Symetrické funkce

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

SYMETRICKÉ FUNKCE

52

Vydal ÚV matematické olympiády v nakladatelství Mladá fronta

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

ALOIS KUFNER

Symetrické funkce

PRAHA 1982
VYDAL ÚV MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY
V NAKLADATELSTVÍ MLADÁ FRONTA

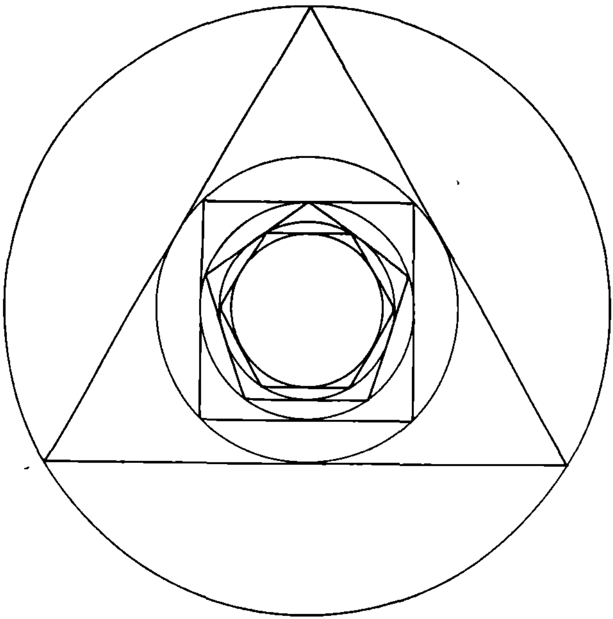
Recenzovali dr. Jaroslav Morávek, CSc., a dr. Josef Kubát

PŘEDMLUVA

Symetrie (z řečtiny) — souměrnost: pravidelné seskupení předmětů nebo jejich částí podle střední osy. Symetrie se objevuje v přírodě jako důsledek jejích zákonitostí a je základním schématem stavby živočišného nebo rostlinného těla; vývojově nižší živočichové, např. prvoci, houby, jsou nesouměrní, asymetričtí. Symetrie se projevuje i v umění: je dodržována klasicisujícími směry a popírána směry romantickými; ve výtvarném umění tvoří asymetrie v některých obdobích výrazový prostředek jako reakci na přísný klasický řád, uplatňuje se i v architektuře. Asymetrie zde vyjadřuje vždy jisté napětí.

Vymezení pojmů symetrie a asymetrie v předcházejícím odstavci jsme převzali z *Příručního slovníku naučného*, který vyšel v Praze v letech 1962—1967; citujeme z hesla *symetrie* ve IV. dílu a z hesla *asymetrie* v I. dílu. Tento populární výklad pochopitelně nemůže obsah slov symetrie, symetrický postihnout ve vší úplnosti; to však čtenáři Školy mladých matematiků, který jistě velmi dobře zná např. geometrické aspekty symetrie (souměrnost podle přímky — osy, bodu — středu atp.), určitě vadit nebude.

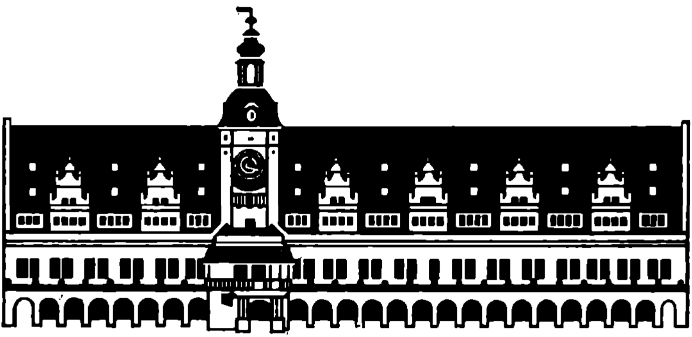
Lidstvo chápe pojem symetrie zcela intuitivně (snad proto se také dětem někdy plete N s И a S s Ƨ!) a v názorech na symetrii se velmi různí. Tak např. význačný německý (později americký) matematik Hermann Weyl, který žil v letech 1885—1955 a ovlivnil řadu odvětví matematiky, fyziky i filozofie, napsal kdysi, že „symetrie je idea, s jejíž pomocí se člověk v průběhu tisíciletí své historie pokoušel pochopit řád, krásu a dokonalost“,



zatímco řada spisovatelů byla jiného mínění: William Blake (1757—1827) hovořil o „strašné symetrii“, Victor Hugo (1802—1885) se domníval, že „nic tak nespoutává srdce jako symetrie“, a Thomasu Mannovi (1875—1955) je připisován výrok o šestibokém „zlořádu sněhových krystalů“.

A když už jsme u typických symetrických obrazců, jako jsou pravidelné n-úhelníky, zadejme si zde úlohu: Do dané kružnice vepíšeme rovnostranný trojúhelník, tomu vepíšeme kružnici, do té opět vepíšeme čtverec, tomu vepíšeme kružnici a do té vepíšeme pravidelný pětiúhelník a tak pokračujeme donekonečna. Dostáváme posloupnost soustředných kružnic (viz obrázek), jejichž poloměry se zmenšují, až se „smrsknou" v bod. Je to pravda?

V tomto svazku rozšíříme pojem symetrie na matematické objekty negeometrické povahy a ukážeme jejich použití v algebře a matematické analýze; většinou se budeme zabývat otázkami velmi elementárními. V prvních dvou kapitolách půjde o symetrické funkce dvou a tří proměnných a v kapitolách IV a V ukážeme, jak jich lze použít při řešení především algebraických problémů. Zde se autor podstatně inspiroval knížkou V. G. Boltjanského a N. J. Vilenkina *Simmetrija v algebre*, která vyšla v Moskvě v roce 1967; čtenář, kterého tato problematika zaujme, najde v uvedené publikaci mnoho dalšího materiálu. Kapitoly III a VI se zabývají symetrickými funkcemi n proměnných a jejich použi-



tím; tato část je poněkud náročnější a navazuje na 39. svazek Školy mladých matematiků *Nerovnosti a odhady*, který v textu citujeme jako [1].

V úvodním odstavci se hovořilo v souvislosti s asymetrií o napětí. Nám zde o žádné napětí nejde, a jako ilustraci toho, že i v asymetrii může být krása a řád, o němž hovořil Hermann Weyl, uveďme lipskou Starou radnici (viz obrázek): v jejím průčelí je věž umístěna sice asymetricky, ale tak, že dělí průčelí v poměru zlatého řezu.

Kapitola I.

SYMETRICKÉ FUNKCE DVOU PROMĚNNÝCH

Uvažujme kvadratickou rovnici

$$t^2 + at + b = 0 \tag{1}$$

o neznámé $t \in R$ a označme x, y *kořeny* této rovnice. Mezi kořeny x, y a koeficienty a, b rovnice (1) platí známé Viètovy vztahy

$$a = -(x + y), \qquad b = xy, \tag{2}$$

jež jsou důsledkem formule pro rozklad kvadratického trojčlenu na kořenové činitele:

$$t^2 + at + b = (t - x)(t - y).$$

Vztahy (2) vlastně říkají, že *koeficienty rovnice* (1) *jsou funkcemi kořenů této rovnice.* Nejsou to ovšem funkce jen tak ledajaké, mají — jak ihned uvidíme — jednu důležitou vlastnost. Zapišme tyto funkce trochu jinak: místo a pišme $-e_1$ a místo b pišme e_2; pak mají vzorce (2) tvar

$$e_1 = x + y, \qquad e_2 = xy. \tag{3}$$

Funkce e_1 a e_2 se nezmění, zaměníme-li *pořadí* proměnných:

$$e_1(x, y) = x + y = y + x = e_1(y, x),$$

$$e_2(x, y) = xy = yx = e_2(y, x).$$

Jsou příkladem *symetrických funkcí dvou proměnných*, tj. funkcí f proměnných x, y, u nichž nezáleží na pořadí proměnných:

$$f(x, y) = f(y, x) \quad \text{pro každé} \quad x, y \in R.$$

Je ihned vidět, že stejnou vlastnost symetrie — tj. nezávislosti na pořadí proměnných x a y — mají výrazy

$$x^2 + y^2, \qquad \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \qquad (x - 1)^3 + (y - 1)^3,$$

$$\sin 2xy, \qquad e^{x+y}, \qquad a^x + a^y,$$

a čtenář si jistě podobných výrazů (funkcí proměnných x a y) sestrojí ještě celou řadu. Je ovšem také ihned vidět, že mnoho funkcí tuto vlastnost symetrie nemá — např. funkce

$$x - y, \qquad \frac{x}{y}, \qquad \frac{1}{2}(x^2 - y^2),$$

$$(x - 1)^3 + (y + 1)^3, \qquad x^3 - 7xy \quad \text{atp.}$$

V dalším si všimneme podrobněji speciálních symetrických funkcí — tzv. symetrických polynomů.

I.1. Definice. Polynom $P(x, y)$ proměnných x, y (tj. funkci, která je součtem funkcí tvaru ax^ky^l, kde a je reálné číslo, k a l jsou celá nezáporná čísla) nazveme *symetrickým polynomem*, platí-li pro všechny dvojice reálných čísel x, y

$$P(x, y) = P(y, x). \tag{4}$$

I.2. Příklady. (a) Funkce $x + y$, xy, $x^2 + y^2$, $x^7 + 6x^3y^3 + y^7$, $(x - 1)^3 + (y - 1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + y^3 - 3y^2 + 3y - 1$ jsou symetrické polynomy.

(b) Funkce $\frac{1}{2}(x^2 - y^2)$, $(x - 1)^3 + (y + 1)^3 = x^3 + y^3 - 3x^2 + 3y^2 + 3x + 3y$, $x^3 - 7xy$ jsou sice polynomy, nejsou to však symetrické polynomy. [Dokažte to tím, že naleznete takovou dvojici čísel, x_0, y_0, že pro příslušný polynom $P(x, y)$ je $P(x_0, y_0) \neq P(y_0, x_0)$.]

Funkce e_1 a e_2 z formule (3) jsou symetrickými polynomy. Nazýváme je *elementárními symetrickými funkcemi* a hned uvidíme proč.

I.3. Příklady. (a) $x^2 + y^2$ je symetrický polynom. Dá se přitom vyjádřit pomocí elementárních symetrických funkcí e_1, e_2:

$$x^2 + y^2 = x^2 + 2xy + y^2 - 2xy = (x + y)^2 - 2xy = e_1^2 - 2e_2. \tag{5}$$

(b) Totéž platí pro symetrický polynom $x^3 + y^3$:

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - 3x^2y - 3xy^2 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = \\ &= e_1^3 - 3e_2e_1. \end{aligned} \tag{6}$$

(c) Totéž platí pro symetrický polynom $x^4 + y^4$:

$$\begin{aligned} x^4 + y^4 &= x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 2x^2y^2 = \\ &= (x^2 + y^2)^2 - 2(xy)^2; \end{aligned}$$

použijeme-li nyní vzorce (5), je

$$\begin{aligned} x^4 + y^4 &= (e_1^2 - 2e_2)^2 - 2e_2^2 = e_1^4 - 4e_1^2e_2 + \\ &+ 4e_2^2 - 2e_2^2 = e_1^4 - 4e_1^2e_2 + 2e_2^2. \end{aligned} \tag{7}$$

(d) Totéž platí pro symetrické polynomy $x^5y + xy^5$ a $x^3y^7 + x^7y^3$: použijeme-li formule (7), je

$$x^5y + xy^5 = xy(x^4 + y^4) = e_2(e_1^4 - 4e_1^2e_2 + 2e_2^2)$$

a

$$x^3y^7 + x^7y^3 = x^3y^3(x^4 + y^4) = e_2^3(e_1^4 - 4e_1^2e_2 + 2e_2^2).$$

I.4. Úloha. Označme pro přirozené číslo n

$$s_n = x^n + y^n. \tag{8}$$

Vyjádřete symetrické polynomy s_5, s_6, s_7, s_8, s_9 a s_{10} pomocí elementárních symetrických funkcí e_1, e_2.

Návod. Lze postupovat podobně jako v příkladu I.3 a vypočítat přímo s_5, pak s_6 atd. Lze však využít též *rekurentní formule*

$$s_n = e_1s_{n-1} - e_2s_{n-2}, \tag{9}$$

kterou čtenář jistě snadno dokáže.

Existuje však také přímé vyjádření symetrického polynomu s_n pomocí e_1, e_2, tzv. *Waringova formule:*

$$\frac{1}{n}(x^n + y^n) = \frac{1}{n}e_1^n - \frac{(n-2)!}{1!(n-2)!}e_1^{n-2}e_2 + \frac{(n-3)!}{2!(n-4)!}e_1^{n-4}e_2^2 - \frac{(n-4)!}{3!(n-6)!}e_1^{n-6}e_2^3 + \dots;\ ^{*)} \tag{10}$$

sčítají se výrazy tvaru $a_me_1^{n-2m}e_2^m$, kde m se mění od nuly

*) Edward WARING, anglický matematik, žil v letech 1734 až 1798 a formuli (10) dokázal v roce 1779. Zabýval se především teorií čísel a v roce 1770 vyslovil hypotézu (nazvanou pak po něm), že každé přirozené číslo n lze vyjádřit jako součet nejvýše $g(k)$ k-tých mocnin přirozených čísel, přičemž $g(k)$ nezávisí na n (je např. $g(2) = 4$, $g(3) = 9$). Waringovu hypotézu dokázal v roce 1909 David HILBERT.

do největšího celého čísla N takového, že $N \leqq \frac{1}{2} n$, a $a_m = (-1)^m . \dfrac{(n-m-1)!}{m!(n-2m)!}$ (připomeňme, že $0! = 1$).

Doporučujeme čtenáři, aby se pokusil formuli (10) dokázat matematickou indukcí.

Pro přehlednost si vyjádříme symetrické polynomy $s_n = x^n + y^n$ pro $n = 1, 2, \ldots, 10$ pomocí elementárních symetrických funkcí e_1, e_2 ve tvaru tabulky:

$$
\begin{aligned}
x + y &= e_1 \\
x^2 + y^2 &= e_1^2 - 2e_2 \\
x^3 + y^3 &= e_1^3 - 3e_1e_2 \\
x^4 + y^4 &= e_1^4 - 4e_1^2e_2 + 2e_2^2 \\
x^5 + y^5 &= e_1^5 - 5e_1^3e_2 + 5e_1e_2^2 \\
x^6 + y^6 &= e_1^6 - 6e_1^4e_2 + 9e_1^2e_2^2 - 2e_2^3 \\
x^7 + y^7 &= e_1^7 - 7e_1^5e_2 + 14e_1^3e_2^2 - 7e_1e_2^3 \\
x^8 + y^8 &= e_1^8 - 8e_1^6e_2 + 20e_1^4e_2^2 - 16e_1^2e_2^3 + 2e_2^4 \\
x^9 + y^9 &= e_1^9 - 9e_1^7e_2 + 27e_1^5e_2^2 - 30e_1^3e_2^3 + 9e_1e_2^4 \\
x^{10} + y^{10} &= e_1^{10} - 10e_1^8e_2 + 35e_1^6e_2^2 - 50e_1^4e_2^3 + 25e_1^2e_2^4 - 2e_2^5
\end{aligned}
$$

Tab. I.1

Na pravých stranách jsou vesměs výrazy v proměnných e_1, e_2, a to opět polynomy v těchto proměnných; podobně tomu bylo i v příkladu I.3 (d). To tedy znamená, že některé symetrické polynomy $P(x, y)$ lze vyjádřit jako polynomy $Q(e_1, e_2)$ v proměnných e_1, e_2, tj. jako součet funkcí tvaru $ae_1^ke_2^l$, kde a je reálné číslo, k a l jsou celá nezáporná čísla; máme pak

$$P(x, y) = Q(x + y, xy). \tag{11}$$

Vzniká nyní přirozená otázka, zda tuto vlastnost mají jen některé symetrické polynomy, či zda to platí pro všechny. A odpověď dává následující věta:

I.5. Věta. *Každý symetrický polynom v proměnných x, y lze vyjádřit jako polynom v proměnných $e_1 = x + y$, $e_2 = xy$.*

Důkaz je jednoduchý. Každý *symetrický* polynom $P(x, y)$ je tvořen sčítanci tvaru

$$ax^k y^k \quad \text{a} \quad b(x^m y^l + x^l y^m), \tag{12}$$

kde a, b jsou reálná čísla, k, l, m jsou nezáporná celá čísla, $l \neq m$. (Obsahuje-li totiž polynom $P(x, y)$ sčítanec $bx^m y^l$, musí — protože je symetrický — nutně obsahovat i sčítanec $bx^l y^m$.) Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $m > l$. Nyní je

$$ax^k y^k = a(xy)^k = ae_2^k$$

a

$$b(x^m y^l + x^l y^m) = bx^l y^l (x^{m-l} + y^{m-l}) = be_2^l s_{m-l}.$$

Protože podle formule (10) lze také s_{m-l} vyjádřit ve tvaru polynomu v e_1, e_2, jsou všechny výrazy tvaru (12) polynomy v e_1, e_2, a tedy také $P(x, y)$ je rovno polynomu $Q(e_1, e_2)$.

I.6. Příklad. Chceme-li symetrický polynom $P(x, y) = x^8 - 12x^6y^5 + x^3y^3 - 3x^2y^2 + 2x^2y^7 + y^8 - 12x^5y^6 + 2x^7y^2$ vyjádřit pomocí elementárních symetrických funkcí e_1, e_2, užijeme postup z důkazu věty I.5: Je

$$P(x, y) = (x^8 + y^8) - 12(x^6y^5 + x^5y^6) + 2(x^2y^7 + x^7y^2) + x^3y^3 - 3x^2y^2 = (x^8 + y^8) -$$

$$
\begin{aligned}
&- 12x^5y^5(x + y) + 2x^2y^2(x^5 + y^5) + x^3y^3 - \\
&- 3x^2y^2 = s_8 - 12e_2^5e_1 + 2e_2^2s_5 + e_2^3 - 3e_2^2 ;
\end{aligned}
$$

vyjádříme-li nyní s_8 a s_5 pomocí tabulky I.1, máme

$$
\begin{aligned}
P(x, y) &= (e_1^8 - 8e_1^6e_2 + 20e_1^4e_2^2 - 16e_1^2e_2^3 + 2e_4^2) - \\
&- 12e_2^5e_1 + 2e_2^2(e_1^5 - 5e_1^3e_2 + 5e_1e_2^2) + e_2^3 - 3e_2^2 = \\
&= e_1^8 - 8e_1^6e_2 + 2e_1^5e_2^2 + 20e_1^4e_2^2 - 10e_1^3e_2^3 - \\
&- 16e_1^2e_2^3 - 12e_1e_2^5 + 10e_1e_2^4 + 2e_2^4 + e_2^3 - 3e_2^2 = \\
&= Q(e_1, e_2) .
\end{aligned}
$$

I.7. Poznámka. Podle věty I.5. existuje ke každému symetrickému polynomu $P(x, y)$ polynom (obecně *nesymetrický* — viz příklad I.6!) $Q(e_1, e_2)$, takže platí vztah (11). Lze ukázat, že polynom $Q(e_1, e_2)$ je určen *jednoznačně*, tj. že pokud existuje ještě polynom $H(e_1, e_2)$ takový, že

$$P(x, y) = H(x + y, xy) ,$$

pak jsou polynomy Q a H sobě rovné. Důkaz tohoto tvrzení však provádět nebudeme.

Kapitola II.

SYMETRICKÉ FUNKCE TŘÍ PROMĚNNÝCH

Uvažujme kubickou rovnici

$$(1) \qquad t^3 + at^2 + bt + c = 0$$

a označme x, y, z *kořeny* této rovnice. Pak můžeme rovnici (1) zapsat též takto:

$$(2) \qquad (t - x)(t - y)(t - z) = 0 .$$

Roznásobíme-li dvojčleny na levé straně v (2) a porovnáme-li výsledek s levou stranou v (1), zjistíme, že *koeficienty* rovnice (1) — tj. čísla a, b, c — souvisejí s kořeny x, y, z takto:

$$a = -(x + y + z),$$
$$b = xy + yz + zx,$$
$$c = -xyz.$$

Zapišme tyto Viètovy formule ještě trochu jinak: místo a pišme $-e_1$, místo b pišme e_2 a místo c pišme $-e_3$. Pak je

$$(3) \qquad e_1 = x + y + z,$$
$$e_2 = xy + yz + zx,$$
$$e_3 = xyz.$$

Funkce e_1, e_2, e_3 tří proměnných x, y, z mají opět vlastnost *symetrie:* nezmění se, změníme-li jakkoli *pořadí* proměnných x, y, z. Budeme je — analogicky jako v případě dvou proměnných — nazývat *elementárními symetrickými funkcemi*.

II.1. Definice. Funkci f tří proměnných x, y, z nazveme *symetrickou funkcí*, nezmění-li se při jakékoliv změně pořadí proměnných, tj. platí-li

$$(4)\quad f(x, y, z) = f(x, z, y) = f(y, x, z) = f(y, z, x) = \\ = f(z, x, y) = f(z, y, x) \text{ pro všechna } x, y, z \in R.$$

Je-li funkce f polynomem (tj. součtem funkcí tvaru $ax^k y^l z^m$, kde a je reálné číslo, k, l a m jsou celá nezáporná čísla) a má-li vlastnost (4), nazveme ji *symetrickým polynomem*.

II.2. Příklady. (a) Funkce e_1, e_2, e_3 z (3) jsou symetrické funkce, a dokonce symetrické polynomy.

(b) Funkce $x^2 + y^2 + z^2$, $((e^x)^y)^z$, $\sin(x + y) + \sin(y + z) + \sin(z + x)$, $(x + y)(y + z)(z + x)$ jsou symetrické funkce.

(c) Funkce $xy + yz + zx^2$, xy^2z, $xy + yz$ jsou polynomy, ale nejsou symetrické (dokažte!).

