapetu" — od (0,0) po (5,5) — a potom už ide základná „tapeta" (6,6) — (13,13), ktorá sa bude periodicky opakovať.

A: Teda aj aritmetický zápis množiny všetkých kritických pozícií môžeme už teraz urobiť ľahko. Nepodarí sa



Obr. 8

mi nájsť síce tak elegantný zápis, ako pri NIM III($*,*$;2), ale ani tento zápis nebude veľmi zlý.

B: Vieš čo, netreba vypisovať všetky kritické pozície. Keď napíšeš napríklad (3,5), netreba písať aj (5,3).

A: Dobre, budeme teda písať iba tie kritické pozície (p,q), pre ktoré je $p \leqq q$. Potom množina K všetkých kritických pozícií (p,q); $p \leqq q$ hry III($*,*$;3) je daná v tomto zozname:

(0,0), (1,2), (3,5), (4,4)	— Z „predtapety"
$(6 + 8n, 7 + 8n)$, $(8(n + 1), 8(n + 1))$, $(9 + 8n, 11 + 8n)$ $(10 + 8n, 13 + 8n)$, $(12 + 8n, 12 + 8n)$	— Z n-tého opakovania zákl. „tapety"

B: Aj tento zápis je ešte pridlhý. Stačilo by to snáď písať takto (ani tie „tapety“ nebudeme už dávať do úvodzoviek):

(0,0), (1,2), (3,5), (4,4)		predtapeta
(6,7), (8,8), (9,11) (10,13), (12,12)	+ perioda 8	ďalšie tapety

A: Dobre, môžeme to tak zapísať, ale nevieme, čo to tvoje „+ perioda 8“ značí.

Úloha 2.15. Načrtnite tabuľku stratégie NIM III (*,*;4) a Borisovým spôsobom zapíšte množinu všetkých kritických pozícií hry.

Úloha 2.16. Na základe výsledkov úlohy 2.15 napíšte prvý ťah hráča v hre a) III(87,101;4), b) III(211,196;4), c) III(321,322;4).

Úloha 2.17. Načrtnite tabuľku stratégie hry NIM III (*,*;5) a Borisovým spôsobom zapíšte množinu všetkých kritických pozícií hry.

Anka s Borisom zvládli ešte stratégiu ďalších dvoch hier NIM: III(*,*;6) a III(*,*;7). Bolo to ale dlhé počítanie, preto ani čitateľa príliš nenútime do posledných úloh tohoto odseku. Ak si však čitateľ verí, ak vie pedantne a presne riešiť, tak k výsledku určite dôjde.

Úloha 2.18. Načrtnite tabuľku stratégie pre NIM III(*,*;6).

Úloha 2.19. Načrtnite tabuľku stratégie pre NIM III(*,*;7).

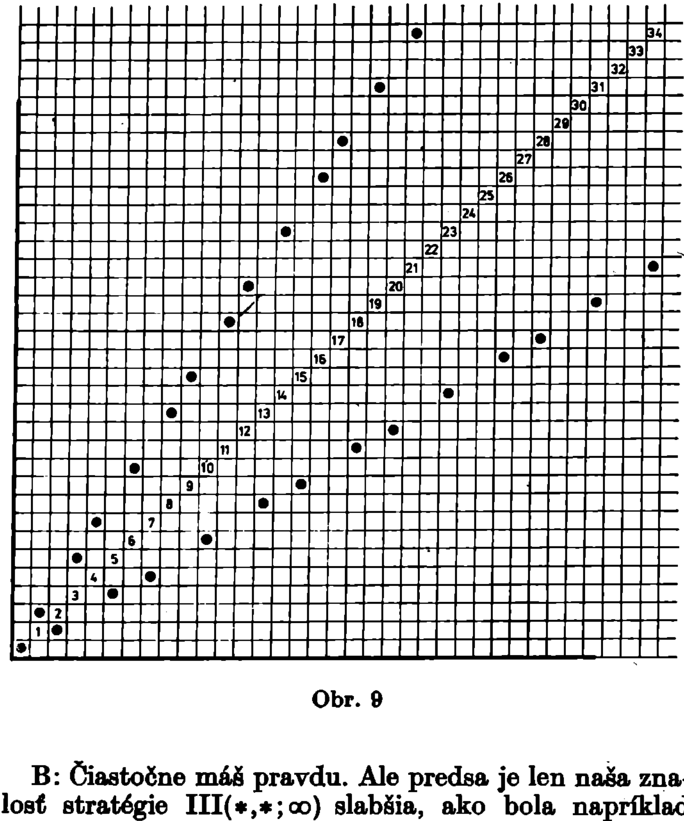
2.6. Problém. Úlohy, ktoré sme naposledy riešili, boli už dosť zložité, no neboli problémové. Vedeli sme, ako na ne. Stačilo mať dostatočne veľký kus štvorčekového papiera, trošku čas a trpezlivosť. Život nie vždy býva tak jednoduchý. Neraz nás postaví pred tak pomotanú situáciu, že nielen nevidíme spôsob jej riešenia, ale pravdu povediac, nevieme ani, ako sa do toho pustiť. Vtedy hovoríme o problémovej situácii. Takou je napríklad pre Borisa snaha udržať svoje veci v poriadku.

Problémy majú v živote aj pozitívnu funkciu. Učia a nútia človeka rozmýšľať. Ak sa potom človeku po dlhom a namáhavom úsilí nakoniec predsa podarí problémom kúsok pohnúť, zaleje úspešného riešiteľa nevýslovná vlna radosti a nadšenia. No a k vôli tomu sa už každému oplatí bojovať nerovný boj v problémami.

Stratégie hier III($*,*$;1), III($*,*$;2), III($*,*$;3),... boli iba úlohy. Je pravda, že čoraz dlhšie a namáhavejšie, ale stále iba úlohy. Naši priatelia poznali spôsob, ako na to: kreslili obrázok tak dlho, pokiaľ nedošlo ku opakovaniu vzorky, našli predtapetu a základnú tapetu, čím boli hotoví. No celkom odlišná je situácia s NIM III($*,*;\infty$). Keď Anka s Borisom nakreslili obrázok 9, dívali sa naň chvíľu bezradne. Prvý prehovoril Boris.

Boris: Dve veci sú jasné: obrázok, rovnako ako všetky predchádzajúce, je súmerný vzhľadom na diagonálu, a že na rozdiel od všetkých predchádzajúcich obrázkov nikdy nenájdeme ani opakovanie, ani predtapetu, ani základnú tapetu.

Anka: To je pravda, ale ja v tom nevidím žiadnu chybu. Čo vlastne hľadáme? Hľadáme stratégiu hry NIM III($a,b;\infty$). Vieme, ako nakresliť tabuľku kritických pozícií? Vieme. Preto vieme aj návod na výhru. Poznáme stratégiu!



Obr. 9

B: Čiastočne máš pravdu. Ale predsa je len naša znalosť stratégie III(*,*;∞) slabšia, ako bola napríklad stratégia hry III(*,*;3). Tu sme vedeli pomerne rýchlo vypočítať, či je napríklad pozícia (1711,2836) kritická alebo nekritická. Toto pri NIM III(*,*;∞) nevieme. Nevieme ju počítať, vieme ju iba kresliť, čo vyžaduje mnoho času. Pre tie čísla, čo som uviedol, by sme tabuľku kreslili asi hodinu a boli by sme v pochybnosti, či sme niekde neurobili chybu.

A: Ak ti teda dobre rozumiem, Boris, chceš nájsť nejaký počtársky vzorec, pomocou ktorého by si mohol pre ľubovoľnú dvojicu prirodzených čísel (a,b) určiť dve veci pre NIM $(*,*;\infty)$:

a) či je to kritická pozícia,

b) ak to nie je kritická pozícia, aký je víťazný ťah.

B: Presne to by som chcel!

A: Tak to poďme hľadať! Skúsme najprv obrázok 9 prepísať do tabuľky.

2.7. Tabuľka čísel = prvá myšlienka. Podľa Ankinho návrhu zapísali obrázok č. 9 vo forme tabuľky. Pretože tabuľka je súmerná podľa diagonály, rozhodli sa písať iba súradnice bodov nad diagonálou a bod (0,0). Tabuľka vyzerala takto

x	0	1	3	4	6	8	9	11	12	14	16	17	19	21
y	0	2	5	7	10	13	15	18	20	23	26	28	31	34

Tab. 1

Úloha 2.20. Dívajte sa na tabuľku a hľadajte v nej zákonitosti.

Riešenie tejto úlohy nenájdete vzadu medzi riešeniami, ale v nasledujúcom rozhovore.

Anka: V hornom riadku čísla pribúdajú po jednotke či po dvojke. V spodnom riadku po dvoch či po troch.

Boris: Žiadne číslo sa nevyskytne aj v hornom, aj v dolnom riadku — okrem nuly.

A: Skutočne: 1 — hore, 2 — dole, 3 a 4 — hore, 5 — dole, 6 — hore, 7 — dole, 8 a 9 — hore. Vieš, že rozdiel oboch riadkov („dolný" — „horný") je postupnosť 0, 1, 2, 3, ...?

B: Čo hovoríš? Tomu nerozumiem.

Anka začala Borisovi vysvetlovať svoju poslednú myšlienku. Zo začiatku bolo vysvetľovanie trochu zmätené, no postupne sa vyjasňovalo. Čím viac Anka vysvetľovala, tým zrejmejšie sa jej samej veci ukazovali. Nakoniec zvolala: Hurá, veď je to jednoduché! Pozri, Boris, ja už viem tabuľku 1 pokračovať bez toho, že by som kreslila obrázok.

2.8. Návod na výrobu tabuľky čísel. Najprv si k tabuľke dopíšeme ešte prvý riadok „n"; v ňom idú prirodzené

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
x_n	0	1	3	4	6	8	9	11	12	14	16	17	19	21		
y_n	0	2	5	7	10	13	15	18	20	23	26	28	31	34		

Tab. 2

čísla od nuly za radou 0, 1, 2, 3,... Teraz si všimnime, že pre každé n platí

(i) $$y_n = x_n + n.$$

Skutočne

$$\begin{aligned} y_0 &= x_0 + 0 \qquad (y_0 = 0, x_0 = 0)\,, \\ y_1 &= x_1 + 1 \qquad (y_1 = 2, x_1 = 1)\,, \\ y_2 &= x_2 + 2 \qquad (y_2 = 5, x_2 = 3) \quad \text{atď.} \end{aligned}$$

Konečne použijeme tvoju myšlienku, že

(ii) Každé prirodzené číslo sa v riadku „x_n" alebo v riadku „y_n" vyskytne práve raz.

Zatiaľ posledný stĺpec v tabuľke je: $n = 13$, $x_{13} = 21$, $y_{13} = 34$. Chcem nájsť x_{14}. Vyhľadám najmenšie prirodzené číslo, ktoré sa doteraz v riadkoch „x_n" a „y_n" nevyskytlo. Je to číslo 22. Preto $x_{14} = 22$ a teda $y_{14} = x_{14} + 14 = 22 + 14 = 36$.

Chcem nájsť x_{15}. Vyhľadám najmenšie prirodzené číslo, ktoré sa doteraz v riadkoch „x_n" a „y_n" nevyskytlo. Je to číslo 24. Preto $x_{15} = 24$ a teda $y_{15} = x_{15} + 15 = 24 + 15 = 39$.

Úloha 2.21. Napíšte tabuľku kritických pozícií NIM III$(*,*;\infty)$ až do $n = 33$ (riešenie je tu v texte).

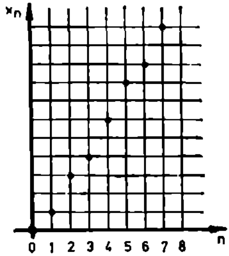
Návod na negrafické vyhotovenie tabuľky kritických pozícií je už istým pokrokom, no otázky a), b) z odseku 2.6 nerieši. To by vyžadovalo nájsť predpis, ako priamo ku číslu n napísať obidve súradnice x_n a y_n. Ako daný predpis nájsť? Bude treba zrejme veľmi dôkladne poprezerať tabuľku, ku ktorej sme došli.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
x_n	0	1	3	4	6	8	9	11	12	14	16	17	19	21	22	24	25	27	29
y_n	0	2	5	7	10	13	15	18	20	23	26	28	31	34	36	39	41	44	47

n	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
x_n	30	32	33	35	37	38	40	42	43	45	46	48	50	51	53
y_n	49	52	54	57	60	62	65	68	70	73	75	78	81	83	86

Tab. 3

2.9. Grafy = druhá myšlienka. Tabuľka je kopa čísel. Tabuľka nie je dosť prehľadná. Tabuľku treba sprehľadniť — treba nakresliť nejaké grafy. Z nich sa snáď niečo vyťaží. Na obrázku č. 10 vidieť graf funkcie x_n. Bodky stúpajú dosť strmo nahor, no stále sa motajú okolo akejsi priamky. Vedeli by sme tú priamku nakresliť? Vedeli by sme nakresliť aj iné významnejšie grafy charakterizujúce tabuľku?



Obr. 10

Úloha 2.22. Nakreslite graf funkcie x_n a pokúste sa nájsť priamku, ktorá „čo najlepšie" aproximuje stúpanie grafu.

Úloha 2.23. Nakreslite graf funkcie $u_n = x_n - n$ (bude pomalšie stúpať). Aj tu nájdite aproximujúcu priamku.

Úloha 2.24. Nakreslite graf funkcie $v_n = y_n - 2n$.

Úloha 2.25. Nakreslite graf funkcie $f_n = \dfrac{x_n}{n}$.

Úloha 2.26. Nakreslite graf funkcie $g_n = \dfrac{y_n}{x_n}$.

Poriadne sa zamyslite nad výsledkami úloh. Pokúste sa vypozorovať z chovaní funkcií x_n, u_n, v_n, f_n a g_n nejaké zákonitosti. Ak už nebudete vedieť ako ďalej, prečítajte si nasledujúcu úlohu.

Úloha 2.27. Z grafu funkcie f_n vidieť, že hodnota $f_n = 1{,}6$ sa opakuje dosť pravidelne: $f_5 = f_{10} = f_{15} = f_{20} = f_{25} = 1{,}6$. Zistite, či toto platí ďalej, t. j. či $f_{30} = f_{35} = \ldots = f_{5k} = 1{,}6$ pre všetky prirodzené čísla k.

Úloha 2.28. Podobne zistite, či platí $g_5 = g_{10} = g_{15} = \ldots = g_{5k} = 1{,}625$ pre všetky prirodzené čísla k.

Úloha 2.29. Keď poznáme hodnotu funkcie f_n, vieme vypočítať hodnotu funkcie g_n? Tiež naopak, vieme vypočítať hodnotu funkcie f_n, ak poznáme hodnotu funkcie g_n?

Zistili sme, že odhad s pravidelným opakovaním nejakej hodnoty nevyšiel, no poznáme vzťah medzi funkciami f_n a g_n. Ak poznáme jednu z nich, vieme vypočítať druhú. Skúsme ešte oba grafy týchto funkcií nakresliť na jediný papier. Zaujíma nás, ako bude vyzerať „asymptotické chovanie sa funkcií“, t. j. ako budú vyzerať ich grafy pre veľké n. K tomu ovšem najprv potrebujeme tie „veľké n“ vypočítať tabuľkovým spôsobom.

Úloha 2.30. Vypočítajte hodnoty funkcií f_n a g_n pre $n = 71, 72, 73, \ldots, 100$. Zostrojte na jednom obrázku grafy oboch funkcií pre $71 \leqq n \leqq 100$. Skúste na základe tohto obrázku odhadnúť, ako pôjdu grafy funkcií f_n a g_n ďalej, pre $n \to \infty$.

2.10. Hranica = tretia myšlienka. Porovnajme grafy funkcií f_n a g_n na obrázkoch 12, 13 a 14 z kapitoly 6. Vidíme dve veci:

(iii) pre každé n je $f_n < g_n$

(iv) obe funkcie „pulzujú“ — dosť rytmicky sa súčasne približujú a odďaľujú od istej hranice — označme ju h. Najtesnejšie sa ku hranici h priblížili v hodnote $n = 89$.

Boris: Ak sú obidva tieto dohady správne, tak hraničná hodnota h leží medzi f_{89} a g_{89}, t. j.

$$\text{(v)}\quad f_{89} = \frac{144}{89} \doteq 1{,}6178775 < h < 1{,}6180555 \doteq$$
$$\doteq \frac{233}{144} = g_{89}\,.$$

Anka: To by sme mali číslo h určené s presnosťou... (a začala počítať): $1{,}6180555 - 1{,}6178775 = 0{,}000178$. Teda

$$\text{(vi)}\qquad h = 1{,}6179665 \pm 0{,}000089\,.$$

B: Čo myslíš, Anka, mohli by sme túto hranicu h ešte ďalej spresniť?

A: Myslím, že mohli, ale napočítali by sme sa. Nik nevie, po koľkých krokoch sa obe funkcie f_n a g_n zase k sebe tak veľmi priblížia. Neverím, že to bude príliš skoro.

B: Mohli by sme skúsiť hľadať tie najväčšie priblíženia hneď od začiatku. Snáď bude v tom nejaká zákonitosť.

A: Aké — najväčšie priblíženia? Veď to je jediné — to máme, je to $n = 89$.

B: Nerozumieš mi. Pozri, začneme od začiatku, od nuly, alebo od $n = 1$. Pre toto číslo je $f_1 = 1$, $g_1 = 2$, teda $g_1 - f_1 = 1$. Pre $n = 2$ je $g_2 - f_2 = \frac{5}{3} - \frac{3}{2} = \frac{1}{6}$, čo je menej, ako bola 1. Ďalej pre $n = 3$ je $g_3 - f_3 = = \frac{7}{4} - \frac{4}{3} = \frac{5}{12}$, čo je viac, ako bola $\frac{1}{6}$. Ďalej pre $n = 4$ je $g_4 - f_4 = \frac{10}{6} - \frac{6}{4} = \frac{1}{6}$, čo je to isté ako per

$n = 2$. Ďalej pre $n = 5$ je $g_5 — f_5 = \frac{13}{8} - \frac{8}{5} = \frac{1}{40}$ čo je hodne menej ako $\frac{1}{6}$.

A: Ahá! Už ti rozumiem. Chceš nájsť v postupnosti 1, 2, 3,... tie čísla n, pre ktoré výraz $g_n — f_n$ bude menší, ako pre ktorúkoľvek z predchádzajúcich hodnôt.

B: Presne tak. Skúsme to nájsť. Možno niečo objavíme.

Úloha 2.31. Skúste to nájsť aj vy; určite objavíte veľmi vážnu vec! Keď priatelia uvideli výsledok svojej práce, tabuľku z riešenia úlohy 2.31, vedeli predpovedať, pre ktoré najbližšie n (po $n = 89$) sa grafy f_n a g_n priblížia ešte tesnejšie. A nielen to. Špekulantskou úvahou vypočítali príslušné f_n a g_n bez toho, že by sa trápili vypisovaním dlhej tabuľky.

Úloha 2.32. Určte najmenšie prirodzené $n > 89$, pre ktoré bude $g_n — f_n < \frac{1}{12816}$. Vypočítajte pre toto n číslo $g_n — f_n$. Ako hlavný výsledok tu bola možná ešte presnejšia hraničná hodnota

(viii) $$h = 1{,}6180314 \pm 0{,}0000057 .$$

2.11. Limita = štvrtá myšlienka. Vzorec (viii) dáva už hraničnú hodnotu h s veľkou presnosťou, ale stále nedáva túto hodnotu presne. Je možné určiť hodnotu h presne?

Anka: Úplne presne by sme h určili vtedy, ak by sme vedeli vypočítať f_n a g_n pre $n = \infty$.

Boris: No, ako určíš niečo v nekonečnu? To sa predsa nedá.

A: Ja však verím, že také h existuje! Určite existuje!

B: V nekonečnom n by si podľa (vii) mala $g_n - f_n = = \frac{1}{\infty x_\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$.

A: Je to troška odvážne, čo tu počítaš, ale myslím, že v podstate správne. Správne! Vykríkla Anka a začala počítať, až vypočítala presnú hodnotu h.

Úloha 2.33. Vypočítajte presnú hodnotu h.

2.12. Vzorec = piata a posledná myšlienka. Víťazne hľadeli priatelia na pokorené číslo h. Teraz, keď boli veci jasné, nezdalo sa ani to zdolávanie tak vyčerpávajúce. Pocit víťazstva blažil. Bolo treba už len dopočítať, ako z čísla h určiť funkcie x_n a y_n. K tomu viedla táto úvaha (čitateľ sa môže pokúsiť o samostatné riešenie): Pretože h je limitná hodnota pre $\frac{x_n}{n}$, bude číslo x_n blízko čísla $h.n$. Zistime túto závislosť tabuľkou:

n	1	2	3	4	5	6	7
$h.n$	1,618	3,236	4,854	6,472	8,090	9,708	11,326
x_n	1	3	4	6	8	9	11

Z tabuľky vidieť, že číslo x_n je najbližšie nižšie celé číslo ku číslu $h.n$. V matematike máme na túto funkciu osobitný symbol a pomenovanie.

Symbolika. Nech a je ľubovoľné reálne číslo. Potom existuje práve jedno celé číslo b také, že

$$b \leqq a < b + 1 .$$

Číslo b nazývame *celá časť čísla* a a označujeme ho $b = = [a]$.

Príklady. $[1{,}7] = 1$, $\left[\frac{13}{4}\right] = 3$, $[\pi] = 3$, $[6] = 6$, $[-1{,}1] = -2$, $[-\sqrt{2}\,] = -2$, $[\sqrt{3} - \sqrt{2}\,] = 0$ atď.

Výsledok pozorovania tabuľky môžeme teraz zapísať vzorcom

(x) $\qquad x_n = [h . n]$ pre všetky n.

Úloha 2.34. Nájdite reálne číslo r, pre ktoré platí $y_n = [r . n]$, pre všetky n.

Úloha 2.35. Napíšte stratégiu hry NIM III$(a,b;\infty)$.

2.13. Stratégia hry NIM III $(a, b; \infty)$. Najprv popíšeme stratégiu hry ako návod. Potom v ďalšom odseku podáme dôkazy tvrdení, ktoré teraz vyslovíme a použijeme.

Nech je teda daná pozícia (p,q), $p \leqq q$. Všimneme si čísla p. Najprv zistíme, či môžeme číslo p písať v tvare $[nh]$, alebo v tvare $[nh^2]$, kde $n \in N$. Platí:

Lema 1. *Nech je dané prirodzené číslo p. Potom toto číslo je možné písať práve jedným zo spôsobov*

I. $p = [nh]$, *kde* $n \in N$, $\left(t.\,j.\ \frac{p}{h} < n = \left[\frac{p+1}{h}\right]\right)$,

II. $p = [nh^2]$, *kde* $n \in N$, $\left(t.\,j.\ \frac{p}{h^2} < n = \left[\frac{p+1}{h^2}\right]\right)$.

Každú z možností rozoberieme osobitne:

I. $p = [nh]$ rozlišujeme 3 prípady

a) $q = [nh^2]$ — pozícia (p,q) je kritická, a preto hráč na ťahu nemá vyhrávajúci ťah,

b) $q > [nh^2]$ — zahráme $(p,q) \to (p,[nh^2])$,

c) $q < [nh^2]$ — zahráme $(p,q) \to (p - t, q - t)$, kde $t = p - [h(q - p)]$

II. $p = [nh^2]$ — zahráme $(p,q) \to (p, [nh])$.

2.14. Dôkazy tvrdení z 2.13. Okrem lemy 1 treba dokázať ďalšie tvrdenia, použité v odseku 2.13:

Lema 2. *Ak je* $p = [nh] \leqq q < [nh^2]$, *tak* $t = p - [h(q - p)] > 0$ a $q - t = [h^2(q - p)]$.

Lema 3. *Ak je* $p = [nh]$ a $q = [nh^2]$, *tak žiadna z pozícií* $(p - t, q)$, $(p, q - t)$, $(p - t, q - t)$ *pre* $t \in N$ *nie je kritická.*

Dôkaz lemy 1 sa skladá z dvoch častí:

A. Číslo $p \in N$ nie je možné vyjadriť súčasne aj v tvare $[nh]$, aj v tvare $[mh^2]$, $n, m \in N$. Toto dokážeme sporom. Nech teda $p = [nh] = [mh^2]$, potom

$$nh - 1 < p < nh \Leftrightarrow n - \frac{1}{h} < \frac{p}{h} < n\,,$$

$$mh^2 - 1 < p < mh^2 \Leftrightarrow m - \frac{1}{h^2} < \frac{p}{h^2} < m\,,$$

sčítame a zoberieme do úvahy rovnosť $\frac{1}{h} + \frac{1}{h^2} = 1$; získame

$$n + m - 1 < p < n + m\,,$$

čo je spor, lebo celé čísla $n + m - 1$ a $n + m$ idú bezprostredne po sebe, a niet teda medzi nimi miesta pre celé číslo p.

B. Číslo $p \in N$ možno vyjadriť buď v tvare $[nh]$, alebo v tvare $[mh^2]$, $n, m \in N$. Aj toto dokážeme sporom. Predpokladáme, že p nie je možné vyjadriť ani v tvare $[nh]$, ani v tvare $[mh^2]$, t. j. $[nh] < p < [(n + 1)\,h]$ a $[mh^2] < p < [(m + 1)\,h^2]$.

Podobne ako v predchádzajúcom prípade je

$$nh < p < (n + 1)\,h - 1 \Leftrightarrow n < \frac{p}{h} < n + 1 - \frac{1}{h},$$

$$mh^2 < p < (m + 1)\,h^2 - 1 \Leftrightarrow m < \frac{p}{h^2} < m + 1 - \frac{1}{h^2},$$

sčítame a získame

$$m + n < p < n + m + 1,$$

čo je spor. Dôkaz lemy 1 je ukončený.

Dôkaz lemy 2 sa skladá tiež z 2 častí:

A. $p - [h(q - p)] > 0$. Podľa predpokladu je $q < [h^2n] < h[hn] = hp \Rightarrow hq < h^2p = (h + 1)\,p \Rightarrow h(q - p) < p \Rightarrow [h(q - p)] < p$.

B. $q - t = [h^2(q - p)]$ t. j. $q - p + [h(q - p)] = [h^2(q - p)]$.

Posledná rovnosť je dôsledok rovností $\forall n \in N$: $n + [hn] = [h^2n]$, ktorá je vlastne novou formou rovnosti (i). O čísle h vieme, že $h^2 = h + 1$. Potom $[h^2n] = [(h + 1)\,n] = [hn + n] = [hn] + n$.

Dôkaz lemy 3 už vlastne vyplýva z predchádzajúcich dôkazov. Je zrejmé, že ak (p,q_1) a (p,q_2) sú obidve súčasne kritické, tak nutne $q_1 = q_2$. Z lemy 1 vyplýva podobná vlastnosť aj pre dvojice (p_1,q) a (p_2,q). Ostáva nám ešte ukázať, že ak (p,q) je kritická pozícia a $t > 0$ prirodzené, tak $(p - t, q - t)$ nie je kritická pozícia. Predpokladajme, že obidve dvojice sú kritické. Potom existujú n, $m \in N$ také, že $p = [nh]$, $q = [nh] + n$, $p - t = [mh]$, $q - t = [mh] + m$. Rozdiel prvých dvoch rovností je $q - p = n$ a rozdiel druhých dvoch rovností je $q - p = m$, čo znamená, že $n = m$, t. j. $t = 0$, a to je spor.

3. kapitola

NÁRUČ PLNÁ HIER NIM

V prvých dvoch kapitolách sme sa naučili hrať tri druhy NIM. Nielen hrať, ale aj vyhrávať. Teraz rozšírime náš repertoár o ďalšie tri hry NIM.

3.1. Pravidlá NIM IV($n;k$) sú tie isté, ako pri NIM I($n;k$), iba s tým rozdielom, že o víťazovi nerozhodne posledný kameň, ale niečo iné. Víťazom partie sa stáva ten hráč, ktorý po úplnom rozobratí kopy má nepárny počet kameňov. Aby sa táto hra dala rozumne hrať, musí byť n číslo nepárne.

Príklad partie IV(7;2). $7 \xrightarrow{A} 6 \xrightarrow{B} 4 \xrightarrow{A} 2 \xrightarrow{B} 1 \xrightarrow{A} 0$. Anička brala 3krát, a to $1 + 2 + 1 = 4$ kamene. Teda vyhral Boris, lebo jemu ostal nepárny počet kameňov.

Úloha 3.1. Bola by Anička vyhrala, keby v treťom ťahu namiesto $4 \xrightarrow{A} 2$ brala iba $4 \xrightarrow{A} 3$?

Úloha 3.2. Bol Borisov ťah $6 \xrightarrow{B} 4$ dobrý?

Úloha 3.3. Nájdite stratégiu hry IV(7;2).

Úloha 3.4. Nájdite stratégiu hry IV(9;2).

3.2. Stratégia NIM IV(11;2). Predpokladajme, začala nahlas uvažovať Anka, že by sme brali po jednom kameni. To by si vyhral ty, lebo ty by si bral 5krát a ja 6krát. Preto ja musím aspoň raz brať 2 kamene. Keby som napríklad v prvom ťahu zahrala hneď $11 \xrightarrow{A} 9$.

— To by ti nepomohlo, dodal Boris. Ja by som zahral $9 \xrightarrow{B} 7$ a vyhrám. Odkiaľ to vidíš, že vyhráš? Opýtala sa Anka a Boris jej začal vysvetlovať. To je predsa jednoduché. V prvých dvoch ťahoch sme obaja vzali po 2 kamene. Vznikla vlastne hra IV(7,2), v ktorej začínaš ty. O tejto hre už vieme, že ja, ako druhý hráč — ju vyhrám. Nadobudnem nepárny počet kameňov. Keď k tomu doložím tie dva z môjho prvého ťahu, stále budem mať nepár — teda budem víťaz.

— Máš pravdu, zamyslene povedala Anka a pokračovala: Teda ja, ako začínajúci hráč, musím vziať najprv iba 1 kameň a až v druhom mojom ťahu brať dva, takto:

$$11 \xrightarrow{A} 10 \xrightarrow{B} 9 \xrightarrow{A} 7\,.$$

— A myslíš, že teraz už vyhráš?

Úloha 3.5. Kto zvíťazí v rozohratej partii?

Keď zhrnuli doterajšie poznatky, prehlásil Boris:

— Pozícia 11 je pre začínajúceho hráča prehratá. Pozícia 11 sa prevedie do pozície 7 buď tak, že obaja zoberú párny počet kameňov a A bude na ťahu, alebo tak, že obaja budú mať nepárny počet kameňov a na ťahu bude B.

— Zdá sa, že možnosť víťazstva sa bude pravidelne striedať: V začiatočných pozíciách 7, 11, 15, atď. víťazí hráč B a v začiatočných pozíciách 5, 9, 13, atď. víťazí hráč A.

— To je tvoja domnienka, alebo to vieš aj dokázať?

— Zatiaľ iba domnienka, no priznám sa, že nie je mi ani jasné, ako by som ju v takej všeobecnosti dokázala. Pletie sa tu viacero vecí — počet kameňov, ktoré ostali na kope, počet kameňov, čo mám v ruke ja, počet kameňov, čo máš v ruke ty, a ešte jedna dôležitá vec, kto z nás je na ťahu.

— Máš pravdu, je toho mnoho. Ale dalo by sa to zjednodušiť. Stačí, ak poznáme návod pre hráča na ťahu. Poznáme dve veci: číslo m — t. j. počet kameňov, ktoré sú ešte na kope, a to, či na mojej ruke je momentálne párny (p) alebo nepárny (n) počet kameňov. Potrebujeme vedieť jedinú vec, či v tejto pozícii vyhrám, alebo prehrám.

— A ak vyhrám, tak akým ťahom, doložila Anka.

— Výborne, skúsime teda nájsť tieto údaje v tvare tabuľky. Pozri, takto. Boris začal písať tabuľku 1 a zároveň vysvetľoval: Ak je na kope jeden kameň, ja mám na ruke pár (p), tak zoberiem zvyšný kameň a vyhrám. Ak ale mám na ruke nepár (n), tak zobratím toho kameňa prehrám, preto do tabuľky píšem $\times$. Ak sú na kope dva kamene a ja mám na ruke (p), tak beriem 1 kameň; ak mám na ruke (n), tak beriem 2 kamene a vždy vyhrám.

Na kope je kameňov		1	2	3	4	5
Na ruke mám	p	1	1	$\times$	$\times$	
	n	$\times$	2	2	1	

Tab. 1

— Už mi je to jasné, povedala Anka a sama sa ujala písania tabuľky.

Úloha 3.6. Doplňte tabuľku 1 až po stĺpec $m = 10$.

Keď sa Anka s Borisom zahľadeli na tabuľku, skoro súčasne zvolali „už to mám“, a skutočne to mali.

Úloha 3.7. Napíšte stratégiu hry IV(n;2). Znamená to udať predpis, podľa ktorého na základe údajov: „m je

Riešenie úlohy 3.6.

Na kope je kameňov		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Na ruke mám	p	1	1	×	×	č	1	×	×	č	1
	n	×	2	2	1	×	2	2	1	×	

Tab. 2

počet kameňov na kope a ja viem, či mám na ruke (p) alebo (n)", možno jednoznačne rozhodnúť, či prehrám alebo vyhrám. V prípade víťazstva viem aj, aký je môj víťazný ťah.

3.3. Stratégia NIM-a (n;3). Stratégiu hry IV(n;2) poznáme. Je prirodzené skúsiť nájsť stratégiu hry IV(n;3). Aj v tomto prípade je najrozumnejšie začať príkladmi.

Úloha 3.8. Nájdite stratégiu hry a) IV(5;3), b) IV(7;3), c) IV(9;3).
Úloha 3.9. Napíšte pre NIM IV(n;3) tabuľku podobnú tabuľke 2 pre IV(n;2).
Úloha 3.10. Napíšte stratégiu hry IV(n;3).

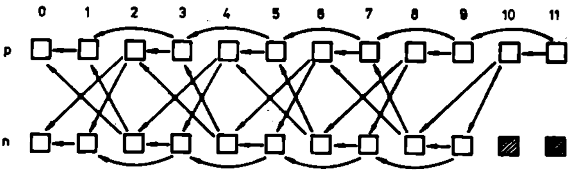
Stratégia hry NIM IV(n;3) vzdorovala menej, ako stratégia NIM IV(n;2). Je to prirodzené, veď pri jej riešení sme už boli múdrejší o vedomosti získané hľadaním stratégie hry IV(n;2).

— Na rade je hra IV(n;4), povedala Anka.

— A potom hra IV(n;5), a potom hra IV(n;6), a potom... máme teda dosť programu na ďalšiu päťročnicu. Mne sa to nechce robiť, povedal rozhodne Boris. Bolo by treba vymyslieť nejaký univerzálny recept — stratégiu pre každú hru IV(n;k).

— Ja viem, že by bolo treba, no nezdá sa ti, že dva konkrétne príklady sú málo na objav univerzálneho receptu?

— Snáď by stačilo nájsť nejaký šikovný spôsob zápisu stratégií. Naše tabuľky sú síce stručné, ale málo názorné.



Obr. 1

Nevidieť z nich, čo sa tam vlastne deje. Jediná vec je z nich pekne vidieť — situácie sa periodicky opakujú.

— A poznáš nejaký názornejší spôsob zápisu partie?

— Nepoznám, sklamane priznal Boris.

— Tak sa obráť na veštiareň, doporučila Anka.

3.4. Autor ako veštiareň. Vráťme sa k NIM-u IV(11;2), ktorý sme už dobre rozohrali v odseku 3.2. Vieme, že pozícia v každom okamžiku je určená 4 údajmi:
(1) ktorý hráč je na ťahu,
(2) koľko kameňov je na kope,
(3) koľko kameňov má na ruke hráč, čo je na ťahu,
(4) koľko kameňov má na ruke jeho súper.
Pretože údaje (2), (3), (4) sú závislé (súčet týchto troch čísel je 11), stačí určiť dva z nich. Rozhodneme sa pre údaje (2) a (3). Pritom v údaji (3) nie je ani tak dôležitý počet kameňov, ale iba to, či je toto číslo párne alebo nepárne. Preto pozíciu budeme zapisovať napríklad „(8,p)“, čo znamená: Na kope je 8 kameňov a hráč na

ťahu má na ruke párny počet kameňov. Ak tento hráč zoberie z kopy 2 kamene, vytvorí pre súpera pozíciu (6,*n*). Všetky možné pozície a všetky možné ťahy NIM-a IV (11;2) sú prehľadne zobrazené na obrázku 1.

— Boris, rozumieš tomuto obrázku?

— Zdá sa mi, že rozumiem, no nie som si celkom istý. Ty, Anka?

— Doporučujem, aby nám autor dal nejakú úlohu na preskúšanie, navrhla Anka.

Úloha 3.11. Zakreslite na obrázku partiu

$$11 \xrightarrow{A} 10 \xrightarrow{B} 8 \xrightarrow{A} 7 \xrightarrow{B} 6 \xrightarrow{A} 5 \xrightarrow{B} 3 \xrightarrow{A} 2 \xrightarrow{B} 1 \xrightarrow{A} 0.$$

Úspešné riešenie Anky a Borisa je vzadu v riešeniach.

— Zdá sa, že nový zápis hier NIM IV ste pochopili. Každá partia sa dá znázorniť na obrázku 1 cestou vychádzajúcou z bodu (11,*p*) a idúcou do niektorého z bodov (0,*p*) či (0,*n*). Cesta, to je séria na seba napojujúcich šípok. Z každého políčka vychádzajú práve dve šípky. Jedna zobrazuje ťah „beriem 1 kameň“, druhá ťah „beriem 2 kamene“. A teraz...

— A teraz použijeme novú formu zápisu k tomu, aby sme našli stratégiu, pohotovo zavŕšil autorovu myšlienku Boris.

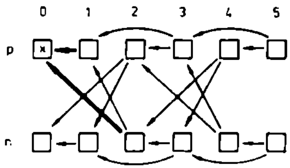
— Nájsť stratégiu znamená nájsť kritické pozície. Nájsť tie pozície, v ktorých hráč na ťahu nemá dobrého ťahu. Nutne prehrá, ak jeho súper vie, ako na to, pripomenula Anka.

— Tak poďme hľadať!, povedal Boris a načrtol časť obrázku 1.

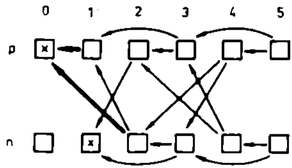
— Sem, na pole (0,*p*) dajme krížik, lebo hráč, ktorý je v tejto pozícii na ťahu, prehral, začala Anka.

— Preto môžeme silno vytiahnuť tie šípky, ktoré smerujú do poľa $(0,p)$. To sú vyhrávajúce ťahy, povedal Boris, a obidve šípky silno vytiahol. Potom vzal gumu a vygumoval obidve šípky smerujúce do poľa $(0;n)$. Tieto ťahy sú zlé, povedal, lebo sú prehrávajúce.

— Ale potom z poľa $(1,n)$ niet ťahu, protestovala Anka.



Obr. 2



Obr. 3

— Chceš povedať, že niet vyhrávajúceho ťahu, opravil ju Boris.

— Áno. Teda situácia $(1,n)$ je prehratá, preto aj sem patrí krížik. Anka dokreslila krížik a vznikol obrázok 3. Priateľov tento spôsob hľadania stratégie zaujal. Po chvíli mali z obrázku 3 celkom nový obrázok. Všetky kritické pozície boli označené krížikom a všetky zlé ťahy boli vygumované. Ostali iba šípky znázorňujúce víťazné ťahy, teda končiace v zakrúžkovaných poliach.

Úloha 3.12. Nakreslite tento obrázok.

Úloha 3.13. Nakreslite obrázok, ktorý je predĺžením obrázku z riešenia úlohy 3.12 až na prípad NIM (19;2). Vysvetlite, ako vyzerá podľa neho „návod na výhru“.

Úloha 3.14. Ako vyzerá súvislosť obrázku 17 z riešenia úlohy 3.13 s tabuľkou 3 z riešenia úlohy 3.7.

— Obrázok 17 a tabuľka 3 je vlastne to isté. Dá sa táto skutočnosť nejako využiť ku hľadaniu univerzálnej stratégie pre NIM IV?

3.5. Stratégia všetkých NIM IV. To, čo sme sa naučili v odseku 3.4, využijeme k nájdeniu univerzálnej stratégie pre NIM IV(n;k). K tomuto cieľu nám poslúžia nasledujúce úlohy.

Úloha 3.15. Nakreslite obrázok a tabuľku stratégie pre NIM IV(n;3).
Úloha 3.16. Nakreslite obrázok a tabuľku stratégie pre NIM IV(n;4).
Úloha 3.17. Nakreslite obrázok a tabuľku stratégie pre NIM IV(n;5), IV(n;6), IV(n;7) a IV(n;8).

Teraz už máme dostatočné skúsenosti na to, aby sme našli univerzálnu stratégiu pre všetky hry NIM IV(n;k).

Úloha 3.18. Napíšte tabuľku stratégie hry IV(n;k) pre $k = 2m$, $m \in N$ (t. j. k je číslo párne).
Úloha 3.19. Napíšte tabuľku stratégie hry IV(n;k) pre $k = 2m - 1$, $m \in N$ (t. j. k je číslo nepárne).

3.6. Pravidlá NIM-a V(n;k) sú tie isté ako pri hre NIM I(n;k), s jednou doplňujúcou podmienkou: Hráč na ťahu musí vziať iný počet kameňov, ako vzal jeho súper v predchádzajúcom ťahu. Pri tejto podmienke však môže vzniknúť pozícia, v ktorej hráč na ťahu vlastne nemá ťah: $\ldots \xrightarrow{B} 5 \xrightarrow{A} 4 \xrightarrow{B} 2 \xrightarrow{A} 1$. Na kope už ostal iba jeden kameň, ale Boris, ktorý je na ťahu, ho nemôže vziať, lebo v predchádzajúcom ťahu brala Anka jeden kameň. Preto treba pravidlá hry vlastne doplniť. Urobíme to prehlásením: V hre NIM V(n;k) prehráva ten hráč, ktorý už nemôže z kopy brať (na kope už nie je ani jeden kameň, alebo tam jeden kameň ostal, ale predchádzajúci ťah súpera bol „beriem 1 kameň“). Pravidlá sú jasné, pustíme sa do hľadania stratégií. Začneme s malými k. Pre $k = 2$ nemá zmysel hru V(n;k) analyzovať, lebo prvým ťahom hráča A je celý ďalší priebeh určený jednoznačne. Preto začnime s prípadom $k = 3$.

Úloha 3.20. Môže začínajúci hráč vyhrať hru V(9;3)?
Úloha 3.21. Nájdite kritické pozície hry V(9;3).
Úloha 3.22. Nájdite kritické pozície hry V(n;3).

Podobne ako v minulých hrách NIM, i tu by nám asi pomohlo, keby sme našli spôsob geometrického zobrazenia hry NIM V(n;k). Čitateľ sa môže pokúsiť o také obrázky sám. Potom si svoje výsledky porovná s našimi, ktoré sú uvedené v ďalšom odseku.

3.7. Kreslíme NIM V. Povedali sme si, že každá pozícia v NIM V(n;3) je daná dvojicou (počet kameňov, ktoré sú ešte na kope, a počet kameňov, ktoré v poslednom ťahu bral súper). Skúsime tieto dve čísla chápať ako dve súradnice v rovine. Potom každý bod na obrázku 4 znázorňuje jednu možnú pozíciu hry V(9;3). Akousi výnimkou je bod v stĺpci 9, ktorý znázorňuje začínajúcu pozíciu. Hráč A nie je obmedzený žiadnou podmienkou, a má preto všetky 3 voľby brania.

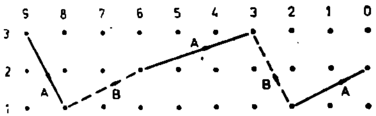
Na obrázku 4 je pomocou piatich šípok zakreslená aj jedna partia. Jej zápis vyzerá takto:

$$9 \xrightarrow{A} 8 \xrightarrow{B} 6 \xrightarrow{A} 3 \xrightarrow{B} 2 \xrightarrow{A} 0\,.$$

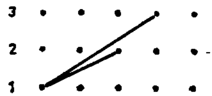
V prvom ťahu berie A jeden kameň, teda hrá $(9,.) \xrightarrow{A}$ $\longrightarrow (8,1)$. Pre hráča B nastávajú potom dve možnosti

$(8,1) \xrightarrow{B} (6,2)$, alebo $(8,1) \xrightarrow{B} (5,3)$; hráč B sa rozhodol pre prvú z nich. Ďalej hráč A volí medzi ťahmi $(6,2) \xrightarrow{A}$ $\rightarrow (5,1)$ a $(6,2) \xrightarrow{A} (3,3)$; volí druhú možnosť, ...

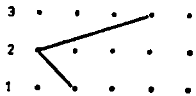
— Všimnite si túto vec, vykríkla Anka a načrtla obrázok 5. Hráč, ktorý má ťah z riadku 1, má dve možnosti: buď o 2 doprava a 1 nahor, alebo o 3 doprava a 2 nahor.



Obr. 4



Obr. 5



Obr. 6

Obr. 7

— Aké dve? Aká jedna? zvolal Boris. Čo to tu propaguješ?

— Skús si to sám. Nakresli, aké má možnosti ťahu hráč, ktorý začína odtiaľto, z bodu druhého riadku, prikazovala Anka.

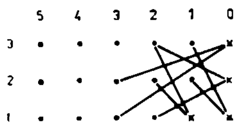
— Zabudla si mi udať stĺpec, neviem, koľko kameňov je na kope, ohradzoval sa Boris.

— Na tom predsa nezáleží, stačí, aby tam boli aspoň tri. Nepotrebuješ tento údaj vedieť, a aj tak môžeš presne zakresliť obidva možné ťahy hráča, ktorý je na rade.

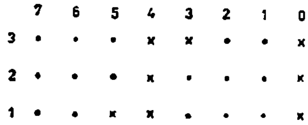
— Aha, pochopil Boris a nakreslil obrázok 6. Buď „beriem 1“, a potom musím ísť o 1 doprava a dole, alebo

„beriem 3", a potom musím ísť o 1 nahor a o 3 doprava. Ostáva ešte prípad, keď začínam z riadku 3. Ten vyzerá takto, povedal Boris a nakreslil obrázok 7.

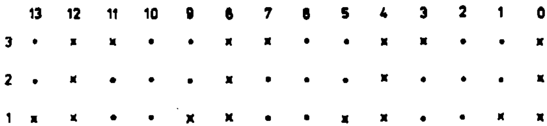
3.8. Hľadáme stratégiu NIM V. Obrázkový zápis hry V, ktorý sme sa naučili v odseku 3.7, využijeme na hľadanie



Obr. 8a



Obr. 8b



Obr. 8c

stratégie NIM V(n;3). Budeme postupne hľadať kritické pozície metódou „od konca". Pretože pozície (0,1), (0,2), (0,3) a (1,1) sú prehrané, dáme na tieto body krížiky. Potom nakreslíme všetky ťahy, ktoré končia v týchto kritických pozíciách (obr. 8a). Odtiaľto je zrejmé, že pozícia (3,3) je kritická, preto ju označíme krížikom. Podobne označíme krížikom body — pozície (4,čokoľvek) a (5,1), ktoré sú tiež kritické (obr. 8b). Teraz nakreslíme všetky ťahy, končiace v nových kritických poliach. Dostaneme obrázok 8c. Z neho pekne vidieť, že situácia sa periodicky opakuje vždy po 4 stĺpcoch.

— Týmto grafickým spôsobom sa už teraz dá nájsť stratégia každej hry NIM V(n;k), vyhlásil Boris.
— Skúsme to pre $k = 4$, navrhla Anka.

Úloha 3.23. Nájdite kritické pozície hry V(n;4).
Úloha 3.24. Tabuľkovým spôsobom zapíšte stratégiu hry V(n; 4).

Pozor! Osobitne treba napísať tabuľku pre začiatočný ťah a osobitne tabuľku pre ťah nezačiatočný.

Úloha 3.25. Nakreslite obrázok a tabuľku stratégie hry V(n;5).
Úloha 3.26. Nakreslite obrázok a tabuľku stratégie hry V(n;6).

— To nám dalo riadne zabrať, no zvládli sme to, uznanlivo ohodnotil spoločnú prácu našich priateľov Boris.
— Teraz by sme už vedeli nájsť stratégiu každej hry NIM V, no mám taký dojem, hovorí Anička, že pre väčšie k by to asi nebolo jednoduché. Čo myslíš, Boris, vedeli by sme i tu nájsť univerzálny návod na výhru pre každou hru NIM?
— Zdá sa to zamotané. Opýtaj sa autora, povedal Boris.
— Máte správne podozrenie, povedal autor. Nájsť univerzálny model pre NIM V(n;k) je asi veľmi ťažká úloha. Priznám sa vám, že som ju ešte nerozriešil. Viem iba toľko, že riešenie bude inak vyzerať pre k párne (bude asi ľahšie), a inak pre k nepárne.
— A budú periódy stále narastať? Veď keď pozrieme na tie, čo poznáme, vidíme, že to ide hodne rýchlo:

$k =$	3	4	5	6
perióda $=$	4	10	13	28

Bude to stále tak rýchlo stúpať? pýtala sa Anka.

— Ani to neviem. Ak som sa nesplietol, tak pre $k = 7, 8, 9, 10$ a 11 bude príslušná perióda 25, 27, 32, 55, 12.

— Skutočne? začudoval sa Boris. Je pre $k = 11$ perióda iba 12? Je to dobre spočítané?

— Skús to, Boris, prekontrolovať. A ešte niečo. Ak by sa vám dvom podarilo nájsť univerzálnu stratégiu hry NIM V(n;k), aspoň pre párne k, pošlite svoje riešenie do redakcie časopisu Matematické rozhledy. Čitateľov to bude určite zaujímať.

3.9. Pravidlá hry NIM VI(a,b,c). Tento NIM je trojkopový. Na prvej kope je a kameňov, na druhej b kameňov a na tretej kope je c kameňov. Hráč na ťahu z ktorejkoľvek kopy berie ľubovoľný počet kameňov. Vyhráva ten, kto berie posledný kameň.

Príklad partie VI(6,5,1). $(6,5,1) \xrightarrow{A} (6,4,1) \xrightarrow{B} (3,4,1) \xrightarrow{A} (3,2,1) \xrightarrow{B} (2,2,1) \xrightarrow{A} (2,2,0) \xrightarrow{B} (1,2,0) \xrightarrow{A} (1,1,0) \xrightarrow{B} (0,1,0) \xrightarrow{A} (0,0,0)$.

Všimnite si, že od pozície (2,2,0) bola hra VI(2,2,0) rovnaká ako hra II(2,2;∞). Ak niektoré z čísel a, b, c je nula, napr. $c = 0$, tak NIM VI(a,b,c) je vlastne NIM II(a,b;∞). V tejto hre už poznáme kritické pozície. Sú to všetky pozície (n,n). Preto každá pozícia (n,n,0), alebo (n,0,n), alebo (0,n,n) je kritickou pozíciou hry VI.

Úloha 3.27. Mohol Boris namiesto ťahu $(3,2,1) \xrightarrow{B} (2,2,1)$ zahrať niečo lepšie?

Úloha 3.28. Bol Borisov ťah $(6,4,1) \xrightarrow{B} (3,4,1)$ dobrý?

Úloha 3.29. Bol Aničkin ťah $(6,5,1) \xrightarrow{A} (6,4,1)$ dobrý?