(d) Výraz $x^2 + y^2 + z^2$ je dokonce symetrický polynom; dovedeme ho vyjádřit pomocí elementárních symetrických funkcí e_1, e_2, e_3:

$$(5)\quad x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2xy - 2yz - \\ - 2zx = e_1^2 - 2e_2.$$

(e) Totéž platí pro symetrický polynom $x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + y^2z + yz^2$: Je totiž

$$(6)\quad x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + y^2z + yz^2 = (xy + xz + \\ + yz)\,x + (xy + yz + xz)\,y + (xz + yz +$$

$$+ xy)z - 3xyz = (xy + yz + zx)(x + y + z) - 3xyz = e_1e_2 - 3e_3.$$

(f) Totéž platí pro symetrický polynom $x^3 + y^3 + z^3$:

$$x^3 + y^3 + z^3 = (x + y + z)^3 - 3(x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + y^2z + yz^2) - 6xyz;$$

užijeme-li nyní formule (6), je

$$x^3 + y^3 + z^3 = e_1^3 - 3(e_1e_2 - 3e_3) - 6e_3 = e_1^3 - 3e_1e_2 + 3e_3. \tag{7}$$

(g) Totéž platí pro symetrický polynom $x^2yz + xy^2z + xyz^2$:

$$x^2yz + xy^2z + xyz^2 = xyz(x + y + z) = e_1e_3. \tag{8}$$

(h) Totéž platí pro symetrický polynom $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2$:

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = (xy + yz + zx)^2 - 2(x^2yz + xy^2z + xyz^2) = e_2^2 - 2e_1e_3;$$

přitom jsme využili vzorce (8).

II.3. Úloha. Označme pro přirozené číslo n

$$s_n = x^n + y^n + z^n. \tag{9}$$

Ukažte, že tyto symetrické polynomy lze vyjádřit pomocí elementárních symetrických funkcí e_1, e_2, e_3.

Návod. V příkladech II.2(d) a (f) jsme přímým výpočtem našli vyjádření pro s_2 a s_3:

$$s_2 = e_1^2 - 2e_2,$$
$$s_3 = e_1^3 - 3e_1e_2 + 3e_3.$$

Metodou přímého výpočtu lze postupovat i dále a postupně vypočítat s_4, s_5, s_6 atd. Tak je např.

$$s_4 = e_1^4 - 4e_1^2e_2 + 2e_2^2 + 4e_1e_3;$$

tento postup však není nejlepší, výhodnější je použití *rekurentní formule*

$$(10) \qquad s_n = e_1s_{n-1} - e_2s_{n-2} + e_3s_{n-3}.$$

(Dokažte platnost této formule!)

II.4. Poznámka. Je-li $P(x, y, z)$ symetrický polynom tří proměnných, je výraz

$$H(x, y) = P(x, y, 0)$$

symetrický polynom *dvou* proměnných x, y. (Dokažte!) Položíme-li ve vzorcích (3) $z = 0$, bude

$$(11) \qquad \begin{aligned} e_1 &= x + y + 0 = x + y, \\ e_2 &= xy + y0 + 0x = xy, \\ e_3 &= xy0 = 0, \end{aligned}$$

a speciálně jsou tedy prvé dvě elementární symetrické funkce e_1, e_2 stejné jako v případě dvou proměnných. Dosadíme-li z (11) do (10), bude

$$s_n = e_1s_{n-1} - e_2s_{n-2},$$

a to není nic jiného než rekurentní formule (9) z kapitoly I (pro $z = 0$ je totiž $s_n = x^n + y^n + 0^n = x^n + y^n$).

Odtud je vidět, že řadu výsledků platných pro symetrické funkce dvou proměnných lze odvodit z výsledků pro symetrické funkce tří proměnných speciální volbou $z = 0$.

II.5. Waringova formule. V kap. I jsme uvedli formuli pro *přímé* vyjádření symetrických součtů $s_n = x^n + y^n$ pomocí elementárních symetrických funkcí e_1, e_2 — viz odst. I.4, formuli (10). Také pro součty $s_n = x^n + y^n + z^n$ platí taková formule:

$$\frac{1}{n}(x^n + y^n + z^n) = \frac{1}{n}e_1^n - \frac{(n-2)!}{(n-2)!\,1!\,0!}e_1^{n-2}e_2 + \frac{(n-3)!}{(n-3)!\,0!\,1!}e_1^{n-3}e_3 + \frac{(n-3)!}{(n-4)!\,2!\,0!}e_1^{n-4}e_2^2 - \frac{(n-4)!}{(n-5)!\,1!\,1!}e_1^{n-5}e_2e_3 + \ldots; \tag{12}$$

sčítají se výrazy tvaru

$$(-1)^{n-\alpha-\beta-\gamma}\frac{(\alpha+\beta+\gamma-1)!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}e_1^\alpha e_2^\beta e_3^\gamma, \tag{13}$$

přičemž se sčítá přes všechny trojice celých nezáporných čísel α, β, γ takových, že

$$\alpha + 2\beta + 3\gamma = n. \tag{14}$$

Doporučujeme čtenáři, aby se pokusil formuli (12) dokázat a aby ji porovnal ve smyslu předcházející poznámky s formulí (10) z kap. I.

II.6. Příklady. (a) Vyjádříme s_4 pomocí Waringovy formule (12). Pro $n = 4$ má rovnice

$$\alpha + 2\beta + 3\gamma = 4$$

(s neznámými α, β, γ z množiny všech celých nezáporných čísel) celkem čtyři řešení, takže na pravé straně (12) budou čtyři sčítance. Tato řešení a jim odpovídající koeficienty podle (13) vypadají takto:

1) $\alpha = 4, \beta = 0, \gamma = 0;\ (-1)^{4-4}.\dfrac{3!}{4!\,0!\,0!} = \dfrac{1}{4},$

2) $\alpha = 2, \beta = 1, \gamma = 0;\ (-1)^{4-3}\ \dfrac{2!}{2!\,1!\,0!} = -1,$

3) $\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = 1;\ (-1)^{4-2}.\dfrac{1!}{1!\,0!\,1!} = 1,$

4) $\alpha = 0, \beta = 2, \gamma = 0;\ (-1)^{4-2}\ \dfrac{1!}{0!\,2!\,0!} = \dfrac{1}{2}.$

Podle (12) je tedy

$$\frac{1}{4}s_4 = \frac{1}{4}e_1^4 - e_1^2e_2 + e_1e_3 + \frac{1}{2}e_2^2$$

(porovnejte s formulí pro s_4 v úloze II.3).

(b) Vyjádříme s_5. Rovnice

$$\alpha + 2\beta + 3\gamma = 5$$

α	β	γ	koeficient
5	0	0	$\frac{1}{5}$
3	1	0	-1
2	0	1	1
1	2	0	1
0	1	1	-1

Tab. II.1

má pět řešení, která jsme uspořádali spolu s koeficienty podle (13) do tabulky II. 1. Z (12) tedy plyne, že

$$x^5 + y^5 + z^5 = e_1^5 - 5e_1^3e_2 + 5e_1^2e_3 + 5e_1e_2^2 - 5e_2e_3.$$

Všechny příklady, které jsme v předcházejících odstavcích uvedli, ukazují, že některé symetrické polynomy $P(x, y, z)$ lze vyjádřit pomocí polynomů $Q(e_1, e_2, e_3)$ v proměnných e_1, e_2, e_3, tj. jako součet funkcí tvaru $ae_1^ke_2^le_3^m$, kde a je reálné číslo, k, l a m jsou celá nezáporná čísla; máme pak

$$P(x, y, z) = Q(x + y + z, xy + yz + zx, xyz). \tag{15}$$

A podobně jako u symetrických polynomů dvou proměnných mají tuto vlastnost všechny symetrické polynomy v proměnných x, y, z. Platí totiž následující analogie věty I.5:

II.7. Věta. *Každý symetrický polynom v proměnných x, y, z lze vyjádřit jako polynom v proměnných $e_1 = x + y + z$, $e_2 = xy + yz + zx$, $e_3 = xyz$.*

Důkaz je opět myšlenkově jednoduchý, je ovšem poněkud pracnější než v případě dvou proměnných. Naznačíme zde postup, z něhož je patrno, jak se polynom Q z (15) k symetrickému polynomu P sestrojí, a podrobné ověření přenecháme čtenáři.

Protože polynom $P(x, y, z)$ je symetrický, obsahuje s členem $x^ky^lz^m$ též všechny členy vzniklé záměnou proměnných; obsahuje proto násobek výrazu

$$S_{k,l,m} = x^ky^lz^m + x^ky^mz^l + x^ly^kz^m + x^ly^mz^k + x^my^kz^l + x^my^lz^k. \tag{16}$$

Nechť je třeba m nejmenší z čísel k, l, m, tj. nechť je

$$k \geqq m,\ l \geqq m.$$

Pak je

$$(17) \qquad S_{k,l,m} = (xyz)^m (x^{k-m}y^{l-m} + x^{k-m}z^{l-m} + \\ + x^{l-m}y^{k-m} + x^{l-m}z^{k-m} + y^{k-m}z^{l-m} + y^{l-m}z^{k-m}) = \\ = (xyz)^m S_{k-m,\, l-m,\, 0}.$$

Dále je pro libovolná celá nezáporná čísla α, β

$$(18) \qquad S_{\alpha,\beta,0} = s_\alpha s_\beta - s_{\alpha+\beta},$$

kde s_γ jsou součty z úlohy II.3, tj. $s_\gamma = x^\gamma + y^\gamma + z^\gamma$ (pro $\gamma = 0$ klademe $s_0 = 3$). (Dokažte platnost formule (18) jako cvičení!)

Nakonec je tedy

$$(19) \qquad S_{k,l,m} = (xyz)^m (s_{k-m}\, s_{l-m} - s_{k+l-2m}) = \\ = e_3^m (s_{k-m}\, s_{l-m} - s_{k+l-2m}),$$

a protože podle úlohy II.3. lze součty s_γ vyjádřit jako polynomy v proměnných e_1, e_2, e_3, platí totéž i o výrazech $S_{k,l,m}$.

Tím však je věta dokázána, neboť symetrický polynom $P(x, y, z)$ je součtem výrazů tvaru $aS_{k,l,m}$, kde a je reálné číslo.

II.8. Příklady. (a) Vyjádříme pomocí elementárních symetrických funkcí polynom

$$P(x, y, z) = (x + y)(x + z)(y + z),$$

který je *symetrický*. Použijeme-li označení z důkazu věty II.7, zjistíme po roznásobení, že

$$P(x, y, z) = S_{2,1,0} + 2xyz = s_2 s_1 - s_3 + 2e_3 =$$

$$= (e_1^2 - 2e_2)\, e_1 - (e_1^3 - 3e_1e_2 + 3e_3) + 2e_3 =$$
$$= e_1e_2 - e_3 .$$

[Použili jsme vzorců (18), (5) a (7).]

(b) Pro symetrický polynom

$$P(x, y, z) = (x + y - z)\,(x - y + z)\,(-x + y + z)$$

je po roznásobení

$$P(x, y, z) = -(x^3 + y^3 + z^3) + S_{2,1,0} - 2xyz =$$

(20) $$= -s_3 + s_2s_1 - s_3 - 2e_3 =$$
$$= -2(e_1^3 - 3e_1e_2 + 3e_3) +$$
$$+ (e_1^2 - 2e_2)\, e_1 - 2e_3 = -e_1^3 + 4e_1e_2 - 8e_3 .$$

(c) Určíme obsah p trojúhelníka, známe-li jeho obvod, součet čtverců stran a součet třetích mocnin stran: Označíme-li délky stran trojúhelníka písmeny x, y, z, známe tedy s_1, s_2 a s_3. Podle Heronova vzorce je

$$p = \sqrt{\frac{s_1}{2}\left(\frac{s_1}{2} - x\right)\left(\frac{s_1}{2} - y\right)\left(\frac{s_1}{2} - z\right)} =$$
$$= \sqrt{\frac{s_1}{2} \cdot \frac{(-x + y + z)}{2} \cdot \frac{(x - y + z)}{2} \cdot \frac{(x + y - z)}{2}}\ ;$$

využijeme-li předcházejícího příkladu, je podle formule (20) (2. řádek)

(21) $$p = \sqrt{\frac{s_1}{16}\,(s_2s_1 - 2s_3 - 2e_3)} .$$

Zbývá ještě vyjádřit e_3 pomocí s_1, s_2 a s_3. Ze vzorců

$$s_1 = e_1,$$

$$s_2 = e_1^2 - 2e_2,$$

$$s_3 = e_1^3 - 3e_1e_2 + 3e_3$$

zjistíme, že

$$e_3 = \frac{1}{6}s_1^3 - \frac{1}{2}s_1s_2 + \frac{1}{3}s_3,$$

a z (21) pak plyne

$$p = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{6s_1^2s_2 - 8s_1s_3 - s_1^4}{3}}.$$

II.9. Poznámka. Na závěr této kapitoly dodejme, že polynom $Q(e_1, e_2, e_3)$, který odpovídá symetrickému polynomu $P(x, y, z)$ tak, aby platil vztah (15), a jehož existence je zaručena větou II.7, je určen *jednoznačně*. Viz též poznámku I.7.

Kapitola III.

SYMETRICKÉ FUNKCE n PROMĚNNÝCH

Zobecníme nyní úvahy z obou předcházejících kapitol. Uvažujme algebraickou rovnici n-tého stupně (v proměnné t)

$$(1) \qquad t^n + a_1 t^{n-1} + a_2 t^{n-2} + \ldots + a_{n-1} t + a_n = 0$$

a označme $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *kořeny* této rovnice. Pak můžeme rovnici (1) zapsat též takto:

$$(2) \qquad (t - x_1)(t - x_2) \ldots (t - x_n) = 0 .$$

Provedeme-li násobení naznačené na levé straně v (2) a porovnáme-li výsledek s levou stranou v (1), zjistíme, že *koeficienty* rovnice (1) — tj. čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — souvisejí s kořeny $x_1, x_2, \ldots, x_n$ takto:

$$\begin{aligned}
a_1 &= -(x_1 + x_2 + \ldots + x_n), \\
a_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_1x_n + x_2x_3 + \\
&\quad + \ldots + x_2x_n + \ldots + x_{n-1}x_n, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{n-1} &= (-1)^{n-1}(x_1x_2x_3 \ldots x_{n-1} + x_1x_2 \ldots x_{n-2}x_n + \\
&\quad + \ldots + x_2x_3x_4 \ldots x_n), \\
a_n &= (-1)^n x_1x_2x_3 \ldots x_n .
\end{aligned}$$

Zavedeme-li funkce $e_k = e_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) formulí

$$(3) \qquad e_k = (-1)^k a_k ,$$

bude tedy

$$
\begin{aligned}
(4)\quad e_1 &= x_1 + x_2 + \ldots + x_n, \\
e_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n, \\
e_3 &= x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
e_{n-1} &= x_1x_2x_3 \ldots x_{n-1} + \ldots + x_2x_3x_4 \ldots x_n, \\
e_n &= x_1x_2x_3 \ldots x_n.
\end{aligned}
$$

Zdůrazněme, že k-tá funkce e_k je *polynom* tvořený součtem všech možných součinů tvaru

$$x_{i_1}x_{i_2} \ldots x_{i_k}, \text{ kde } 1 \leqq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqq n.$$

Odtud plynou dvě důležité skutečnosti:

(a) *Počet sčítanců v k-té funkci e_k je roven číslu*

$$\binom{n}{k}.$$

(b) *Funkce e_k mají vlastnost symetrie: nezmění se, změníme-li jakkoliv pořadí proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$.*

Proto je budeme nazývat *elementárními symetrickými funkcemi.*

III.1. Definice. Funkci $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n proměnných nazveme *symetrickou funkcí,* nezmění-li se při jakékoliv změně pořadí proměnných, tj. platí-li

$$(5)\qquad f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n})$$

pro jakoukoliv permutaci $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ čísel 1, 2, ..., n.

Je-li funkce f polynomem (tj. součtem funkcí tvaru

$$ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n},$$

kde a je reálné číslo, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ jsou celá nezáporná čísla), a má-li vlastnost (5), nazveme ji *symetrickým polynomem.*

III.2. Příklady. (a) Funkce e_k z (4) jsou symetrické funkce, a to symetrické polynomy.

(b) Funkce $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ je symetrický polynom; dovedeme ji vyjádřit pomocí elementárních symetrických funkcí e_k, neboť

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = e_1^2 - 2e_2 \tag{6}$$

(dokažte!).

(c) Pro nezáporné celé číslo N označme

$$s_N = x_1^N + x_2^N + \dots + x_n^N; \tag{7}$$

je to symetrický polynom a platí

$$\begin{aligned} s_0 &= n && \text{(podle definice)},\\ s_1 &= e_1 && \text{(podle definice)},\\ s_2 &= e_1^2 - 2e_2 && \text{(podle formule (6))}. \end{aligned}$$

Obecně platí *Waringova formule*

$$\frac{1}{N} s_N = \sum (-1)^{N-\alpha_1-\alpha_2-\dots-\alpha_n} \cdot \tag{8}$$

$$\cdot \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n - 1)!}{\alpha_1!\, \alpha_2! \dots \alpha_n!} \cdot e_1^{\alpha_1} e_2^{\alpha_2} \dots e_n^{\alpha_n},$$

přičemž se sčítá přes všechny n-tice celých nezáporných čísel $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ takových, že

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \dots + n\alpha_n = N. \tag{9}$$

III.3. Úloha. Pokuste se dokázat platnost formule (8). Využijte k tomu následujícího *rekurentního vztahu* mezi symetrickými součty s_N:

$$s_N = e_1 s_{N-1} - e_2 s_{N-2} + e_3 s_{N-3} - \ldots + \\ + (-1)^{N-1} e_N s_0 \tag{10}$$

(přitom považujeme za rovné nule ty sčítance tvaru $(-1)^{k-1} e_k s_{N-k}$, u nichž je $k > n$).

Čtenáře nyní jistě nepřekvapí, vyslovíme-li (bez důkazu) větu analogickou větám I.5. a II.7.

III.4. Věta. *Ke každému symetrickému polynomu P v proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ existuje polynom Q v proměnných $e_1, e_2, \ldots, e_n$ tak, že platí*

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = Q(e_1, e_2, \ldots, e_n). \tag{11}$$

Polynom Q je polynomem P určen jednoznačně.

III.5. Příklad. Najdeme polynom Q z věty III.4 k symetrickému polynomu

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + \\ + \ldots + (x_{n-1} - x_n)^2 \tag{12}$$

(jedná se o součet všech výrazů tvaru $(x_i - x_j)^2$, kde $1 \leqq i < j \leqq n$).

Provedeme-li naznačené umocnění, zjistíme, že

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (n-1)(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) - \\ - 2e_2 = (n-1)s_2 - 2e_2 = (n-1)e_1^2 - 2ne_2 \tag{13}$$

(použili jsme vzorce (6)). Je tedy

$$Q(e_1, e_2, \ldots, e_n) = (n-1)e_1^2 - 2ne_2.$$

III.6. Příklad. Vztah (13) má řadu zajímavých důsledků: Ze vzorce (12) je zřejmé, že $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqq \geqq 0$, a tedy je také $(n - 1)\, e_1^2 - 2ne_2 \geqq 0$ čili

$$(n - 1)\, e_1^2 \geqq 2ne_2. \tag{14}$$

Protože ze vzorce (6) plyne, že $2e_2 = e_1^2 - s_2$, dostáváme z (14) nerovnost

$$e_1^2 \leqq ns_2$$

čili (protože $e_1 = s_1$)

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 \leqq n(x_1^2 + x_2^2 + \\ + \ldots + x_n^2). \tag{15}$$

[Poslední nerovnost byla jako speciální případ Cauchyho nerovnosti odvozena např. v [1], str. 51, formule (II.8).]

Vzorec (14) můžeme upravit nejrůznějším způsobem. Dosadíme-li např. $e_1^2 = 2e_2 + s_2$ — viz (6), bude

$$(n - 1)\,(2e_2 + s_2) \geqq 2ne_2 \quad \text{čili} \quad e_2 \leqq \frac{n - 1}{2}\, s_2,$$

čili

$$x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n \leqq \\ \leqq \frac{n - 1}{2} \cdot (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2). \tag{16}$$

Všimneme si nyní několika dalších vlastností elementárních symetrických funkcí.

III.7. Úloha. Nechť jsou všechna čísla x_k různá od nuly $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Ze vzorce (4) plyne, že

$$e_{n-1} = \frac{x_1x_2x_3 \ldots x_n}{x_n} + \frac{x_1x_2x_3 \ldots x_n}{x_{n-1}} + \ldots +$$

$$+ \frac{x_1 x_2 x_3 \dots x_n}{x_1} =$$

$$x_1 x_2 x_3 \dots x_n \cdot \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}\right)$$

čili

$$e_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n) =$$
$$= e_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \,.\, e_1\left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_n}\right).$$

Dokažte, že pro $i = 1, 2, \dots, n - 1$ platí

$$(17) \qquad e_{n-i}(x_1, x_2, \dots, x_n) =$$
$$= e_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \,.\, e_i\left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_n}\right).$$

Návod. Vztah (17) lze snadno dokázat *přímo* — stačí si uvědomit, že $e_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 x_2 \dots x_n$ a že $e_i\left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_n}\right)$ je součet všech výrazů tvaru

$$\frac{1}{x_{k_1} x_{k_2} \dots x_{k_i}}, \text{ kde } 1 \leqq k_1 < k_2 < \dots < k_i \leqq n.$$

Lze však využít též souvislosti mezi funkcemi e_i a kořeny jistého polynomu: Ze vztahů (1) a (3) plyne, že čísla $x_1, x_2, \dots, x_n$ jsou kořeny polynomu P_n v proměnné t, daného vzorcem

$$(18) \qquad P_n(t) = t^n - e_1 t^{n-1} + e_2 t^{n-2} - \dots +$$
$$+ (-1)^{n-1} e_{n-1} t + (-1)^n e_n;$$

zde je $e_i = e_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Polynom Q_n v proměnné s, daný vzorcem

$$Q_n(s) = s^n P_n\left(\frac{1}{s}\right),$$

má tudíž kořeny $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_n}$ a jeho koeficienty jsou (se střídajícím se znaménkem) symetrické funkce

$$e_i\left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_n}\right) \quad \text{(s jistým násobkem!).}$$

Současně však jsou koeficienty polynomu Q_n určeny koeficienty polynomu P_n, a porovnáním dostaneme vztahy (17). [Pozor: u polynomu P_n je podstatné, že koeficient u t^n je roven jedné; proto je třeba příslušně upravit i polynom Q_n!]