Dohovor o symbolike. Aby sme nemuseli zbytočne vypisovať všetky prípady líšiace sa, iba poradím, budeme používať termín „a ich (a jej) permutácie“ v tomto zmysle: Namiesto vety „pozícia $(n,n,0)$, alebo $(n,0,n)$, alebo $(0,n,n)$ je kritická“ napíšeme „pozícia $(n,n,0)$ a jej permutácie sú kritické“.

Úloha 3.30. Nájdite všetky kritické pozície hry NIM VI$(a,b,1)$.

Úloha 3.31. Nájdite všetky kritické pozície NIM VI$(a,b,2)$.

Úloha 3.32. Nájdite všetky kritické pozície NIM VI$(a,b,3)$.

3.10. Trik na NIM-a VI. Všimli sme si, že pri hľadaní kritických pozícií sa ako periódy objavujú čísla 2, 4, 8 — teda mocniny dvojky. Na druhej strane vieme, že každé prirodzené číslo môžeme napísať ako súčet niektorých z čísel 1, 2, 4, 8, 16, 32, ... pričom každé z týchto čísel sa v súčte vyskytne najviac raz. Napríklad

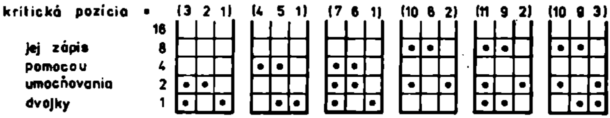
$$
\begin{array}{lll}
3 = 2 + 1 & 7 = 4 + 2 + 1 & 11 = 8 + 2 + 1 \\
5 = 4 + 1 & 9 = 8 + 1 & 12 = 8 + 4 \\
6 = 4 + 2 & 10 = 8 + 2 & 13 = 8 + 4 + 1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
14 = 8 + 4 + 2 & \\
15 = 8 + 4 + 2 + 1 & \\
17 = 16 + 1 & \text{atď.}
\end{array}
$$

Skúsme teraz zapísať niektoré z kritických pozícií NIM VI pomocou takéhoto rozkladu.

Úloha 3.33. Dobre si prezrite 6 kritických pozícií zapísaných grafickým spôsobom. Čo je pre všetky tieto prípady spoločné?

Úloha 3.34. Využite poznatku úlohy 3.32 a nájdite všetky x, pro ktoré je kritická pozícia a) $(72,11,x)$, b) $(1983,713,x)$.



Obr. 9

Úloha 3.35. Napíšte víťazný ťah (ak existuje) hry VI(a,b,c) v pozícii a) (34,33,35); b) (17,9,5); c) (35,49,17); d) (34,51,17).

4. kapitola

ROZPRÁVKA TAKMER GULIVEROVSKÁ

Musím sa priznať, začal svoju pochvalnú reč autor, že ma vaše nápady prekvapili. Nečakal som, že sa takou vervou a dôvtipom pustíte do ťažkej hry NIM VI. Zaslúžite si odmenu. Uvažoval som, čo vám dať. Cukríky som zamietol k vôli zubárom, kolotoč kvôli bruchabôľu a po dlhom uvažovaní som predsa len našiel riešenie — rozprávku. Chcete si ju vypočuť?

Boris: Chceme — som samé ucho.

Anka: Bude tam aj princezná?

Autor: Rozprávka, ktorú sa dozviete je neobyčajná — je to matematická. Odohráva sa v čudnej krajine, vlastne v dvoch krajinách, v Bilande a Trilande. Dávajte dobrý pozor. Veď tie čudá, ktoré Bilanďania a Trilanďania povymýšľali, možno výborne zužitkovať aj u nás. Počítacie stroje, komunikačný systém družíc a mnohé iné zázraky dneška by sa sotva dali vymyslieť bez toho, čo bolo objavené v krajine Biland a Triland. Ba dokonca viac. Objavy, o ktorých sa v rozprávke dozviete, vám pomôžu riešiť napríklad NIM VI so štyrmi, piatimi, päťdesiatpiatimi,... kôpkami.

Anka: Tak už rozprávajte.

Autor: Kde bolo — tam bolo, bol raz jeden Vladko Hráško, ktorý sa vybral do sveta hľadať službu. Išiel deň, dva a na tretí podvečer prišiel do krajiny, kde rástli vysočizné stromy s obrovskými listami. Boli to tak veľké listy, že sa do jediného listu zabalil ako do deky a na druhý sa vyvalil ako na váľandu. Zaspal. Lenže...

Boris: Boli to mäsožravé listy a zbaštili ho.

Autor: Či si len krvižíznivý Boris. Nič také. Listy boli celkom mierumilovné. Príjemne Vladka hriali a Hráškovi sa snívali krásne sníčky. Lenže to netrvalo dlho. Keď bol mesiac na najvyššom bode svojej nočnej púte, zadul silný vietor, čiernym oblakom zatemnil hviezdnu oblohu a hrozný tajfún roztočil všetko, čo mu prišlo do cesty. Vyvracal stromy, stŕhal strechy z chalúp a uchmatol aj listy s Vladkom. Vladko cítil, ako by ho obrovská sila nadvihla, pod samé nebo zdvihla, pokolotočovala, a potom mäkúčko, priam nežne, ako na páperovom padáku spustila dolu — na zem. Hráško vyskočil. Brieždilo sa. Z jednej strany more, z druhej vysoké kopce a neďaleko prenikali svetlá ľudských obydlí. Bol v Bilande.

Anka: V Bilande? To je nejaký štát?

Autor: Skoro máš pravdu.

Biland je rozprávková krajina, kde žijú „rozumné“ bytosti. Ich spôsob života sa v podstate nelíši od nášho; jediné, v čom sú celkom iní, je spôsob ich peňažnej sústavy. Základnou jednotkou platidiel v tejto krajine je jeden *a*-groš (ako u nás 10 halierov). Za dva *a*-groše je možné vymeniť jeden *b*-groš. Jeden *c*-groš má hodnotu dvoch *b*-grošov. Jeden *d*-groš je možné vymeniť za dva *c*-groše, atď.

Po svojom šťastnom stroskotaní sa Vladko vypravil do mesta. V bruchu mu už poriadne škvrčalo. Potreboval čo najskôr zohnať zamestnanie. Dlho nerozmýšľal a smelo vošiel do veľkej budovy, ktorá upútala jeho pozornosť pekným, krasopisne napísaným nápisom „Brior“. Veľmi sa núkať nemusel. Práve bolo treba pomáhať vykladať z objemného nákladného auta rannú dodávku tovaru. Šikovné počínanie Vladka si všimol aj hlavný skladník.

Za dobrú prácu vyplatil Vladkovi na dlaň celý *e*-groš a ponúkol mu trvalé zamestnanie.

Boris: Koľko je to *e*-groš? Je to viac ako 20 korún?

Autor: No, skús si to sám vypočítať. Predstav si, Boris, že si hladný ako vlk, vo vrecku máš *e*-groš a v bufete čítaš tieto ceny:

Rožok = jeden *a*-groš
Pohár mlieka = jeden *b*-groš
Obložený chlebík = jeden *b*-groš + jeden *a*-groš
Jedna zmrzlina = jeden *c*-groš

Anka: Tá zmrzlina je drahá.

Boris: Prosím ťa, kto bude raňajkovať zmrzlinu? Ja by som si dal dva poháre mlieka a päť chlebíkov.

Anka: To by ti nevystačilo.

Boris: Vystačilo.

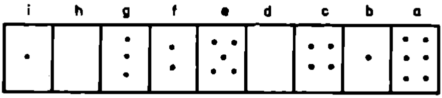
Anka: No schválne. Päť obložených chlebíkov je päť *b*-grošov + päť *a*-grošov. Teda sedem *b*-grošov a jeden *a*-groš. To je tri *c*-groše, jeden *b*-groš, jeden *a*-groš. Teda jeden *d*-groš, jeden *c*-groš, jeden *b*-groš a jeden *a*-groš.

Boris: Tak vidíš, že vystačilo.

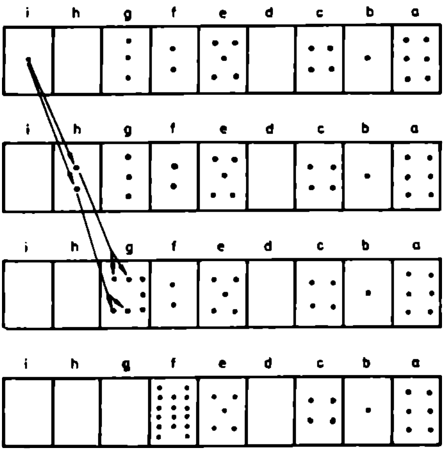
Anka: No ty si chcel ešte dva poháre mlieka. To sú dva *b*-groše, čiže jeden *c*-groš. Dokopy za mlieko a chlebíčky by si teda zaplatil jeden *e*-groš, jeden *b*-groš a jeden *a*-groš. Toľko nemáš.

Boris: Nevadí, dal by som si teda dva poháre mlieka a len štyri chlebíčky.

Autor: Vidím, deti, že vám to bilandské počítanie ide tak dobre ako Vladkovi. Hádam aj lepšie, lebo Vladko kupoval opatrnejšie. Nevedel, či mu peniaze budú stačiť, tak si najprv kúpil len jedno mlieko a dva chlebíčky. Keď platil, tak si všimol, že pokladník má pokladničku s deviatimi priehradkami, pričom každá je označená písmenom od najnižšej hodnoty „*a*“ po najvyššiu hodnotu „*i*“. Hráškovi sa tak pokladnička zapáčila, že si sám urobil podobnú. Namiesto skutočných peňazí presúval v priehradkách kamienky. Vymýšľal si rôzne úlohy, aby sa naučil bilandsky počítať. Napr. pridelil si toľko peňazí, ako je nakreslené na obr. 1, a dal si úlohu: Rozmeniť všetky *g*-groše a *i*-groše na *f*-groše. Riešenie je nakreslené na obr. č. 2. (K pôvodným dvom *f*-grošom pribudlo šesť *f*-grošov výmenou troch *e*-grošov a osem *f*-grošov výmenou jedného *i*-groša.)



Obr. 1



Obr. 2

Anka: To je pekné. To je také počítadlo ako pre kojencov.

Boris: Netreba nič písať, len kamienky prehadzovať. Dajte nám nejakú takú úlohu.

Anka: Radšej hneď dve.

Autor: Tak zaokrúhlime to na štyri.

Úloha 4.1. Koľko získa pokladník *c*-grošov, keď vymení všetky *a*-groše a *b*-groše za *c*-groše?

Úloha 4.2. Koľko získa pokladník *d*-grošov, keď vymení všetky *a*-groše, *b*-groše a *c*-groše za *d*-groše?

Úloha 4.3. Kupujúci Bilandčan platí v obchode za nákup sumu 25 *a*-grošov. Platí jedným *f*-grošom. Ako mu má pokladník vydať, aby použil čo najmenej mincí?

Úloha 4.4. V Bilande máte zaplatiť sumu 50 *a*-grošov tak, aby ste použili čo možno najmenší počet mincí. Ako to urobíte?

Netrvalo dlho a všetky štyri úlohy boli vyriešené. Autor pokračoval v rozprávke:

Bilanďania sú zvláštne bytosti. Navzájom sú neuveriteľne zdvorilí. Dokonca aj pri platení. Keby ste mali zaplatiť sumu jeden *c*-groš, bolo by veľmi nezdvorilé platiť to nie jedným peniazom, ale dvoma *b*-grošami, či dokonca štyrmi *a*-grošami. V každom obchodnom dome, na každej stanici, v každej reštaurácii nájdete veľké automaty na menenie peňazí. Skôr, ako máte nejakú sumu platiť, musíte si v automate zadovážiť príslušné peniaze tak, aby ste pri výplate zo žiadnej hodnoty nedávali viac ako jednu mincu... Napríklad sumu štrnásť *a*-grošov platia jedným *b*-grošom, jedným *c*-grošom a jedným *d*-grošom. Tieto sumy zvláštnym spôsobom zapisujú. Používajú k tomu dve značky: O (koliesko) a I (paličku).

Napríklad naše číslo 45 píšu Bilanďania pomocou vyššie uvedenej pokladničky a spôsobom „koliesko-paličkovým“ takto:

i	h	g	f	e	d	c	b	a
			●		●	●		●

„pokladničkový“ zápis

I ○II ○I „koliesko-paličkový“ zápis

Alebo číslo 80 zapisujú:

i	h	g	f	e	d	c	b	a
		●		●				

„pokladničkový zápis“

I ○I ○ ○ ○ ○ „koliesko-paličkový“ zápis

Vedeli by ste zapísať číslo 121 „pokladničkovým“ a „koliesko-paličkovým“ zápisom?
Anka s Borisom našli riešenie veľmi rýchlo:

i	h	g	f	e	d	c	b	a
		●	●	●	●			●

„pokladničkový zápis“

IIII ○ ○I „koliesko-paličkový“ zápis

Zápis „koliesko-paličkový“ je stručnejší, a preto v Bilande používanejší. Koliesko označuje prázdnu priehradku pokladničky a palička priehradku, v ktorej je jeden peniaz. Je rozhodujúce presne poznať hodnotu každého koliesku či paličky. Takto zapísané číslo čítame sprava doľava. Znak, ktorý je na „najpravejšej“ strane, označuje stav priehradky *a*-grošov, znak pred ním stav priehradky *b*-grošov, atď.

Anka: Jasné, dajte nám zasa zopár úloh!

Autor: Veľmi rád. Prosím:

Úloha 4.5. Zapíšte „koliesko-paličkovým“ zápisom čísla 18, 136, 1527, 12746.

Úloha 4.6. Sčítajte čísla IoIIo, IoIoo.

Úloha 4.7. Odčítajte od čísla IIooI číslo IoI.

Ani tieto úlohy nerobili Anke a Borisovi ťažkosti. I keď zápis „koliesko-paličkový“ bol náročnejší ako zápis „pokladničkový“, zorientovali sa naši mladí priatelia v bilandskom finančníctve veľmi dobre. Ba, čo viac. Keď autor chcel pokračovať v rozprávke, prerušil ho Boris netrpezlivou prosbou.

Boris: Tie rozprávky nemusíte tak zoširoka. Hlavne tie príklady nás zaujímajú.

Anka: Len to nám povedzte, či sa Vladko Hráško v Bilande oženil.

Autor: Akože? Samozrejme, že sa oženil. S tou najkrajšou...

Boris: ...najpôvabnejšou, najmúdrejšou, najporiadnejšou bilandskou Aničkou.

Anka: Nech nie je protivný. Vie, že neznášam, keď ma volajú Anička.

Autor: Veď to on nie o tebe Anka, on to o tej bilandskej. No ale aby sme pokročili ďalej, povedzme si, čo sa dialo po svadbe. Novomanželia sa vrátili do vlasti. Hráško musel svoju nevestu predstaviť rodičom, pri tej príležitosti rozpovedal všetky svoje príhody a skúsenosti. Široké príbuzenstvo s veľkým napätím počúvalo nezvyčajné príhody, ba dokonca sa našiel aj novinár, ktorého bilandské písanie do tej miery zaujalo, že napísal dlhý článok, v ktorom navrhoval zanechať náš spôsob písania čísel a pristúpiť na bilandský. Tak vznikla polemika, ktorá zapríčinila hojné prekladanie bilandskej literatúry (najmä počtárskej) do slovenčiny. Pri prekladoch z bilandštiny do slovenčiny vznikla v tlačiarni ťažkosť, lebo nebolo dosť koliesok a paličiek. Sádzači navrhli tlačiť namiesto koliesok nuly a namiesto paličiek jedničky. Bol to výborný nápad, no nebezpečný. Sledujme pozorne tento bilandský text: Futbalové mužstvo Inter Biland zvíťazilo nad mužstvom Slovan Biland najtesnejším rozdielom 10 : 1". Čitateľovi neoboznámenému s bilandským spôsobom zápisu čísiel by sa tento text javil nezmyselný. My, znalci bilandštiny, vieme, že výsledok v origináli bol I○ : I, t. j. po slovensky 2 : 1. Uvedená ukážka donútila prekladateľský zväz dôkladne premyslieť symboliku zápisu čísla. Po mnohých diskusiach a úvahách našli tento jednoduchý a účinný spôsob:

101_{II} je číslo „päť" zapísané v bilandštine,
101_{X} je číslo „sto jeden" zapísané v slovenčine.

Nože Boris, Anka, vedeli by ste vyriešiť tieto úlohy?

Úloha 4.8. Zväz prekladateľov preložil z bilandštiny do slovenčiny tieto čísla: 111_{II}, 1100_{II}, 11111_{II}, 1010011_{II}. Nájdite aj vy slovenský preklad týchto čísel.

Úloha 4.9. Preložte zo slovenčiny do bilandštiny tieto čísla: 11110_{X}, 1010_{X}, 214_{X}, 1579_{X}.

Anka: No my sme sa nedozvedeli, ako sa Vladko zaľúbil. Či mal nejakého súpera, či mu zbraňovali.

Autor: No to sa už tak ďaleko vracať nebudeme. Ale vieš čo, porozprávam ti o ich svadobnej ceste. Na tú sa vybrali až potom, keď už Vladko predstavil svoju ženušku v Novej Bani. Na svadobnú cestu sa mladomanželia vybrali z Novej Bane cez Žarnovicu až do krajiny zvanej Triland. Odtiaľto totiž pochádzali Ankini rodičia.

Boris: Ja sa stavím, že se tam inak počíta.

Autor: Trafil si do čierneho. Veru tak. V Bilande sa počíta na dve značky „koliesko a paličku", v Trilande na tri „koliesko, palička, krížik". Základnou jednotkou platidiel v Trilande je jeden *a*-grošek. Za tri *a*-grošky je možné vymeniť jeden *b*-grošek. Jeden *c*-grošek má hodnotu troch *b*-groškov, atď. Tak ako v Bilande, aj v Trilande majú svoje zvyklosti. Platia tak, že z každého druhu peňazí sa používa najviac dvoch mincí. Napríklad sumu 22_X *a*-groškov platia jedným *a*-groškom, jedným *b*-groškom a dvomi *c*-groškami. Ako sme už spomenuli, k zápisu tejto sumy (a každého iného čísla) používajú tri značky: ○ (koliesko), I (paličku) a + (krížik). Koliesko znamená prázdne miesto, palička jeden peniaz a krížik dva peniaze. Teda sumu 22_X *a*-groškov zapisujú takto:

+II

Prvá palička sprava znamená jeden *a*-grošek, druhá palička sprava znamená jeden *b*-grošek a krížik znamená dva *c*-grošky.

Skúsime napríklad trilandským spôsobom zapísať číslo 42_X.

K zápisu čísla nám pomôžu trilandské platidlá. 42 *a*-groškov sa skladá zo žiadneho *a*-groška, z dvoch *b*-groškov, z jedného *c*-groška a z jedného *d*-groška. Teda zápis je tento:

II+○

Pri preklade trilandských textov do slovenčiny sa veľké ťažkosti nevyskytli, lebo sadzači už mali skúsenosti s bilandským textom. Namiesto koliesok tlačili nuly, namiesto paličiek jedničky a namiesto krížikov dvojky. V pravom dolnom rohu čísla napísali rímsku trojku, ktorá znamená, že zápis čísla je trilandský. Teda číslo 42_{X} zapisujeme v trilandštine takto:

$$1120_{III}$$

Boris: Tak si zasa prosíme nejaké trilandské úlohy. (Pozre na hodinky). Pre pánajána, za desať minút mi začína klavír. Musím frčať. Anka mi to dorozpráva.

Anka: Ja sama nechcem. Radšej budeme pokračovať zajtra. Dobre, tak zajtra.

Autor: Aj tak toho bolo už nadnes mnoho. Tak ahoj, Boris, a pozdrav s. profesora od klavíra. Pá, Anka.

Deti odišli, ale autorova myseľ neutíchla. Jeho hrdinovia Vladko s Aničkou blúdili po Trilande, počítali, prepisovali z trilandštiny do bilandštiny, či do slovenčiny. A tak autor vzal pero, papier, a prihovárajúc sa v mysli svojim mladým priateľom, pokračoval v rozprávaní. Začal dvoma úlohami.

Úloha 4.10. Preložte z trilandštiny do slovenčiny tieto čísla: 111_{III}, 121_{III}, 1201_{III} a 1020112_{III}.

Úloha 4.11. Preložte zo slovenčiny do trilandštiny tieto čísla: 232_{X}, 7951_{X}.

Spoločnou vlastnosťou bilandského a trilandského zápisu čísel je, že tá istá značka vyjadruje rozličné hodnoty v závislosti od svojej polohy (pozície). Je samozrejme nepodstatné, že prekladatelia bilandských a trilandských textov do slovenčiny používajú miesto koliesska nulu, miesto paličky jedničku a miesto krížika dvojku.

Urobme analýzu čísla 111_{II} zapísaného v bilandštine. Čítame sprava doľava: Jednička na prvom mieste znamená jedničku aj v slovenčine. Jednička na druhom mieste znamená v slovenčine jednu dvojku, teda dvojnásobok jedničky. Jednička na treťom mieste znamená dvojnásobok dvojky, teda štvorku. Preklad do slovenčiny je už jasný:

$$111_{II} = 4 + 2 + 1 = 1.2^2 + 1.2^1 + 1.2^0 = 7_X$$

Urobme teraz analýzu čísla 111_{III} zapísaného v trilandštine. Tiež čítame sprava doľava: Jednička na prvom mieste znamená jedničku aj v slovenčine. Jednička na druhom mieste znamená v slovenčine trojku, teda trojnásobok jedničky. Jednička na treťom mieste znamená v slovenčine trojnásobok trojky, teda deviatku. Zaznamenajme stručne preklad uvažovaného čísla do slovenčiny:

$$111_{III} = 9 + 3 + 1 = 1.3^2 + 1.3^1 + 1.3^0 = 13_X .$$

Poznamenajme ešte, že

$$111_X = 1.10^2 + 1.10^1 + 1.10^0 .$$

Zhŕňme naše úvahy do tohto tvrdenia: Značka v bilandštine postavená vľavo vyjadruje dvakrát väčšiu hodnotu ako tá istá značka stojaca vpravo. Značka v trilandštine postavená vľavo vyjadruje trikrát väčšiu hodnotu ako tá istá značka stojaca vpravo. Značka v slovenčine postavená vľavo vyjadruje desaťkrát väčšiu hodnotu ako tá istá značka stojaca vpravo. Vidíme, že v bilandštine, v trilandštine či v slovenčine vyjadruje tá istá číslica rozličné hodnoty v závislosti od svojej polohy — pozície. Z uvedeného dôvodu menujeme tieto sústavy *pozičné.**) Sústava používaná v Bilande je dvojková, v Trilande trojková a v Československu desiatková.

Úloha 4.12. Zapíšte číslo 1236_{X} v sústave dvojkovej a trojkovej.

Úloha 4.13. Zapíšte čísla 11011_{II}, 12120_{III} v sústave desiatkovej.

Úloha 4.14. Zapíšte číslo 122210_{III} v sústave dvojkovej.

Nakoniec poznamenávame, že môžeme vybudovať podobné číselné sústavy, ako je desiatková, trojková, resp. dvojková. Ich základom môže byť ľubovoľné prirodzené číslo $g \geqq 2$. Takúto číselnú sústavu nazývame g-dickou. Ľubovoľné číslo x je možné v g-dickej sústave vyjadriť v tomto zápise:

$$x = x_n x_{n-1} \ldots x_3 x_2 x_1 x_0, x_{-1} x_{-2} \ldots$$

Je to tzv. g-dický rozvoj. V tomto zápise sa nejedná o násobenie medzi x_n, x_{n-1}, ..., x_3, x_2, x_1, ... Je to len

*) Pozičnú sústavu vymysleli Babylončania. Používali šesťdesiatkovú sústavu (značka postavená vľavo vyjadrovala šesťdesiatkrát väčšiu hodnotu ako tá istá značka postavená vpravo). Táto im umožňovala zapísať aj „veľké“ čísla a zásadne ovplyvnila úroveň techniky, poľnohospodárstva a astronomie. Babylonská ríša bol vynikajúci štátny útvar. Vznikol 2000 r. pr. n. l. na území terajšieho Iraku zjednotením dvoch národov, Sumerov a Akkadov. Trvala 15 storočí. Babylonský spôsob zapisovania čísel nebol úplný. Nepoužívali nulu a nevedeli si predstaviť, že čísel je „nekonečne“ mnoho. Nulu sa naučili používať až Indovia. Jeden z najslávnejších gréckych matematikov Archimedes zostavil číselnú sústavu, ktorá naznačovala, že čísel je nekonečne mnoho, a dovoľovala každé číslo pomenovať. Indovia zaviedli spôsob zapisovania čísel, ktorý v podstate používame aj my. Číslice zavedené Indmi menujeme preto arabskými, lebo ich Arabi doniesli do Európy.

postupnosť číslic s tzv. rádovou čiarkou medzi znakmi x_0, x_{-1}. Ak $x_{-1} = x_{-2} = \ldots = 0$, potom je číslo x celé.

Ľubovoľné číslo x, vyjadrené v g-dickej sústave, môžeme v desiatkovej sústave nájsť takto:

$$x = x_n g^n + x_{n-1} g^{n-1} + \ldots + x_0 g^0 + x_{-1} g^{-1} + \ldots$$

Príklad. *Zapíšme číslo* 450_{VI}, *vyjadrené v šestkovej sústave, v sústave desiatkovej.*

Riešenie. Urobme analýzu čísla 450_{VI}: Čítame sprava doľava: Nula na prvom mieste znamená nulu aj v desiatkovej sústave. Päťka na druhom mieste znamená 5 šestiek (5 prvých mocnín šestky). Štvorka na treťom mieste znamená štyri druhé mocniny šestky. Preklad do desiatkovej sústavy vyzerá teda takto:

$$450_{\mathrm{VI}} = 4.6^2 + 5.6^1 + 0.6^0 = 144 + 30 = 174_{\mathrm{X}}.$$

Úloha 4.15. Zapíšte číslo 231_{IV}, vyjadrené v štvorkovej sústave, v sústave desiatkovej.