III.8. Příklad. Dokážeme toto tvrzení: *Funkční hodnoty funkce $e_i = e_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ jsou kladné, právě když všechna čísla x_i jsou kladná* ($i = 1, 2, \ldots, n$).

(a) Je-li $x_i > 0$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$, plyne ihned ze vzorců (4), že také $e_i > 0$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$.

(b) Nechť je $e_i > 0$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$. Čísla x_i jsou kořeny rovnice

$$\text{(19)} \qquad t^n - e_1 t^{n-1} + e_2 t^{n-2} - \ldots + \\ + (-1)^{n-1} e_{n-1} t + (-1)^n e_n = 0;$$

vynásobíme-li tuto rovnici číslem $(-1)^n$, můžeme psát

$$(-t)^n + e_1(-t)^{n-1} + e_2(-t)^{n-2} + \ldots + \\ + e_{n-1}(-t) + e_n = 0$$

neboli po substituci $s = -t$

$$\text{(20)} \qquad s^n + e_1 s^{n-1} + e_2 s^{n-2} + \ldots + e_{n-1} s + e_n = 0.$$

Tato poslední rovnice má kořeny $y_i = —x_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$). Žádný z těchto kořenů nemůže být nezáporný, neboť po dosazení nezáporného čísla s do levé strany v (20) dostaneme kladné číslo a nikoliv nulu (všechna e_i jsou kladná). Musí tedy být $y_i < 0$ čili $—x_i < 0$, čili $x_i > 0$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$.

III.9. Příklad. Nechť jsou čísla x_i kladná. Pak platí

(21) $e_{k-1} . e_{k+1} — e_k^2 < 0$ pro $k = 1, 2, \ldots, n — 1$;

zde klademe

(22) $$e_0(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1 .$$

Později (viz úlohu VI.4) ukážeme, že vztah (21) je důsledkem obecnější nerovnosti; proto zde pouze naznačíme myšlenku přímého důkazu nerovnosti (21): Stačí si uvědomit, že typickým členem ve výrazu $e_{k-1}e_{k+1} — e_k^2$ bude výraz

(23) $$x_1^2x_2^2 \ldots x_{k-i}^2x_{k-i+1}x_{k-i+2} \ldots x_{k+i} \quad (i < k) .$$

Tento výraz vznikne jednak ze součinu $e_{k-1}e_{k+1}$, jednak ze součinu $e_k . e_k = e_k^2$. V prvním případě se bude na levé straně vzorce (21) vyskytovat $\binom{2i}{i — 1}$ krát, neboť z $2i$ „volných" činitelů $x_{k-i+1}, x_{k-i+2}, \ldots, x_{k+i}$ lze $i — 1$ činitelů volit z e_{k-1} a zbývající pak patří do e_{k+1}; takových možností máme $\binom{2i}{i — 1}$. Ve druhém případě se bude výraz (23) vyskytovat na levé straně vzorce (21) $\binom{2i}{i}$ krát (a bude mít znaménko minus), neboť i činitelů z $2i$ posledních lze volit z prvého e_k a zbývající pak patří do druhého e_k. Kladné číslo (23) tedy bude na levé straně vzorce (21) opatřeno koeficientem

$$(24) \quad \binom{2i}{i-1} - \binom{2i}{i} = -\frac{2i(2i-1)\ldots(i+2)}{i!},$$

který je *záporný*. Na levé straně v (21) je součet záporných čísel, a tím je nerovnost (21) dokázána.

III.10. Úloha. Dokažte: Je-li $x_k > 0$ pro $k = 1, 2, \ldots, n$, pak pro $1 \leqq i < j \leqq n$ platí

$$(25) \qquad e_{i-1}e_j < e_ie_{j-1}.$$

Návod. Užijte nerovnosti (21), kterou zapíšeme ve tvaru

$$\frac{e_{k-1}}{e_k} < \frac{e_k}{e_{k+1}},$$

postupně pro $k = 1, 2, \ldots, i, \ldots, j, \ldots, n-1$.

III.11. Poznámka. Zvolíme-li v (25) $i = 1$ a $j = n$, dostaneme vzhledem k (22) vztah

$$(26) \qquad e_n < e_1e_{n-1}.$$

Vztah (26) jsme odvodili z (21), a už při důkazu této nerovnosti jsme viděli, že je velice „nepřesná", že rozdíl mezi $e_{k-1}e_{k+1}$ a e_k^2 je nejen záporný, ale dokonce v absolutní hodnotě „velký" — viz (24). A tak se asi dopouštíme velké chyby i při odhadu (26). Skutečně: už jen prostým pohledem na součin e_1e_{n-1} je vidět, že bude platit lepší odhad než (26), totiž odhad

$$(27) \qquad e_1e_{n-1} > ne_n,$$

odkud (26) už plyne. A ani tento odhad není nejlepší: platí dokonce

$$(28) \qquad e_1 e_{n-1} \geqq n^2 e_n .$$

Důkaz nerovnosti (28). Vyjdeme z nerovnosti

$$(29) \qquad (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) \cdot \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) \geqq n^2$$

(viz např. [1], str. 29 nebo str. 52). Převedeme-li zlomky v druhém činiteli na levé straně nerovnosti (29) na společného jmenovatele, bude mít tato nerovnost tvar

$$e_1 \cdot \frac{e_{n-1}}{e_n} \geqq n^2,$$

a to už je (28).

III.12. Úloha. Dokažte, že pro kladná čísla x_i platí

$$(30) \qquad e_k e_{n-k} \geqq \binom{n}{k}^2 e_n, \quad k = 1, 2, \ldots, n - 1 .$$

Kapitola IV.

POUŽITÍ SYMETRICKÝCH FUNKCÍ DVOU PROMĚNNÝCH

IV.1. Příklad. Dejme tomu, že máme najít čísla x a y, která vyhovují této soustavě dvou rovnic o dvou neznámých:

$$(1) \qquad x^2 + y^2 = 5, \quad x^3 + y^3 = 9.$$

Podíváme-li se na soustavu (1) pozorněji, snadno se nám podaří jedno řešení „uhádnout": je to dvojice

$$(2) \qquad x = 1, \qquad y = 2,$$

a vzhledem k symetrii výrazů na levých stranách soustavy rovnic (1) bude řešením i dvojice

$$(3) \qquad x = 2, \qquad y = 1.$$

Jsou to však všechna řešení soustavy (1)? A jak by tomu bylo, kdyby na pravých stranách v (1) stála jiná čísla, např. π místo 5 a log 2 místo 9? Pak by to asi s „hádáním" bylo těžší, a tak budeme muset soustavu (1) podrobit poněkud systematičtějšímu zkoumání.

Vyzkoušíme tedy *metodu eliminační:* pokusíme se vyloučit jednu neznámou. Z prvé rovnice máme $x^2 = 5 - y^2$, z druhé $x^3 = 9 - y^3$, a tedy

$$x^6 = (5 - y^2)^3 = 125 - 75y^2 + 15y^4 - y^6,$$

$$x^6 = (9 - y^3)^2 = 81 - 18y^3 + y^6.$$

Protože $x^6 = x^6$, dostáváme odtud rovnici o jedné neznámé y:

$$(4) \qquad 2y^6 - 15y^4 - 18y^3 + 75y^2 - 44 = 0.$$

To je ovšem rovnice 6. stupně, a tu neumíme řešit.

Pokusme se tedy využít symetrie levých stran v (1) a našich poznatků z kapitoly I. Na levé straně v (1) jsou výrazy s_2 a s_3, a podle tabulky I.1 můžeme proto soustavu (1) zapsat takto:

$$(5) \qquad \begin{aligned} e_1^2 - 2e_2 &= 5, \\ e_1^3 - 3e_1e_2 &= 9. \end{aligned}$$

To je opět soustava dvou rovnic, tentokrát ovšem o neznámých e_1, e_2. [Připomeňme, že

$$(6) \qquad e_1 = x + y, \qquad e_2 = xy.]$$

Řešme soustavu (5): Z první rovnice máme

$$(7) \qquad e_2 = \frac{1}{2}(e_1^2 - 5);$$

dosadíme-li za e_2 do druhé rovnice v (5), dostaneme po úpravě kubickou rovnici pro e_1:

$$(8) \qquad e_1^3 - 15e_1 + 18 = 0.$$

Ani takovou rovnici není snadné řešit, zde si však pomůžeme vzorci (2) či (3): využijeme-li tam uvedených hodnot x a y, zjistíme, že jim odpovídá hodnota $e_1 = 3$, a to je skutečně řešení rovnice (8). Protože

$$e_1^3 - 15e_1 + 18 = (e_1 - 3)(e_1^2 + 3e_1 - 6),$$

redukuje se řešení kubické rovnice (8) na řešení kvadratické rovnice

$$e_1^2 + 3e_1 - 6 = 0,$$

která má kořeny

$$e_1 = \frac{1}{2}(-3 + \sqrt{33}) \text{ a } e_1 = \frac{1}{2}(-3 - \sqrt{33}).$$

Vypočítáme-li ještě odpovídající e_2 podle vzorce (7), zjistíme, že soustava (5) má tři řešení, uvedená v následující tabulce:

e_1	3	$\frac{1}{2}(-3 + \sqrt{33})$	$\frac{1}{2}(-3 - \sqrt{33})$
e_2	2	$\frac{1}{4}(11 - 3\sqrt{33})$	$\frac{1}{4}(11 + 3\sqrt{33})$

Tab. IV.1

My však potřebujeme najít řešení soustavy (1). Vrátíme se proto ke vzorcům (6): Jak víme z kapitoly I, jsou x a y kořeny kvadratické rovnice

$$t^2 - e_1 t + e_2 = 0.$$

Utvoříme proto pro každou dvojici e_1, e_2 z tab. IV.1 odpovídající rovnici [pro druhou dvojici je to rovnice

$$t^2 - \frac{1}{2}(-3 + \sqrt{33})\,t + \frac{1}{4}(11 - 3\sqrt{33}) = 0],$$

vyřešíme ji a kořeny t_1, t_2 budou tvořit dvojici x, y řešení soustavy (1). Přitom můžeme vzhledem k symetrii volit

$$x = t_1, \qquad y = t_2$$

nebo

$$x = t_2, \qquad y = t_1.$$

Nakonec tak zjistíme, že soustava (1) má šest řešení: jsou to tři dvojice x, y z tabulky IV.2:

x	2	$\frac{1}{4}\left(-3 + \sqrt{33} + \sqrt{-2 + 6\sqrt{33}}\right)$	$\frac{1}{4}\left(-3 - \sqrt{33} + i\sqrt{2 + 6\sqrt{33}}\right)$
y	1	$\frac{1}{4}\left(-3 + \sqrt{33} - \sqrt{-2 + 6\sqrt{33}}\right)$	$\frac{1}{4}\left(-3 - \sqrt{33} - i\sqrt{2 + 6\sqrt{33}}\right)$

Tab. IV.2

a další tři dvojice, které vzniknou z předcházejících záměnou x a y.

Soustava (1) má tedy šest řešení. Zajímají-li nás ovšem jen reálná řešení, musíme poslední dvojici v tab. IV.2 vynechat: soustava (1) pak má čtyři reálná řešení.

Předcházející příklad ukazuje, jak můžeme někdy vyřešit soustavy rovnic, v nichž neznámé vystupují ve tvaru symetrických polynomů. Využíváme přitom poznatků z kapitoly I — především věty I.5 — a dále pak následujícího tvrzení:

IV.2. Věta. *Buďte e_1, e_2 daná čísla. Má-li kvadratická rovnice*

$$\text{(R)} \qquad t^2 - e_1 t + e_2 = 0$$

řešení t_1, t_2, má soustava rovnic

$$\text{(S)} \qquad \begin{aligned} x + y &= e_1, \\ xy &= e_2 \end{aligned}$$

dvě řešení:

$$x_1 = t_1, \quad y_1 = t_2 \quad a \quad x_2 = t_2, \quad y_2 = t_1.$$

Jsou-li naopak čísla x_0, y_0 *řešení soustavy* (S), *jsou tato čísla i kořeny rovnice* (R).

Důkaz je takřka zřejmý. Jsou-li t_1, t_2 kořeny rovnice (R), platí

$$t_1 + t_2 = e_1, \qquad t_1 t_2 = e_2,$$

a jak dvojice $\{t_1, t_2\}$, tak dvojice $\{t_2, t_1\}$ tedy řeší soustavu (S). Tato soustava už žádné jiné řešení nemá: je-li totiž $\{x_0, y_0\}$ řešení soustavy (S), je $x_0 + y_0 = e_1$, $x_0 y_0 = e_2$, a tedy

$$t^2 - e_1 t + e_2 = t^2 - (x_0 + y_0)\, t + x_0 y_0 =$$
$$= (t - x_0)(t - y_0),$$

tj. x_0 a y_0 jsou kořeny rovnice (R).

IV.3. Příklady. (a) Řešme soustavu

(9) $$x + y = 5,$$
$$x^2 - xy + y^2 = 7.$$

Protože $x^2 - xy + y^2 = (x + y)^2 - 3xy$, můžeme soustavu (9) zapsat pomocí vzorců (6) takto:

(10) $$e_1 = 5,$$
$$e_1^2 - 3e_2 = 7.$$

Tato soustava má řešení $e_1 = 5$, $e_2 = 6$, a řešení výchozí soustavy (9) bude tedy podle věty IV.2 tvořeno kořeny kvadratické rovnice

$$t^2 - 5t + 6 = 0.$$

A tak řešeními soustavy (9) jsou dvojice

$$\{3, 2\} \quad \text{a} \quad \{2, 3\}.$$

(b) Řešme soustavu

$$(11) \qquad \begin{aligned} x + y &= 1, \\ x^2 + y^2 &= 0. \end{aligned}$$

Použijeme-li formule (5) z kap. I, můžeme soustavu (11) zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} e_1 &= 1, \\ e_1^2 - 2e_2 &= 0, \end{aligned}$$

a máme tedy $e_1 = 1$, $e_2 = \frac{1}{2}$. Utvoříme kvadratickou rovnici

$$t^2 - t + \frac{1}{2} = 0$$

a zjistíme, že řešeními soustavy (11) jsou dvojice

$$\left\{\frac{1}{2}(1 + \mathrm{i}),\ \frac{1}{2}(1 - \mathrm{i})\right\} \quad \text{a} \quad \left\{\frac{1}{2}(1 - \mathrm{i}),\ \frac{1}{2}(1 + \mathrm{i})\right\}.$$

(c) Řešme soustavu

$$(12) \qquad \begin{aligned} x^3 + y^3 &= 7(x + y), \\ x^3 - y^3 &= 19(x - y). \end{aligned}$$

Je-li $x = -y$, je první rovnice splněna identicky a druhá má tvar

$$2x^3 = 38x.$$

Tato rovnice má řešení $x = 0$, $x = \sqrt{19}$, $x = -\sqrt{19}$, a dostáváme tak tři řešení soustavy (12):

$$(13) \qquad \{0, 0\}, \quad \{\sqrt{19}, \ -\sqrt{19}\}, \quad \{-\sqrt{19}, \ \sqrt{19}\}.$$

Je-li $x = y$, je druhá rovnice v (12) splněna identicky a první má tvar

$$2x^3 = 14x.$$

Tato rovnice má řešení $x = 0$, $x = \sqrt{7}$ a $x = -\sqrt{7}$, a dostáváme tak další dvě řešení soustavy (12):

$$(14) \qquad \{\sqrt{7}, \sqrt{7}\} \quad \text{a} \quad \{-\sqrt{7}, -\sqrt{7}\}.$$

Je-li $x \neq y$ i $x \neq -y$, můžeme rovnice soustavy (12) zjednodušit vydělením $(x + y)$, resp. $(x - y)$. Dostaneme pak soustavu

$$x^2 - xy + y^2 = 7,$$
$$x^2 + xy + y^2 = 19,$$

kterou můžeme zapsat pomocí vzorců (6) takto:

$$(15) \qquad e_1^2 - 3e_2 = 7,$$
$$e_1^2 - e_2 = 19.$$

Odtud zjistíme, že $e_2 = 6$ a $e_1^2 = 25$, takže řešeními soustavy (15) jsou dvě dvojice

$$\{5, 6\} \qquad \text{a} \qquad \{-5, 6\}.$$

Utvoříme-li k těmto dvojicím kvadratické rovnice

$$t^2 - 5t + 6 = 0 \quad \text{a} \quad t^2 + 5t + 6 = 0,$$

najdeme pomocí kořenů těchto rovnic další čtyři řešení soustavy (12):

$$(16) \quad \{3, 2\} \ \text{a} \ \{2, 3\}, \ \{-2, -3\} \ \text{a} \ \{-3, -2\}.$$

Soustava (12) má tedy celkem devět řešení, uvedených ve vzorcích (13), (14) a (16).

IV.4. Úlohy. (a) Řešte soustavu

$$x + y = 7, \quad \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{25}{12}.$$

[{3, 4} a {4, 3}].

(b) Řešte soustavu

$$\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = 18, \quad x + y = 12.$$

[{4, 8} a {8, 4}].

(c) Řešte soustavu

$$x + y = 4, \quad x^4 + y^4 = 82.$$

[{1, 3}, {3, 1}, {2 + 5i, 2 — 5i}, {2 — 5i, 2 + 5i}].

(d) Řešte soustavu

$$x + y = a, \quad x^7 + y^7 = a^7 \quad (a \text{ reálné}).$$

[Pro $a \neq 0$: $\{a, 0\}$, $\{0, a\}$, $\left\{\frac{a}{2}(1 + \mathrm{i}\sqrt{3}), \frac{a}{2}(1 - \mathrm{i}\sqrt{3})\right\}$ a $\left\{\frac{a}{2}(1 - \mathrm{i}\sqrt{3}), \frac{a}{2}(1 + \mathrm{i}\sqrt{3})\right\}$; pro $a = 0$: libovolná dvojice čísel x, y takových, že $x + y = 0$.]

(e) Řešte soustavu

$$x + y - z = 7, \quad x^2 + y^2 - z^2 = 37,$$
$$x^3 + y^3 - z^3 = 1.$$

[*Návod.* Použijte opět vzorců (6) a vylučte z. Zjistíte, že $e_1 = 19$, $e_2 = 90$ a $z = 12$, a odtud dostanete řešení {9, 10, 12}, {10, 9, 12}.]

Další úlohy si zainteresovaný čtenář jistě snadno sestaví sám, a tak si raději ukážeme další možnosti využití poznatků z kap. I. Pozorný čtenář si jistě všiml, že polynom vystupující v druhé rovnici soustavy z příkladu IV.3(c) nebyl symetrický, a že jsme k soustavě v symetrickém tvaru dospěli jistými úpravami. Uvedeme nyní několik úprav, které umožňují řešit i „nesymetrické" soustavy či jiné, komplikovanější rovnice.

IV.5. Příklady. (a) Řešme soustavu

$$u^2 + v = 5, \qquad u^6 + v^3 = 65. \tag{17}$$

Výrazy na levých stranách nejsou symetrické; použijeme-li však substituce

$$u^2 = x, \qquad v = y, \tag{18}$$

bude mít soustava (17) tvar

$$x + y = 5, \qquad x^3 + y^3 = 65,$$

a tuto soustavu umíme řešit: zjistíme, že má řešení $\{4, 1\}$ a $\{1, 4\}$. Nyní se pomocí vztahů (18) vrátíme k původním proměnným u, v a zjistíme, že soustava (17) má čtyři řešení

$$\{2, 1\}, \quad \{-2, 1\}, \quad \{1, 4\} \quad \text{a} \quad \{-1, 4\}.$$

(b) Řešme soustavu

$$4u^2 + 9v^2 = 5, \qquad 8u^3 - 27v^3 = 9. \tag{19}$$

Také zde nejsou výrazy na levých stranách symetrické v proměnných u a v; použijeme-li však substituce

$$2u = x, \qquad -3v = y,$$

dostaneme ze soustavy (19) soustavu (1). A tak najdeme řešení $\{u, v\}$ soustavy (19) z řešení $\{x, y\}$ soustavy (1) pomocí vzorců

$$u = \frac{1}{2}x, \qquad v = -\frac{1}{3}y$$

(dvojice $\{x, y\}$ najdeme v tab. IV.2).

(c) Řešme v oboru nezáporných čísel soustavu

$$(20) \qquad 6(\sqrt{u} + \sqrt{v}) - 5\sqrt{uv} = 0, \quad u + v = 13.$$

Zde je v první rovnici na levé straně sice symetrická funkce, ale není to symetrický polynom, a proto nelze užít věty I.5. Ale pomocí substituce

$$(21) \qquad x = \sqrt{u}, \qquad y = \sqrt{v}$$

přejde soustava (20) v soustavu

$$6(x + y) - 5xy = 0, \quad x^2 + y^2 = 13,$$

čili

$$6e_1 - 5e_2 = 0, \quad e_1^2 - 2e_2 = 13.$$

Odtud máme

$$e_1 = 5, \quad e_2 = 6 \quad \text{a} \quad e_1 = -\frac{13}{5}, \quad e_2 = -\frac{78}{25}.$$

Druhá možnost však nepřichází v úvahu, neboť z (21) plyne, že x i y musí být nezáporná čísla; z první dvojice $\{e_1, e_2\}$ dostáváme

$$x = 2, \quad y = 3 \quad \text{a} \quad x = 3, y = 2$$

a z (21) plyne, že soustavu (20) řeší dvojice

$$\{4, 9\} \quad \text{a} \quad \{9, 4\}.$$

Některé úlohy lze vhodným obratem převést na soustavy, jaké jsme zatím řešili:

IV.6. Příklady. (a) Řešme rovnici

$$(z^2 + 1)^7 - (z^2 - 1)^7 = 128. \tag{22}$$

Provedeme-li naznačené umocnění, dostaneme rovnici 12. stupně, a to není nic příjemného. Jestliže však položíme

$$z^2 + 1 = x, \quad -(z^2 - 1) = y,$$

bude

$$x + y = 2$$

a rovnici (22) můžeme zapsat takto:

$$x^7 + y^7 = 128.$$

Tím jsme však rovnici (22) převedli na úlohu IV.4(d) s $a = 2$ ($128 = 2^7$), a podle této úlohy máme pro x čtyři možnosti:

$$x = 2, \quad x = 0, \quad x = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3} \quad \text{a} \quad x = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}.$$

Řešení rovnice (22) pak určíme z kvadratické rovnice

$$z^2 = x - 1,$$

tj. rovnici (22) řeší tyto hodnoty:

$$1, -1, \mathrm{i}, -\mathrm{i}, (1 + \mathrm{i})\sqrt[4]{\frac{3}{4}}, (1 - \mathrm{i})\sqrt[4]{\frac{3}{4}},$$

$$(-1 + \mathrm{i})\sqrt[4]{\frac{3}{4}}, (-1 - \mathrm{i})\sqrt[4]{\frac{3}{4}}.$$

(b) Řešme v R rovnici

$$\sqrt[4]{41 + z} + \sqrt[4]{41 - z} = 2. \tag{23}$$

Položíme-li

$$x = \sqrt[4]{41 + z}, \quad y = \sqrt[4]{41 - z}, \tag{24}$$

dostaneme soustavu

$$x^4 + y^4 = 82,$$
$$x + y = 2$$

a ta má tato reálná řešení:

$$\{3, -1\} \quad \text{a} \quad \{-1, 3\}$$

(zbývající řešení jsou komplexní, ověřte!). Z (24) však plyne, že čísla x i y musí být nezáporná, a tak nemá rovnice (23) v R žádné řešení.