Venujme teraz viac pozornosti dvojkovej sústave, ktorá v súvislosti s prudkým rozvojom výpočtovej techniky sa používa čoraz častejšie. I keď je vyjadrenie čísla v dvojkovej sústave veľmi dlhé, výhodu má v tom, že na jeho zapísanie potrebujeme len dva symboly. Ak zvolíme na základ veľké číslo, tak záznam čísla je kratší, no potrebujeme mnoho základných symbolov. Nepovažujeme za potrebné zvlášť komentovať tú skutočnosť, že číslice 0, 1 majú v dvojkovej sústave iný zmysel ako v sústave desiatkovej.

Uveďme teraz podrobný postup prevodu čísel vyjadrených v desiatkovej sústave do dvojkovej sústavy a naopak:

a) K prevodu čísla 27_X do dvojkovej sústavy použijeme (z predchádzajúceho textu vám je to už určite známe) postupnosť mocnín so základom 2, teda $2^0 = 1$, $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$ a $2^4 = 16$. Platí: $16 < 27 < 32$. Vydeľte číslom 16 číslo 27:

$$\begin{array}{l} 27 : 16 = 1 \\ 11 \end{array}$$

Zvyšok je 11. Tento delíme číslom 8:

$$\begin{array}{l} 11 : \ 8 = 1 \\ \ 3 \end{array}$$

Zvyšok je 3. Ten delíme číslom 4:

$$\begin{array}{l} 3 : \ 4 = 0 \\ 3 \end{array}$$

Zvyšok je 3. Ten delíme číslom 2:

$$\begin{array}{l} 3 : \ 2 = 1 \\ 1 \end{array}$$

Zvyšok je 1. Ten delíme číslom 1:

$$1 : \ 1 = 1$$

Schéma výpočtu má tvar:

Delenec (Zvyšok)	Deliteľ	Čiastočný podiel
27	16	1
11	8	1
3	4	0
3	2	1
1	1	1

Z delenia vyplýva:

$$27_X = 1.2^4 + 1.2^3 + 0.2^2 + 1.2^1 + 1.2^0 = 11011_{II}.$$

b) Preveďme číslo 1010_{II} do desiatkovej sústavy:

$$1010_{II} = 1.2^3 + 0.2^2 + 1.2^1 + 0.2^0 = 10_X.$$

Základné operácie s číslami v dvojkovej sústave robíme presne tak isto ako v sústave desiatkovej. Čitateľovi navrhujeme tento postup: Ak by mal spočítať, odpočítať, vynásobiť alebo vydeliť nejaké dve čísla vyjadrené v dvojkovej sústave, prevedie ich do sústavy desiatkovej, urobí požadovanú operáciu a výsledok prevedie znovu do dvojkovej sústavy. Podobne pracuje aj počítač: Údaje prevedie z desiatkovej do dvojkovej sústavy, v nej úlohu vyrieši a výsledok prevedie znovu do desiatkovej sústavy.

Proces spočitovania, odpočitovania, násobenia a delenia je možné podobným spôsobom zmechanizovať ako v desiatkovej sústave.

Príklad. *Sčítajme čísla* 1010_{II} *a* 111_{II}.

Riešenie. Čísla vyjadrené v dvojkovej sústave podpíšeme pod sebe tak, aby rovnaké mocniny dvojky boli pod sebou. Začíname sčitovať po stĺpcoch sprava doľava týmto spôsobom: Súčet čísel stojacich v tom istom stĺpci delíme dvoma. Zvyšok delenia podpíšeme pod daný stĺpec a výsledok delenia pripočítame k súčtu nasledujúceho stĺpca. Teda

$$\begin{array}{r} 1010_{II} \\ 111_{II} \\ \hline 10001_{II} \end{array}$$

Úloha 4.17. Sčítajte čísla 11111_{II} a 10101_{II}.
Úloha 4.18. Odčítajte od čísla 10011_{II} číslo 1001_{II}.
Úloha 4.19. Vynásobte čísla 11001_{II}, 1111_{II}.
Úloha 4.20. Deľte číslo 10011010_{II} číslom 10110_{II}.

Vráťme sa teraz ku hre VI(a,b,c). Pri hľadaní jej stratégie sme zistili, že pozície (n,n,0), (0,n,n) a (n,0,n) sú kritické a že pri ich hľadaní sa ako periódy vyskytujú mocniny dvojky. Táto skutočnosť má úzky súvis s dvojkovou sústavou, ako to ilustruje nasledujúci príklad.

Príklad partie VI(9,14,15):
$(9,14,15) \xrightarrow{A} (9,14,7) \xrightarrow{B} (9,9,7) \xrightarrow{A} (9,9,0) \xrightarrow{B} (9,5,0) \xrightarrow{A}$
$\longrightarrow (5,5,0) \xrightarrow{B} (2,5,0) \xrightarrow{A} (2,2,0) \xrightarrow{B} (2,1,0) \xrightarrow{A} (1,1,0) \xrightarrow{B}$
$\longrightarrow (0,1,0) \xrightarrow{A} (0,0,0)$. Teda Anička vyhrala.
Vyjadrime čísla 9, 14 a 15 v dvojkovej sústave:

$$9_X = 1.2^3 + 0.2^2 + 0.2^1 + 1.2^0 ,$$
$$14_X = 1.2^3 + 1.2^2 + 1.2^1 + 0.2^0 ,$$
$$15_X = 1.2^3 + 1.2^2 + 1.2^1 + 1.2^0 .$$

Teda $9_X = 1001_{II}$, $14_X = 1110_{II}$, $15_X = 1111_{II}$. Zapíšme teraz znaky vyjadrujúce čísla 9_X, 14_X, 15_X v dvojkovej sústave do stĺpcov zdola nahor:

9	14	15
1	0	1
0	1	1
0	1	1
1	1	1

Prepíšeme priebeh hry týmto spôsobom:

9	14	15
1	0	1
0	1	1
0	1	1
1	1	1

$\xrightarrow{A}$

9	14	7
1	0	1
0	1	1
0	1	1
1	1	0

$\xrightarrow{B}$

9	9	7
1	1	1
0	0	1
0	0	1
1	1	0

$\xrightarrow{A}$

$\xrightarrow{A}$

9	9	0
1	1	0
0	0	0
0	0	0
1	1	0

$\xrightarrow{B}$

9	5	0
1	1	0
0	0	0
0	1	0
1	0	0

$\xrightarrow{A}$

5	5	0
1	1	0
0	0	0
1	1	0
0	0	0

$\xrightarrow{B}$

$\xrightarrow{B}$

2	5	0
0	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	0

$\xrightarrow{A}$

2	2	0
0	0	0
1	1	0
0	0	0
0	0	0

$\xrightarrow{B}$

2	1	0
0	1	0
1	0	0
0	0	0
0	0	0

$\xrightarrow{A}$

$\xrightarrow{A}$

1	1	0
1	1	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0

$\xrightarrow{B}$

0	1	0
0	1	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0

$\xrightarrow{A}$

0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0

Vidíme, že v každom riadku kritických situácií je párny počet jedničiek, alebo žiadne jedničky. Aničke sa podarilo Borisa doviesť do pozície $(n,n,0)$, teda vyhrala.

Dvojkovú sústavu je možné využiť na jednoduché riešenie stratégie hry NIM VI, hrané s ľubovoľným počtom kôpok — aj túto hru NIM budeme označovať symbolom VI. Stratégiu najlepšie pochopíme na príklade.

Príklad partie NIM VI(3,6,4,11,10).

Najprv každé z uvedených čísel prepíšeme v dvojkovej sústave: $3_X = 11_{II}$, $6_X = 110_{II}$, $5_X = 101_{II}$, $11_X = 1011_{II}$, $10_X = 1010_{II}$. Tieto čísla prehľadne zapíšeme pod seba do tabuľky.

X	II			
3			1	1
6		1	1	0
5		1	0	1
11	1	0	1	1
10	1	0	1	0

Teraz zistíme, či v niektorom stĺpci je nepárny počet symbolov „1". Keby bolo všade „pár", tak sme v kritickej pozícii a nemôžeme vyhrať. V našom prípade je jeden stĺpec (posledný), v ktorom je „nepár". Berieme tak, aby vznikol všade „pár" 1.; berieme 1 kameň buď z kopy 3, alebo z kopy 5, alebo z kopy 11. Napríklad zoberieme z kopy 11. Vznikla pozícia (3,6,5,10,10). Súper ťahá napr. na (3_X 6_X, 5_X, 10_X, 3_X).

Opätovne urobíme tabuľkový rozpis pomocou dvojkovej sústavy:

X	II			
3			1	1
6		1	1	0
5		1	0	1
10	1	0	1	0
3			1	1

Tentoraz je „nepár" vo dvoch stĺpcoch. Berieme tak, aby opäť bol všade „pár". Teda z kopy, na ktorej je 10_X kameňov, berieme 7. Vznikne pozícia (3_X, 6_X, 5_X, 3_X, 3_X). Rovnakým spôsobom pokračujeme ďalej. Vždy zoberieme tak, aby pozícia po našom ťahu mala v každom stĺpci párny počet jednotiek. Partia môže byť dohratá napr. takto (zápis iba v desiatkovej sústave):

$(3,6,5,3,3) \xrightarrow{\text{on}} (3,4,5,3,3) \xrightarrow{\text{ja}} (3,4,5,1,3) \xrightarrow{\text{on}} (3,0,5,1,3) \xrightarrow{\text{ja}}$
$\rightarrow (3,0,1,1,3) \xrightarrow{\text{on}} (2,0,1,1,3) \xrightarrow{\text{ja}} (2,0,1,1,2) \xrightarrow{\text{on}} (2,0,1,0,2) \xrightarrow{\text{ja}}$
$\rightarrow (2,0,0,0,2) \xrightarrow{\text{on}} (2,0,0,0,1) \xrightarrow{\text{ja}} (1,0,0,0,1) \xrightarrow{\text{on}} (0,0,0,0,1) \xrightarrow{\text{ja}}$
$\rightarrow (0,0,0,0,0)$.

5. kapitola

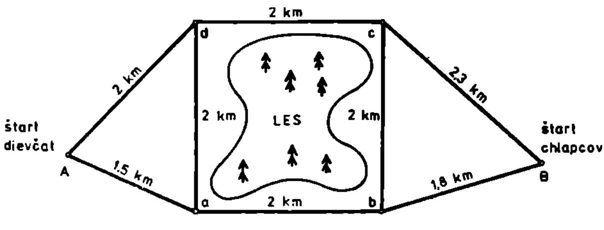
MATICOVÉ HRY

Bola pekná májová sobota. Za mestom uskutočnili školáci veľký branný pretek. Jeho pravidlá boli nasledovné:

5.1. Pravidlá branného preteku. Bojujú proti sebe vždy 2 dvojčlenné hliadky: dievčenská a chlapčenská. Dievčenská hliadka štartuje z miesta A, chlapčenská z miesta B (pozri priloženú mapku). Každá hliadka má prejsť cez všetky štyri kontrolné stanovištia a, b, c, d tak, že cez každé prejde najviac raz a z vyznačenej cesty nevybočí. Na každom kontrolnom stanovišti je rovnaký „sklad" maškŕt: ten sa stane korisťou hliadky, ktorá k nemu dorazí prvá.

Z obrázku vidieť, že dievčatá sú trochu zvýhodnené, lebo sú bližšie k lesu. Snahou každej hliadky je zmocniť sa čo najväčšieho množstva sladkostí.

Z uvedených pravidiel vyplýva, že chlapčenská hliad-



Obr. 1

ka — hliadka B — má štyri možnosti, ako obehnúť všetky stanovištia:

trasa I. $B — b — c — d — a$
trasa II. $B — b — a — d — c$
trasa III. $B — c — d — a — b$
trasa IV. $B — c — b — a — d$

Dievčenská hliadka — hliadka A — má tiež štyri možnosti:

trasa 1. $A — a — b — c — d$
trasa 2. $A — a — d — c — b$
trasa 3. $A — d — a — b — c$
trasa 4. $A — d — c — b — a$

5.2. Ako sa pretekalo? V prvom kole nastúpili proti sebe hliadky Anky a Borisa. Dievčatá si zvolili trasu 1, chlapci trasu III. Teda hliadka A získala maškrty zo stanovísk a, b, hliadka B zo stanovísk c, d.

Po preteku se obe hliadky zišli na štarte A. Dievkam sa už podarilo zlikvidovať všetky ukoristené sladkosti. Chlapci neboli tak rýchli. Boris provokačne mliaskal a pochvaľoval si čokoládu.

A: Boris, nemliaskaj tak a ponúkni dámy!

B: Dámy nemali byť tak pažravé! Po chvíli dodal: Je skutočne znamenitá tá čokoláda.

A: Aj tak som ti tú čokoládu vyhrala vlastne ja. Kebyže poslúchnem Alenu, ktorá navrhovala vybrať sa najprv do d, potom do a, tak by ste boli získali len sklad c.

B: Vidím, že teraz si už veľmi múdra. Mala si byť pred pretekom. Mimochodom, aj ja už teraz viem, že aj pre nás bola lepšia cesta.

A: To si len ty myslíš!
B: O čo sa stavíš?
A: O tie tvoje cukríky.
B: Nedbám, ak vyhráš, cukríky sú tvoje. Ak prehráš, tak mi až do konca školského roku píšeš domáce úlohy z ruštiny.
A: Dobre, povedz svoju trasu!
B: Čo si myslíš, že som spadol z jahody? Prezradím ti svoju stratégiu a ty budeš pápež. Každý z nás pekne napíše svoju trasu a potom sa uvidí, komu by pripadli 3 skladištia maškŕt.

Platí, povedala Anka, a zamyslenému Borisovi odlomila kus čokolády. Na lístoček napísala číslo 3 v nádeji, že Boris bude tvrdohlavý, ostane pri pôvodnej trase III a ona vyhrá stávku. Zmýlila sa. Boris nebol tvrdohlavý, zakľučkoval a zvolil trasu II. Anka se rozčertila a zvolala:

— Prečo zákon schválnosti musí byť namierený vždy proti nám, múdrym?
Vieš Anička, poznamenáva autor, optimizmus ešte nemusí znamenať múdrosť. Treba aj trošku ostražitosti. V nádeji na holuba na streche vystavila si sa nebezpečenstvu, že ti uletí vrabec z hrsti.

Úloha 5.1. Ktoré trasy môže voliť Anka, aby zo 4 skladov určite získala aspoň 2?
Úloha 5.2. Ktoré trasy môže voliť Boris, aby zo 4 skladov určite získal aspoň 2?
Úloha 5.3. Vyšetrite všetky možné prípady pre trasy dievčat a chlapcov!

5.3. Rozbor hry. Prehľadne ho urobíme pomocou tabuliek. Z nich vidieť, ktorých skladov sa zmocní hliadka

A, resp. hliadka B, pri rôznych kombináciách trás, po ktorých budú hliadky bežať. Predpokladáme, že hliadky bežia zhruba rovnako rýchle.

hliadka A sa zmocní skladov

	I	II	III	IV
1	*a*	*ac*	*ab*	*abd*
2	*ad*	*adc*	*adb*	*ad*
3	*ad*	*d*	*abd*	*ad*
4	*d*	*dc*	*db*	*d*

tab. 1a

hliadka B sa zmocní skladov

	I	II	III	IV
1	*bcd*	*bd*	*cd*	*c*
2	*bc*	*b*	*c*	*bc*
3	*bc*	*abc*	*c*	*bc*
4	*abc*	*ab*	*ac*	*abc*

tab. 1b

Čítanie v tabulkách. Ak A volí trasu 3 a B volí trasu II, tak hliadka A získa iba sklad d. Nájdeme to v okienku v 3. riadku a II. stĺpci tab. 1a.

Vzhľadom na to, že skladov, ktorých sa nezmocní chlapčenská hliadka, sa zmocní dievčenská hliadka, dá sa tabuľka 1b ľahko vyrobiť z tabuľky 1a. Dievčenská hliadka má možnost voliť si 1., 2., 3. alebo 4. trasu. Zvolenie niektorej trasy nazveme *výberom stratégie.* Chlapčenská hliadka môže voliť tiež jednu zo štyroch stratégií 1, 2, 3, 4 (nebudeme rozlišovať arabské a rímske číslice). Ani jedna z hliadok nevie, ktorú stratégiu si zvolila druhá hliadka. Ak si A vybral i-tú stratégiu, B j-tú stratégiu, tak označme

a_{ij} počet skladov, ktoré získa hliadka A,
b_{ij} počet skladov, ktoré získa hliadka B.

Zrejme platí $a_{ij} + b_{ij} = 4$. Usporiadame čísla a_{ij} do tabuľky M_A, tvaru 4×4 tak, že číslo a_{ij} zapíšeme do

i-tého riadku a j-tého stĺpca. Podobne usporiadame do tabuľky M_B čísla b_{ij}. Tieto tabuľky budeme volať *výplatné matice hráča A* resp. *hráča B*:

$$M_A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Úvahy, ktoré robil čitateľ pri riešení úloh 5.1—5.3, teraz upresníme. Predvedieme metódu, ktorá má pekné meno: minimax. Doplňme maticu M_A takto:

$$\begin{array}{cc} & & \text{min.} \\ & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{array} \\ \text{max.} & \begin{array}{cccc} 2 & 3 & 3 & 3 \end{array} & \end{array}$$

Do stĺpca „min“ sme zapísali najmenší (minimálny) prvok daného riadku. Aký je význam týchto čísel? Hovoria o tom, koľko skladov získa minimálne hráč A, ak zvolí stratégiu príslušného riadku. Napr. ak hráč A volí 3. stratégiu, tak vyhrá aspoň jeden sklad. O túto výhru ho hráč B nijako nemôže pripraviť. Nájdeme teraz maximum 4 čísel stĺpca „min“. Je to číslo 2, čo sa nadobúda v 2. riadku. To značí, ak si hráč A zvolí 2. stratégiu, tak vyhrá aspoň 2 sklady — väčšiu výhru mu nemožno zaručiť. Ak si A vyberie inú stratégiu, jeho „zaručená“ výhra je menšia.

Do riadku „max“ sme zapísali najväčší (maximálny) prvok daného stĺpca. Ostražitý hráč B si zase všíma práve tieto 4 čísla. Ak si vyberie totiž 1. stratégiu, tak A získa najviac 2 sklady, ak si vyberie 2. stratégiu, získa A najviac 3 sklady, atď. Hráč B sa snaží maximalizovať svoj zaručený zisk, t. j. *minimalizovať maximálny* možný zisk hráča A. Uvedené 4 čísla označujú maximálny možný zisk hráča A pri výbere jednotlivých stratégií hráčom B. Minimum z týchto 4 čísel je 2: nadobúda sa v 1. stĺpci. Teda ak B si vyberie 1. stratégiu, tak hráč A získa najviac 2 sklady, pri výbere inej stratégie hráčom B maximálny možný zisk hráča A je väčší — 3 sklady.

Záver. Ak A si vyberie 2. stratégiu, tak A vyhrá aspoň 2 sklady. Ak B si vyberie 1. stratégiu, tak A vyhrá najviac 2 sklady. Vidíme teda, že „niet sa o čo hádať".

5.4. Hra na samohlásky. V tabuľke 2 je uvedených 6 päťpísmenových slov.

	1.	2.
1.	štvrť	Elena
2.	šatňa	ulica
3.	štart	krava

Tab. 2

Hrajú dvaja hráči. Súčasne, nezávisle na sebe, povedia: hráč A číslo jedného z troch riadkov, hráč B poradové číslo jedného z dvoch stĺpcov. Tým je určené jedno zo šiestich slov tabuľky. Hráč A zaplatí za každú spoluhlásku, ktorá je v určenom slove, hráčovi B 1 Kčs. Hráč B zasa zaplatí hráčovi A 1 Kčs za každú samohlásku určeného slova.

Úloha 5.4. Napíšte výplatnú maticu hráča A aj hráča B.

Úloha 5.5. Podobne ako v odseku 5.3 určite metódou minimax stratégiu hráča A aj hráča B.

Úloha 5.6. Riešte úlohu 5.4 a 5.5 v prípade, že základná tabuľka päťpísmenových slov vyzerá takto:

a)

maslo	rieka
tromf	Áziou
spúšť	trend

b)

vagón	siaha
Viera	slama
blesk	somár

5.5. Zovšeobecnenie. Všimnime si spoločné rysy predchádzajúcich hier. Všetky tieto hry boli pre dvoch hráčov A, B. Hráč A mal istú množinu stratégií (možností), ktoré boli očíslované prirodzenými číslami $1, 2, \ldots, m$. Podobne hráč B mal istú množinu stratégií, očíslujeme ich $1, 2, \ldots, n$. Symbolom a_{ij} označíme „zisk" hráča A, ak hráč A volil stratégiu i, hráč B stratégiu j. Čísel a_{ij} je teda $m \times n$ a usporiadame ich do výplatnej matice M_A hráča A s m riadkami a n stĺpcami. Rovnako vytvoríme čísla b_{ij} a výplatnú maticu M_B hráča B. Ďalšia dôležitá vlastnosť tu preberaných maticových hier je *nezávislosť* volieb stratégií: žiaden hráč nepozná, ktorú stratégiu volil súper. Konečne naše hry boli *antagonistické*, t. j. splňovali podmienku $a_{ij} + b_{ij} =$ konšt. (v brannom preteku konštanta bola rovná 4, v hre na samohlásky je to 0).

Hľadanie stratégie sme robili metódou „minimaxu". V prípade, že pre maticu M_A platí rovnosť

$$\max_i(\min_j a_{ij}) = \min_j(\max_i a_{ij})^{*)} ,$$

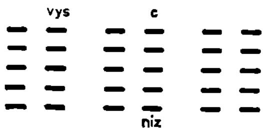
hovoríme, že hra má sedlový bod. V tomto prípade nájdenie optimálnych stratégií nerobí ťažkosti.

---

*) Význam symbolu $\max_i (\min_j a_{ij})$ je nasledovný: Pre každé i nájdeme najmenšie z čísel $a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \ldots$. Takto dostaneme pre každé i jedno číslo. Teraz z takto získaných čísel vyberieme najväčšie. Podobne chápeme symbol $\min_j (\max_i a_{ij})$.

5.6. Najväčší z najmenších. Príklad. *V triede sú rozsadení žiaci do 6 stlpcov po 5 radoch (laviciach). Nech sú títo 30 žiaci (kvôli jednoduchosti výberu) rôzne vysokí. Teraz v každom rade vyberiem najvyššieho žiaka. Takto dostanem „5 vysokých žiakov“. Z týchto 5 žiakov vyberiem najnižšieho. Nech je to žiak F. Spravme ešte iný výber. Vyberme z každého stĺpca najnižšieho žiaka. Takto dostaneme 6 žiakov. Teraz z týchto 6 „nízkych“ žiakov vyberieme najvyššieho — označme ho G. Ktorý z týchto žiakov je vyšší, F či G?*

Riešenie. F je najnižší z najvyšších, G je najvyšší z najnižších. Ukážeme, že každý z 5 vysokých žiakov je aspoň tak vysoký ako ľubovoľný zo 6 „nízkych“ žiakov. Sledujme úvahy na obr. 2.



Obr. 2

Naozaj, „vysoký“ žiak 1. lavice je iste aspoň tak vysoký ako nízky žiak 4. stĺpca, lebo vysoký žiak je aspoň tak vysoký ako žiak C a ten je aspoň tak vysoký ako „nízky“ žiak 4. stĺpca. Rovnako vysokí sú len v prípade, že sa jedná o toho istého žiaka. Táto argumentácia sa ľahko zovšeobecní. Keďže F je jeden z „vysokých“ a G jeden z „nízkych“, tak F je aspoň tak vysoký jako G. Rovnosť nastane len v prípade, že sa jedná o toho istého žiaka.

Týmto spôsobom by sa aj dokázalo, že v ľubovoľnej matici M_A platí:

$$\max_i(\min_j a_{ij}) \leqq \min_j(\max_i a_{ij})$$

Ďalej, ak uvedené dve čísla sa rovnajú, tak existuje usporiadaná dvojica indexov k, l tak, že

$$\max_i(\min_j a_{ij}) = \min_j a_{kj} = a_{kl} = \max_i a_{il},$$

t. j. existuje taký prvok matice M_A, ktorý bol vybratý súčasne ako najmenší vo svojom riadku a najväčší vo svojom stĺpci. (V prípade, že v nejakom riadku je viac rovnakých najmenších prvkov, tak vyberáme všetky obdobne pre stĺpce.) Túto dvojicu indexov k, l zodpovedajúcu výberu k-tej, resp. l-tej stratégie, nazveme sedlovým bodom matice M_A.

Vráťme sa teraz k nášmu príkladu „Branný pretek". Hra má sedlový bod — je to dvojica stratégií (2,1). Ak jeden z hráčov sa odchýli — vyberie si inú stratégiu, tak môže na tom len stratiť. Naozaj, ak hráč A si miesto 2. stratégie vyberie 1. alebo 4. stratégiu a B vytrvá pri 1. stratégii, tak A získal len jeden sklad. Pri výbere 3. stratégie získa A 2 sklady, teda tiež nezarobí, ale vystavuje sa zbytočnému riziku, že B si vyberie 2. stratégiu. Ak hráč B si miesto 1. stratégie vyberie inú a hráč A zotrvá pri 2. stratégii, tak B tiež môže len stratiť.

Táto istá situácia je pri všetkých antagonistických maticových hrách, kde matica M_A má sedlový bod. Metóda „minimax" je použiteľná len pre tie maticové hry, ktoré sú antagonistické.