(c) Řešme v R rovnici

$$\sqrt[3]{10 - z} - \sqrt[3]{3 - z} = 1. \tag{25}$$

Položíme

$$x = \sqrt[3]{10 - z}, \quad y = -\sqrt[3]{3 - z}$$

a dostaneme soustavu

$$x + y = 1,$$
$$x^3 + y^3 = 7.$$

Tu dovedeme řešit: jejími řešeními jsou dvojice

$$\{2, -1\} \quad \text{a} \quad \{-1, 2\},$$

a protože $z = 10 - x^3$, zjistíme, že rovnici (25) řeší hodnoty $z = 2$ a $z = 11$.

(d) Řešme v $\langle 0, 2\pi)$ rovnici

$$\sin^3 z + \cos^3 z = 1\,. \tag{26}$$

Zde využijeme známého vztahu $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$. Položíme-li

$$x = \cos z\,, \qquad y = \sin z\,,$$

dostáváme soustavu

$$x^2 + y^2 = 1\,,$$
$$x^3 + y^3 = 1\,;$$

ta má reálná řešení $\{0, 1\}$ a $\{1, 0\}$ a dále ještě komplexní řešení, která nebudeme uvažovat (zajímají nás hodnoty z z intervalu $\langle 0, 2\pi)$). Dostali jsme tedy pro z rovnice

$$\cos z = 0\,, \qquad \sin z = 1$$

nebo

$$\cos z = 1\,, \qquad \sin z = 0\,,$$

jimž vyhovují v $\langle 0, 2\pi)$ jen hodnoty

$$z = \frac{\pi}{2} \quad \text{a} \quad z = 0\,.$$

Protože věty I.5 a IV.2 ukazují na úzkou souvislost mezi symetrickými funkcemi, výrazy e_1 a e_2 a kořeny kvadratické rovnice (R), lze očekávat, že této souvislosti bude možno užít v různých příkladech majících nějaký vztah ke kvadratickým rovnicím a jejich kořenům. Uvedeme nejprve dva typické příklady a pak jedno takřka zřejmé tvrzení.

IV.7. Příklady. (a) Sestavme kvadratickou rovnici, jejímiž kořeny jsou osmé mocniny kořenů kvadratické rovnice

$$(27) \qquad t^2 - t + 7 = 0.$$

Nechť má hledaná kvadratická rovnice tvar

$$(28) \qquad t^2 + pt + q = 0;$$

máme tedy určit koeficienty p, q. Mohli bychom postupovat mechanicky: určit kořeny x, y rovnice (27) $\left[\text{je } x = \frac{1}{2}(1 + \mathrm{i}\,3\sqrt{3}), y = \frac{1}{2}(1 - \mathrm{i}\,3\sqrt{3})\right]$, vypočítat x^8 a y^8 a položit pak

$$p = -(x^8 + y^8), \qquad q = x^8 . y^8.$$

My však x a y vůbec počítat nemusíme: použijeme-li toho, že $x + y = e_1 = 1$, $x . y = e_2 = 7$, a tabulky I.1, zjistíme, že

$$q = (xy)^8 = e_2^8 = 7^8 = 5\,764\,801,$$

$$p = -(x^8 + y^8) = -s_8 = -(e_1^8 - 8e_1^6e_2 + \\ + 20e_1^4e_2^2 - 16e_1^2e_2^3 + 2e_2^4) = -239,$$

takže hledaná rovnice má tvar

$$t^2 - 239t + 5\,764\,801 = 0.$$

(b) Sestavme kvadratickou rovnici, víme-li, že pro její kořeny x, y platí

$$(29) \qquad x^3 + y^3 = 0, \quad x^2 + xy + y^2 = 6.$$

Opět bychom mohli spočítat dvojice x, y, které soustavu (29) řeší; my však víme, že kvadratická rovnice už je určena čísly $e_1 = x + y$ a $e_2 = xy$; metodou, kterou jsme používali na začátku této kapitoly, zjistíme, že existují tři dvojice $\{e_1, e_2\}$: $\{0, -6\}$, $\{3, 3\}$ a $\{-3, 3\}$, takže naši úlohu řeší *tři* kvadratické rovnice:

$$t^2 - 6 = 0, \quad t^2 - 3t + 3 = 0,$$
$$t^2 + 3t + 3 = 0.$$

[Čtenář si jistě uvědomil, že úlohy tohoto typu jsme průběžně řešili v příkladech IV.3 i v úlohách IV.4; neformulovali jsme je ovšem tak explicitně jako v předcházejících příkladech, protože konečným cílem bylo nalezení kořenů a sestavení kvadratické rovnice bylo jen jednou etapou.]

IV.8. Věta. *Buďte e_1, e_2 daná reálná čísla. K tomu, aby řešení x, y soustavy*

$$\text{(S)} \qquad x + y = e_1, \quad xy = e_2$$

byla reálná čísla, je nutné a stačí, aby platilo

$$\text{(30)} \qquad e_1^2 - 4e_2 \geqq 0.$$

K tomu, aby čísla x a y byla nezáporná, je nutné a stačí, aby vedle (30) *platilo ještě*

$$e_1 \geqq 0, \qquad e_2 \geqq 0.$$

Důkaz plyne z věty IV.2. Podle ní jsou čísla x, y kořeny kvadratické rovnice $t^2 - e_1 t + e_2 = 0$, a tedy je

$$x = \frac{e_1 + \sqrt{e_1^2 - 4e_2}}{2}, \qquad y = \frac{e_1 - \sqrt{e_1^2 - 4e_2}}{2}.$$

Tato čísla x a y budou reálná tehdy a jen tehdy, bude-li diskriminant $e_1^2 - 4e_2$ nezáporný, a to je nerovnost (30). — Také druhé tvrzení věty plyne ihned z (S) a z (30): přenecháváme je čtenáři, který může najít inspiraci i v příkladu III.8.

Poslední věty můžeme využít opět k řešení různých úloh. Uvedeme jich několik na ukázku.

IV.9. Příklad. Nechť jsou x, y dvě nezáporná čísla. Jaký je vztah mezi třetí mocninou jejich aritmetického průměru a aritmetickým průměrem jejich třetích mocnin?

Znamená to, že musíme porovnat čísla

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^3 \quad \text{a} \quad \frac{x^3+y^3}{2},$$

tj. čísla $\frac{1}{8}e_1^3$ a $\frac{1}{2}s_3 = \frac{1}{2}(e_1^3 - 3e_1e_2)$. Pro jejich rozdíl platí

$$\frac{1}{8}e_1^3 - \frac{1}{2}e_1^3 + \frac{3}{2}e_1e_2 = -\frac{3}{8}e_1(e_1^2 - 4e_2) \leqq 0,$$

neboť $e_1 \geqq 0$ (čísla x, y jsou nezáporná) a podle (30) je také $e_1^2 - 4e_2 \geqq 0$. Platí tedy

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^3 \leqq \frac{x^3+y^3}{2}$$

(viz též [1], str. 94, vzorec (III.40) pro $r = 1$, $s = 3$).

IV.10. Příklad. Jaké maximální hodnoty nabývá funkce

$$F(x, y) = xy(x-y)^2,$$

jestliže reálné proměnné x, y splňují podmínku $x + y = 8$?

Funkční hodnotu $F(x, y)$ můžeme zapsat takto:

$$F(x, y) = e_2(s_2 - 2e_2) = e_2(e_1^2 - 4e_2);$$

zavedeme-li označení

$$(31) \qquad e_1^2 - 4e_2 = t,$$

je především $t \geqq 0$ (podle vzorce (30)) a

$$(32) \qquad e_2 = \frac{1}{4}(e_1^2 - t),$$

takže

$$F(x, y) = \frac{1}{4} t (e_1^2 - t).$$

Využijeme-li ještě toho, že $x + y = e_1 = 8$, máme

$$F(x, y) = \frac{1}{4} t (64 - t) = \frac{1}{4}(-t^2 + 64t) =$$
$$= \frac{1}{4}[-(t - 32)^2 + 1024] = 256 - \frac{1}{4}(t - 32)^2.$$

A odtud už je vidět, že

$$F(x, y) \leqq 256$$

a že své maximální hodnoty — tj. hodnoty 256 — nabude $F(x, y)$ právě tehdy, bude-li $t = 32$.

A zajímá-li nás navíc, pro které hodnoty x, y dosáhne funkce $F(x, y)$ uvedeného maxima, stačí využít vztahu (31) a řešit soustavu

$$e_1^2 - 4e_2 = 32,$$
$$e_1 = 8;$$

zjistíme, že dvojice x, y jsou kořeny kvadratické rovnice

$$z^2 - 8z + 8 = 0,$$

tj. $F(x, y) = 256$ pro dvojici $x = 4 + 2\sqrt{2}$, $y = 4 - 2\sqrt{2}$ a pro dvojici $x = 4 - 2\sqrt{2}$, $y = 4 + 2\sqrt{2}$.

IV.11. Poznámka. Obrat, který jsme použili v předcházejícím příkladu, totiž zavedení nezáporného čísla t podle (31) a vyjádření e_2 pomocí e_1 a t, viz (32), nebo naopak e_1^2 ve tvaru

$$e_1^2 = 4e_2 + t\,, \tag{33}$$

se dá u úloh tohoto typu často využít. Uvedeme ještě dvě ukázky.

IV.12. Příklady. (a) Ukážeme, že pro libovolná nezáporná čísla x, y platí

$$x^4 + 2x^3y + 2xy^3 + y^4 \geqq 6x^2y^2\,. \tag{34}$$

Použijeme-li tabulky I.1 a vzorce (33), bude

$$x^4 + 2x^3y + 2xy^3 + y^4 - 6x^2y^2 = x^4 + y^4 + 2xy(x^2 +$$
$$+ y^2) - 6(xy)^2 = s_4 + 2e_2s_2 - 6e_2^2 = e_1^4 - 4e_1^2e_2 +$$
$$+ 2e_2^2 + 2e_2(e_1^2 - 2e_2) - 6e_2^2 = e_1^4 - 2e_1^2e_2 - 8e_2^2 =$$
$$= (4e_2 + t)^2 - 2e_2(4e_2 + t) - 8e_2^2 = t^2 + 6e_2t \geqq 0\,,$$

neboť podle věty IV.8 je $t \geqq 0$ i $e_2 \geqq 0$.

(b) Budiž $a > 0$. Platí-li pro reálná čísla x, y vztah

$$x + y \geqq a\,, \tag{35}$$

pak je

$$x^2 + y^2 \geqq \frac{1}{2}\,a^2. \tag{36}$$

Použijeme-li totiž tabulky I.1 a vzorce (32), je

$$x^2 + y^2 = e_1^2 - 2e_2 = e_1^2 - 2\,\frac{1}{4}\,(e_1^2 - t) =$$

$$= \frac{1}{2} e_1^2 + \frac{1}{2} t \geqq \frac{1}{2} e_1^2,$$

neboť podle věty IV.8 je $t \geqq 0$. Nerovnost (36) nyní plyne z předchozí nerovnosti a z nerovnosti (35), podle níž je $e_1 \geqq a$.

IV.13. Úlohy. (a) Dokažte, že za předpokladů příkladu IV.12 (b) platí

$$x^4 + y^4 \geqq \frac{1}{8} a^4, \quad x^8 + y^8 \geqq \frac{1}{128} a^8,$$

$$x^{16} + y^{16} \geqq \frac{1}{2^{15}} a^{16} \text{ atd.}$$

(b) Dokažte, že pro libovolná reálná čísla x, y platí

$$x^4 + y^4 \geqq x^3y + xy^3,$$

$$x^6 + y^6 \geqq x^5y + xy^5,$$

$$x^8 + y^8 \geqq x^7y + xy^7,$$

a rozhodněte, zda analogické nerovnosti platí i pro vyšší hodnoty exponentů. (Viz též poznámku IV.14.)

(c) Dokažte, že pro kladná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ platí

$$(37) \quad (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) \geqq n^2.$$

(Viz též poznámku III.11.)

Návod. Dokažte nejprve, že pro kladná čísla x, y platí

$$(38) \qquad \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geqq 2,$$

a to pomocí věty IV.8; pak proveďte v (37) roznásobení a využijte nerovnosti (38).

IV.14. Poznámka. Předpokládáme, že čtenář si předcházející úlohy vyřeší pomocí věty IV.8, ale řada z výše uvedených nerovností se dá dokázat i jinými metodami, bez použití teorie elementárních symetrických funkcí. Tak třeba nerovnost (37) je v [1] dokázána dvojím způsobem (z toho jednou pomocí Cauchyho nerovnosti); nerovnosti z úlohy IV.13 (b) plynou pro změnu zase z Hölderovy nerovnosti

$$x_1y_1 + x_2y_2 \leqq (x_1^p + x_2^p)^{1/p}(y_1^q + y_2^q)^{1/q},$$

kde $p > 1$, $q > 1$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ (viz [1], str. 72): Zvolíme-li totiž $x_1 = x^3$, $x_2 = y^3$, $y_1 = y$, $y_2 = x$, $p = \dfrac{4}{3}$ a $q = 4$, dostaneme první z nerovností v úloze IV.13(b).

Uvedli jsme zatím několik ukázek, jak lze elementárních symetrických funkcí ve dvou proměnných využít k řešení řady úloh. Nejsou tím pochopitelně vyčerpány všechny možnosti jejich použití: lze pomocí nich dokazovat různé identity, upravovat složité algebraické výrazy, řešit speciální algebraické rovnice vyšších řádů i různé speciální rovnice, zkoumat řešitelnost různých soustav rovnic atp. Uvedeme proto spíše namátkou a pro ilustraci několik příkladů, z nichž poslední ukazuje, že i poznámka I.7 o jednoznačnosti polynomu Q, určeného symetrickým polynomem P, má svůj význam.

IV.15. Příklady. (a) Platí tato identita:

$$(x + y)^5 - x^5 - y^5 = 5xy(x + y)(x^2 + xy + y^2). \tag{39}$$

Levou stranu lze totiž psát ve tvaru $e_1^5 - s_5 = e_1^5 - (e_1^5 - 5e_1^3e_2 + 5e_1e_2^2) = 5e_1e_2(e_1^2 - e_2)$, a poslední výraz je roven pravé straně v (39).

(b) Zjednodušíme výrazy

$$\frac{(x+y)^5 - x^5 - y^5}{(x+y)^3 - x^3 - y^3} \quad \text{a} \quad \frac{(x+y)^7 - x^7 - y^7}{(x+y)^5 - x^5 - y^5}.$$

První výraz můžeme zapsat ve tvaru

$$\frac{e_1^5 - s_5}{e_1^3 - s_3}$$

a pomocí tabulky I.1 dostaneme, že se rovná

$$\frac{5}{3}(e_1^2 - e_2) = \frac{5}{3}(x^2 + xy + y^2);$$

podobně ukážeme, že druhý výraz je roven

$$\frac{7}{5}(e_1^2 - e_2) = \frac{7}{5}(x^2 + xy + y^2).$$

(c) Najdeme celočíselná řešení rovnice

(40) $$x^3 + y^3 + 1 = 3xy:$$

Rovnici můžeme zapsat takto: $s_3 + 1 = 3e_2$, čili $e_1^3 - 3e_1e_2 + 1 = 3e_2$ čili

$$(e_1 + 1)(e_1^2 - e_1 + 1 - 3e_2) = 0.$$

To tedy znamená, že je buď

$$e_1 + 1 = 0$$

nebo

(41) $$e_1^2 - e_1 + 1 - 3e_2 = 0.$$

První eventualita znamená, že $e_1 = -1$ čili $x + y = -1$, a to dává nekonečně mnoho dvojic řešení rovnice (40), totiž dvojice tvaru

$$\{k, -(k+1)\}, \quad k \text{ celé}. \tag{42}$$

Vyšetřujme tedy rovnici (41): Podle vzorce (30) je $-e_2 \geqq -\frac{1}{4} e_1^2$, a tedy je

$$e_1^2 - e_1 + 1 - 3e_2 \geqq e_1^2 - e_1 + 1 - \frac{3}{4} e_1^2 =$$
$$= \frac{1}{4}(e_1 - 2)^2.$$

Nutnou podmínkou pro platnost rovnice (41) je tedy platnost vztahu

$$(e_1 - 2)^2 = 0 \text{ čili } e_1 = 2, \text{ čili } x + y = 2,$$

což dává opět nekonečně mnoho dvojic tvaru

$$\{k, 2 - k\}, \qquad k \text{ celé}.$$

Ale dosazením těchto dvojic do (40) nebo do (41) zjistíme, že jedině dvojice $\{1, 1\}$ vyhovuje rovnici (40). Odpověď tedy zní: rovnici (40) řeší celočíselné dvojice

$$x = k, \quad y = -(k+1), \quad k \text{ celé},$$

a

$$x = 1, \qquad y = 1.$$

Zajímají-li nás jen kladná celočíselná řešení rovnice (40), existuje jediné: $x = y = 1$.

(d) Soustava tří rovnic

$$\begin{aligned} x + y &= a, \\ x^2 + y^2 &= b, \\ x^3 + y^3 &= c \end{aligned} \tag{43}$$

pro dvě neznámé x, y (a, b, c jsou daná čísla) je přeurčená a nemusí mít vždy řešení. Najdeme tedy podmínky na čísla a, b, c, za nichž je soustava (43) řešitelná v oboru komplexních čísel:

Užijeme-li tabulky I.1, můžeme naši soustavu zapsat takto

$$e_1 = a\,, \quad e_1^2 - 2e_2 = b\,, \quad e_1^3 - 3e_1e_2 = c\,.$$

Je tedy $e_2 = \frac{1}{2}(a^2 - b)$ a z třetí rovnice dostaneme hledaný vztah mezi čísly a, b, c: musí být

$$a^3 - 3ab + 2c = 0\,.$$

(e) Rovnice

(44) $$t^8 + 4t^6 - 10t^4 + 4t^2 + 1 = 0$$

je rovnice osmého stupně, a ty neumíme obecně řešit. Naše rovnice je však v jistém smyslu *symetrická:* má stejné koeficienty u t^8 i t^0 (totiž 1), u t^7 i t^1 (totiž 0), u t^6 i t^2 (totiž 4) a u t^5 i t^3 (totiž 0). Můžeme proto provést jistý obrat hodící se i na rovnice vyšších (ovšem sudých) stupňů, které mají obdobnou vlastnost symetrie koeficientů: vytkneme t^4 a máme

$$t^4\left(t^4 + 4t^2 - 10 + \frac{4}{t^2} + \frac{1}{t^4}\right) = 0$$

čili

(45) $$t^4\left[\left(t^4 + \frac{1}{t^4}\right) + 4\left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right) - 10\right] = 0$$

(snadno se přesvědčíme, že $t = 0$ není kořenem naší výchozí rovnice). Označme nyní $t = x$, $\frac{1}{t} = y$. Pak je

$$e_1 = t + \frac{1}{t}, \quad e_2 = 1$$

a z tabulky I.1 máme

$$t^2 + \frac{1}{t^2} = e_1^2 - 2, \quad t^3 + \frac{1}{t^3} = e_1^3 - 3e_1,$$

$$t^4 + \frac{1}{t^4} = e_1^4 - 4e_1^2 + 2$$

atd. Speciálně dostáváme z (45) rovnici **čtvrtého** stupně o neznámé e_1 [tedy rovnici polovičního stupně, než byla původní rovnice (44)]:

$$t^4[e_1^4 - 4e_1^2 + 2 + 4(e_1^2 - 2) - 10] = 0$$

čili

$$t^4[e_1^4 - 16] = 0.$$

Její kořeny dovedeme najít:

$$e_1 = 2, \; e_1 = -2, \; e_1 = 2i, \; e_1 = -2i.$$

Zbývá tedy vyřešit čtyři kvadratické rovnice

$$t + \frac{1}{t} = e_1,$$

z nichž najdeme osm kořenů rovnice (44):
1, —1 (oba dvojnásobné), $i(1 + \sqrt{2})$, $i(1 - \sqrt{2})$, $i(-1 + \sqrt{2})$, $i(-1) - \sqrt{2})$.