5.7. Boris uzmieruje Aničku. Boris sa rozhodol, že uzmieri Aničku. Vymyslel teda maticovú hru „Uzmierenie". Boris vysvetľuje pravidlá:

— Obaja napíšeme na papier nezávisle na sebe prirodzené číslo menšie ako 4. Potom tieto čísla sčítame, a ty, Anička, dostaneš odo mňa toľko tulipánov, koľko je súčet týchto čísel. (Boris si v duchu spočítal, že ho uzmierenie bude stáť 4 tulipány.)

— Je to zaujímavá hra. Mali by sme ju hrávať častejšie.

Boris si napísal číslo 1, Anička 3 — vidieť, že obaja sú priame povahy. Galantný Boris by asi napísal číslo 3.

Úloha 5.7. Napíšte maticu M_A uvedenej hry! Nájdite sedlový bod tejto matice! Zistite, či Anička a Boris hrali optimálne.

Matica M_A má jednu zvláštnosť — všetky prvky jej tretieho riadku

$$M_A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

sú väčšie než zodpovedajúce prvky 1. i 2. riadku. Tretí riadok dominuje nad 1. i 2. riadkom. Teda bez ohľadu na to, ktorú stratégiu si vyberie hráč B, pre hráča A je vždy výhodnejšia 3. stratégia ako 1. alebo 2. stratégia. Teda Aničkina voľba je jednoznačná — vyberá 3. stratégiu. Podobne je na tom Boris. Druhý aj tretí stĺpec dominujú nad 1. stĺpcom matice M_A. Každý prvok 2. i 3-ho stĺpca je väčší ako zodpovedajúci prvok 1. stĺpca. Borisovou snahou je minimalizovať výhru Aničky, preto vyberá „najmenší" stĺpec. Teda bez ohľadu na to, čo vymyslí Anka, pre Borisa je vždy výhodnejšie napísať číslo 1.

Budeme hovoriť, že k-tý riadok (stĺpec) *dominuje* nad l-tým riadkom (stĺpcom), ak pre všetky j platí $a_{kj} > a_{lj}$ ($a_{jk} > a_{jl}$).

Budeme hovoriť, že k-tý riadok (stĺpec) *slabo dominuje* nad l-tým riadkom (stĺpcom), ak pre všetky j platí $a_{kj} \geqq a_{lj}$ ($a_{jk} \geqq a_{jl}$).

Stratégiu hráča A, nad ktorou nejaká iná slabo dominuje, si netreba všímať: pre hráča A je nevýhodná. Podobne stratégia hráča B, ktorá slabo dominuje nad nejakou inou jeho stratégiou, môže byť tiež vynechaná — je pre hráča B nevýhodná. Teraz však pusťme k slovu znovu Borisa.

5.8. Hra „Neprestreľ".

B: Riešenie našej poslednej hry bolo naozaj jednoduché. Poviem ti, Anka, zložitejšiu hru s podobným zadaním. Obaja napíšeme nezávisle na sebe prirodzené číslo menšie ako 1000. Vyhráva ten, kto napísal väčšie číslo, pokiaľ toto nie je viac ako dvakrát väčšie ako číslo protivníka. V prípade, že väčšie číslo je viac ako dvakrát väčšie než menšie číslo, tak vyhráva ten, kto napísal menšie číslo. Ak obaja napíšeme rovnaké číslo, je nerozhodne. Každú partiu hrajme o korunu!

A: Počkaj Boris, ak ja napíšem 15 a ty 34, tak kto vyhrá?

B: Ty, lebo ja som prestrelil. Moje číslo je väčšie ako 2×15.

A: A ak ja napíšem 15 a ty 30?

B: Tak vyhrám ja. Lebo 30 je viac ako 15, ale nie viac ako 2×15.

A: A ty chceš v tejto hre vyhrať? Snáď vieš čítať moje myšlienky?

B: Uvidíš! Zahrajme sa!

Deti odohrali 5 partií, ktoré sú zapísané v tejto tabuľke.

Číslo partie	1	2	3	4	5
Číslo Aničky	238	10	1	1	4
Číslo Borisa	4	2	4	2	1
Víťaz	Boris	Boris	Anka	Boris	Boris

B: Vidím, že sa ti nedarí. Vieš čo? Ty môžeš písať všetky čísla a ja len čísla 1, 2, 4.

Anička sa zamyslí, píše, počíta.

A: To mi vlastne žiadnu výhodu nedávaš. Lebo pozri sa! Moja výplatná matica vyzerá takto:

$$M_A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

B: To je tých 1000?

A: Nie, to je iba prvých desať čísel, ale pre 1000 to bude „rovnaké". Každá z týchto tvojich šiestich stratégií (Anička ukázala 6 posledných stĺpcov označených svorkou) slabo dominuje nad tvojou 1. stratégiou. Preto ich všetky možno vynechať. Pri matici 1000×1000 by sme vynechali posledných 996 stĺpcov.

B: Správne. Ak totiž miesto ľubovoľného čísla väčšieho ako 4 napíšem číslo 1, tak nemôžem na tom stratiť.

Totiž jednotka prehráva len proti dvojke a remízuje s jednotkou, zatiaľ čo každé číslo väčšie než 4 prehráva s jednotkou aj dvojkou a navyše ešte s nejakými ďalšími.

A: Ak sa teraz obmedzíme na prvé 4 prirodzené čísla — ako sme videli, písať väčšie nemá zmysel — tak vidíme, že tvoja 3. stratégia slabo dominuje nad tvojou štvrtou, teda jej voľba nemá pre teba význam.

B: Máš pravdu. Naviac, pretože hra je symetrická, platí obdobná vec pre teba. Nemá význam, aby si napísala niektoré z čísel 3, 5, 6, 7,..., 1000. Ostali nám teda iba čísla 1, 2, 4.

A: Takže pôvodná matica M_A sa zredukovala takto:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 1.\,\text{s.} & 2.\,\text{s.} & 4.\,\text{s.} \end{array} \\ \begin{array}{c} 1.\,\text{s.} \\ 2.\,\text{s.} \\ 4.\,\text{s.} \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

označme túto maticu M_1

Úloha 5.8. Aké čísla je výhodné písať v Borisovej hre, ak mierne zmeníme pravidlá — obaja hráči môžu napísať ľubovoľné prirodzené číslo.

Úloha 5.9. Zmeňme pravidlá Borisovej hry nasledovne: obaja hráči nezávisle na sebe napíšu prirodzené číslo. Ak obaja napísali rovnaké číslo, je nerozhodne. Ak napísali rôzne čísla, tak väčšie číslo vyhráva len v prípade, že je o 1 alebo o 2 väčšie ako menšie číslo. Ktoré čísla je výhodné písať teraz?

Úloha 5.10. Ukážte, že matica M_1 nemá sedlový bod!

A: Žiaľ, naša matica nemá sedlový bod. Naše predošlé metódy nezaberú. Ale aj tak, čísla 1, 2, 4 sa mi zdajú úplne rovnocenné — každé z nich raz prehráva, raz vyhráva, raz remizuje. Tak predpokladám, že je úplne jedno, ktoré napíšem. Trebárs budem stále písať jednotku.

B: Niečo pravdy máš. Avšak, ak ty budeš písať stále jednotku, tak ja budem stále písať dvojku a korunky sa budú hromadiť u mňa.

A: Tak ja budem písať štvorky!

B: Keď zistím, že ty píšeš stále štvorky, začnem písať samé jednotky a znovu len budem vyhrávať.

A: Si protivný, stále by si chcel len vyhrávať. A čo urobíš, keď budem čísla striedať, ha?

B: Veru, treba ich striedať. A ak neveríš, že vieš čítať cudzie myšlienky, tak striedať náhodne.

A: Napíšem to číslo, čo ma práve v ten moment napadne!

B: Nie som si istý, či taká „náhodnosť" bude skutočne náhodná.

A: A aká „náhodnosť" je podľa teba skutočne náhodná?

B: Taká, do ktorej nezasahuje tvoja vôľa. Dáš do klobúka 3 guľôčky — červenú, modrú a žltú. Jednu z nich potom z klobúka vytiahneš. Ak bude červená, napíšeš číslo 1, ak modrá 2, ak žltá, napíšeš štvorku.

Na tomto mieste naruší diskusiu autor dvoma otázkami:

1. Aká bude priemerná výhra či prehra Aničky pri tomto spôsobe výberu písaného čísla.

2. Prečo voliť taký náhodový mechanizmus, pri ktorom všetky 3 „rozumné" stratégie — napísanie 1, 2, 4 sú rovnako pravdepodobné.

Tu odpovieme na prvú otázku, odpoveď na druhú odložíme do kapitoly šiestej. Predpokladajme, že Boris napíše niektoré z čísel 1, 2, 4 a Anička nezávisle na tom ťahá gulôčku z klobúka. Hneď vidno, že má rovnakú šancu vyhrať i prehrať korunu, takže *priemerná hodnota* jej výhry je 0. Ak Boris napíše niektoré z čísel 3, 5, 6, 7, 8, tak Ankina šanca vyhrať je dvakrát taká ako Borisova (totiž každé z Borisových čísel prehráva voči dvom číslam z množiny 1, 2, 4 a len voči jednému vyhráva. Ak Boris napíše číslo väčšie ako 8, tak Anička zaručene vyhrá).

Záver. Ak Boris bude hrať rozumne, tak Anička pri tomto spôsobe hry zostane „na svojom", ináč bude jej šanca vyhrať väčšia ako Borisova.

V ďalšej kapitole si ukážeme, v akom pomere miešať „čisté stratégie", aby sme v hre, ktorej matica nemá sedlový bod, obstáli čo najlepšie.

6. kapitola

VÝPOČET ZMIEŠANÝCH STRATÉGIÍ

6.1. Historický úvod. New Očová bola jedným z tých malebných mestečiek ležiacich na úpätí Skalistých hôr, ktoré zlatými písmenami písali dobrodružnú kapitolu novovekej histórie, kapitolu zvanú Divoký Západ. Komuže vďačí New Očová za svoju slávu? Predovšetkým dvom ostrým chlapcom: šerifovi Joe Bačovi (výška 187, váha s koltami 84 kg, oči modré, kadencia streľby 131 rán za minútu) a vyvrheľovi spoločnosti, lupičovi a zabijákovi Billy Weekendovi, ktorého priezvisko odrážalo základnú zvrátenosť Billyho povahy — pracoval výlučne v nedeľu a celých 6 pracovných dní oddychoval.

Dnešná nedeľa nebola pre Billyho úspešná. Namiesto vreca zlata našiel v Mikiho banke šerifa a jeho pomocníka Jimmyho Dunča so štyrmi vrchovato nabitými tridsaťosmičkami, pripravenými v každom okamžiku prehovoriť rečou olova. Preto teraz smutný a bezkoltý sedí v šerifovej miestnosti a skúša sa ostrovtipom svojho rozumu vysekať zo šlamastiky.

Viete čo, šerif, dám vám návrh — pustite ma! zahájil Billy. Pustite ma a tých 5000 dolárov, čo by ste od štátu za moju hlavu získali, vám vyplatím sám, dodal lupič a rozviedol, nebudete tratiť ani cent a naviac nebudete ani musieť písať hlásenie o zadržaní lupiča. Šerif chvíľu úpenlivo uvažoval a potom povedal „Sedí vec". Po tomto konštruktívnom návrhu šerif dostal 5 tisícoviek a lupič slobodu. Jediný, komu sa to nepáčilo, bol pomocník Jimmy Dunčo.

Ja vám, šéfe, nerozumiem! Čo to bol za nápad púšťať Weekenda! Veď sám dobre viete, že budúcu nedeľu ho tu máme opäť.

Somár si ty, somár! otcovsky ohodnotil svojho pomocníka šerif a pokračoval. — Veď o to práve ide. Billy Weekend príde a s ním ďalších päť tisícoviek do našej pokladnice.

Ho, ho! a ako viete, do ktorej banky pôjde? My budeme striehnuť u Mikiho, a on vyrabuje Dorseta.

Pozri, Jimmy, skús prekonať možnosti svojho mozgu a pochopiť túto úvahu.

6.2. Úvaha šerifa Joe Baču. V meste máme dve banky. V Mikiho banke je stále 5000 dolárov a u Dorseta 2000 dolárov. Na stráženie týchto bánk máme 3 varianty:

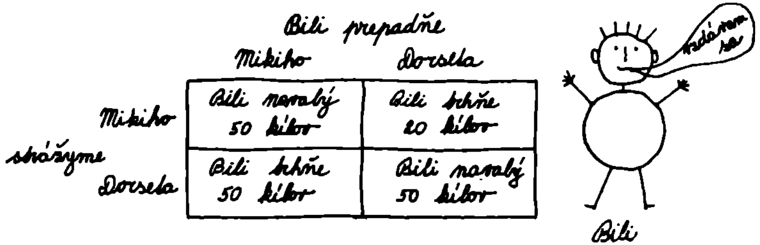
1. varianta — obaja budeme strážiť Mikiho banku,
2. varianta — obaja budeme strážiť banku Dorseta,
3. varianta — rozdelíme sa a každý z nás stráži jednu banku.

Ak Billy prepadne banku, ktorú strážime dvaja, ako dnes, zarobíme na ňom 5000. Ak Billy prepadne nestráženú banku, zarobí buď päť, alebo dva tisíc. V prípade, že budeme strážiť každý jednu banku (3. varianta), Billy upláchne, ale bez koristi.

Weekend je správny protivník. S ním človek vie, na čom je. Je presný ako hodinky, vždy v nedeľu sa zjaví v niektorej z našich bánk. O tom, v ktorej, rozhodne pomocou dolárovej mince. Je teda 50%ná pravdepodobnosť, že navštívi Mikiho a 50%ná pravdepodobnosť, že sa zjaví u Dorseta. My chceme Billyho ožobráčiť. Preto 3. variantu budeme používať zriedkavo — dajme tomu len v mesiaci, v ktorom je 5 nedieľ, tú piatu nedeľu.

Inak stále budeme voliť 1. alebo 2. variantu. Budeme sa medzi nimi rozhodovať tiež hádzaním dolárovej mince.

Jimmy Dunčo pochopil geniálny zámer svojho šéfa: rovnaké dolárové mince budú rovnako padať a Billy bude bez šancí. Pousiloval sa šéfa oboznámiť s touto svojou jasnozrivosťou.



Obr. 1

Po tejto poznámke sa šerif súcitne pozrel na svojho podriadeného a pevne si zaumienil nepremeškať prvú príležitosť k vyslaniu Jimmyho na doškoľovací kurz. S povzdychom pokračoval vo vysvetľovaní, už viac menej iba pre seba.

Vezmime pre jednoduchosť mesiac, v ktorom sú 4 nedele. Priemerne to bude vychádzať tak, že dvakrát budeme strážiť u Mikiho, dvakrát u Dorseta a aj Bily po dva razy navštívi každú z bánk.

Vidiac sústredenú pozornosť v Jimmyho očiach, urobil šerif ešte jeden pokus prebudiť driemajúcu inteligenciu svojho podriadeného. Názorne, podľa Komenského, nakreslil obrázok (originál obrázku sa zachoval a predkladáme ho čitateľom).

A ktorý z týchto štyroch prípadov bude najčastejší, šéfe? opýtal sa Dunčo.

Vidím, že sa ti mozog roztvára, pochvalne povedal šerif a skúsenou rukou vybral z knižnice útlu knižku, do ktorej chvíľu sústredene hľadel. Potom rozhodne povedal: V priemere každá zo štyroch možností sa bude vyskytovať rovnako často. Tomu sa dá veriť — a na potvrdenie svojho presvedčenia energicky položil na policajtský stôl knižku B. Riečana *O pravdepodobnosti* (ŠMM — zv. 37).

Ak teda tomu šéfe rozumiem, tak čo mesiac 3000 dolárov čistého pribudne do našej pokladnice. Billy síce vyrabuje z bánk 7000, ale na túto dosku tu položí 10 000.

Vidím, že ti to páli, skutočne náš priemerný zárobok by sa mal pohybovať okolo tých 3000 mesačne. Ak to aj občas nevyjde, tak v ročnom priemere by to tých 36 000 hodiť malo.

6.3. Šerif špekuluje. Život ukázal, že šerifovo štúdium teórie pravdepodobnosti nebolo zbytočné. Úspechy podnietili chuť do hlbších teoretických analýz, ktoré vyústili do myšlienky: Keď budem častejšie strážiť Mikiho banku ako Dorsetovu, zvýšim tým solventnosť svojho podniku. Šerifove špekulácie prekontroluje čitateľ v nasledujúcich úlohách.

Úloha 6.1. Namiesto hádzania mince rozhodoval šerif o strážení bánk pomocou balíčka mariášových kariet. V nedeľu ráno vytiahol 1 kartu. Keď to bola sedma, išli strážiť k Dorsetovi, v ostatných prípadoch k Mikimu. Vypočítajte, koľko zarobí šerif priemerne za mesiac (4 týždne), ak Billy stále používa rozhodovanie pomocou doláru.

Úloha 6.2. Billy postrehol zmenu stratégie šerifa a zmenil svoju stratégiu — tiež použil balíčku kariet: ak v nedeľu ráno vytiahol eso, išiel k Mikimu, ak vytiahol inú kartu, išiel k Dorsetovi. Vypočítajte priemerný mesačný obrat obchodu šerif — Billy.

Úloha 6.3. Odvetná Billyho stratégia šerifa znechutila a zasiala do jeho mysle podozrenie, či pomocník Dunčo nepaktuje tajne s Billym. Preto sa rozhodol okamžite zmeniť stratégiu a strážiť dvakrát tak často Mikiho ako Dorseta. Náhodný výber robil pomocou hracej kocky. Zistite priemerný mesačný zárobok šerifa v prípade, že Billy rabuje banky Mikiho a Dorseta v pomere:
a) 1 : 1, b) 1 : 2, c) 2 : 3, d) $a : b$.

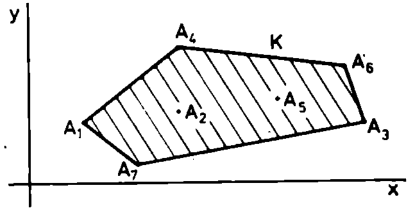
Úloha 6.4. Predchádzajúcu úlohu, prípad d), riešte v tom prípade, keď šerif bude strážiť banku Mikiho a Dorseta v pomere a) 3 : 2, b) 5 : 3.

Problém. Z predchádzajúcich výsledkov sme videli, ako šerif hľadal čo najlepšiu svoju stratégiu stráženia bánk. Za svoj najväčší úspech považoval stratégiu uvedenú v úlohe 6.4 a pri tejto mal zaručený priemerný mesačný zisk aspoň 3200 dolárov. Na túto skutočnosť by nemalo vplyv ani to, keby pomocník Dunčo prezradil Billymu pomer, v ktorom strážia jednotlivé banky. Jedna otázka zostala nevyjasnená. Existuje pomer stráženia bánk Mikiho a Dorseta, pri ktorom zaručený priemerný mesačný zisk bude väčší ako 3200 dolárov?

6.4. Lineárne programovanie kontra Billy. Posledný problém by sa šerifovi sotva podarilo vyriešiť bez výdatnej pomoci seržanta Jimmyho Dunča, úspešného čerstvého absolventa kurzu lineárneho programovania. Hľa, aké múdrosti doniesol Jimmy zo školenia. Najprv kúsok „čistej teórie“.

Nech je daná lineárna funkcia $f(x, y) = ax + by + c$

dvoch premenných x a y a usporiadané dvojice $(x_1, y_1) = A_1$, $(x_2, y_2) = A_2, \ldots, (x_n, y_n) = A_n$ reálnych čísel. Označme K najmenšiu konvexnú množinu, ktorá obsahuje body $A_1, A_2, \ldots, A_n$. K voláme konvexný obal množiny $\mathscr{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$



Obr. 2

Tvrdíme, že

$$\max_{(x,y)\in K} f(x, y) = \max_{(x,y)\in \mathscr{A}} f(x, y),$$

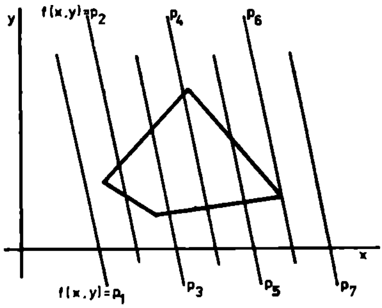
podobne

$$\min_{(x,y)\in K} f(x, y) = \min_{(x,y)\in \mathscr{A}} f(x, y) \,.$$

Stačí si totiž uvedomiť, že grafmi funkcií $ax + by + c = p$, kde a, b, c sa vopred dané konštanty a p parameter, je sústava navzájom rovnobežných priamok (pozri obr. 3) $p_1 < p_2 < p_3 < p_4 < p_5 < p_6 < \ldots$, pričom „usporiadanie týchto priamok v rovine je podľa parametra p". Keď nás zaujíma $\max\limits_{(x,y)\in K} f(x, y)$ alebo $\min\limits_{(x,y)\in K} f(x, y)$, tak stačí nájsť bod množiny K, ktorý leží na „najkrajnejšej" priamke spomínanej sústavy priamok. Takýto bod je zaručene vrcholom mnohouholníka K, čo sme chceli ukázať.

A teraz aplikácia na náš prípad. Matica hry

$$\begin{array}{cccc} & & & \min \\ M_A = & \left(\begin{array}{rr} 5000 & -2000 \\ -5000 & 5000 \\ 0 & 0 \end{array}\right) & & \begin{array}{r} -2000 \\ -5000 \\ 0 \end{array} \\ \max & \begin{array}{rr} 5000 & \quad 5000 \end{array} & & \end{array}$$



Obr. 3

Vyskúšame, či hra má sedlový bod. Minimum „maxím" je 5000, maximum „miním" je 0, tak hra nemá sedlový bod. V tomto prípade obe strany budú striedať jednotlivé „čisté" stratégie — budú voliť zmiešané stratégie. Otázka je, ako často má šerif — hráč A — použiť svoju 1. stratégiu, 2. stratégiu, 3. stratégiu, inými slovami, udať usporiadanú trojicu nezáporných reálnych čísel (p_1, p_2, p_3), kde p_i značí pravdepodobnosť voľby i-tej stratégie, tak aby zaručená stredná hodnota jeho výhry bola čo najväčšia. Pod zaručenou strednou hodnotou rozumieme minimálnu hodnotu strednej hodnoty výhry, pričom minimum uvažujeme cez všetky stratégie Billyho — hráča B. Billy musí tiež striedať svoje stratégie a stojí pred tou istou otázkou — má nájsť usporiadanú dvojicu nezáporných reálnych čísel q_1 a q_2 tak, aby $q_1 + q_2 = 1$ (q_i značí pravdepodobnosť voľby i-tej stratégie) a aby maximálna možná stredná hodnota výhry hráča A bola čo najmenšia. (Maximum sa tu berie cez všetky možné stratégie hráča A.)

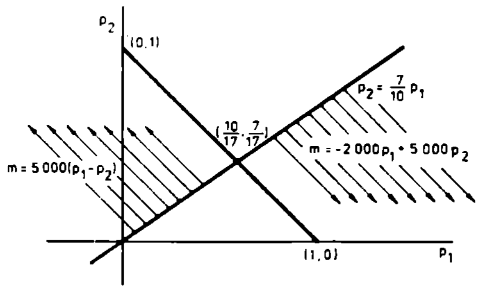
Keď si hráč A zvolí zmiešanú stratégiu (p_1, p_2, p_3) a hráč B stratégiu 1, tak stredná hodnota výhry hráča A je $5000p_1 — 5000p_2 + 0p_3$.

Ak si v tých istých podmienkach zvolí hráč B stratégiu 2, potom stredná hodnota výhry hráča A je $—2000p_1 + 5000p_2 + 0p_3$.

Stojíme pred nasledujúcou otázkou: nájsť usporiadanú trojicu (p_1, p_2, p_3) nezáporných reálnych čísel, pre ktorú $p_1 + p_2 + p_3 = 1$, tak aby číslo

$$m = \min\{5000p_1 — 5000p_2 + 0p_3,\ —2000p_1 + 5000p_2 + 0p_3\}$$

bolo čo najväčšie. Ak dosadíme $1 — p_1 — p_2$ za p_3, môžeme úlohu preformulovať takto: Nájsť usporiadanú dvojicu reálnych čísel z množiny X tak, aby číslo m



Obr. 4

bolo čo najväčšie, kde $X = \{(p_1, p_2) \in R^2 | p_1 + p_2 \leqq 1, p_1 \geq 0, p_2 \geq 0\}$.

Toto je už úloha lineárneho programovania. Ťažkosť spočíva len v tom, že my by sme si mali všímať čísla, ktoré je minimom funkčných hodnôt dvoch lineárnych funkcií. Preto si najprv rozdelíme rovinu na dve polroviny — v jednej z nich bude platiť $5000p_1 - 5000p_2 \leqq -2000p_1 + 5000p_2$, v druhej $5000p_1 - 5000p_2 \leqq -2000p_1 + 5000p_2$ (pozri obr. 4).

Rovnica $5000p_1 - 5000p_2 = -2000p_1 + 5000p_2$ je ekvivalentná s rovnicou $p_2 = 7/10p_1$.

Množina X je graficky trojuholník s vrcholmi (0,0), (0,1), (1,0). Trojuholník X je rozdelený priamkou $p_2 = 7/10p_1$ na dva menšie trojuholníky (stotožňujeme usporiadané dvojice reálnych čísel s ich obrazmi v rovine).

V trojuholníku X_1 s vrcholmi (0,0), (1,0), $\left(\frac{10}{17}, \frac{7}{17}\right)$ platí

$$m = -2000p_1 + 5000p_2 ,$$

v trojuholníku X_2 s vrcholmi (0,0), (0,1), $\left(\frac{10}{17}, \frac{7}{17}\right)$ zasa platí

$$m = 5000p_1 - 5000p_2 .$$

Treba teda vybrať väčšie z čísel

$$\max_{(p_1, p_2) \in X_1} (-2000p_1 + 5000p_2)$$

a

$$\max_{(p_1, p_2) \in X_2} (5000p_1 - 5000p_2) .$$

Teda podľa Jimmyho výkladu stačí preskúmať vrcholy trojuholníkov X_1 a X_2 — robíme to v nasledujúcej tabuľke:

p_1	0	0	1	$\frac{10}{17}$
p_2	0	1	0	$\frac{7}{17}$
m	0	—5000	—2000	$\frac{15000}{17}$

Vidíme, že najväčšia stredná hodnota „zaručenej" výhry hráča A je 15000/17 = 882,4 dolárov. Dosiahne ju vtedy, keď 1. stratégiu si zvolí s pravdepodobnosťou 10/17, druhú s pravdepodobnosťou 7/17 a tretiu s pravdepodobnosťou 0.