(f) Rovnice

$$10t^6 + t^5 - 47t^4 - 47t^3 + t^2 + 10t = 0 \tag{46}$$

nemá vlastnost symetrie (tj. stejné koeficienty u t^6 i t^0, t^5 i t^1 atd.), ale dá se zapsat ve tvaru

$$t(10t^5 + t^4 - 47t^3 - 47t^2 + t + 10) = 0,$$

z čehož je patrný již jeden kořen rovnice (46): $t = 0$. Zbývá tedy vyřešit rovnici

$$(47) \qquad 10t^5 + t^4 - 47t^3 - 47t^2 + t + 10 = 0,$$

která vlastnost symetrie (tj. stejný koeficient 10 u t^5 i t^0, stejný koeficient 1 u t^4 i t^1 a stejný koeficient -47 u t^3 i t^2) už má. Rovnice (47) je lichého stupně, a snadno se přesvědčíme, že každá rovnice lichého stupně s uvedenou vlastností symetrie má kořen $t = -1$. Můžeme tedy psát (47) takto:

$$10t^5 + t^4 - 47t^3 - 47t^2 + t + 10 =$$
$$= (t + 1)(10t^4 - 9t^3 - 38t^2 - 9t + 10) = 0,$$

a zbývá řešit rovnici čtvrtého stupně

$$10t^4 - 9t^3 - 38t^2 - 9t + 10 = 0.$$

Ta je opět symetrická a má sudý stupeň, proto můžeme postupovat jako v příkladu (e): zapíšeme ji ve tvaru

$$t^2\left[10\left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right) - 9\left(t + \frac{1}{t}\right) - 38\right] = 0$$

čili

$$t^2[10(e_1^2 - 2) - 9e_1 - 38] = 0,$$

čili

$$t^2[10e_1^2 - 9e_1 - 58] = 0.$$

Kvadratická rovnice v hranatých závorkách má kořeny $e_1 = -2$, $e_1 = \dfrac{29}{10}$, takže zbývá řešit dvě kvadratické rovnice

$$t + \frac{1}{t} = -2, \qquad t + \frac{1}{t} = \frac{29}{10}.$$

Nakonec zjistíme, že původní rovnice (46) má tyto kořeny: 0, —1 (trojnásobný), $\frac{5}{2}$ a $\frac{2}{5}$.

IV.16. Příklad. Dokážeme toto tvrzení: *Platí-li pro čísla x, y, u, v vztahy*

$$x + y = u + v, \tag{48}$$
$$x^2 + y^2 = u^2 + v^2,$$

pak platí pro každé přirozené číslo n vztah

$$x^n + y^n = u^n + v^n. \tag{49}$$

Označme

$$e_1 = x + y,\ e_2 = xy,\ e_1^* = u + v,\ e_2^* = uv.$$

Ze vztahů (48) vyplývá, že $e_1 = e_1^*$ a $e_1^2 - 2e_2 = e_1^{*2} - 2e_2^*$, čili také $e_2 = e_2^*$.

Je-li nyní $P(x, y)$ libovolný symetrický polynom v proměnných x, y, existuje podle poznámky I.7 jednoznačně určený polynom Q takový, že $P(x, y) = Q(e_1, e_2)$. Protože polynom Q je určen jednoznačně, je $P(u, v) = Q(e_1^*, e_2^*)$; ale $e_1^* = e_1$ a $e_2^* = e_2$, a tedy je $Q(e_1^*, e_2^*) = Q(e_1, e_2)$ čili

$$P(x, y) = P(u, v) \tag{50}$$

pro každý symetrický polynom P, a speciálně tedy pro symetrický polynom $P(x, y) = x^n + y^n$.

IV.17. Poznámka. Předcházející tvrzení jsme ovšem mohli dokázat i bez použití poznámky I.7: Při označení z příkladu IV.16 plyne z (48), že

$$e_1 = e_1^* \quad \text{a} \quad e_2 = e_2^*.$$

To však znamená, že jak dvojice $\{x, y\}$, tak dvojice $\{u, v\}$ je řešením **téže** kvadratické rovnice

$$t^2 - e_1 t + e_2 = 0 \quad \text{čili} \quad t^2 - e_1^* t + e_2^* = 0 .$$

Proto je buď $\{x, y\} = \{u, v\}$, nebo $\{x, y\} = \{v, u\}$ a ze symetrie polynomu P už plyne vztah (50).

Kapitola V.

POUŽITÍ SYMETRICKÝCH FUNKCÍ TŘÍ PROMĚNNÝCH

Srovnáním kapitoly II s kapitolou I jsme zjistili, že teorie symetrických funkcí tří proměnných je jen zobecněním teorie symetrických funkcí dvou proměnných, zobecněním, které je náročné spíše po stránce technické než po stránce myšlenkové. A tak i příklady, které v dalším uvedeme, budou jen početně komplikovanějšími analogiemi příkladů z kapitoly předcházející.

Uveďme nejprve větu, která je analogií věty IV.2 a kterou při řešení příkladů užijeme. Její důkaz přenecháme čtenáři; vychází ze vztahů mezi kořeny a koeficienty kubické rovnice, jak jsme je odvodili na začátku kapitoly II.

V.1. Věta. *Buďte e_1, e_2, e_3 daná čísla. Má-li kubická rovnice*

$$t^3 - e_1t^2 + e_2t - e_3 = 0 \tag{R}$$

řešení t_1, t_2, t_3, má soustava rovnic

$$\begin{aligned} x + y + z &= e_1, \\ xy + yz + zx &= e_2, \\ xyz &= e_3 \end{aligned} \tag{S}$$

šest řešení:

$$x = t_1,\ y = t_2,\ z = t_3;\ x = t_1,\ y = t_3,\ z = t_2;$$

$$x = t_2,\ y = t_1,\ z = t_3;\ x = t_2,\ y = t_3,\ z = t_1;$$
$$x = t_3,\ y = t_1,\ z = t_2;\ x = t_3,\ y = t_2,\ z = t_1.$$

Jsou-li naopak čísla x_0, y_0, z_0 řešením soustavy (S), *jsou tato čísla i kořeny rovnice* (R).

V.2. Příklady. (a) Řešme soustavu

$$x + y + z = a, \tag{1}$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = b,$$
$$x^3 + y^3 + z^3 = c,$$

kde a, b, c jsou daná reálná čísla.

Soustavu (1) můžeme zapsat též takto:

$$s_1 = a, \quad s_2 = b, \quad s_3 = c$$

[viz kap. II, vzorec (9)]; vyjádříme-li symetrické polynomy s_1, s_2, s_3 pomocí elementárních symetrických funkcí e_1, e_2, e_3, dostaneme z (1) soustavu

$$e_1 = a,$$
$$e_1^2 - 2e_2 = b,$$
$$e_1^3 - 3e_1e_2 + 3e_3 = c$$

(viz úlohu II.3), kterou dovedeme snadno vyřešit: je

$$e_1 = a, \quad e_2 = \frac{1}{2}(a^2 - b),$$

$$e_3 = \frac{1}{3}(c - a^3) + \frac{1}{2}a(a^2 - b).$$

Dosadíme-li sem opět za e_1, e_2, e_3 jejich vyjádření pomocí x, y, z, dostaneme soustavu tvaru (S), která je ekvivalentní soustavě (1):

$$x + y + z = a,$$
$$xy + yz + zx = \frac{1}{2}(a^2 - b),$$
$$xyz = \frac{1}{3}(c - a^3) + \frac{1}{2}a(a^2 - b),$$

a podle věty V. 1 tedy najdeme řešení soustavy (1) tím, že určíme kořeny kubické rovnice

$$t^3 - at^2 + \frac{1}{2}(a^2 - b)\,t - \frac{1}{3}(c - a^3) - \frac{1}{2}a(a^2 - b) = 0. \tag{2}$$

(b) Zvolme v předcházejícím příkladu $a = 2$, $b = 6$, $c = 8$. Pak má rovnice (2) tvar

$$t^3 - 2t^2 - t + 2 = 0$$

a její kořeny jsou čísla $t_1 = 2$, $t_2 = 1$, $t_3 = -1$, neboť

$$t^3 - 2t^2 - t + 2 = (t - 2)(t^2 - 1).$$

Soustava

$$x + y + z = 2,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 6,$$
$$x^3 + y^3 + z^3 = 8$$

má tedy těchto šest řešení:

$$\{2, 1, -1\},\ \{2, -1, 1\},\ \{1, 2, -1\},$$
$$\{1, -1, 2\},\ \{-1, 2, 1\},\ \{-1, 1, 2\}.$$

(c) Řešme soustavu

$$(3) \qquad xy + yz + zx = 11,$$
$$xy(x + y) + yz(y + z) + zx(z + x) = 48,$$
$$xy(x^2 + y^2) + yz(y^2 + z^2) + zx(z^2 + x^2) = 118.$$
Vyjádříme symetrické polynomy na levých stranách rovnic soustavy (3) pomocí elementárních symetrických funkcí e_1, e_2, e_3 podle věty II.7. V první rovnici je vlevo přímo e_2, ve druhé je vlevo symetrický polynom $S_{2.1.0}$ a ve třetí symetrický polynom $S_{3.1.0}$ [viz kap. II, vzorec (16)]. Protože podle úlohy II.3 je

$$S_{2.1.0} = s_2 s_1 - s_3 = e_1 e_2 - 3e_3$$

(viz též příklad II.2 (e)),

$$S_{3.1.0} = s_3 s_1 - s_4 = e_1^2 e_2 - 2e_2^2 - e_1 e_3,$$

můžeme soustavu (3) napsat takto:

$$(4) \qquad e_2 = 11,$$
$$e_1 e_2 - 3e_3 = 48,$$
$$e_1^2 e_2 - 2e_2^2 - e_1 e_3 = 118.$$

Z obou prvních rovnic vyjádříme e_2 a e_3:

$$(5) \qquad e_2 = 11, \quad e_3 = \frac{11}{3} e_1 - 16,$$

a dostáváme pro e_1 kvadratickou rovnici

$$11e_1^2 + 24e_1 - 540 = 0,$$

která má kořeny $e_1 = 6$ a $e_1 = -\frac{90}{11}$. Odtud a z (5) máme dvě trojice řešení soustavy (4):

$$e_1 = 6, \qquad e_2 = 11, \qquad e_3 = 6$$

a

$$e_1 = -\frac{90}{11}, \quad e_2 = 11, \quad e_3 = -46.$$

Těmto dvěma trojicím odpovídají dvě kubické rovnice:

$$t^3 - 6t^2 + 11t - 6 = 0 \tag{6}$$

a

$$t^3 + \frac{90}{11}t^2 + 11t + 46 = 0. \tag{7}$$

Kořeny rovnice (6) nalezneme snadno: jsou to čísla $t_1 = 1$, $t_2 = 2$ a $t_3 = 3$, z nichž dostaneme šest řešení soustavy (3) podle věty V.1. Také kořeny rovnice (7) můžeme spočítat, ovšem už ne tak snadno: užijeme *Cardanových vzorců* a při označení

$$D = (37\,648)^2 - \left(\frac{1369}{3}\right)^3,$$

$$\alpha = \frac{1}{11}\sqrt[3]{-37\,648 + \sqrt{D}},$$

$$\beta = \frac{1}{11}\sqrt[3]{-37\,648 - \sqrt{D}}$$

můžeme kořeny rovnice (7) zapsat takto:

$$t_1 = \alpha + \beta - \frac{30}{11},$$

$$t_2 = -\frac{1}{2}(\alpha + \beta) - \frac{30}{11} + \frac{i}{2}(\alpha - \beta)\sqrt{3},$$

$$t_3 = -\frac{1}{2}(\alpha + \beta) - \frac{30}{11} - \frac{i}{2}(\alpha - \beta)\sqrt{3}.$$

Podle věty V.1 pak z těchto kořenů dostáváme dalších šest řešení soustavy (3), která tak má celkem dvanáct řešení.

Druhá část posledního příkladu naznačuje, že při použití elementárních symetrických funkcí tří proměnných můžeme narazit na značné potíže při konkrétních výpočtech kořenů kubických rovnic. Zajímají-li nás ovšem třeba jen celočíselná řešení, mohou být metody, o nichž zde hovoříme, efektivní.

Soustavy, které jsme zatím vyšetřovali, obsahovaly symetrické polynomy. Ale podobně jako v případě dvou proměnných lze i zde řešit některé obecnější soustavy (třeba s nesymetrickými výrazy), použijeme-li vhodných obratů.

V.3. Příklady. (a) Řešme soustavu

$$\begin{aligned} &(8) \qquad & u - 3v - 5w &= a, \\ && u^2 + 9v^2 + 25w^2 &= b, \\ && u^3 - 27v^3 - 125w^3 &= c, \end{aligned}$$

kde a, b, c jsou daná reálná čísla.

Výrazy na levých stranách v (8) nejsou symetrické; použijeme-li však substituce

$$(9) \qquad x = u, \quad y = -3v, \quad z = -5w,$$

přejde soustava (8) v soustavu (1) z příkladu V.2 (a), a řešení soustavy (8) dostaneme z řešení soustavy (1) pomocí vzorců (9).

Zvolíme-li např. $a = 2$, $b = 6$, $c = 8$, dostaneme pomocí výsledků příkladu V.2(b) tato řešení soustavy (8):

$$\left\{2, -\frac{1}{3}, \frac{1}{5}\right\}, \quad \left\{2, \frac{1}{3}, -\frac{1}{5}\right\}, \quad \left\{1, -\frac{2}{3}, \frac{1}{5}\right\},$$

$$\left\{1, \frac{1}{3}, -\frac{2}{5}\right\}, \quad \left\{-1, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{5}\right\}, \quad \left\{-1, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{5}\right\}.$$

(b) Řešme soustavu

$$(10) \qquad \begin{aligned} x + y + z &= 6, \\ xy + yz + zx &= 11, \\ (x - y)(x - z)(y - z) &= -2. \end{aligned}$$

Zde *není* symetrická levá strana třetí rovnice; povýšíme-li však třetí rovnici na druhou, dostaneme vlevo symetrický polynom

$$(x - y)^2 (x - z)^2 (y - z)^2 = -4e_1^3e_3 + e_1^2e_2^2 + \\ + 18e_1e_2e_3 - 4e_2^3 - 27e_3^2,$$

který by se měl rovnat 4. Protože z obou prvních rovnic soustavy (10) máme $e_1 = 6$, $e_2 = 11$, dává třetí rovnice (po umocnění!) kvadratickou rovnici pro e_3:

$$e_3^2 - 12e_3 + 36 = 0,$$

která má jeden (dvojnásobný) kořen $e_3 = 6$. Řešení x, y, z soustavy (10) tedy najdeme pomocí kořenů kubické rovnice

$$t^3 - 6t^2 + 11t - 6 = 0,$$

tj. pomocí čísel $t_1 = 1$, $t_2 = 2$, $t_3 = 3$. Těmto kořenům odpovídá šest trojic x, y, z, ty ovšem řeší nikoliv soustavu (10), nýbrž soustavu, v níž je třetí rovnice umocněna. Musíme se proto ještě přesvědčit, která z uvedených šesti trojic vyhovuje třetí rovnici v (10), a najdeme nakonec tři řešení soustavy (10):

$$\{1, 2, 3\}, \quad \{2, 3, 1\} \quad \text{a} \quad \{3, 1, 2\}.$$

(c) Řešme v oboru reálných čísel soustavu

$$(11)\qquad \begin{aligned} 8(u + v + w) &= 73, \\ uvw &= 1, \\ \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v} + \sqrt[3]{w} &= \sqrt[3]{uv} + \sqrt[3]{vw} + \sqrt[3]{wu}. \end{aligned}$$

Zde máme co činit se symetrickými funkcemi, ale u třetí rovnice to nejsou symetrické polynomy. Položíme-li však

$$(12)\qquad u = x^3, \quad v = y^3, \quad w = z^3,$$

dostaneme z (11) soustavu

$$(13)\qquad \begin{aligned} 8(x^3 + y^3 + z^3) &= 73, \\ x^3y^3z^3 &= 1, \\ x + y + z &= xy + yz + zx, \end{aligned} \qquad *)$$

kterou můžeme zapsat též takto:

$$\begin{aligned} 8s_3 &= 73 \text{ (čili } 8(e_1^3 - 3e_1e_2 + 3e_3) = 73), \\ e_3^3 &= 1 \text{ (čili } e_3 = 1), \\ e_1 &= e_2. \end{aligned}$$

---

*) Zde jsme použili (a i v dalším použijeme) toho, že pro reálné číslo r definujeme třetí odmocninu z r opět jako **reálné** číslo, speciálně tedy klademe pro $r \in R$

$$\sqrt[3]{r^3} = r.$$

Činíme tak, aby naše úvahy byly pokud možno jednoznačné; čtenář ovšem ví, že třetí odmocninu z jedné lze definovat trojím způsobem:

$$\sqrt[3]{1} = 1 \text{ nebo } -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ nebo } -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Kdybychom připustili tuto „trojznačnost“, naše úvahy by se značně zkomplikovaly. (Přesvědčte se o tom na příkladu, který právě počítáte!)

To vede na kubickou rovnici pro e_1:

$$8e_1^3 - 24e_1^2 - 49 = 0. \tag{14}$$

Její kořeny jsou $e_1 = \frac{7}{2}$, $e_1 = -\frac{1}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{4}\,\mathrm{i}$, $e_1 = -\frac{1}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{4}\,\mathrm{i}$ a najdeme je buď opět pomocí Cardanových vzorců, nebo tím, že první řešení uhádneme [stačí napsat rovnici (14) ve tvaru $(2e_1)^3 - 6(2e_1)^2 - 49 = 0$ s řešením $2e_1 = 7$] a místo (14) pak řešíme kvadratickou rovnici.

Tím dostáváme tři trojice e_1, e_2, e_3, pomocí nichž můžeme utvořit tři kubické rovnice:

$$t^3 - \frac{7}{2}t^2 + \frac{7}{2}t - 1 = 0,$$

$$t^3 + \left(\frac{1}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{4}\,\mathrm{i}\right)t^2 - \left(\frac{1}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{4}\,\mathrm{i}\right)t - 1 = 0,$$

$$t^3 + \left(\frac{1}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{4}\,\mathrm{i}\right)t^2 - \left(\frac{1}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{4}\,\mathrm{i}\right)t - 1 = 0.$$

Z těchto rovnic nás zajímá pouze první, protože hledáme r e á l n á řešení soustavy (13). Uvedená kubická rovnice má řešení $t_1 = 1$, $t_2 = 2$, $t_3 = \frac{1}{2}$, takže šest trojic x, y, z řešení soustavy (13) vznikne různými permutacemi trojice čísel $1, 2, \frac{1}{2}$. Šest trojic u, v, w reálných řešení soustavy (11) pak dostaneme podle vzorců (12) různými permutacemi trojice čísel $1, 8, \frac{1}{8}$.

(d) Řešme soustavu

$$(15)\qquad \begin{aligned} x + y + z &= 2a, \\ x^2 + y^2 - z^2 &= a^2, \\ x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz &= -a^3, \end{aligned}$$

kde a je reálné číslo, $a \neq 0$. Zde není symetrickým polynomem levá strana druhé rovnice, ale přesto náš běžný postup povede k cíli — ovšem především díky vhodné konstelaci polynomů na levé straně a konstant na pravé straně soustavy (15): Zapíšeme-li druhou rovnici ve tvaru

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + 2z^2,$$

dostaneme z (15) soustavu

$$\begin{aligned} e_1 &= 2a, \\ s_2 &= a^2 + 2z^2 \text{ (čili } e_1^2 - 2e_2 = a^2 + 2z^2\text{)}, \\ s_3 - 3e_3 &= -a^3 \text{ (čili } e_1^3 - 3e_1e_2 = -a^3\text{)}. \end{aligned}$$

Z první rovnice máme

$$(16)\qquad e_1 = 2a,$$

z třetí rovnice pak najdeme

$$(17)\qquad e_2 = \frac{3}{2} a^2,$$

a z druhé rovnice plyne konečně

$$4a^2 - 3a^2 = a^2 + 2z^2 \quad \text{čili} \quad z = 0.$$

Dostali jsme tak soustavu

$$\begin{aligned} x + y &= 2a, \\ xy &= \frac{3}{2} a^2, \end{aligned}$$

jejíž řešení určíme pomocí kořenů t_1, t_2 kvadratické rovnice

$$t^2 - 2at + \frac{3}{2}a^2 = 0$$

(viz kap. IV). Soustava (15) má tedy dvě řešení

$$\left\{a\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right), a\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right), 0\right\} \quad \text{a}$$

$$\left\{a\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right), \quad a \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right), 0\right\}.$$

V.4. Úloha. Uvědomte si, kde jsme při řešení předcházejícího příkladu využili toho, že $a \neq 0$, a nalezněte řešení soustavy (15) pro $a = 0$.

Je zřejmé, že vlastností elementárních symetrických funkcí lze využít při různých úlohách souvisejících s kubickými rovnicemi a jejich kořeny. Dále se tyto funkce hodí při zjednodušování složitých výrazů, při dokazování různých identit apod. Uvedeme nyní několik typických příkladů.

V.5. Příklad. Sestavme kubické rovnice, jejichž kořeny jsou druhými, resp. třetími mocninami kořenů kubické rovnice

(18) $$11t^3 + 90t^2 + 121t + 506 = 0.$$

Mohli bychom kořeny této rovnice vypočítat, umocnit je na druhou, resp. na třetí a sestavit příslušné kubické rovnice; to by však bylo dosti náročné [kořeny rovnice jsme už našli — viz příklad V.2 (c): naše rovnice (18) je totiž rovnice (7)]. Místo toho však využijeme toho, že kubická rovnice, jejíž kořeny jsou druhé, resp. třetí mocniny kořenů x, y, z rovnice (18), má tvar

$$t^3 - pt^2 + qt - r = 0,$$

kde

$$p = x^2 + y^2 + z^2, \quad q = x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2,$$
$$r = x^2y^2z^2,$$

resp.

$$p = x^3 + y^3 + z^3, \quad q = x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3,$$
$$r = x^3y^3z^3.$$

Protože

$$x^2 + y^2 + z^2 = e_1^2 - 2e_2,$$

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = \frac{1}{2} S_{2.2.0} = \frac{1}{2}(s_2^2 - s_4) = e_2^2 - 2e_1e_3,$$

$$x^2y^2z^2 = e_3^2$$

a

$$x^3 + y^3 + z^3 = e_1^3 - 3e_1e_2 + 3e_3,$$

$$x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3 = \frac{1}{2} S_{3.3.0} = \frac{1}{2}(s_3^2 - s_6) =$$
$$= e_2^3 + 3e_3^2 - 3e_1e_2e_3,$$

$$x^3y^3z^3 = e_3^3$$

(ověřte tyto formule!), a protože

$$e_1 = -\frac{90}{11}, \; e_2 = 11, \; e_3 = -46,$$

zjistíme nakonec, že hledané kubické rovnice mají tvar

$$t^3 - \frac{5438}{121} t^2 - \frac{6949}{11} t - 2116 = 0,$$

resp.

$$t^3 + \frac{553\,308}{1331}t^2 - 4741t + 97\,336 = 0.$$

V.6. Příklady. (a) Nechť $x + y + z = 0$. Dokážeme, že pak platí tyto identity:

$$x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz, \tag{19}$$

$$x^4 + y^4 + z^4 = 2(xy + yz + zx)^2, \tag{20}$$

$$\frac{x^5 + y^5 + z^5}{5} = \frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} \cdot \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}. \tag{21}$$

Důkaz využívá vzorců z úlohy II.3. Protože $e_1 = 0$ (tj. $x + y + z = 0$), vypadají vzorce pro součty s_2, s_3, s_4 a s_5 takto:

$$s_2 = -2e_2,$$

$$s_3 = 3e_3 \quad \text{[to je vzorec (19)]},$$

$$s_4 = 2e_2^2 \quad \text{[to je vzorec (20)]},$$

$$s_5 = -e_2 s_3 + e_3 s_2 = -5e_2 e_3 = 5 . \frac{s_2}{2} \cdot \frac{s_3}{3}$$

[a to je vzorec (21)].