Všimnime si teraz hráča B. Nech s pravdepodobnosťou q_1, resp. q_2 si volí 1. resp. 2. stratégiu. Stredná hodnota výhry hráča A závisí teraz od toho, akú stratégiu si zvolí hráč A.

Ak A si zvolí 1. stratégiu, tak stredná hodnota jeho výhry je:

$$5000q_1 - 2000q_2 = 7000q_1 - 2000 \text{ (vzhľadom k } q_1 + q_2 = 1).$$

Ak A si zvolil 2. stratégiu, tak stredná hodnota jeho výhry je

$$-5000q_1 + 5000q_2 = -10000q_1 + 5000,$$

napokon pri 3. stratégii je stredná hodnota výhry 0. B si bude voliť q_1 tak, aby číslo M

$$M = \max\{7000q_1 - 2000, \quad -10000q_1 + 5000, 0\}$$

bolo čo najmenšie.

Ľahko nahliadneme, že pre $q_1 \in \left\langle 0, \frac{7}{17} \right\rangle$ je

$$M = -10000q_1 + 5000$$

a pre $q_1 \in \left\langle \frac{7}{17}, 1 \right\rangle$ platí

$$M = 7000q_1 - 2000.$$

Preto ak chceme minimalizovať M, tak si stačí všimnúť body $q_1 = 0$, $q_1 = 1$ a $q_1 = 7/17$ (Jimmyho kurz!). Dostávame tabuľku:

q_1	0	7/17	1
M	5000	$\frac{15000}{17}$	5000

Záver. Hráč B si má voliť 1. stratégiu s pravdepodobnosťou 7/17, 2. stratégiu s pravdepodobnosťou 10/17. Pri tomto výbere maximálna možná stredná hodnota výhry hráča A je 15000/17 dolárov.

Poznámka. Vidíme, že ak A si zvolí zmiešanú stratégiu $\left(\frac{10}{17}, \frac{7}{17}, 0\right)$, tak A bude vyhrávať priemerne aspoň 15000/17 dolárov. Naopak, ak B si zvolí zmiešanú stratégiu (7/17, 10/17), tak A bude vyhrávať (priemerne) najviac 15000/17 dolárov. Toto nie je náhoda, ale dôsledok vety J. von Neumanna o maticových hrách, podľa ktorej vždy existuje dvojica zmiešaných stratégií s vlastnosťou sedlového bodu. Dá sa tiež dokázať, že našou metódou vypočítaná dvojica stratégií je vždy sedlovým bodom.

Úloha 6.5. Čo sa stane, ak šerif sa bude pridržiavať stratégie $\left(\frac{10}{17}, \frac{7}{17}, 0\right)$ a Billy sa odchýli od stratégie $\left(\frac{7}{17}, \frac{10}{17}\right)$?

Úloha 6.6. Čo sa stane, ak Billy sa bude pridržiavať stratégie $\left(\frac{7}{17}, \frac{10}{17}\right)$ a šerif bude používať stratégiu (p_1, p_2, p_3), kde $p_3 > 0$?

Úloha 6.7. Riešte predchádzajúcu úlohu za predpokladu, že v 1. banke je 10 000, v 2. banke 20 000 dolárov!

6.5. Hodnota hry. Príklad. *Anička a Boris hrajú nasledovnú hru: Boris si dá do hrsti 1, 2 alebo 3 gulôčky. Anička má za úlohu uhádnuť, koľko guličiek má Boris v hrsti. Ak uhádne, guličky sú jej, ak nie, tak guličky zostávajú Borisovi. Hra sa 33krát opakuje. Koľko guličiek si má vopred pýtať Boris od Aničky za možnosť hádania, aby hra bola spravodlivá? (Hru považujeme za spravodlivú, ak je rovnaká šanca vyhrať ako prehrať. Ak by Boris nepýtal od Aničky nič za možnosť hádania, mohla by vyhrať iba Anička.)*

Riešenie. Je intuitívne jasné, že pre Borisa je „nebezpečné" dávať do hrsti 3 guličky, lebo v prípade, že Anička uhádne, stojí to Borisa veľa — 3 guličky. (Lenže ak by si Boris nikdy nevzal do ruky 3 guličky, Aničke by sa lepšie hádalo.)

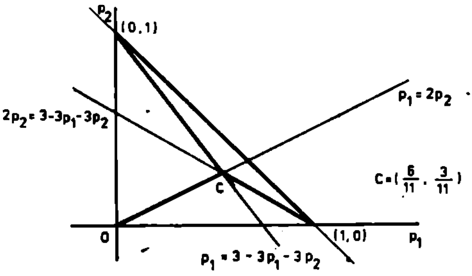
Napíšme si maticu hry:

$$M_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Borisova j-tá stratégia je dať do hrsti j guličiek, Aničkina i-tá stratégia je hádať, že Boris má v ruke práve i guličiek. Matica nemá sedlový bod. Postupujeme ako v predošlom prípade. Nech Anička si zvolí zmiešanú stratégiu $(p_1, p_2, p_3 = 1 - p_1 - p_2)$. Minimálna stredná hodnota Aničkinej výhry je

$$m = \min\{p_1, 2p_2, 3 - 3p_1 - 3p_2\}.$$

Anička sa snaží voliť čísla p_1, p_2 tak, aby číslo m bolo čo najväčšie. Ďalšie úvahy sledujeme na obr. 5.



Obr. 5

Bod (p_1, p_2) treba voliť z trojuholníka T s vrcholmi (0,0), (1,0), (0,1). Tento trojuholník je rozdelený tromi polpriamkami, vychádzajúcimi z bodu C, na tri malé trojuholníky.

V trojuholníku T_1 s vrcholmi $(0, 0), \left(\frac{6}{11}, \frac{3}{11}\right), (0, 1)$

$$m = p_1,$$

v trojuholníku T_2 s vrcholmi $(0, 0), \left(\frac{6}{11}, \frac{3}{11}\right), (1, 0)$

$$m = 2p_2,$$

v trojuholníku T_3 s vrcholmi $(1, 0)$, $\left(\frac{6}{11}, \frac{3}{11}\right)$, $(0, 1)$

$$m = 3p_3 = 3(1 - p_1 - p_2) .$$

Anička volí svoju zmiešanú stratégiu tak, aby číslo m bolo čo najväčšie. Za tým účelom vypočítame hodnotu m vo vrcholoch trojuholníkov T_1, T_2, T_3;

vrchol	$(0, 0)$	$(1, 0)$	$(0, 1)$	$\left(\frac{6}{11}, \frac{3}{11}\right)$
m	0	0	0	$\left(\frac{6}{11}\right)$

Číslo m je maximálne, keď $p_1 = \frac{6}{11}$, $p_2 = \frac{3}{11}$ a $p_3 = = \frac{2}{11}$. V tomto prípade $m = \frac{6}{11}$, t. j. Anička bude v priemere vyhrávať od Borisa $\frac{6}{11}$ guľôčky (je zaujímavé, že nezávisle od toho, koľko guličiek si dáva do hrsti Boris).

Spravme podobný výpočet pre Borisa. Ak si Boris zvolí zmiešanú stratégiu (q_1, q_2, q_3), tak maximálna možná stredná hodnota výhry Aničky je:

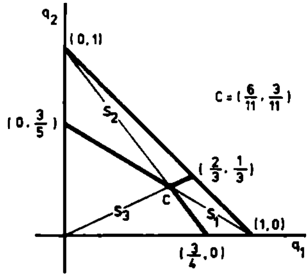
$$M = \max \{q_1, 2q_2, 3q_3 = 3 - 3q_1 - 3q_2\} .$$

Ďalšie úvahy sledujme pomocou obrázku 6.

Boris sa snaží voliť usporiadanú dvojicu q_1, q_2 z trojuholníka T (a dopočítať q_3) tak, aby číslo M bolo čo najmenšie. Rozdelíme trojuholník T na 3 štvoruholníky. V štvoruholníku S_1 platí $M = q_1$, v štvoruholníku S_2 platí $M = 2q_2$, v štvoruholníku S_3 platí $M = 3q_3 =$

$= 3 - 3q_1 - 3q_2$. Presne tak ako predtým stačí vypočítať hodnotu M vo vrcholoch štvoruholníkov:

vrchol	$(0, 0)$	$\left(0, \frac{3}{5}\right)$	$(0, 1)$	$\left(\frac{3}{4}, 0\right)$	$(1, 0)$	$\left(\frac{6}{11}, \frac{3}{11}\right)$,	$\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$
M	3	1,2	2	0,75	1	$0,\overline{54}$	$0,\overline{66}$



Obr. 6

Číslo M je najmenšie, keď $q_1 = \frac{6}{11}$, $q_2 = \frac{3}{11}$, $q_3 = \frac{2}{11}$.
Vtedy $M = 0,\overline{54}$.

Záver. Pre Aničku je najvýhodnejšie, keď bude hádať, že Boris dal do ruky 1, 2 alebo 3 guličky v pomere $6 : 3 : 2$. Vtedy bude jej stredná hodnota výhry aspoň $0,\overline{54}$ guličky na jedno hádanie. Pre Borisa bude najvýhodnejšie dávať do hrsti 1, 2 alebo 3 guličky tiež v pomere $6 : 3 : 2$. Vtedy bude Boris prehrávať priemerne najviac $0,\overline{54}$ guličky na jedno hádanie. Teda hra bude spravodlivá, ak Anička dá Borisovi za 33 hádaní vopred $33 \cdot \frac{6}{11} =$ $= 18$ guličiek.

Hodnota hry je rozhranie, ak by Boris pýtal viac za hádanie, dlhodobe by vyhrával Boris, ak menej, tak bude vyhrávať Anička. Hodnota našej hry je $0,\overline{54}$ guličiek. Na prvý pohľad by sa zdalo, že za možnosť hádania by sa oplatilo zaplatiť viac!

Poznámka. Keby Boris dával do hrsti 1, 2 a 3 guličky s rovnakou pravdepodobnosťou a Anička hovorila 1, 2 a 3 tiež rovnako často (má však aj lepší spôsob hádania — pozri úlohu 6.8), tak by za 33 hádaní uhádla asi 11krát a v priemere by zarobila po 2 guličky, t. j. 22 guličiek. Teda Borisova stratégia prináša zisk 4 guličky na 33 hádaní.

Úloha 6.8. Akú stratégiu hádania si má voliť Anička, keď Boris dáva do ruky 1, 2 a 3 guličky s rovnakou pravdepodobnosťou? Koľko guličiek vyhrá priemerne na jednu hru, ak bude optimálne hádať?

6.6. Nová metóda výpočtu zmiešaných stratégií. Metóda výpočtu zmiešaných stratégií uvedená v odsekoch 6.4 a 6.5 je vhodná len v prípade, že máme k dispozícii najviac 3 čisté stratégie. Teraz ukážeme jednu rýchlu metódu, ktorá v niektorých špeciálnych prípadoch pomôže nájsť optimálnu zmiešanú stratégiu nezávisle na tom, z koľkých čistých stratégií vyberáme.

Príklad. *Zmeňme pravidlá predchádzajúcej hry: Boris môže dať do klobúka* 1, 2, 3, ..., n *guľôčok* (n *je vopred zadané číslo*). *Anička má uhádnuť, koľko guličiek je v klobúku. Ak uhádne, guličky sú jej, ak nie, zostanú Borisovi. Treba vypočítať hodnotu hry.*

Riešenie. Nech si Anička volí zmiešanú stratégiu (p_1, p_2, ..., p_n), (p_i je pravdepodobnosť, že Anička povie:

v klobúku je i guličiek). Jej zaručená stredná hodnota výhry je potom

$$m = \min\{p_1, 2p_2, 3p_3, \ldots, np_n\}.$$

Anička sa snaží voliť usporiadanú n-ticu nezáporných čísel $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ s vlastnosťou $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ tak, aby číslo m bolo čo najväčšie. Voľme čísla $p_1, p_2 \ldots, p_n$ tak, aby

$$p_1 = 2p_2 = 3p_3 = \ldots = np_n. \tag{1}$$

$$\sum_{i=n}^{n} p_i = 1 \tag{2}$$

Ak by sme volili $p_1 = 1$, $p_2 = \frac{1}{2}$, $p_3 = \frac{1}{3}$, $\ldots$, $p_n = \frac{1}{n}$, tak by sme síce splnili podmienku (1), ale nie (2). Stačí však tieto čísla predeliť číslom $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ a dostaneme čísla, ktoré spĺňajú podmienku (1) i (2).

Teda volíme

$$p_1 = \frac{1}{s_n}, \quad p_2 = \frac{1}{2s_n}, \quad p_3 = \frac{1}{3s_n}, \ldots, p_n = \frac{1}{ns_n}.$$

Úloha 6.9. Overte, že $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Tvrdíme, že číslo m je najväčšie práve pre túto usporiadanú n-ticu reálnych čísel:

$$(p_1, p_2, \ldots, p_n) = \left(\frac{1}{s_n}, \frac{1}{2s_n}, \ldots, \frac{1}{ns_n}\right).$$

Pre túto usporiadanú n-ticu $m = \frac{1}{s_n}$. Naozaj, ak $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ je iná usporiadaná n-tica s vlastnosťou (2), potom pre aspoň jedno číslo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ platí

$$r_i \leqq \frac{1}{is_n} \qquad \left(\text{nemôže byť pre všetky } i : r > \frac{1}{is_n}\right).$$

Pre toto i je $ir_i \leqq \frac{1}{s_n}$, teda $m = \min\{r_1, 2r_2, 3r_3, \ldots, nr_n\} \leqq \frac{1}{s_n}$, čo sme chceli ukázať.

Úloha 6.10. Nájdite optimálnu zmiešanú stratégiu Borisa v tejto hre!

Nasledujúca tabuľka udáva hodnotu hry pre rôzne n:

n	2	3	4	5	6
hodnota hry	0,667	0,545	0,480	0,438	0,408

n	7	10	30	50
hodnota hry	0,386	0,341	0,250	0,222

Dá sa ukázať, že pri dostatočne veľkom n je s_n väčšie ako ľubovoľné vopred zadané číslo (presnejšie $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$), teda hodnota hry, čo je $\frac{1}{s_n}$ pre rastúce n klesá k 0 (pozri napr. J. Jarník: *Posloupnosti a řady,* str. 74. ŠMM zv. 43). Platí tento odhad:

$$\frac{1}{1 + \ln n} \leqq \frac{1}{s_n} \leqq \frac{1}{\ln n},$$

kde $\ln n$ je logaritmus čísla n pri základe $e = 2{,}718\ldots$.

Pozmeňme pravidlá predchádzajúcej hry takto: Ak Anička uhádne, koľko guličiek dal Boris do klobúku, tak dostane od Borisa k^2 guličiek, kde k je „uhádnutý" počet guličiek v klobúku (ak neuhádne, samozrejme nedostane od Borisa nič).

Úloha 6.11. Nájdite teraz optimálne stratégie Borisa a Aničky!

Úloha 6.12. Vypočítajte hodnotu hry v závislosti na n. Ukážte, že pre každé n je väčšia než 0,5 (pozri ŠMM, zv. 43, str. 73).

RIEŠENIA

1.1. Mohla zvíťaziť ťahom $5 \xrightarrow{A} 4$. Po tomto ťahu musel Boris zahrať $4 \xrightarrow{B} *$, kde $*$ je jedno z čísel 3, 2 alebo 1. Anička vyhrá potom ťahom $* \xrightarrow{A} 0$.

1.2. Mal hrať $7 \xrightarrow{B} 4$ a po Aničkinom ťahu $4 \xrightarrow{A} *$ by zvíťazil ťahom $* \xrightarrow{B} 0$.

1.3. Borisov ťah $9 \xrightarrow{B} 8$ bol najlepší možný. Po Aničkinom ťahu $8 \xrightarrow{A} *$ zahrá Boris $* \xrightarrow{B} 4$ a vyhrá (pozri predošlé dve úlohy). Každý iný ťah by viedol ku Borisovej prehre; napríklad $9 \xrightarrow{B} 7$ (pozri úlohu 1.2.) alebo $9 \xrightarrow{B} 6 \xrightarrow{A} 4 \xrightarrow{B} * \xrightarrow{A} 0$.

1.4. Sú to pozície: 0, 4, 8, 12, 16, 20, 24 a 28.

1.5. Budem ťahať tak, že svojím ťahom skončím vždy na čísle, ktoré je deliteľné 4. Teda $1983 \xrightarrow{A} 1980 \xrightarrow{B} * \xrightarrow{A} 1976 \xrightarrow{B} * \xrightarrow{A} 1972 \xrightarrow{B} \dots \xrightarrow{A} 12 \xrightarrow{B} * \xrightarrow{A} 8 \xrightarrow{B} * \xrightarrow{A} 4 \xrightarrow{B} * \xrightarrow{A} 0$. Vždy dvojica ťahov $\cdot \xrightarrow{B} \cdot \xrightarrow{A}$ zmenší počet kameňov o 4. Preto za 495 sa z počtu 1980 dostaneme na 0. Teda partia bude mať presne 496 ťahov.

1.6. Nemohol. Po ľubovoľnom ťahu Borisa $6 \xrightarrow{B} *$ zahrá Anička $* \xrightarrow{A} 0$, lebo $*$ je najviac 5. Teda pozícia 6 je pre Borisa prehratá.

1.7. Mohol. Mal hrať $13 \xrightarrow{B} 12$. Potom po $12 \xrightarrow{A} *$ nasleduje $* \xrightarrow{B} 6$ a po $6 \xrightarrow{A} *$ príde víťazný ťah $* \xrightarrow{B} 0$. Boris zvíťazí.

1.8. Sú to: 18, 12, 6 a 0.

1.9. Treba hrať tak, aby som svojím ťahom končil na čísle deliteľnom 6. Teda $1984 \xrightarrow{A} 1980 \xrightarrow{B} * \xrightarrow{A} 1974 \xrightarrow{B} * \xrightarrow{A}$ $\rightarrow 1968 \xrightarrow{B} * \ldots \xrightarrow{A} 12 \xrightarrow{B} * \xrightarrow{A} 6 \xrightarrow{B} * \xrightarrow{A} 0$.

1.10. Boris mal hrať $(1,2) \xrightarrow{B} (1,1)$ a bol by zvíťazil, lebo Anka musí „doraziť" jednu kopu a Boris potom zoberie posledný kameň a vyhrá.

1.11. Vyhrá súper, ako ukazuje tento rozbor:
$(2,2) \xrightarrow{A} (2,0) \xrightarrow{B} (0,0)$, $(2,2) \xrightarrow{A} (0,2) \xrightarrow{B} (0,0)$, $(2,2) \xrightarrow{A} (2,1) \xrightarrow{B}$ $\rightarrow (1,1) \xrightarrow{A} (1,0) \xrightarrow{B} (0,0)$.

1.12. Spôsob mojej hry je znázornený na rozvetvenom diagrame

$$(3,4) \rightarrow (3,3) \text{ —} \begin{cases} \rightarrow (2,3) \\ \rightarrow (3,2) \end{cases} \!\!> (2,2) \quad \text{ďalej ako v riešení úlohy 1.11.}$$
$$\begin{cases} \rightarrow (1,3) \\ \rightarrow (3,1) \end{cases} \!\!> (1,1)$$
$$\begin{cases} \rightarrow (3,0) \\ \rightarrow (0,3) \end{cases} \!\!> (0,0) \quad \text{vyhral som}$$

Teda: môj prvý ťah je $(3,4) \rightarrow (3,3)$. Súper má 6 možných odpovedí. Potom ja zahrám tak, aby na oboch kopách ostal rovnaký počet kameňov.

1.13. Hráč A zvíťazí v prípadoch a), c), e). V druhej a štvrtej hre, prípady b), d), zvíťazí hráč B. Prvý ťah hráča A v nepárnych hrách je: a) $35 \xrightarrow{A} 30$, c) $35 \xrightarrow{A} 32$, e) $(12,15) \xrightarrow{A} (12,12)$.

1.14. V oboch prípaďoch a), b) je to $8 \times 6 = 48$ pozícií.

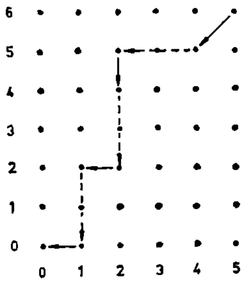
1.15. Množina kritických pozícií má 12 prvkov: (0,0), (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (4,0), (5,1), (6,2), (7,3), (0,4), (1,5). Je to množina práve všetkých dvojíc (a,b), pre ktoré číslo $|a - b|$ je deliteľné 4.

2.1. Riešenie je na obr. 1

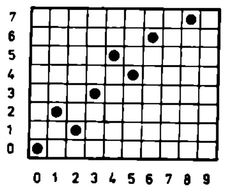
2.2. $(5,6) \xrightarrow{A} (3,6) \xrightarrow{B} (3,2) \xrightarrow{A} (2,1) \xrightarrow{B} (0,1) \xrightarrow{A} (0,0)$.

2.3. a) $(2,6) \rightarrow (2,1)$.
b) $(5,5) \rightarrow (5,4)$ alebo $(5,5) \rightarrow (4,5)$.
c) $(2,3) \rightarrow (2,1)$ alebo $(2,3) \rightarrow (1,2)$.

2.4. Riešenie je na obr. 2. Prvý ťah bol $(9,7) \rightarrow (8,7)$.



Obr. 1



Obr. 2

2.5. Boris má pravdu. V nasledujúcej partii sú všetky ťahy Aničky povinné — iné možnosti hry nemá, ak nechce prehrať.

$(9,7) \xrightarrow{A} (8,7) \xrightarrow{B} (7,7) \xrightarrow{A} (6,6) \xrightarrow{B} (4,6) \xrightarrow{A} (4,5) \xrightarrow{B} (4,4) \xrightarrow{A}$
$\rightarrow (3,3) \xrightarrow{B} (1,3) \xrightarrow{A} (1,2) \xrightarrow{B} (1,1) \xrightarrow{A} (0,0)$.

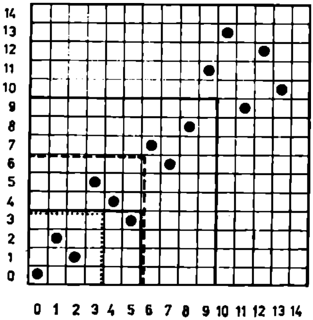
Partia trvala 11 ťahov.

2.6. Je to obr. 4d z kapitoly 2, lebo v tabuľke stratégie hier III (5,6;1) a III (5,6;2) niet rozdielu.

2.7. Je to obr. 2, lebo v tabuľke stratégie hier III (9,7;1) a III (9,7;2) niet rozdielu.

2.8. Minimálne 11 ťahov — situácia ako v úlohe 2,5.

2.9. Na obr. 3 je odpoveď na „najrozsiahlejší" prípad e). Odpovede na a)—d) získame tým, že z obr. 3 „vyrežeme" v ľavom dolnom rohu príslušný obdĺžnik. Naznačené sú: a) .... b) - - - - c) ——— d) ———



Obr. 3

2.10. a) (5,6) → (5,3).

b) (5,5) → (5,3) alebo (4,4) alebo (3,5).

c) (10,13) pole je kritické.

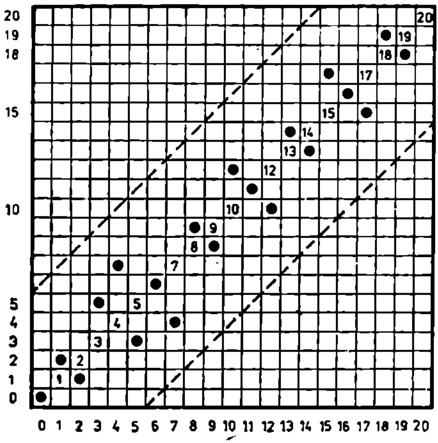
d) (14,12) → (11,9) alebo (12,12).

2.11. Riešenie je na obr. 4.

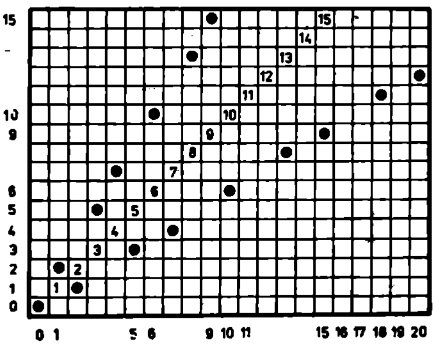
Poznámka. V ďalšom texte budeme často uvádzať tabuľky stratégie v úspornejšom balení. Nebudeme kresliť celú tabuľku, ale iba tú časť, v ktorej sú kritické pozície. Je to časť okolo diagonály. Aj očíslovanie polí potom urobíme na diagonále tak, ako je uvedená na tomto obrázku.

2.12. Riešenie je na obr. 5.

2.13. Pozícia (35,35) nie je kritická, lebo nesplňa druhú podmienku zv$[(p + q) : 3] = 0$. Je totiž zv$[(35 + 35) : 3] =$ $=$ zv$(70 : 3) = 1 \neq 0$.