(b) Dokážeme, že když $x + y + z = x^2 + y^2 + z^2 = x^3 + y^3 + z^3 = 1$, pak $xyz = 0$.

Je tedy $e_1 = s_2 = s_3 = 1$. Protože $s_2 = e_1^2 - 2e_2 = 1$, plyne odtud, že $e_2 = 0$, a protože $s_3 = e_1^3 - 3e_1e_2 + 3e_3 = 1$, plyne odtud $e_3 = 0$. To je však vztah $xyz = 0$.

(c) Dokážeme, že pro reálná čísla a, b, c platí vztah

$$(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3 = 3(a - b)(b - c)(c - a).$$

Plyne to z (19), kde položíme $x = a - b$, $y = b - c$, $z = c - a$. Podmínka $x + y + z = 0$ je zřejmě splněna.

(d) Rozložíme v součinitele výraz

$$P(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2y^2z^2 - \\ - 2z^2x^2.$$

Je $P = s_4 - S_{2,2,0} = s_4 - (s_2^2 - s_4) = 2s_4 - s_2^2 = 2(e_1^4 - 4e_1^2e_2 + 2e_2^2 + 4e_1e_3) - (e_1^2 - 2e_2)^2 = e_1^4 - 4e_1^2e_2 + 8e_1e_3 = e_1(e_1^3 - 4e_1e_2 + 8e_3)$. To znamená, že jedním ze součinitelů v P je výraz $e_1 = (x + y + z)$. Píšeme-li nyní $-x$ místo x (resp. $-y$ místo y, resp. $-z$ místo z), nezmění se výraz $P(x, y, z)$, neboť obsahuje jen *sudé* mocniny proměnných x, y, z. Proto je součinitelem v P i $(-x + y + z)$, $(x - y + z)$ a $(x + y - z)$. To znamená, že

$$(22) \quad P(x, y, z) = (x + y + z)(-x + y + z)(x - y + \\ + z)(x + y - z) . Z,$$

kde zbývající činitel Z musí být konstantou, protože P je polynom čtvrtého stupně a součin čtyř trojčlenů na pravé straně je také polynom čtvrtého stupně. Vztah (22) musí platit pro všechna x, y, z; dosadíme-li tam např. $x = 0$, $y = 0$, $z = 1$, zjistíme, že $Z = -1$, a tedy

$$x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2 = \\ = -(x + y + z)(-x + y + z)(x - y + z)(x + \\ + y - z).$$

(e) Zjednodušíme výraz

$$V = \frac{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz}{(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2}.$$

Zde je v čitateli symetrický polynom

$$s_3 - 3e_3 = e_1^3 - 3e_1e_2 = e_1(e_1^2 - 3e_2),$$

ve jmenovateli symetrický polynom

$$2s_2 - 2e_2 = 2e_1^2 - 4e_2 - 2e_2 = 2e_1^2 - 6e_2 =$$
$$= 2(e_1^2 - 3e_2);$$

je-li tedy $e_1^2 - 3e_2 \neq 0$, můžeme tímto činitelem krátit a máme

$$V = \frac{e_1}{2} = \frac{x + y + z}{2}.$$

V.7. Úloha. Dokažte toto tvrzení: *Platí-li pro čísla x, y, z, u, v, w vztahy*

$$x + y + z = u + v + w,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = u^2 + v^2 + w^2,$$
$$x^3 + y^3 + z^3 = u^3 + v^3 + w^3,$$

pak pro každé přirozené číslo n platí

$$x^n + y^n + z^n = u^n + v^n + w^n.$$

Návod. Jedná se o analogii příkladu IV.16; využijeme přitom poznámky II.9.

V.8. Příklad. Pro která reálná čísla a je v oboru reálných čísel řešitelná soustava

$$\sqrt[3]{x + 1} - \sqrt[3]{y - 5} = \sqrt[3]{x - y}, \tag{23}$$
$$(x + 1)(y - 5)(x - y) = a\,?$$

Označme

$$(24) \qquad x + 1 = u^3, \quad 5 - y = v^3, \quad y - x = w^3.$$

Pak je především

$$(25) \qquad u^3 + v^3 + w^3 = 6,$$

první rovnice soustavy (23) má tvar $u + v = -w$ čili

$$(26) \qquad u + v + w = 0$$

a druhá rovnice soustavy (23) má tvar $u^3v^3w^3 = a$ čili

$$(27) \qquad uvw = \sqrt[3]{a}$$

(viz poznámku pod čarou na str. 68). Využijeme-li formule (19) z příkladu V.6 (a), musí vzhledem k podmínce (26) platit $u^3 + v^3 + w^3 = 3uvw$ čili $6 = 3\sqrt[3]{a}$. Nutnou podmínkou řešitelnosti soustavy (23) je tedy podmínka

$$a = 8.$$

Hledejme nyní řešení soustavy (23) (s $a = 8$). Vyjdeme ze soustavy (25), (26), (27) a zjistíme, že z ní plyne $e_1 = 0$, $e_3 = 2$, zatímco na e_2 žádnou podmínku neklademe. Řešení u, v, w soustavy (25)—(27) tedy určíme podle věty V.1 pomocí kořenů kubické rovnice

$$(28) \qquad t^3 + e_2 t - 2 = 0.$$

Označme

$$D = 1 + \left(\frac{e_2}{3}\right)^3.$$

Pak platí:

pro $D > 0$ (tj. pro $e_2 > -3$) má rovnice (28) jeden reálný kořen a dva komplexně sdružené kořeny, pro $D \leqq 0$ (tj. pro $e_2 \leqq -3$) má rovnice (28) tři reálné kořeny.

Protože hledáme reálná řešení, omezíme se na druhý případ. Zvolme třeba $e_2 = -3$. Pak má rovnice (28) kořeny $t_1 = 2$, $t_2 = t_3 = -1$. Soustava (25) — (27) má *tři* řešení $\{u, v, w\}$:

$$\{2, -1, -1\}, \{-1, 2, -1\}, \{-1, -1, 2\}$$

(podle věty V.1 je těchto řešení šest, ale opakují se po dvou), a těmto trojicím odpovídají podle vzorců (24) *tři* řešení soustavy (23):

$$x = 7, \quad y = 6; \quad x = -2, \quad y = -3 \quad \text{a}$$

$$x = -2, \quad y = 6.$$

Podobně bychom postupovali i pro $e_2 < -3$.

V.9. Poznámka. Uvědomte si důležitost poznámky pod čarou na str. 68! Můžeme si to ilustrovat na příkladu soustavy

$$\text{(23*)} \qquad \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{y-5} = 3 + \sqrt[3]{x-y},$$

$$(x+1)(y-5)(x-y) = 8,$$

která se od soustavy (23) liší (pro $a = 8$) „jen" sčítancem 3 na pravé straně první rovnice. Budeme-li postupovat stejně jako v příkladu V.8, dojdeme nakonec ke kubické rovnici

$$\text{(28*)} \qquad t^3 - 3t^2 + 3t - 2 = 0,$$

která je analogií kubické rovnice (28). Pomocí jejích kořenů určíme trojice u, v, w, takže např. máme

$$u = 2, \quad v = \frac{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}, \quad w = \frac{1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}.$$

Této trojici odpovídá podle vzorců (24) dvojice řešení soustavy (23*)

$$x = 7, \qquad y = 6.$$

Tato dvojice však řeší i soustavu (23) (pro $a = 8$), takže docházíme ke sporu. Kde je tedy chyba? Napišme si první rovnici soustavy (23*) pro naše hodnoty x, y:

$$\sqrt[3]{8} - \sqrt[3]{1} = 3 + \sqrt[3]{1}.$$

Tato rovnost není splněna, definujeme-li $\sqrt[3]{1}$ jako 1 (a tedy $\sqrt[3]{8}$ jako 2), je však splněna, definujeme-li třeba $\sqrt[3]{8}$ jako 2, $\sqrt[3]{1}$ vlevo jako $-\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$, vpravo jako $-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$, tj. „využijeme-li" nejednoznačnosti třetí odmocniny.

Oblíbenou úlohou školské matematiky je odstraňování iracionálních výrazů ze jmenovatele zlomku. Máme-li např. upravit zlomek

$$r = \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$$

tak, aby v jmenovateli bylo číslo racionální, vynásobíme čitatele i jmenovatele výrazem $\sqrt{2} - \sqrt{3}$ a užijeme vzorce pro rozdíl čtverců. Pak bude

$$r = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3} - \sqrt{2}.$$

Horší je to u zlomků, v nichž je ve jmenovateli součet tří sčítanců. I zde lze využít vzorce pro rozdíl čtverců, který použijeme (při vhodném uzávorkování) dvakrát, můžeme si však vypomoci také elementárními symetrickými funkcemi.

V.10. Příklad. Upravme zlomek

$$r = \frac{1}{\sqrt{u} + \sqrt{v} + \sqrt{w}}.$$

Označme $\sqrt{u} = x$, $\sqrt{v} = y$, $\sqrt{w} = z$. Pak je jmenovatel roven e_1, a abychom se zbavili odmocnin, musíme e_1 vynásobit vhodným výrazem tak, aby vzniklý součin obsahoval jen s u d é mocniny proměnných x, y, z, tedy např. výrazy s_2 nebo s_4. Protože

$$s_2 = e_1^2 - 2e_2,$$

$$s_4 = e_1^4 - 4e_1^2e_2 + 4e_1e_3 + 2e_2^2,$$

vidíme, že v obou výrazech vystupuje e_1 jako činitel všude kromě posledního sčítance. Je tedy třeba oba výrazy vhodně zkombinovat — tak, aby jejich poslední sčítance zmizely. Utvořme tedy výraz

$$(29)\quad s_2^2 - 2s_4 = e_1^4 - 4e_1^2e_2 + 4e_2^2 - 2(e_1^4 - 4e_1^2e_2 + 4e_1e_3 + 2e_2^2) = e_1(-e_1^3 + 4e_1e_2 - 8e_3);$$

ihned vidíme, že stačí vynásobit čitatele i jmenovatele zlomku r číslem

$$4e_1e_2 - e_1^3 - 8e_3 = 4(x + y + z)(xy + yz + zx) - (x + y + z)^3 - 8xyz = 4(\sqrt{u} + \sqrt{v} + \sqrt{w})(\sqrt{uv} + \sqrt{vw} + \sqrt{wu}) - (\sqrt{u} + \sqrt{v} + \sqrt{w})^3 - 8\sqrt{uvw},$$

a dostaneme zlomek, v jehož jmenovateli bude výraz

$$s_2^2 - 2s_4 = (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2(x^4 + y^4 + z^4) =$$
$$= (u + v + w)^2 - 2(u^2 + v^2 + w^2).$$

Tento výraz už neobsahuje žádné odmocniny.

V.11. Poznámky. (a) Upravený tvar zlomku r z předchozího příkladu sice nemá ve jmenovateli odmocniny, ale příliš přehledně nevypadá — zvláště čitatel. Můžeme se sice pokusit o další úpravy, např. čitatel lze psát i jinak, neboť

$$4e_1e_2 - e_1^3 - 8e_3 = e_1e_2 - s_3 - 5e_3,$$

ale obecně tyto úpravy už velké zjednodušení nepřinesou.

(b) Čtenář si jistě sám odvodí postup, jímž lze postupovat při usměrňování zlomků, u nichž je v čitateli výraz $\sqrt[n]{u} + \sqrt[n]{v} + \sqrt[n]{w}$ pro $n = 3, 4, \ldots$. Pro procvičení doporučujeme podrobněji vyšetřit alespoň případy $n = 3$ a $n = 4$.

(c) Úpravy, o nichž jsme hovořili, se nehodí jen u zlomků. Chceme-li například upravit rovnici

$$\sqrt{u} + \sqrt{v} + \sqrt{w} = 0 \tag{30}$$

tak, aby neobsahovala odmocniny, můžeme užít výsledků z příkladu V.10. Rovnice (30) má totiž tvar

$$e_1 = 0$$

(při označení $x = \sqrt{u}$, $y = \sqrt{v}$, $z = \sqrt{w}$); vynásobíme-li tuto rovnost výrazem $4e_1e_2 - e_1^3 - 8e_3$, přejde naše rovnice v důsledku vzorce (29) v rovnici

$$s_2^2 - 2s_4 = 0,$$

tj. v rovnici

$$(u + v + w)^2 - 2(u^2 + v^2 + w^2) = 0,$$

která neobsahuje odmocniny.

Přejdeme nyní k *nerovnostem* pro symetrické funkce tří proměnných a k jejich využití při řešení různých úloh. Především platí pro každou trojici x, y, z kladných čísel nerovnost

$$e_1 e_2 \geqq 9e_3; \tag{31}$$

je to speciální případ nerovnosti (28) kap. III pro $n = 3$ (viz poznámku III.11). Zato nerovnost

$$e_1^2 \geqq 4e_2,$$

kterou jsme pro dvě proměnné odvodili ve větě IV.8, pro tři proměnné neplatí. Platí však nerovnost jiná:

V.12. Příklad. Jsou-li x, y, z reálná čísla, pak platí

$$e_1^2 \geqq 3e_2, \tag{32}$$

přičemž rovnost zde nastává právě tehdy, je-li $x = y = z$. Dále platí

$$e_2^2 \geqq 3e_1 e_3, \tag{33}$$

a pro kladná čísla x, y, z pak navíc

$$e_1^3 \geqq 27e_3, \tag{34}$$

$$e_2^3 \geqq 27e_3^2. \tag{35}$$

Nerovnost (32) je důsledkem zřejmého vztahu

$$(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geqq 0.$$

Tuto nerovnost, v níž rovnost nastává právě pro $x = y = z$, můžeme totiž pro roznásobení zapsat ve tvaru

$$2s_2 - 2e_2 \geqq 0$$

čili

$$2(e_1^2 - 2e_2) - 2e_2 \geqq 0$$

a odtud už máme (32).

Položíme-li nyní $x = uv$, $y = vw$ a $z = wu$, má nerovnost (32) tvar

$$(uv + vw + wu)^2 \geqq 3(uv^2w + uvw^2 + u^2vw)$$

čili

$$(uv + vw + wu)^2 \geqq 3uvw(u + v + w),$$

a to není nic jiného než nerovnost (33).

Z nerovností (32) a (31) plyne

$$e_1^4 = e_1^2e_1^2 \geqq e_1^2 3e_2 = 3e_1(e_1e_2) \geqq 3e_1 9e_3 = 27e_1e_3$$

a po vykrácení e_1 máme odtud (34) (všechna e_i jsou kladná, neboť x, y, z jsou kladná).

Podobně odvodíme i nerovnost (35) z (33) a (31): Je

$$e_2^3 = e_2e_2^2 \geqq e_2 3e_1e_3 = 3e_3(e_1e_2) \geqq 3e_3 9e_3 = \\ = 27e_3^2.$$

V.13. Úloha. Nerovnosti (32) a (33) jsme dokázali **přímo**, bez použití nerovnosti (31). Dokažte, že naopak nerovnost (31) je důsledkem nerovností (32) a (33).

Návod. Znásobte obě uvedené nerovnosti.

V.14. Příklady. (a) Pro libovolná reálná čísla x, y, z platí

(36) $$x^2 + y^2 + z^2 \geqq \frac{1}{3}(x + y + z)^2,$$

$$(37) \qquad (x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) \geqq xyz(x + y + z).$$

Nerovnost (36) lze totiž zapsat ve tvaru $s_2 \geqq \frac{1}{3} e_1^2$, a protože $s_2 = e_1^2 - 2e_2$, plyne (36) ihned z (32).

Nerovnost (37) lze pak psát ve tvaru $\frac{1}{2} S_{2,2,0} \geqq e_1e_3$, a protože $\frac{1}{2} S_{2,2,0} = \frac{1}{2}(s_2^2 - s_4) = e_2^2 - 2e_1e_3$ (viz např. příklad V.5 nebo V.6 (d)), plyne (37) ihned z (33).

(b) Pro kladná čísla x, y, z platí

$$(38) \qquad (x + y)(y + z)(z + x) \geqq 8xyz,$$

$$(39) \qquad \sqrt[3]{xyz} \leqq \frac{x + y + z}{3}.$$

Nerovnost (38) má na levé straně výraz $S_{2,1,0} + 2e_3 = s_2s_1 - s_3 + 2e_3 = (e_1^2 - 2e_2)\,e_1 - (e_1^3 - 3e_1e_2 + 3e_3) + 2e_3 = e_1e_2 - e_3$ a na pravé straně výraz $8e_3$; je tedy důsledkem nerovnosti (31).

Umocníme-li nerovnost (39) na třetí, má tvar $e_3 \leqq \frac{1}{27} e_1^3$, a to je nerovnost (34).

(c) Je-li $x + y + z = 0$, je $xy + yz + zx \leqq 0$. Plyne to ihned z nerovnosti (32), uvědomíme-li si, že zadání říká: je-li $e_1 = 0$, je $e_2 \leqq 0$.

V.15. Příklad. Jsou-li a, b, c strany trojúhelníka, platí

$$(40) \qquad (a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c) > 2(a^3 + b^3 + c^3).$$

Položíme-li totiž $x = a + b - c$, $y = a - b + c$, $z = -a + b + c$, je $a = \frac{1}{2}(x + y)$, $b = \frac{1}{2}(x + z)$,

$c = \frac{1}{2}(y + z)$ a po dosazení těchto výrazů do (40) dostaneme po úpravách nerovnost

$$\frac{1}{2}(s_2 + e_2)\, e_1 > \frac{1}{2} s_3 + \frac{3}{4} S_{2,1,0} \quad \text{čili} \quad e_1 e_2 + 3e_3 > 0 .$$

Poslední nerovnost však zřejmě platí, neboť $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ (proč?).

V.16. Úloha. Dokažte, že pro strany a, b, c trojúhelníka platí

$$(41) \quad (a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) \leqq abc .$$

Návod. Postupujte jako v příkladu V.15 a využijte nerovnosti (38).

V.17. Příklad. Jaké maximální hodnoty nabývá funkce

$$F(x, y, z) = (1 + x)(1 + y)(1 + z),$$

jestliže nezáporné proměnné x, y, z splňují podmínku $x + y + z = 1$?

Protože $F(x, y, z) = 1 + e_1 + e_2 + e_3 = 2 + e_2 + e_3$ (je totiž $e_1 = 1$), dostaneme pomocí nerovností (31) a (32)

$$F(x, y, z) \leqq 2 + e_2 + \frac{1}{9} e_1 e_2 = 2 + e_2 + \frac{1}{9} e_2 =$$

$$= 2 + \frac{10}{9} e_2 \leqq 2 + \frac{10}{9} \cdot \frac{1}{3} e_1^2 = 2 + \frac{10}{27} = \frac{64}{27} ;$$

rovnost zde nastane právě tehdy, bude-li $x = y = z$, tj. pro $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{1}{3}$, $z = \frac{1}{3}$.

V.18. Úloha. Nechť x, y, z jsou kladná čísla a nechť kladná čísla u, v, w leží mezi nejmenším a největším z čísel x, y, z. Nechť platí

$$x + y + z \leqq u + v + w. \tag{42}$$

Dokažte, že pak je

$$xyz \leqq uvw \tag{43}$$

a

$$xy + yz + zx \leqq uv + vw + wu. \tag{44}$$

(*Poznámka.* Úloha V.18 byla použita v I. kole kategorie A XIII. ročníku MO.)

V.19. Příklad. Jsou-li α, β, γ úhly ostroúhlého trojúhelníka, pak platí

$$\cos\alpha . \cos\beta . \cos\gamma \leqq \frac{1}{8}. \tag{45}$$

Zvolíme-li totiž $x = 2bc\cos\alpha$, $y = 2ac\cos\beta$, $z = 2ab\cos\gamma$, $u = a^2$, $v = b^2$ a $w = c^2$, kde a, b, c jsou strany trojúhelníka, pak jsou splněny předpoklady úlohy V.18 (je dokonce $x + y + z = u + v + w$ — dokažte!). Nerovnost (45) je pak důsledkem nerovnosti (43).

Jiný důkaz spočívá ve využití nerovnosti (38): vyjádříme $\cos\alpha$, $\cos\beta$ a $\cos\gamma$ pomocí kosinové věty a užijeme (38) s $x = b^2 + c^2 - a^2$, $y = c^2 + a^2 - b^2$ a $z = a^2 + b^2 - c^2$ (proveďte!).

V.20. Poznámka. Vraťme se na závěr této kapitoly k nerovnosti $e_1^2 \geqq 4e_2$, která nám tak posloužila v kapitole IV a která pro elementární symetrické funkce tří proměnných neplatí. Tuto nerovnost jsme odvodili ve větě IV.8 na základě vlastností diskriminantu D kvadratické rovnice

$$t^2 - e_1t + e_2 = 0,$$

která má kořeny x, y: je

$$D = e_1^2 - 4e_2 = (x + y)^2 - 4xy = (x - y)^2. \tag{46}$$

Diskriminant kvadratické rovnice je důležitým pomocným prostředkem pro její řešení; všimněme si proto vzorce (46) a hledejme jeho analogie pro kubické rovnice.

Mějme tedy kubickou rovnici

$$t^3 - e_1t^2 + e_2t - e_3 = 0, \tag{47}$$

která má kořeny x, y, z, a definujme *diskriminant D rovnice* (47) jako výraz

$$D = (x - y)^2 (y - z)^2 (z - x)^2. \tag{48}$$

Lze snadno ukázat, že (viz též příklad V.3 (b))

$$D = -4e_1^3e_3 + e_1^2e_2^2 + 18e_1e_2e_3 - 4e_2^3 - 27e_3^2. \tag{49}$$

Máme-li kubickou rovnici (47) s reálnými koeficienty e_1, e_2, e_3, můžeme pomocí znaménka diskriminantu klasifikovat kořeny. Čtenář si jistě pomocí formule (48) snadno dokáže, že

(a) *je-li $D > 0$, jsou všechny kořeny rovnice* (47) *reálné a různé;*

(b) *je-li $D = 0$, jsou alespoň dva kořeny rovnice* (47) *sobě rovné;*

(c) *je-li $D < 0$, má rovnice* (47) *jeden reálný a dva komplexně sdružené kořeny.*

Tato klasifikace není úplná: v případě, že $D = 0$, nevíme, zda kořen náhodou není trojnásobný. Zde existuje další pomůcka — symetrický polynom

(50) $$D^* = e_1^2 - 3e_2\,.$$

Je totiž

$$2D^* = (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2$$

(dokažte!) a bod (b) naší výše uvedené klasifikace můžeme upřesnit takto:

(b$_1$) *je-li* $D = 0$ *a* $D^* \neq 0$, *má rovnice* (47) *jeden dvojnásobný kořen*;

(b$_2$) *je-li* $D = 0$ *i* $D^* = 0$, *má rovnice* (47) *trojnásobný kořen.*

Odtud už plyne toto tvrzení, které je analogií věty IV.8:

Buďte e_1, e_2, e_3 *daná reálná čísla. K tomu, aby řešení* x, y, z *soustavy*

(51) $$\begin{aligned} x + y + z &= e_1\,, \\ xy + yz + zx &= e_2\,, \\ xyz &= e_3 \end{aligned}$$

byla reálná, je nutné a stačí, aby platilo

(52) $$D \geqq 0\,.$$

K tomu, aby čísla x, y, z *byla nezáporná, je nutné a stačí, aby vedle* (52) *platilo ještě*

$$e_1 \geqq 0\,, \quad e_2 \geqq 0\,, \quad e_3 \geqq 0\,.$$

V.21. Příklad. Jsou-li x, y, z taková reálná čísla, že

$$xyz > 0 \qquad \text{a} \qquad x + y + z > 0\,,$$

pak

$$x^n + y^n + z^n > 0$$

pro každé přirozené číslo n.

Protože čísla x, y, z jsou reálná, je $D \geqq 0$. Podle předpokladu je $e_3 > 0$ a $e_1 > 0$; pokud jde o e_2, jsou dvě možnosti:

(a) $e_2 \geqq 0$: Pak jsou podle výše uvedeného tvrzení všechna čísla x, y, z nezáporná, a protože $e_3 > 0$, jsou dokonce kladná. Je tedy i $x^n + y^n + z^n > 0$.

(b) $e_2 < 0$: Využijeme rekurentní formule

$$s_n = e_1 s_{n-1} - e_2 s_{n-2} + e_3 s_{n-3} \tag{53}$$

(viz úlohu II.3), kde všechny koeficienty e_1, $-e_2$ a e_3 jsou kladné. Protože

$$s_1 = x + y + z > 0,$$

$$s_2 = x^2 + y^2 + z^2 > 0,$$

$$s_3 = 3e_1^2 - 3e_1 e_2 + 3e_3 > 0,$$

plyne z (53) matematickou indukcí, že $s_n > 0$ pro všechna přirozená čísla n, a naše tvrzení je dokázáno.

Kapitola VI.

SYMETRICKÉ PRŮMĚRY

Tato kapitola je poněkud obtížnější než kapitoly předcházející a bude vyžadovat shovívavou a trpělivou spolupráci. Doporučujeme proto čtenáři, aby si jednotlivé vztahy, s nimiž se v dalším setká, podle možnosti konkretizoval, aby si je rozepsal pro různé konkrétní hodnoty parametrů n, k atp. Věříme, že to přispěje k snazšímu pochopení látky, o jejíž užitečnosti — a to nejen pro řešení úloh matematické olympiády — nepochybujeme.

Budeme se nyní zabývat elementárními symetrickými funkcemi n proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Zavedeme nejprve označení, které zkrátí zápis: uspořádanou n-tici čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ označíme tučným písmenem $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n);$$

$\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$ bude znamenat, že $x_i \geqq 0$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$;
$\mathbf{x} > \mathbf{0}$ bude znamenat, že $x_i > 0$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$;
pro $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ označíme

$$\frac{1}{\mathbf{x}} = \left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_n}\right)$$

a pro $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ bude

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n).$$

Budeme-li chtít zdůraznit proměnné, z nichž jsou symetrické funkce vytvořeny, zapíšeme to takto:

$$e_k = e_k(\mathbf{x}).$$

Vztah (17) z kap. III můžeme při našem označení zapsat takto:

(1) $$e_{n-i}(\mathbf{x}) = e_n(\mathbf{x}) . e_i\left(\frac{1}{\mathbf{x}}\right), \quad i = 1, 2, \ldots, n - 1.$$

Označíme-li tučným $\mathbf{e}$ uspořádanou n-tici $e_1, e_2, \ldots, e_n$, tj.

$$\mathbf{e} = (e_1, e_2, \ldots, e_n),$$

platí podle příkladu III.8 tato ekvivalence:

(2) $$\mathbf{e} > \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{x} > \mathbf{0}.$$

A konečně zaveďme pro úplnost ještě funkci e_0: položíme identicky

(3) $$e_0(\mathbf{x}) = 1$$

a formule (1) pak platí pro $i = 0, 1, \ldots, n$.

Čtenář, který zná pojem aritmetického a geometrického průměru $A_n(\mathbf{x})$ a $G_n(\mathbf{x})$ (viz např. [1], str. 15), si jistě všiml, že

(4) $$A_n(\mathbf{x}) = \frac{e_1(\mathbf{x})}{n}, \qquad G_n(\mathbf{x}) = [e_n(\mathbf{x})]^{1/n}.$$

Protože n je právě počet sčítanců v elementární symetrické funkci e_1, je $\frac{e_1}{n}$ skutečně *aritmetický průměr všech sčítanců v* e_1. Zobecněme tento poznatek: Jak jsme ukázali (či spíše konstatovali) na začátku kap. III, je počet sčítanců v k-té elementární symetrické funkci e_k roven číslu $\binom{n}{k}$. Utvořme tedy aritmetický průměr všech sčítanců v e_k a označme

$$(5) \qquad p_k = p_k(\mathbf{x}) = \frac{e_k(\mathbf{x})}{\binom{n}{k}}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

VI.1. Definice. Funkci $p_k(\mathbf{x})$ nazveme *k-tým elementárním symetrickým průměrem.*

Funkce $p_k(\mathbf{x})$ je zřejmě opět symetrickým polynomem. Všimneme si nyní blíže jejích vlastností. Především lze vztahy (4) zapsat takto:

$$(6) \qquad p_1(\mathbf{x}) = A_n(\mathbf{x}), \qquad p_n(\mathbf{x}) = [G_n(\mathbf{x})]^n;$$

je totiž $\binom{n}{1} = n$ a $\binom{n}{n} = 1$. Z formule (1) a z vlastností kombinačních čísel pak plyne pro $x_i \neq 0$ ($i = 1, 2, \ldots, \ldots, n$) rovnost

$$(7) \qquad p_{n-i}(\mathbf{x}) = p_n(\mathbf{x}) . p_i\left(\frac{1}{\mathbf{x}}\right), \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

VI.2. Úloha. Budiž $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a označme $\tilde{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$. Dále buďte

$$\tilde{e}_k = e_k(\tilde{\mathbf{x}}) \quad \text{a} \quad \tilde{p}_k = \frac{\tilde{e}_k}{\binom{n-1}{k}}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

elementární symetrické funkce a symetrické průměry, odpovídající uspořádané $(n-1)$-tici $\tilde{\mathbf{x}}$. Ukažte, že pro $k = 1, 2, \ldots, n-1$ platí

$$(8) \quad e_k = \tilde{e}_k + x_n \tilde{e}_{k-1}, \quad p_k = \frac{n-k}{n} \tilde{p}_k + \frac{k}{n} x_n \tilde{p}_{k-1}$$

(je $e_k = e_k(\mathbf{x})$ a $p_k = p_k(\mathbf{x})$). Definujeme-li ještě $\tilde{e}_n = 0$ a $\tilde{e}_{-1} = 0$, platí vzorce (8) i pro $k = 0$ a $k = n$.

V příkladu III.9 jsme naznačili důkaz nerovnosti

$$(9) \qquad e_{k-1}e_{k+1} \leqq e_k^2 \quad \text{pro} \quad k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Ukážeme, že analogická nerovnost platí i pro funkce p_k:

VI.3. Příklad. Budiž $\mathbf{x} > \mathbf{0}$. Pak platí

$$(10) \qquad p_{k-1}p_{k+1} \leqq p_k^2 \quad \text{pro} \quad k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Rovnost v (10) nastane právě tehdy, je-li $x_1 = x_2 = \ldots$ $\ldots = x_n$.

Toto tvrzení dokážeme matematickou indukcí vzhledem k počtu proměnných n. Nerovnost (10) platí především pro $n = 2$: je to pak jediná nerovnost

$$(11) \qquad p_0 p_2 \leqq p_1^2,$$

a protože podle (6) je $p_2(\mathbf{x}) = G_2^2(\mathbf{x})$ a $p_1(\mathbf{x}) = A_2(\mathbf{x})$ a protože platí identicky $p_0(\mathbf{x}) = 1$, není (11) nic jiného než druhá mocnina známé nerovnosti

$$0 < G_2(\mathbf{x}) \leqq A_2(\mathbf{x})$$

mezi geometrickým a aritmetickým průměrem kladných čísel x_1, x_2. V této nerovnosti nastává rovnost, právě když $x_1 = x_2$, a tím je tvrzení pro $n = 2$ dokázáno.

Předpokládejme nyní, že tvrzení platí pro $n - 1$. Při označení z úlohy VI.2 je tedy

$$(12) \qquad \tilde{p}_{j-1}\tilde{p}_{j+1} \leqq \tilde{p}_j^2 \quad \text{pro} \quad j = 1, \ldots, n-2$$

s rovností právě tehdy, je-li $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1}$. Protože z (12) plyne

$$\frac{\tilde{p}_{j-1}}{\tilde{p}_j} \leqq \frac{\tilde{p}_j}{\tilde{p}_{j+1}},$$

dostáváme odtud volbou $j = 1, 2, \ldots$ sérii nerovností

$$\frac{\tilde{p}_0}{\tilde{p}_1} \leqq \frac{\tilde{p}_1}{\tilde{p}_2} \leqq \frac{\tilde{p}_2}{\tilde{p}_3} \leqq \ldots \leqq \frac{\tilde{p}_{n-3}}{\tilde{p}_{n-2}} \leqq \frac{\tilde{p}_{n-2}}{\tilde{p}_{n-1}},$$

a pro $1 \leqq i \leqq j \leqq n - 1$ tedy máme

$$\tilde{p}_{i-1}\tilde{p}_j \leqq \tilde{p}_i\tilde{p}_{j-1}. \tag{13}$$

Užijeme-li nyní vzorců (8), zjistíme, že pro $k = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n - 1$ platí

$$p_{k+1}p_{k-1} - p_k^2 = A + Bx_n + Cx_n^2,$$

kde

$$A = \frac{(n-k)^2 - 1}{n^2}\tilde{p}_{k+1}\tilde{p}_{k-1} - \frac{(n-k)^2}{n^2}\tilde{p}_k^2,$$

$$B = \frac{(n-k-1)(k-1)}{n^2}\tilde{p}_{k+1}\tilde{p}_{k-2} +$$

$$+ \frac{(n-k+1)(k+1)}{n^2}\tilde{p}_k\tilde{p}_{k-1} - \frac{2(n-k)\,k}{n^2}\tilde{p}_k\tilde{p}_{k-1};$$

$$C = \frac{k^2-1}{n^2}\tilde{p}_k\tilde{p}_{k-2} - \frac{k^2}{n^2}\tilde{p}_{k-1}^2.$$

Použijeme-li zde nerovnosti (12) pro $j = k$ a $j = k - 1$ a nerovnosti (13) pro $i = k - 1$, $j = k + 1$, dostáváme

$$A \leqq -\frac{1}{n^2}\tilde{p}_k^2, \quad B \leqq \frac{2}{n^2}\tilde{p}_k\tilde{p}_{k-1}, \quad C \leqq -\frac{1}{n^2}\tilde{p}_{k-1}^2,$$

takže nakonec je

$$p_{k+1}p_{k-1} - p_k^2 \leqq -\frac{1}{n^2}(\tilde{p}_k^2 - 2x_n\tilde{p}_k\tilde{p}_{k-1} + x_n^2\tilde{p}_{k-1}^2) = \tag{14}$$

$$= -\frac{1}{n^2}(\tilde{p}_k - x_n\tilde{p}_{k-1})^2 \leqq 0.$$

To však už je nerovnost (10). — Je-li $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$, je $p_k = x_1^k$ a v (10) zřejmě platí rovnost. Jsou-li alespoň dvě z čísel $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ různá, platí podle indukčního předpokladu ostré nerovnosti v (12) a (13), a je tedy ostrá i nerovnost (14). Je-li $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1}$, je $\tilde{p}_k = x_1\tilde{p}_{k-1}$; nerovnost (14) pak má tvar

$$p_{k+1}p_{k-1} - p_k^2 \leqq -\frac{x_1^{2(k-1)}}{n^2}(x_1 - x_n)^2 \leqq 0$$

a je ostrá právě tehdy, je-li $x_1 \neq x_n$.

VI.4. Úloha. Dokažte nerovnost (9).

Návod. Využijte definice funkcí p_k pomocí e_k, nerovnosti (10) a vlastností binomických čísel.

VI.5. Poznámky. (a) Z nerovnosti (10) nyní plyne

$$p_{i-1}p_j \leqq p_i p_{j-1}, \quad 1 \leqq i \leqq j \leqq n, \tag{15}$$

a to stejným způsobem, jakým plyne vzorec (13) z nerovnosti (12). Položíme-li v (15) $i = 1$, dostáváme vzhledem k (6) odhad pro aritmetický průměr A_n:

$$A_n(\mathbf{x}) \geqq \frac{p_j(\mathbf{x})}{p_{j-1}(\mathbf{x})}, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{16}$$

(b) Nerovnost (10) jsme dokázali za předpokladu, že $\mathbf{x} > \mathbf{0}$. Důvod je v prvním indukčním kroku: abychom mohli nerovnost $G_2(\mathbf{x}) \leqq A_2(\mathbf{x})$ povýšit na druhou, musíme mít zaručeno, že $x_1 \geqq 0$ i $x_2 \geqq 0$. Čtenář se ovšem snadno přesvědčí přímým výpočtem, že nerovnost (11) platí i bez předpokladu $\mathbf{x} > \mathbf{0}$, a tak platí i nerovnost (10) nezávisle na znaménkách čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

(c) Nerovnost (10) lze za předpokladu, že všechna x_i jsou nenulová, dokázat ještě jedním způsobem — využitím následujícího tvrzení, které uvedeme bez důkazu:

Budiž m přirozené číslo, $c_0, c_1, \ldots, c_m$ reálná čísla, a označme

$$(17) \quad F(s, t) = c_0 s^m + c_1 s^{m-1} t + c_2 s^{m-2} t^2 + \ldots + \\ + c_{m-2} s^2 t^{m-2} + c_{m-1} s t^{m-1} + c_m t^m .$$

[Funkce $t^{-m} F(s, t)$ je polynom m-tého stupně v proměnné $\frac{s}{t}$; kořeny tohoto polynomu nazveme *kořeny $\frac{s}{t}$ rovnice* $F(s, t) = 0$.] *Pak platí: Jsou-li všechny kořeny $\frac{s}{t}$ rovnice $F(s, t) = 0$ reálné, jsou reálné i všechny kořeny rovnic*

$$F_1(s, t) = 0, \qquad F_2(s, t) = 0,$$

kde

$$F_1(s, t) = m c_0 s^{m-1} + (m - 1)\, c_1 s^{m-2} t + \\ + (m - 2)\, c_2 s^{m-3} t^2 + \ldots + 2 c_{m-2} s t^{m-2} + c_{m-1} t^{m-1},$$

$$F_2(s, t) = c_1 s^{m-1} + 2 c_2 s^{m-2} t + \ldots + \\ + (m - 2)\, c_{m-2} s^2 t^{m-3} + (m - 1)\, c_{m-1} s t^{m-2} + m c_m t^{m-1}.$$

[Funkce $F_1(s, t)$, resp. $F_2(s, t)$ vznikne z $F(s, t)$ derivováním podle s, resp. podle t.]

Použijeme tohoto tvrzení pro speciální výraz

$$F(s, t) = (s + x_1 t)(s + x_2 t) \ldots (s + x_n t);$$

zde je $m = n$ a pro koeficienty c_i platí

$$c_i = e_i = \binom{n}{i} p_i;$$

kořeny $\frac{s}{t}$ rovnice $F(s, t) = 0$ jsou reálná čísla $-x_1$, $-x_2, \ldots, -x_n$. Podle výše uvedeného tvrzení jsou tedy reálné i kořeny odpovídajících polynomů F_1, F_2 (těchto kořenů je nejvýše $n - 1$). Nyní postupujeme takto: za výchozí polynom (17) považujeme F_1, resp. F_2 (tj. klademe mj. $m = n - 1$) a vytvoříme k němu odpovídající polynomy F_{11}, F_{12}, resp. F_{21}, F_{22}, které mají opět vesměs reálné kořeny (jichž je nejvýše $n - 2$). Pokračujeme-li v tomto postupu, dojdeme nakonec k polynomům tvaru

$$C_k^*(p_{k-1}s^2 + 2p_k st + p_{k+1}t^2) \tag{18}$$

($k = 1, 2, \ldots, n - 1$; C_k^* je jistá nenulová konstanta). Polynomy (18) mají jen reálné kořeny $\frac{s}{t}$; to však znamená, že diskriminant kvadratické rovnice

$$t^2 C_k^* \left(p_{k-1}\left(\frac{s}{t}\right)^2 + 2p_k \frac{s}{t} + p_{k+1}\right) = 0$$

je nezáporný:

$$4p_k^2 - 4p_{k-1}p_{k+1} \geqq 0,$$

a to je nerovnost (10).

VI.6. Příklad. Uvažujme opět $\mathbf{x} > \mathbf{0}$. Pak z nerovnosti (10) plyne, že

$$p_1 \geqq p_2^{1/2} \geqq p_3^{1/3} \geqq \ldots \geqq p_{n-1}^{1/(n-1)} \geqq p_n^{1/n}; \tag{19}$$

rovnosti zde platí právě tehdy, je-li $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Podle nerovnosti (10) je totiž

$$(p_0p_2)(p_1p_3)^2(p_2p_4)^3 \ldots (p_{k-1}p_{k+1})^k \leqq$$
$$\leqq p_1^2p_2^4p_3^6 \ldots p_k^{2k};$$

protože na levé straně je vlastně výraz

$$p_0 p_1^2 p_2^4 p_3^6 \dots p_{k-1}^{2k-2} p_k^{k-1} p_{k+1}^k ,$$

máme po vykrácení

$$p_{k+1}^k \leqq p_k^{k+1} \quad \text{čili} \quad p_k^{1/k} \geqq p_{k+1}^{1/(k+1)}$$

$(k = 1, 2, \dots, n - 1)$ a odtud už (19) plyne.

VI.7. Poznámka. Podíváme-li se na vzorce (6), vidíme, že na začátku nerovností (19) stojí aritmetický průměr $A_n(\mathbf{x})$, na konci pak geometrický průměr $G_n(\mathbf{x})$. Z (19) tedy jednak plyne nám už známá nerovnost

$$A_n(\mathbf{x}) \geqq G_n(\mathbf{x}) ,$$

jednak je vidět, kolik různých výrazů se dá ještě mezi oba průměry vložit.

VI.8. Úloha. Nechť $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$ a nechť alespoň dvě z čísel $x_1, x_2, \dots, x_n$ jsou různá. Můžeme tedy předpokládat, že

$$x_1 \leqq x_2 \leqq \dots \leqq x_{n-1} \leqq x_n$$

a že alespoň jedna z těchto nerovností je ostrá. Zvolme přirozené číslo k pevně $(1 \leqq k \leqq n)$ a označme $p = [p_k(\mathbf{x})]^{1/k}$.

Utvořme nyní z n-tice $\mathbf{x}$ novou n-tici $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ takto: Zvolíme $y_1 = p$, čísla $x_2, x_3, \dots, x_{n-1}$ ponecháme beze změny, tj. položíme $y_2 = x_2, y_3 = x_3, \dots, y_{n-1} = x_{n-1}$, a konečně zvolíme y_n takové, aby bylo $p_k(\mathbf{y}) = p_k(\mathbf{x}) = p^k$.