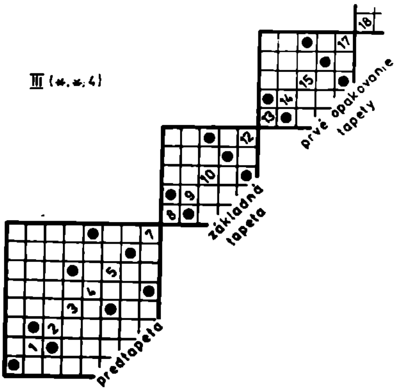
Obr. 4



Obr. 5

Pozícia (37,35) síce spĺňa druhú podmienku (je zv[(37 + + 35) : 3] = 0), ale nespĺňa prvú podmienku $|p - q| < 2$, lebo $|37 - 35| = 2$. Podobne pozícia (52,50) nespĺňa prvú podmienku, pozícia (111,121) nespĺňa ani jednu podmienku, pozícia (454,545) nespĺňa prvú podmienku, pozícia (759,760) a (760,759) nespĺňajú druhú podmienku. Jediná posledná pozícia (1984,1985) je kritická, lebo spĺňa obe podmienky. Je $|1984 - 1985| < 2$ aj zv(3969 : 3) = 0.

Teraz ideme hľadať podľa Borisovho návodu víťazný ťah. Pre pozíciu (35,35) je $i = 2$, lebo zv (35 : 3) = 2. Podľa prvého riadku a posledného stĺpca Borisovej tabuľky je víťazný ťah (35,35) → (33,33). Dvojicu (37,35) nemôžeme Borisovou tabuľkou spracovať, lebo nie je $p \leq q$. Preto namiesto tejto dvojice vezmeme dvojicu (35,37). Podľa tretieho riadku i tretieho stĺpca je víťazný ťah (35,37) → (35,34). Teda po prehodení bude riešenie našej situácie (37,35) → (34,35). Podobne i ďalej...



Obr. 6

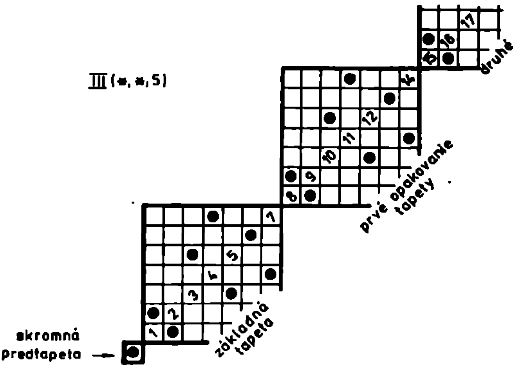
2.14. Hoci je strategická tabuľka hier III(611,612;2) a III (611,612;1) rovnaká, bude samotná stratégia trošku iná. V hre III(611,612;1) nemožno totiž uskutočniť ťah $(p,p) \to (p-2, p-2)$, ktorý je uvedený v Borisovej tabuľke v prvom riadku a treťom stĺpci. V hre III (611, 612;1) treba sem miesto $(p-2, p-2)$ napísať $(p, p-1)$, čím sa v podstate návod zjednoduší: Ak (p,q) nie je kritická, $p \leqq q$ a zv$(p:3) = i$, tak víťazný ťah je:

$(p,q) \to (p,p)$ ak $i = 0$,
$(p,q) \to (p,p+1)$ ak $i = 1$,
$(p,q) \to (p,p-1)$ ak $i = 2$.

2.15. Riešenie je na obr. 6. Množina všetkých kritických pozícií (p,q), $p \leqq q$ je daná tabuľkou:

(0,0), (1,2), (3,5), (4,7), (6,6) — predtapeta,
(8,9), (10,12), (11,11) + perióda 5 — ďalšie tapety.

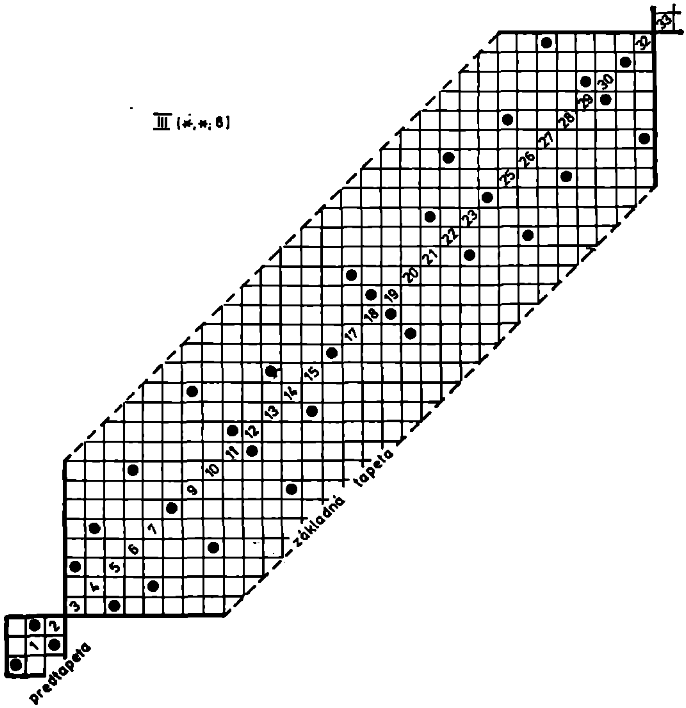
2.16. a) (87,101) → (87,85).
b) (211,196) → (196,196).



Obr. 7

c) $(321,322) \rightarrow (320,322)$,
$(321,322) \rightarrow (321,321)$,
$(321,322) \rightarrow (318,319)$.

V tomto prípade sú dokonca 3 dobré ťahy.



Obr. 8

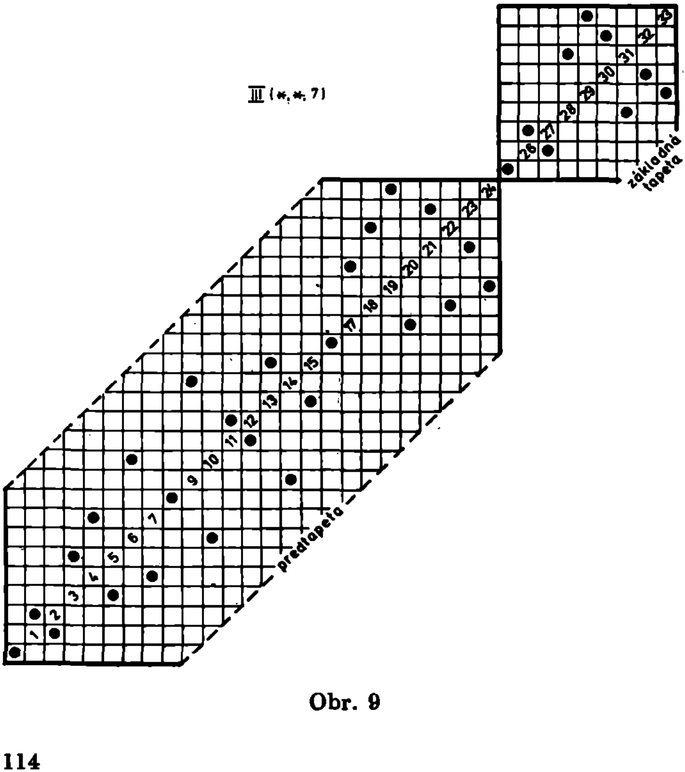
2.17. Riešenie je na obr. 7

(0,0) — predtapeta,

$\left.\begin{array}{l}(1,2),\ (3,5)\\(4,7),\ (6,6)\end{array}\right\}$ + perióda 7 — ďalšie tapety.

2.18. Riešenie je na obr. 8.

2.19. Riešenie je na obr. 9.

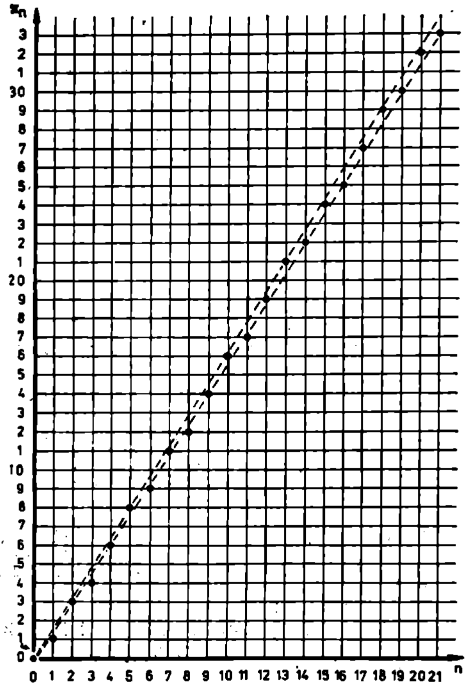


Obr. 9

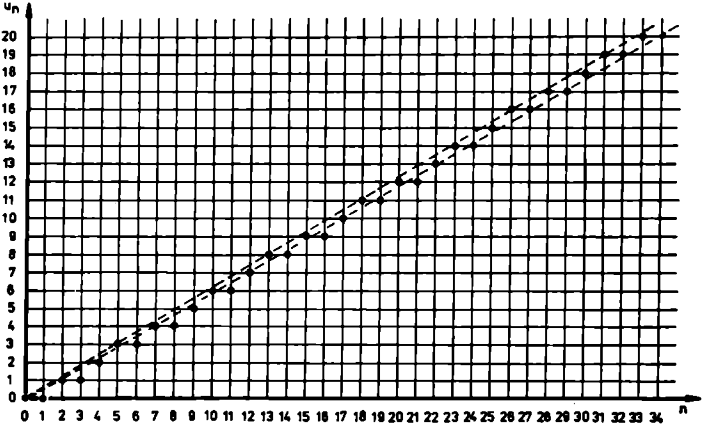
2.22. Graf funkcie x_n je na obr. 10. Aproximujúca priamka je nahradená celým uhlom.

2.23. Graf funkcie u_n je na obr. 11. Aproximujúca priamka je nahradená celým uhlom.

2.24. Graf funkcie v_n je ten istý ako graf funkcie u_n, lebo
$$v_n = y_n - 2n = (x_n + n) - 2n = x_n - n = u_n$$



Obr. 10



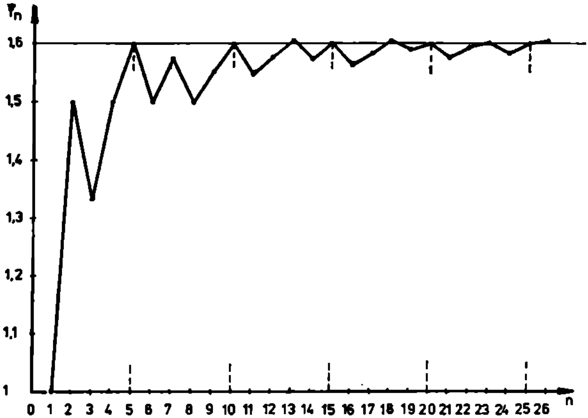
Obr. 11

2.25. Graf funkcie $f_n = \dfrac{x_n}{n}$ je na obr. 12. Hodnoty funkcie f_n sú dané v tabuľke (zaokrúhlené na tisíciny).

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f_n	1	1,5	1,333	1,5	1,6	1,5	1,571	1,5	1,556	1,6

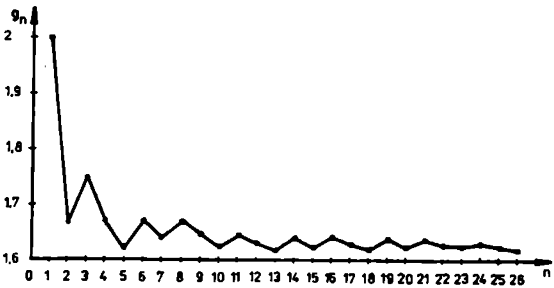
n	11	12	13	14	15	16	17	18
f_n	1,545	1,583	1,615	1,571	1,6	1,562	1,588	1,611

n	19	20	21	22	23	24	25	26
f_n	1,579	1,6	1,571	1,591	1,609	1,583	1,6	1,615



Obr. 12

2.26. Graf funkcie $g_n = \dfrac{y_n}{x_n}$ je na obr. 13. Hodnoty funkcie sú dané (s presnosťou 10^{-3}) v tabuľke.



Obr. 13

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_n	2	1,667	1,75	1,667	1,625	1,667	1,636	1,667	1,643	1,625

n	11	12	13	14	15	16	17	18	19
g_n	1,647	1,632	1,619	1,636	1,625	1,640	1,630	1,621	1,633

n	20	21	22	23	24	25	26
g_n	1,625	1,636	1,629	1,621	1,632	1,625	1,619

2.27. $f_{5k} = 1{,}6$ platí pre $k = 1, 2, \ldots 11$, pre $k = 12$ je ale $1{,}616$. $f_{60} = \dfrac{97}{60} = 1{,}616 > 1{,}6$. Ďalej je $f_{65} = \dfrac{105}{65} \doteq$ $\doteq 1{,}615$, $f_{70} = \dfrac{113}{70} \doteq 1{,}614$ atď.

2.28. $g_{5k} = 1{,}625$ platí pre $k = 1, 2, \ldots, 11$, pre $k = 12$ je ale $g_{60} = \dfrac{157}{97} \doteq 1{,}619$. Ďalej je $g_{65} = \dfrac{170}{105} = 1{,}619$, $g_{70} = \dfrac{183}{113} = 1{,}619$ atď.

2.29. Hodnoty f_n a g_n sú navzájom viazané rovnosťou $g_n =$ $= \dfrac{y_n}{x_n} = \dfrac{x_n + n}{x_n} = 1 + \dfrac{1}{f_n}$. Odtiaľ $f_n = \dfrac{1}{g_n - 1}$.

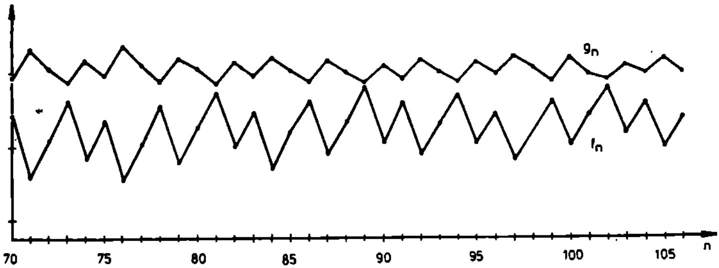
2.30.

n	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87
x_n	113	114	116	118	119	121	122	124	126	127	129	131	132	134	135	137	139	140
v_n	183	185	188	191	193	196	198	201	204	206	209	212	214	217	219	222	225	227
1,6... f_n	143	056	111	164	081	133	053	104	154	076	125	173	098	145	071	118	163	092
1,6... φ_n	195	228	207	186	218	198	230	210	190	220	202	183	212	194	222	204	187	214

n	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106
x_n	142	144	145	147	148	150	152	153	155	156	158	160	161	163	165	166	168	169	171
v_n	230	233	235	238	240	243	246	248	251	253	256	259	261	264	267	269	272	274	277
f_n	136	180	111	154	087	129	170	105	146	082	122	162	100	139	176	117	154	035	132
φ_n	197	181	207	190	216	200	184	209	194	218	203	187	211	176	182	205	190	213	199

Tab. 1

O odhadoch a hypotézach, ktoré z obrázkov vyvodili Anka s Borisom, sa píše ďalej v texte — v odseku 2.10. a 2.11.



Obr. 14

2.31. Grafy funkcií f_n a g_n sú na obr. 14. Hľadané hodnoty sú dané tabuľkou

n	1	2	5	13	34	89
x_n	1	3	8	21	55	144
y_n	2	5	13	34	89	233
$g_n - f_n$	1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{273}$	$\frac{1}{1870}$	$\frac{1}{12\,816}$

Tab. 2

2.32. Keď pozorne prezrieme hornú tabuľku, objavíme v nej dve zákonitosti: riadok y_n sa s posunutím opakuje v riadku n a platí

$$\text{(vii)}\quad g_n - f_n = \frac{1}{n \cdot x_n}.$$

Predpokladajme, že tieto vlastnosti nie sú náhodné a ostanú v platnosti aj naďalej. Potom ďalšie „kritické“ n bude $y_{89} = 233$. Potrebujeme teda pre $n = 233$ určiť x_{233} a y_{233}. Označme $x_{233} = x$ a podľa (i) je potom $y_{233} = x + 233$. Po dosadení do (vii) bude

$$g_{233} - f_{233} = \frac{x + 233}{x} - \frac{x}{233} = \frac{1}{x.233},$$

odtiaľ $\qquad 233.x + 54\,289 - x^2 = 1,$

a preto $\qquad x = 377,\ y_{233} = x + 233 = 610.$

Výsledok:

$$n = 233,\ x_{233} = 377,\ y_{233} = 610,\ f_n = \frac{377}{233} \doteq$$

$$\doteq 1{,}6180257\,,$$

$$g_n = \frac{610}{377} = 1{,}6180371,\ g_n - f_n = \frac{1}{377.233} = \frac{1}{87841}.$$

2.33. Anka začala s rovnicou, ktorú získal Boris: $g_n = f_n$. Odtiaľ $\frac{y_n}{x_n} = \frac{x_n}{n}$, teda $\frac{x_n + n}{x_n} = \frac{x_n}{n}$, čiže $1 + \frac{n}{x_n} = \frac{x_n}{n}$. Táto rovnosť teda platí „pre $n = \infty$“.

Preto „$\frac{x_n}{n} = h$ pre $n = \infty$“. Po dosadení je $1 + \frac{1}{h} = h$, a teda $h^2 - h - 1 = 0$, $\quad h_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Záporný koreň zrejme nevyhovuje, preto

(ix) $\quad h = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \doteq 1{,}6180339\,.$

2.34. Hľadané číslo je $r = h^2 = \frac{\sqrt{5} + 3}{2}$. Skutočne, z (i) a (x) vyplýva

$$y_n = x_n + n = [h.n] + n = [(h + 1).n] = [h^2 n]\,.$$

3.1. Áno. V prípade ťahu $3 \xrightarrow{B} 2$ odpovie Anička $2 \xrightarrow{A} 1$. V prípade ťahu $3 \xrightarrow{B} 1$ odpovie $1 \xrightarrow{A} 0$. Vždy získa ešte jeden kameň, ktorý s predošlými dvoma dá dokopy 3 — nepárne číslo.

3.2. Nebol. Ako sme videli v riešení úlohy 3.1., mohla Anička po tomto ťahu zvíťaziť. Správny ťah bol $6 \xrightarrow{B} 5$. Po tomto ťahu zvíťazí Boris takto:

$$
\begin{tikzcd}
 & & & 4 \arrow[r, "B"] \arrow[dr, "B"] & 3 \arrow[r, "A"] & 2 \arrow[r, "B"] & 1 \arrow[r, "A"] & 0 \\
 & & & & 3 \arrow[r, "A"] & 1 \arrow[r, "B"] & 0 & \\
7 \arrow[r, "A"] & 6 \arrow[r, "B"] & 5 \arrow[uur, "A"] \arrow[r, "A"] & 3 \arrow[r, "B"] & 1 \arrow[r, "A"] & 0 & &
\end{tikzcd}
$$

Boris má vždy tri kamene.

3.3. Začínajúci hráč A prehrá. Ak v prvom ťahu hrá $7 \xrightarrow{A} 6$, tak víťazná stratégia druhého hráča B je v riešení úlohy 3.2. Ak v prvom ťahu berie A dva kamene, tak B berie najprv 2 kamene a pri ďalšom braní 1 kameň, alebo najprv 1 kameň a pri ďalšom braní 2 kamene. V podstate B ani nemusí príliš uvažovať a vyhrá.

3.4. Začínajúci hráč A vyhrá. V prvom ťahu zoberie 2 kamene, tým prevedie hru IV(9;2) na hru IV(7;2), v ktorej začína hráč B. Podľa úlohy 3.3 vieme, že v tejto hre začínajúci hráč prehrá.

3.5. Zvíťazí Boris:

$$
\begin{tikzcd}
 & & & & & & 2 \arrow[r, "B"] & 1 \arrow[r, "A"] & 0 \\
 & & & & & 4 \arrow[r, "B"] & 3 \arrow[u, "A"] \arrow[r, "A"] & 1 \arrow[r, "B"] & 0 \\
11 \arrow[r, "A"] & 10 \arrow[r, "B"] & 9 \arrow[r, "A"] & 7 \arrow[r, "B"] & 5 \arrow[ur, "A"] \arrow[r, "A"] & 3 \arrow[r, "B"] & 1 \arrow[r, "A"] & 0 &
\end{tikzcd}
$$

3.6. Riešenie je v texte.

8.7. Posledný riadok sa periodicky opakuje. Z toho možno vyvodiť tento návod: Z čísla m (počet kameňov, ktoré ostali ešte na kope) určím najprv číslo $i = \text{zv}(m : 4)$, tj. zvyšok pri delení $m : 4$. Pre toto číslo i môžu nastať 4 prípady zachytené v prehľadnej tabuľke 3.

i	0	1	2	3
p	×	č	1	×
n	1	×	2	2

Tab. 3

Teda, ak $i = 0$ alebo $i = 3$ a ja mám na ruke pár, tak prehrám. Rovnako prehrám, ak mám na ruke nepár a $i = 1$. V ostatných prípadoch vyhrám, ak beriem podľa tabuľky.

8.8. a) Začínajúci hráč prehrá, ako vidieť z tohoto rozboru:

$$\begin{array}{lll} & \overset{A}{\nearrow} & 4 \xrightarrow{B} 1 \xrightarrow{A} 0 \\ 5 & \longrightarrow & 3 \xrightarrow{B} 0 \\ & \searrow & 2 \xrightarrow{B} 1 \xrightarrow{A} 0 \end{array}$$

b) Začínajúci hráč zvíťazí ťahom $7 \xrightarrow{A} 5$, ktorým prevedie hru na prípad a).

c) Začínajúci hráč zvíťazí touto stratégiou:

$$\begin{array}{lll} & \overset{B}{\nearrow} & 7 \xrightarrow{A} 4 \\ 9 \xrightarrow{A} 8 & \longrightarrow & 6 \xrightarrow{A} 5 \\ & \searrow & 5 \xrightarrow{A} 4 \end{array}$$

Teraz má hráč A na ruke párny počet kameňov; ďalej pokračuje

$$
\begin{array}{l}
\quad {}^{B}\!\nearrow 3 \xrightarrow{A} 0 \\
4 \longrightarrow 2 \xrightarrow{A} 1 \xrightarrow{B} 0 \\
\quad \searrow 1 \xrightarrow{A} 0
\end{array}
\qquad \text{alebo} \qquad
\begin{array}{l}
\quad {}^{B}\!\nearrow 4 \xrightarrow{A} 1 \xrightarrow{B} 0 \\
5 \longrightarrow 3 \xrightarrow{A} 0 \\
\quad \searrow 2 \xrightarrow{A} 1 \xrightarrow{B} 0
\end{array}
$$

3.9.

počet kameňov na kope	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
na ruke mám p	1	1	3	3	×	2	2	×	1	1	3	3
n	×	2	2	×	1	1	3	3	×	2	2	×

Tab. 4

3.10. Podobne ako v prípade IV(n; 2) aj tu vidíme periodické opakovanie prvých 8 stĺpcov. Preto stratégia hry IV (n;3) je daná týmto predpisom: Situácia, v ktorej mám ťahať, je charakterizovaná dvomi údajmi: číslom m, čo je počet kameňov na kope, a informáciou, či na ruke mám párny (p) alebo nepárny (n) počet kameňov. Nech ešte $i = \text{zv}(m : 8)$, potom v danej situácii ťahám tak, ako určí tabuľka.

i	0	1	2	3	4	5	6	7
p	×	1	1	3	3	×	2	2
n	3	×	2	2	×	1	1	3

Tab. 5

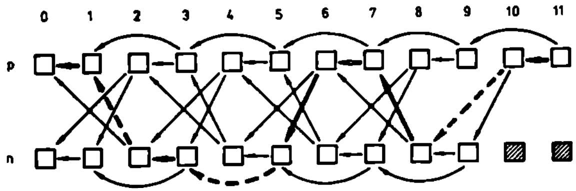
Aj v tomto prípade symbol „×" značí, že v danej situácii hráč na ťahu prehráva.

3.11. Partia je na obr. 15 zakreslená silnými šípkami. Plné sú ťahy hráča A, prerušované sú ťahy hráča B.

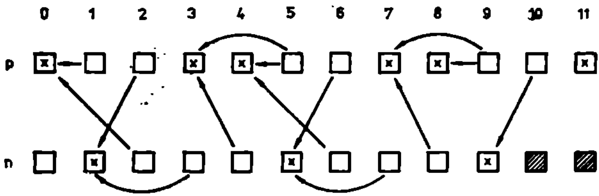
3.12. Riešenie je na obr. 16.

3.13. Riešenie je na obr. 17.

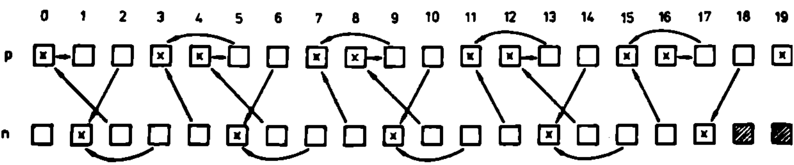
Stratégia: Ak si v poli označenom krížikom, tak nemôžeš vyhrať. Ak si v poli, ktoré nie je označené krížikom, tak ťahaj tak, ako ukazuje šípka vychádzajúca z tohto poľa. V niektorých pozíciách máš dokonca dve možnosti víťazného ťahu.



Obr. 15



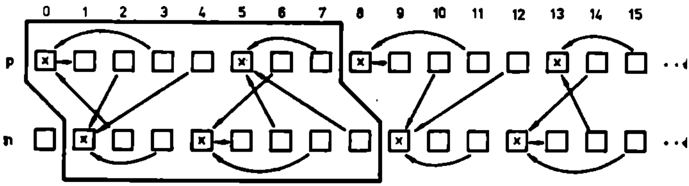
Obr. 16



Obr. 17

3.14. Tabuľka 3 je vlastne iba algebraickým zápisom situácie, ktorá je znázornená na obr. 17. Napríklad krížik × v okienku $(0,p)$ tabuľky 3 reprezentuje krížiky v poliach $(0,p)$, $(4,p)$, $(8,p)$, $(12,p)$ a $(16,p)$ z obr. 17. Podobne číslo 2 v okienku $(2,n)$ z tabuľky 3 reprezentuje šípky vychádzajúce z polí $(2,n)$, $(6,n)$, $(10,n)$ a $(14,n)$.

3.15. Riešenie pre $k = 3$ je na obr. 18.



Obr. 18

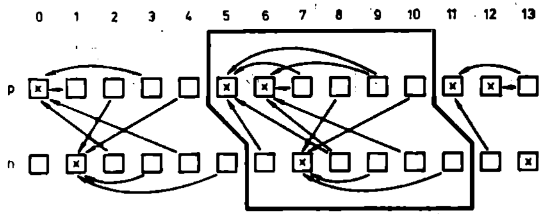
$i = \text{zv}(n : 8)$

i	0	1	2	3	4	5	6	7
p	×	1	1	3	3	×	2	2
n	3	×	2	2	×	1	1	3

Tab. 6

Na obr. 18 je orámovaná časť, ktorá sa periodicky opakuje. Algebraický zápis tejto časti je potom daný tab. 6. Podobne i v ďalších riešeniach.

8.16. Riešenie pre $k = 4$ je na obr. 19.



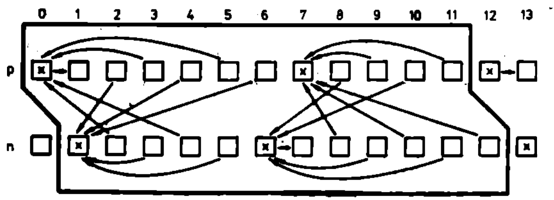
Obr. 19

$i = \mathrm{zv}(n : 6)$

i	0	1	2	3	4	5
p	×	1v2	1	3v4	3	×
n	1	×	2v3	2	4	4

Tab. 7

8.17. Riešenie pre $k = 5$ je na obr. 20.



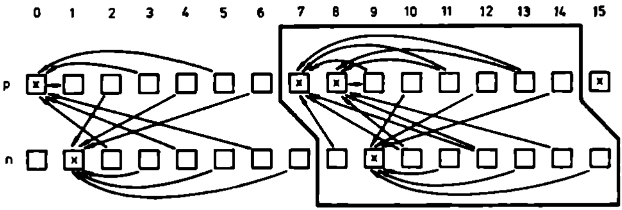
Obr. 20

$i = \text{zv}(n : 12)$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p	×	1	1	3	3	5	5	×	2	2	4	4
n	5	×	2	2	4	4	×	1	1	3	3	5

Tab. 8

Riešenie pre $k = 6$ je na obr. 21.



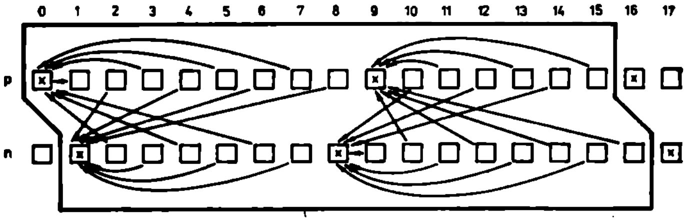
Obr. 21

$i = \text{zv}(n : 8)$

i	0	1	2	3	4	5	6	7
p	×	1v2	1	3v4	3	5v6	5	×
n	1	×	2v3	2	4v5	4	6	6

Tab. 9

Riešenie pre $k = 7$ je na obr. 22.



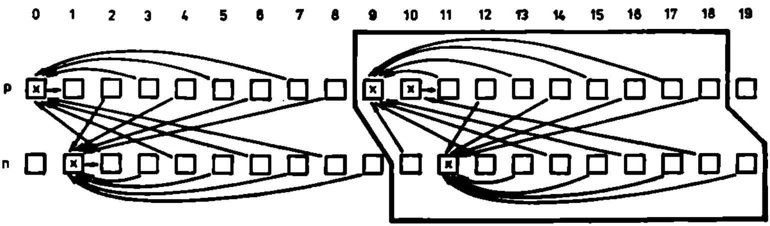
Obr. 22

$i = \text{zv}(n : 16)$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
p	×	1	1	3	3	5	5	7	7	×	2	2	4	4	6	6
n		×	2	2	4	4	6	6	×	1	1	3	3	5	5	7

Tab. 10

Riešenie pre $k = 8$ je na obr. 23.



Obr. 23

$i = \text{zv}(n : 10)$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p	×	1v2	1	3v4	3	5v6	5	7v8	7	×
n	1	×	2v3	2	4v5	4	6v7	6	8	8

Tab. 11

3.18. $k = 2m \quad i = \text{zv}(n : (k + 2))$

i	0	1	2	3	4	5	....	$k-1$	k	$k+1$
p	×	1v2	1	3v4	3	5v6	....	$(k-1)$ vk	$k-1$	×
n	1	×	2v3	2	4v5	4	....	$k-2$	k	k

Tab. 12

3.19. $k = 2m - 1 \quad i = \text{zv}(n : 4m)$

i	0	1	2	3	4	5	..	k	$k+1$	$k+2$	$k+3$	..	$2k$	$2k+1$
p	×	1	1	3	3	5	..	k	k	×	2	..	$k-1$	$k-1$
n		×	2	2	4	4	..	$k-1$	×	1	1	..	$k-2$	k

Tab. 13

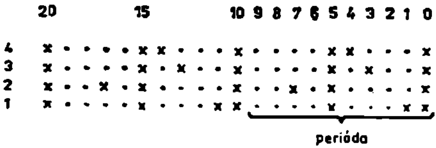
3.20. Áno, začínajúci hráč vyhrá, ako ukazuje tento rozbor:

$$\begin{tikzcd}
 & & & & 1 \arrow[r, "A"] & 0 \\
 & & 5 \arrow[r, "A"] & 4 \arrow[ur, "B"] \arrow[dr, "B"'] & & \\
 & & & & 2 \arrow[r, "A"] & 1 \\
9 \arrow[r, "A"] & 8 \arrow[uur, "B"] \arrow[ddr, "B"'] & & & & \\
 & & & & 2 \arrow[r, "A"] & 0 \\
 & & 6 \arrow[r, "A"] & 3 \arrow[ur, "B"] \arrow[dr, "B"'] & & \\
 & & & & 1 \arrow[r, "A"] & 0
\end{tikzcd}$$

3.21. Pozíciu treba opísať pomocou dvoch údajov: (1) koľko ostáva na kope kameňov a (2) koľko kameňov bral súper v predchádzajúcom ťahu. Teda napríklad dvojica (5,1) značí „na kope je 5 kameňov a predchádzajúci ťah súpera bol 6 → 5“. Pri takejto symbolike sú v V(9;3) kritické tieto pozície: (8,1), (5,1), (4,1), (4,2), (4,3), (3,3), (1,1), (0,1), (0,2), (0,3).

3.22. Sú to všetky pozície ($4m$,1), ($4m$,2), ($4m$,3), ($4m + 1$,1), ($4m - 1$,3). Pre začínajúceho hráča niet obmedzenia na počet braní, pre neho sú kritické iba pozície ($4m$,.). NIM V(n;4)

3.23. Na obr. 24 sú kritické pozície znázornené krížikmi. Perióda má dĺžku 10.



Obr. 24

3.24. NIM V(n;4) $\quad i = \text{zv}(n : 10)$

i	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
4	2	3	2	1v3	×	×	3	1v2	1	×
3	2v4	4	2	1	×	4	×	1v2	1	×
2	4	3v4	×	1v3	×	4	3	1	1	×
1	2v4	3v4	2	3	×	4	3	2	×	×

Tab. 14

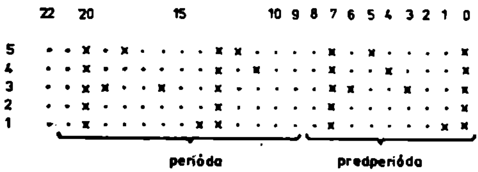
(Pre nezačiatočný ťah.)

Stratégia začiatočného ťahu je jednoduchá, na to netreba písať tabuľku. Ak je v začiatočnej pozícii na kope $n = 5m$ ($m \in N$) kameňov, tak hráč A prehrá. V opačnom prípade hráč A v začiatočnom ťahu zoberie z kopy toľko kameňov, aby na kope ostalo číslo deliteľné číslom 5.

8.25. NIM V(n;5). Riešenie je na obr. 25. Perióda má dĺžku 13, stĺpce od „0“ po „8“ tvoria predperiódu (podobnú predtapete z hier III).

$i = \mathrm{zv}(n : 13)$

$n \geqq 9$



Obr. 25

i	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
5	×	4	5	1v2v3	1	×	3	×	4	3	1v2v4	1	×
4	5	×	3v5	1v2v3	1	×	3	5	5	3	1v2	1	×
3	5	4	5	1v2	1	×	×	5	4v5	×	1v2v4	1	×
2	5	4	3v5	1v3	1	×	3	5	4v5	3	1v4	1	×
1	5	4	3v5	2v3	×	×	3	5	4v5	3	2v4	×	×

Tab. 15

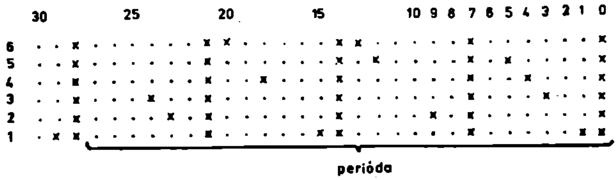
(pre nezačiatočný ťah, pričom na kope je viac ako 8 kameňov; ak je na kope menej ako 9 kameňov, použijeme predperiódu z obr. 25).

Začiatočný ťah určuje tabuľka (táto platí pre všetky n).

i	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
beriem	5	4	3	2	1	×	3	5	4	3	2	1	×

Tab. 15a

3.26. NIM V(n;6). Riešenie je na obr. 26. Perióda má dĺžku 28.



Obr. 26

Tabuľku, ktorou je daná stratégia hry, zapíšeme stručnejšie.

i	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14
beriem	3v6	5v6	2v4	3	2	1v3	×	6	5v6	4	2v4	1v2	1	×

i	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
beriem	5	4	2v4	3v5	2	1v4	×	3v6	5	4	3	1v2	1	×

Tab. 16.

Tabuľku treba čítať takto: ak je na kope $28k + i$ ($k \in N$) kameňov, tak hráč na ťahu berie toľko, koľko je určené v tabuľke 16 pod číslom i. Ak je tu krížik, tak hráč je v kritickej pozícii. Ak je tu jediné číslo rovné počtu kameňov, ktoré bral v poslednom ťahu súper, tak hráč na ťahu je opäť v kritickej pozícii. V opačných prípadoch má hráč na ťahu vyhrávajúci ťah a ten je daný braním toľkých kameňov, koľko hovorí číslo (či jedno z čísel) pod „i“. Tabuľka 16 sa vzťahuje na nezačiatočný ťah. Pre začiatočný ťah platí toto: ber toľko, aby po tvojom ťahu ostalo na kope číslo deliteľné 7. Ak máš v začiatočnej pozícii na kope číslo typu $7m$, $m \in N$, tak prehráš.

3.27. Nemohol. Pozícia (3,2,1) je kritická, pretože ak B zahrá akokoľvek, vždy môže A potom zahrať tak, že vytvorí kritickú pozíciu $(n,n,0)$ alebo $(0,n,n)$.

3.28. Borisov ťah bol zlý. Správny ťah bol $(6,4,1) \xrightarrow{B} (5,4,1)$. Pozícia (5,4,1) je kritická. Nech z nej A zahrá akokoľvek, vždy môže ťahať do kritickej pozície (3,2,1) alebo do kritickej pozície „dve kopy rovnaké, tretia prázdna".

3.29. Keby bol na prvý Ankin ťah odpovedal Boris podľa 3.27, bola by Anka prehrala. Mala hrať $(6,5,1) \xrightarrow{A} (4,5,1)$.

3.30. Sú to pozície $(2m + 1, 2m, 1)$ a $(n,n,0)$ a ich permutácie.

3.31. Okrem pozícií uvedených v 3.30 sú to pozície $(4m + 2, 4m, 2)$, $(4m + 3, 4m + 1, 2)$ a ich permutácie.

3.32. Okrem pozícií uvedených v 3.31 sú to pozície $(8m + 3, 8m, 3)$, $(8m + 2, 8m + 1, 3)$, $(8m + 7, 8m + 4, 3)$, $(8m + 6, 8m + 5, 3)$ a ich permutácie.

3.33. V každom riadku každého prípadu je párny počet bodiek: buď žiadna alebo dve.

3.34. Platí $72 = 64 + 8$, $11 = 8 + 4 + 1$. Teda $x = 64 + 4 + 1 = 69$

b) Platí

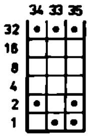
$1983 = 1024 + 512 + 256 + 128 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1,$

$713 = 512 + 128 + 64 + 8 + 1.$

Teda $x = 1024 + 256 + 64 + 32 + 16 + 4 + 2 = 1398.$

3.35. a) Riešenie je na obr. 27. V riadku „32" sú tri bodky. Odtiaľto treba jednu bodku odstrániť. To značí, že z jed-

nej kopy (hociktorej) zoberieme 32 kameňov. Vznikne pozícia (2,33,35) alebo (34,1,35), alebo (34,33,3).
b) Existuje jediný víťazný ťah (17,9,5) → (12,9,5).
c) Existuje jediný víťazný ťah (35,49,17) → (32,49,17).
d) Niet víťazného ťahu, pozícia je kritická.



Obr. 27

4.1. Pokladník získa dva *c*-groše.

4.2. Pokladník získa tri *d*-groše.

4.3. Pokladník kupujúcemu Bilandčanovi vydá jeden *a*-groš, jeden *b*-groš a jeden *c*-groš.

4.4. Zaplatíme jedným *f*-grošom, jedným *e*-grošom a jedným *b*-grošom.

4.5. I ○ ○I ○, I ○ ○ ○I ○ ○ ○, I ○IIIII ○III, II ○ ○ ○III ○ ○I ○I ○.

4.6. I ○I ○I ○.

4.7. I ○I ○ ○.

4.8. 7_{X}, 12_{X}, 31_{X}, 83_{X}.

4.9. $10101101100110_{\mathrm{II}}$, 1111110010_{II}, 11010110_{II}, $11000101011_{\mathrm{II}}$

4.10. 13_{X}, 16_{X}, 46_{X}, 905_{X}.

4.11. 22121_{III}, 101220111_{III}.

4.12. $10011010100_{\mathrm{II}}$, 1200210_{III}.

4.13. 27_{X}, 150_{X}.

4.14. 111100000_{II}.

4.15. 45_{X}.

4.16. 220_{IX}.

4.17. 110100_{II}.

4.18. 1010_{II}.

4.19. 101110111_{II}.

4.20. 111_{II}.

5.1. 2. trasu.

5.2. I. trasu.

5.3. Pozri ďalší text.

5.4.

$$M_A = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ -1 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \qquad M_B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

výplatná matica hráča A výplatná matica hráča B

5.5.

$$\begin{array}{lcc} & & \text{min} \\ M_A = & \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ -1 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} -5 \\ -1 \\ -3 \end{array} \\ \text{max} & \begin{array}{cc} -1 & \;\;1 \end{array} & \end{array}$$

A si vyberie 2. riadok, B 1. stĺpec, A prehrá 1 Kčs.

5.6. a)

$$\begin{array}{lcc} & & \text{min} \\ M_A = & \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} -1 \\ -3 \\ -3 \end{array} \\ \text{max} & \begin{array}{cc} -1 & \;\;3 \end{array} & \end{array} \qquad M_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

A si vyberie 1. riadok, B 1. stĺpec.

b)

$$M_A = \begin{array}{cc} & \text{min} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} -1 \\ -1 \\ -3 \end{array} \\ \begin{array}{cc} \text{max} \quad 1 & 1 \end{array} & \end{array} \qquad M_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Neexistuje dvojica čistých stratégií, pri ktorých by hráč A i B „vytrvali". Čítaj další text.

5.7. Úloha vyriešená v ďalšom texte.

5.8. Znovu 1, 2, 4.

5.9. 1, 2, 3, 4, 5.

5.10. Minimum maxím je 1, maximum miním —1.

6.1. 5250 dolárov.

6.2. —2062,5 doláru. Billy zarobí 2062,5 doláru.

6.3. a) 4000 dolárov,
b) 3111,1 doláru,
c) 3466,6 doláru,
d) $\dfrac{5a + b}{3a + 3b} . 4000$ dolárov.

6.4. a) $\dfrac{5a + 4b}{5a + 5b} . 4000.$

b) $\dfrac{10a + 5b}{a + b} . 500.$

6.5. Nič, zárobok šerifa sa nezmení.

6.6. Zárobok šerifa bude $\dfrac{15\,000}{17}(1 - p_3)$ za týždeň.

6.7. Šerif musí voliť 3. variantu stráženia bánk.
Billy musí vykrádať 1. banku s pravdepodobnosťou p, kde $1/3 \leqq p \leqq 4/5$.

6.8. Anička má vždy hádať, že Boris má v ruke 3 guličky. Takto vyhrá priemerne 1 guličku na jednu hru.

6.9. $$\frac{1}{s_n} + \frac{1}{2s_n} + \ldots + \frac{1}{ns_n} = \frac{1}{s_n}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) = 1$$

6.10. Boris má dávať do klobúka i guličiek s pravdepodobnosťou $\frac{1}{iS_n}$, teda „podobne“ ako Anička.

6.11. Označme $t_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2}$.

Potom Boris i Anička majú voliť zmiešanú stratégiu

$$(p_1, p_2, \ldots, p_n) = \left(\frac{1}{t_n}, \frac{1}{4t_n}, \frac{1}{9t_n}, \ldots, \frac{1}{n^2t_n}\right).$$

6.12. Hodnota hry je $\frac{1}{t_n}$.

$$t_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)\,n} = 1 + \frac{n-1}{n} < 2.$$ (rovnosť predposledných výrazov sa dokáže indukciou podľa n).

Teda $\frac{1}{t_n} > \frac{1}{2}$.

Seznam dosud vydaných svazků edice ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ v nakladatelství Mladá fronta

---

1. *František Hradecký - Milan Koman - Jan Vyšín:* Několik úloh z geometrie jednoduchých těles, 1961, 1963 a 1977
2. *Jiří Sedláček:* Co víme o přirozených číslech, 1961, 1965 a 1976
3. *Jaroslav Šedivý:* Shodná zobrazení v konstruktivních úlohách, 1962
4. *Miroslav Šisler - Jiří Jarník:* O funkcích, 1962 a 1963
5. *František Veselý:* O nerovnostech, 1963
6. *Rudolf Výborný:* Matematická indukce, 1963 a 1966
7. *Jaroslav Šedivý:* O podobnosti v geometrii, 1963 a 1967
8. *Jiří Váňa:* O rovnicích s parametry, 1964 a 1970
9. *Jan Vyšín:* Knvoexní útvary, 1964
10. *Jiří Sedláček:* Faktoriály a kombinační čísla, 1964
11. *Josef Holubář:* Geometrická místa bodů v prostoru, 1965
12. *Karel Havlíček:* Prostory o čtyřech a více rozměrech, 1965
13. *Miroslav Šisler - Josef Andrys:* O řešení algebraických rovnic, 1966
14. *František Veselý:* O dělitelnosti čísel celých, 1966
15. *Milan Koman:* Jak vyšetřujeme geometrická místa metodou souřadnic, 1966
16. *Stanislav Horák:* Kružnice, 1966
17. *Jaromír Hroník:* Úlohy o maximech a minimech funkcí, 1967
18. *Karel Havlíček:* Analytická geometrie a nerovnosti, 1967
19. *Jiří Jarník:* Komplexní čísla a funkce, 1967

20. *Bruno Budinský - Stanislav Šmakal:* Goniometrické funkce, 1968
21. *Alois Apfelbeck:* Kongruence, 1968
22. *Tibor Šalát:* Dokonalé a spriatelené čísla, 1969
23. *Jaroslav Morávek - Milan Vlach:* Oddělitelnost množin, 1969
24. *Ján Gatial - Milan Hejný:* Stavba Lobačevského planimetrie, 1969
25. *Leo Bukovský - Igor Kluvánek:* Dirichletov princíp, 1970
26. *Karel Hruša:* Polynomy v moderní algebře, 1970
27. *Stanislav Horák:* Mnohostěny, 1970
28. *Bruno Budinský - Stanislav Šmakal:* Vektory v geometrii, 1971
29. *František Zítek:* Vytvořující funkce, 1972
30. *Milan Koman - Jan Vyšín:* Malý výlet do moderní matematiky, 1972 a 1974
31. *Oldřich Odvárko:* Booleova algebra, 1973
32. *Jan Vyšín - Jitka Kučerová:* Druhý výlet do moderní matematiky, 1973
33. *Jaroslav Morávek:* O dynamickém programování, 1973
34. *Ladislav Rieger:* O grupách, 1974
35. *Alois Kufner:* Co asi nevíte o vzdálenosti, 1974
36. *Ján Černý:* O aplikáciach matematiky, 1976
37. *Beloslav Riečan - Zdena Riečanová:* O pravdepodobnosti, 1976
38. *Juraj Bosák:* Latinské štvorce, 1976
39. *Alois Kufner:* Nerovnosti a odhady, 1975
40. *Antonín Vrba:* Princip matematické indukce, 1977
41. *Bohdan Zelinka:* Rovinné grafy, 1977
42. *Ladislav Beran:* Uspořádané množiny, 1978
43. *Jiří Jarník:* Posloupnosti a řady, 1979
44. *Bohdan Zelinka:* Matematika hrou i vážně, 1979
45. *Antonín Vrba:* Kombinatorika, 1980

46. *Jaroslav Šedivý:* Shodnost a podobnost v konstrukčních úlohách, 1980
47. *Arnošt Niederle:* Zajímavé dvojice trojúhelníků, 1980
48. *František Veselý:* O nerovnostech a nerovnicích, 1982
49. *Pavel Vít:* Řetězové zlomky, 1982
50. *Adam Plocki:* O náhodě a pravděpodobnosti, 1982
51. *N. B. Vasiljev - V. L. Gutenmacher:* Přímky a křivky, 1982
52. *Alois Kufner:* Symetrické funkce, 1982

OBSAH

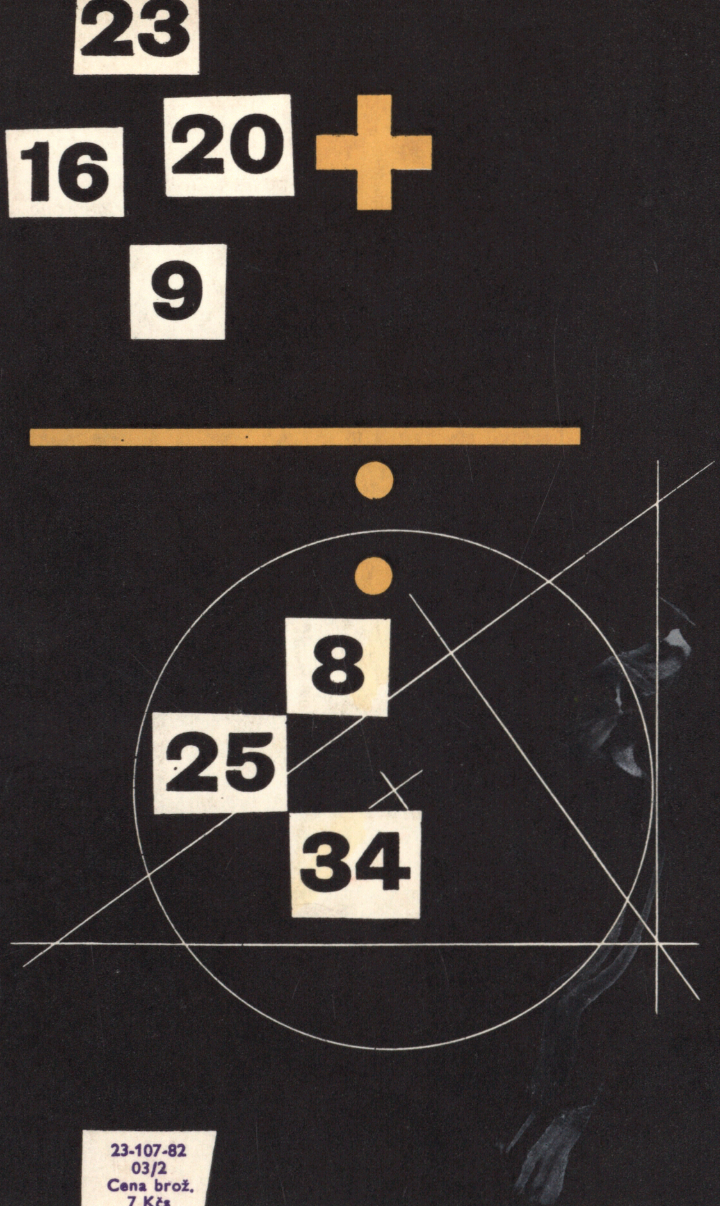
ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

JÁN GATIAL - TOMÁŠ HECHT - MILAN HEJNÝ

HRY takmer matematické

Pro účastníky matematické olympiády
vydává ÚV matematické olympiády
v nakladatelství Mladá fronta
Řídí akademik Josef Novák
K tisku připravil Vladimír Doležal
Obálku navrhl Jiří Příbramský
Odpovědná redaktorka Libuše Rousková
Technický redaktor Vladimír Vácha
Publikace číslo 4515
Edice Škola mladých matematiků, svazek 53
Vytiskl MÍR, novinářské závody, n. p.,
závod 1, Praha 1, Václavské nám. 15
5,48 AA. 5,98 VA. 144 stran
Náklad 6000 výtisků. První vydání
Praha 1982. 508/21/82,5

23-107-82 03/2 Cena brož. výt. 7 Kčs



23-107-82
03/2
Cena brož.
7 Kčs