Dokažte, že pak platí

$$p_i(\mathbf{y}) \geqq p_i(\mathbf{x}) \quad \text{pro } i \geqq k . \tag{20}$$

Návod. Označme e_j^* elementární symetrické funkce $n - 2$ proměnných $x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$, a budiž

$$p_j^* = \frac{e_j^*}{\binom{n-2}{j}}.$$

(Podobně jako v úloze VI.2 klademe $e_0^* = 1$, $e_{-1}^* = 0$.) Ukažte, že pro $k = 1, 2, \ldots, n$ platí

$$\binom{n}{k} p_k(\mathbf{x}) = e_k(\mathbf{x}) = \tag{21}$$
$$= x_1 x_n e_{k-2}^* + (x_1 + x_n)\, e_{k-1}^* + e_k^*$$

(porovnejte se vzorci (8)!). Využijte toho, že $p_k(\mathbf{x}) = p_k(\mathbf{y}) = p^k$, a odhadněte znaménko výrazu

$$\binom{n}{i} \{p_i(\mathbf{y}) - p_i(\mathbf{x})\}.$$

VI.9. Poznámky. (a) Pomocí výsledků úlohy VI.8 můžeme opět dokázat nerovnosti (19): Zachovejme označení z úlohy VI.8, vyjděme z n-tice $\mathbf{x}$, k ní sestrojíme n-tici $\mathbf{y}$ a k té opět sestrojíme stejným způsobem n-tici $\mathbf{z}$ (tj. nejmenší z čísel $y_1, y_2, \ldots, y_n$ nahradíme číslem p a místo největšího z těchto čísel dáme takové číslo z_n, aby $p_k(\mathbf{z}) = p_k(\mathbf{y}) = p^k$), k n-tici $\mathbf{z}$ sestrojíme stejným způsobem n-tici $\mathbf{v}$ atd. Po nejvýše $n - 1$ krocích dojdeme k n-tici $\mathbf{w} = (p, p, \ldots, p)$; přitom bude

$$p_k(\mathbf{x}) = p_k(\mathbf{y}) = p_k(\mathbf{z}) = p_k(\mathbf{v}) = \ldots = p_k(\mathbf{w}) = p^k$$

a pro $i \geqq k$ bude podle (20)

$$p_i(\mathbf{x}) \leqq p_i(\mathbf{y}) \leqq p_i(\mathbf{z}) \leqq p_i(\mathbf{v}) \leqq \ldots \leqq p_i(\mathbf{w}) = p^i.$$

Odtud plyne, že pro $i \geqq k$ je

$$[p_i(\mathbf{x})]^{1/i} \leqq p = [p_k(\mathbf{x})]^{1/k}.$$

Čtenář, který zná publikaci [1], si možná uvědomil, že metoda důkazu nerovnosti (19), kterou jsme právě použili, je analogií čtvrtého důkazu nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem (viz [1], str. 26).

(b) Vzorce (21) a (8) uvádějí do souvislosti elementární symetrické funkce, resp. elementární symetrické průměry pro n proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ s týmiž funkcemi pro „kratší" vektory — pro $(n - 1)$-tice a $(n - 2)$-tice. Tyto vzorce lze zobecnit: Budiž

$$n = i + j,$$

kde i, j jsou přirozená čísla; bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $i \geqq j$. Označme pro $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ symboly $\tilde{\mathbf{x}}$ a $\hat{\mathbf{x}}$ tuto uspořádanou i-tici a j-tici:

$$\tilde{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, \ldots, x_i), \quad \hat{\mathbf{x}} = (x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_n),$$

a budiž

$$\begin{aligned} e_k &= e_k(\mathbf{x}), & k &= 0, 1, 2, \ldots, n, \\ \tilde{e}_k &= e_k(\tilde{\mathbf{x}}), & k &= 0, 1, 2, \ldots, i, \\ \hat{e}_k &= e_k(\hat{\mathbf{x}}), & k &= 0, 1, 2, \ldots, j. \end{aligned}$$

Pak platí

$$e_k = \begin{cases} \tilde{e}_k\hat{e}_0 + \tilde{e}_{k-1}\hat{e}_1 + \ldots + \tilde{e}_0\hat{e}_k \\ \qquad \text{pro } k = 0, 1, \ldots, j, \\ \tilde{e}_k\hat{e}_0 + \tilde{e}_{k-1}\hat{e}_1 + \ldots + \tilde{e}_{k-j}\hat{e}_j \\ \qquad \text{pro } k = j + 1, j + 2, \ldots, i, \\ \tilde{e}_i\hat{e}_{k-i} + \tilde{e}_{i-1}\hat{e}_{k-i+1} + \ldots + \tilde{e}_{k-j}\hat{e}_j \\ \qquad \text{pro } k = i + 1, i + 2, \ldots, n. \end{cases} \tag{22}$$

Doporučujeme čtenáři, aby se pokusil vztahy (22) dokázat.

VI.10. Úloha. Zvolme pevně přirozené číslo k, $k \leqq n$, a označme pro $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ symbolem $\mathbf{x}^{(i)}$ uspořádanou i-tici

$$\mathbf{x}^{(i)} = (x_1, x_2, \ldots, x_i), \qquad i \leqq n.$$

Dokažte, že platí: Je-li $0 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_n$, je pro $i \geqq k$

$$p_k(\mathbf{x}^{(i)}) \leqq p_k(\mathbf{x}^{(i+1)}) \leqq \ldots \leqq p_k(\mathbf{x}^{(n)}) = p_k(\mathbf{x}).$$

Návod. Pomocí druhého vzorce v (8) a pomocí nerovnosti (16) (použité ovšem pro vektor $\mathbf{x}^{(n-1)}$) dokažte, že za předpokladu $x_n \geqq x_i$ pro $i = 1, 2, \ldots, n - 1$ platí nerovnost

$$p_k(\mathbf{x}^{(n)}) \geqq p_k(\mathbf{x}^{(n-1)}).$$

Je ihned vidět, že pro libovolné n-tice $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ platí identita

$$e_1(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = e_1(\mathbf{x}) + e_1(\mathbf{y}). \tag{23}$$

Tato identita je charakteristická právě pro první elementární symetrickou funkci e_1 a pro zbývající funkce e_k obecně neplatí — je např. $e_0(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = e_0(\mathbf{x}) = e_0(\mathbf{y}) = 1$. Za předpokladu $\mathbf{x} > \mathbf{0}$, $\mathbf{y} > \mathbf{0}$ však platí pro všechny funkce e_k nerovnost

$$[e_k(\mathbf{x} + \mathbf{y})]^{1/k} \leqq [e_k(\mathbf{x})]^{1/k} + [e_k(\mathbf{y})]^{1/k} \tag{24}$$

($k = 1, 2, \ldots, n$). Doporučujeme čtenáři, aby se pokusil o důkaz nerovnosti (24) přímou cestou: my ji zde odvodíme z nerovnosti obecnější.

VI.11. Poznámka. Pro $\mathbf{x} > \mathbf{0}$, $\mathbf{y} > \mathbf{0}$ platí nerovnost

$$\frac{e_k(\mathbf{x} + \mathbf{y})}{e_{k-1}(\mathbf{x} + \mathbf{y})} \geqq \frac{e_k(\mathbf{x})}{e_{k-1}(\mathbf{x})} + \frac{e_k(\mathbf{y})}{e_{k-1}(\mathbf{y})} \tag{25}$$

($k = 1, 2, \ldots, n$). Nebudeme ji dokazovat: její odvození je triviální pro $k = 1$ a $k = 2$, pro $k > 2$ ji pak lze (pracným způsobem) odvodit z první formule v (8), použité pro $(n - 1)$-tice vzniklé vždy vynecháním i-té složky v n-tici $\mathbf{x}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$). Z (25) ovšem plyne:

VI.12. Tvrzení. *Budiž* $\mathbf{x} > \mathbf{0}$, $\mathbf{y} > \mathbf{0}$; *pro přirozená čísla* r, k, n *nechť platí*

$$1 \leqq r \leqq k \leqq n.$$

Pak je

$$\left[\frac{e_k(\mathbf{x} + \mathbf{y})}{e_{k-r}(\mathbf{x} + \mathbf{y})}\right]^{1/r} \geqq \left[\frac{e_k(\mathbf{x})}{e_{k-r}(\mathbf{x})}\right]^{1/r} + \left[\frac{e_k(\mathbf{y})}{e_{k-r}(\mathbf{y})}\right]^{1/r}. \tag{26}$$

Důkaz. Můžeme psát

$$\frac{e_k}{e_{k-r}} = \frac{e_k}{e_{k-1}} \cdot \frac{e_{k-1}}{e_{k-2}} \cdot \ldots \cdot \frac{e_{k-r+2}}{e_{k-r+1}} \cdot \frac{e_{k-r+1}}{e_{k-r}}.$$

Odhadneme-li každý součinitel vpravo podle (25), dostaneme nerovnost

$$\left[\frac{e_k(\mathbf{x} + \mathbf{y})}{e_{k-r}(\mathbf{x} + \mathbf{y})}\right]^{1/r} \geqq \left[\left(\frac{e_k(\mathbf{x})}{e_{k-1}(\mathbf{x})} + \frac{e_k(\mathbf{y})}{e_{k-1}(\mathbf{y})}\right) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \left(\frac{e_{k-1}(\mathbf{x})}{e_{k-2}(\mathbf{x})} + \frac{e_{k-1}(\mathbf{y})}{e_{k-2}(\mathbf{y})}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{e_{k-r+1}(\mathbf{x})}{e_{k-r}(\mathbf{x})} + \frac{e_{k-r+1}(\mathbf{y})}{e_{k-r}(\mathbf{y})}\right)\right]^{1/r}.$$

Výraz vpravo je geometrický průměr součtu dvou uspořádaných r-tic $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r)$, $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_r)$, kde

$$\xi_i = \frac{e_{k-i+1}(\mathbf{x})}{e_{k-i}(\mathbf{x})}, \quad \eta_i = \frac{e_{k-i+1}(\mathbf{y})}{e_{k-i}(\mathbf{y})}, \quad i = 1, 2, \ldots, r.$$

Protože pro geometrický průměr platí

$$G_r(\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}) \geqq G_r(\boldsymbol{\xi}) + G_r(\boldsymbol{\eta})$$

(viz např. [1], str. 33), plyne odtud vztah (26), neboť

$$G_r(\boldsymbol{\xi}) = \left[\frac{e_k(\mathbf{x})}{e_{k-r}(\mathbf{x})}\right]^{1/r}, \quad G_r(\boldsymbol{\eta}) = \left[\frac{e_k(\mathbf{y})}{e_{k-r}(\mathbf{y})}\right]^{1/r}.$$

VI.13. Poznámka. Nerovnost (24) plyne z (26) volbou $r = k$.

Zavedeme nyní toto označení: pro $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\mathbf{x} > \mathbf{0}$, a reálné číslo r, $r \neq 0$, označíme

(27) $$\mathbf{x}^r = (x_1^r, x_2^r, \ldots, x_n^r).$$

Dále připomeňme označení aritmetického průměru:

$$A_n(\mathbf{x}) = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

VI.14. Definice. Pro $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ a $r \neq 0$ označme

$$M_r(\mathbf{x}) = [A_n(\mathbf{x}^r)]^{1/r},$$

tj.

(28) $$M_r(\mathbf{x}) = \left[\frac{x_1^r + x_2^r + \ldots + x_n^r}{n}\right]^{1/r};$$

pro $r = 0$ definujeme

(29) $$M_0(\mathbf{x}) = G_n(\mathbf{x}) = [x_1 x_2 \ldots x_n]^{1/n}.$$

Symetrickou funkci $M_r(\mathbf{x})$ nazveme *průměrem r-tého řádu.*

VI.15. Úloha. Dokažte, že pro kladná čísla r, s platí

$$M_{-r}(\mathbf{x}) = \frac{1}{M_r\left(\frac{1}{\mathbf{x}}\right)}, \tag{30}$$

$$M_{r.s}(\mathbf{x}) = [M_s(\mathbf{x}^r)]^{1/r}, \tag{31}$$

$$M_{-s}(\mathbf{x}) \leqq M_0(\mathbf{x}) \leqq M_r(\mathbf{x}). \tag{32}$$

Návod. První dva vztahy plynou přímo z definice průměrů r-tého řádu, třetí je důsledkem nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem.

VI.16. Poznámky. (a) Průměry r-tého řádu zobecňují pojmy aritmetického průměru $A_n(\mathbf{x})$, geometrického průměru $G_n(\mathbf{x})$ a harmonického průměru $H_n(\mathbf{x})$ (viz [1], str. 15): je totiž

$$M_1(\mathbf{x}) = A_n(\mathbf{x}), \quad M_0(\mathbf{x}) = G_n(\mathbf{x}), \quad M_{-1}(\mathbf{x}) = H_n(\mathbf{x}).$$

(b) Nerovnost (32) můžeme zobecnit: jsou-li r, s reálná čísla, $r \leqq s$, pak platí

$$M_r(\mathbf{x}) \leqq M_s(\mathbf{x}). \tag{33}$$

K důkazu této nerovnosti se ještě vrátíme. Zatím jen poznamenejme, že z ní plyne toto tvrzení: Pro $0 < r < 1$ je

$$A_n(\mathbf{x}) \geqq M_r(\mathbf{x}) \geqq G_n(\mathbf{x})$$

(dokažte!). Je tedy vidět, že mezi aritmetický a geometrický průměr je možno zařadit nekonečně mnoho průměrů r-tého řádu s $r \in (0, 1)$ (srv. se vzorcem (19) a poznámkou VI.7).

Zobecníme nyní poněkud pojem průměru M_r. Budiž tedy $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ uspořádaná n-tice nezáporných čísel a nechť je

$$(34) \qquad \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 1 .$$

VI.17. Definice. Budiž $\mathbf{x} > \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\alpha} \geqq \mathbf{0}$, nechť platí (34) a nechť je r reálné číslo. Položme

$$(35) \quad M_r(\mathbf{x}; \boldsymbol{\alpha}) = \begin{cases} (\alpha_1 x_1^r + \alpha_2 x_2^r + \ldots + \alpha_n x_n^r)^{1/r} & \text{pro } r \neq 0, \\ x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} & \text{pro } r = 0. \end{cases}$$

Funkci $M_r(\mathbf{x}; \boldsymbol{\alpha})$ nazveme *váženým průměrem r-tého řádu* (s *vahou* $\boldsymbol{\alpha}$).

VI.18. Poznámky. (a) Vážené průměry $M_r(\mathbf{x}; \boldsymbol{\alpha})$ obecně nejsou symetrickými funkcemi (dokažte!). Volíme-li ovšem $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = \dfrac{1}{n}$, je

$$M_r(\mathbf{x}; \boldsymbol{\alpha}) = M_r(\mathbf{x}),$$

a pak se jedná o symetrické funkce. Pro speciální volbu $r = 1$ a $r = 0$ můžeme označit

$$M_1(\mathbf{x}; \boldsymbol{\alpha}) = A_n(\mathbf{x}; \boldsymbol{\alpha}), \quad M_0(\mathbf{x}; \boldsymbol{\alpha}) = G_n(\mathbf{x}; \boldsymbol{\alpha})$$

a nazvat tyto funkce *váženým aritmetickým*, resp. *váženým geometrickým průměrem.*

(b) Čtenář se snadno přesvědčí, že i pro vážené průměry platí vzorce analogické vzorcům (30) a (31). Analogii vzorce (32) ovšem můžeme dokázat jen za předpokladu, že platí analogie nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem, tj. nerovnost

$$(36) \qquad A_n(\mathbf{x}; \boldsymbol{\alpha}) \geqq G_n(\mathbf{x}; \boldsymbol{\alpha}) .$$

VI.19. Úloha. Dokažte nerovnost (36).

Návod. Použijte matematické indukce. Pro $n = 2$ je nerovnost (36) dokázána např. v [1], str. 70, vztah (III.2). Pro $(n + 1)$-tice $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1})$, $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1})$ přejděte k n-ticím $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ definovaným takto: je $y_i = x_i$ a $\beta_i = \alpha_i$ pro $i = 1, 2, \ldots, n - 1$ a $y_n = x_n^{\alpha_n/\beta_n} . x_{n+1}^{\alpha_{n+1}/\beta_n}$; využijte indukčního předpokladu.

VI.20. Věta. *Budiž* $\mathbf{x} > \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\alpha} \geqq \mathbf{0}$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 1$, $r \leqq s$. *Pak platí*

$$M_r(\mathbf{x}; \boldsymbol{\alpha}) \leqq M_s(\mathbf{x}; \boldsymbol{\alpha}). \tag{37}$$

Důkaz. (a) Pro $r = 0$, $s = 1$ není (37) nic jiného než (36).

(b) Pro $r = 0$, $s > 0$ plyne (37) z nerovnosti (36), použité ovšem pro n-tici $\mathbf{x}^s$:

$$M_0(\mathbf{x}; \boldsymbol{\alpha}) = [M_0(\mathbf{x}^s; \boldsymbol{\alpha})]^{1/s} \leqq [M_1(\mathbf{x}^s; \boldsymbol{\alpha})]^{1/s} = M_s(\mathbf{x}; \boldsymbol{\alpha}).$$

(c) Od kladných hodnot r resp. s přejdeme k záporným pomocí vzorce

$$M_{-r}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{M_r\left(\dfrac{1}{\mathbf{x}}; \boldsymbol{\alpha}\right)}$$

(viz pozn. IV.18 (b)); stačí tedy dokázat (37) pro $0 < r < s$. Zde využijeme Hölderovy nerovnosti ve tvaru uvedeném např. v [1], str. 85, vztah (III.25): Protože je $0 < r < s$, lze psát $r = s.c$, kde $0 < c < 1$. Označíme

$$\alpha_i x_i^s = u_i, \quad \alpha_i = v_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Pak je

$$\alpha_i x_i^r = \alpha_i x_i^{sc} = (\alpha_i x_i^s)^c . \alpha_i^{1-c} = u_i^c v_i^{1-c},$$

podle zmíněné Hölderovy nerovnosti je

$$\sum_{i=1}^{n} u_i^c v_i^{1-c} \leqq \left(\sum_{i=1}^{n} u_i\right)^c \left(\sum_{i=1}^{n} v_i\right)^{1-c},$$

a odtud už máme (37), neboť

$$\sum_{i=1}^{n} u_i^c v_i^{1-c} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^r = [M_r(\mathbf{x}; \boldsymbol{\alpha})]^r,$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} u_i\right)^c \left(\sum_{i=1}^{n} v_i\right)^{1-c} = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^s\right)^{r/s} . 1 = [M_s(\mathbf{x}; \boldsymbol{\alpha})]^r.$$

VI.21. Poznámka. Nerovnost (33) je nyní speciálním případem nerovnosti (37): s přihlédnutím k poznámce VI.18(a) ji dostaneme speciální volbou $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = \frac{1}{n}$.

Jak už jsme řekli, nejsou vážené průměry obecně symetrické funkce. Vraťme se tedy k symetrickým výrazům a zobecněme elementární symetrické průměry $p_k(\mathbf{x})$.

Budiž $[i_1, i_2, \ldots, i_n]$ permutace n-tice $[1, 2, \ldots, n]$. Takových permutací je $n!$, a to znamená, že pro dané n-tice $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) > \mathbf{0}$ a $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \geqq \mathbf{0}$ můžeme utvořit $n!$ čísel tvaru

$$x_{i_1}^{\alpha_1} x_{i_2}^{\alpha_2} \ldots x_{i_n}^{\alpha_n}.$$

Utvořme tedy aritmetický průměr všech těchto $n!$ čísel:

VI.22. Definice. Pro $\mathbf{x} > \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\alpha} \geqq \mathbf{0}$ položme

$$\mathscr{P}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{n!} \sum x_{i_1}^{\alpha_1} x_{i_2}^{\alpha_2} \ldots x_{i_n}^{\alpha_n}, \tag{38}$$

přičemž sčítáme přes všechny možné permutace $[i_1, i_2, \ldots, i_n]$ čísel $1, 2, \ldots, n$. Funkci $\mathscr{P}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\alpha})$ nazveme *symetrickým průměrem.*

VI.23. Poznámka. Z definice symetrického průměru je vidět, že když n-tice $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ vznikne z n-tice $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ permutací, bude

$$\mathscr{P}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\alpha}) = \mathscr{P}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\beta}).$$

Symetrický průměr $\mathscr{P}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\alpha})$ tedy závisí jen na hodnotě čísel $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, nikoliv na tom, jak jsou seřazena.

VI.24. Příklady. (a) Zvolme $\boldsymbol{\alpha} = (r, 0, 0, \ldots, 0)$, $r > 0$. Pak se v $\mathscr{P}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\alpha})$ objeví $(n-1)!$-krát číslo x_1^r — totiž ve tvaru $x_1^r x_{i_2}^0 x_{i_3}^0 \ldots x_{i_n}^0$, kde $[i_2, i_3, \ldots, i_n]$ je jedna z $(n-1)!$ možných permutací čísel $2, 3, \ldots, n$. Podobně bude v $\mathscr{P}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\alpha})$ vystupovat $(n-1)!$-krát číslo x_2^r, x_3^r atd., takže

$$\mathscr{P}(\mathbf{x}; r, 0, 0, \ldots, 0) = \tag{39}$$

$$= \frac{(n-1)!}{n!} (x_1^r + x_2^r + \ldots + x_n^r) = [M_r(\mathbf{x})]^r.$$

Speciálně pro $r = 1$ máme

$$\mathscr{P}(\mathbf{x}; 1, 0, 0, \ldots, 0) = M_1(\mathbf{x}) = A_n(\mathbf{x}). \tag{40}$$

(b) Zvolíme-li $\boldsymbol{\alpha} = (r, r, r, \ldots, r)$, $r > 0$, budou všechny sčítance v (32) stejné: budou mít tvar $x_1^r x_2^r \ldots x_n^r$. Protože těchto sčítanců je $n!$, bude

$$\mathscr{P}(\mathbf{x}; r, r, r, \ldots, r) = x_1^r x_2^r \ldots x_n^r = \tag{41}$$

$$= [G_n(\mathbf{x})]^{nr} = [G_n(\mathbf{x}^r)]^n.$$

Speciálně bude pro $r = \frac{1}{n}$

$$\mathscr{P}\left(\mathbf{x}; \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right) = G_n(\mathbf{x}). \tag{42}$$

VI.25. Úloha. Připomeneme-li si vzorce (6), můžeme formule (40) a (41) (pro $r = 1$) zapsat takto

$$\mathscr{P}(\mathbf{x}; 1, 0, 0, \ldots, 0) = p_1(\mathbf{x});$$
$$\mathscr{P}(\mathbf{x}; 1, 1, 1, \ldots, 1) = p_n(\mathbf{x}).$$

Ukažte, že platí

$$\mathscr{P}(\mathbf{x}; 1, 1, \ldots, 1, 0, 0, \ldots 0) = p_k(\mathbf{x}), \quad k = 1, 2, \ldots, n; \tag{43}$$

n-tice $\boldsymbol{\alpha} = (1, 1, \ldots, 1, 0, 0, \ldots, 0)$ zde obsahuje k jedniček a $n - k$ nul.

VI.26. Příklad. Ze vzorců (39) a (41) plyne, že

$$A_n(\mathbf{x}^n) - G_n(\mathbf{x}^n) = \mathscr{P}(\mathbf{x}; n, 0, 0, \ldots, 0) - \mathscr{P}(\mathbf{x}; 1, 1, \ldots, 1). \tag{44}$$

Vynechme u symetrických průměrů $\mathscr{P}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\alpha})$ písmeno $\mathbf{x}$ a popřípadě pro jednoduchost i nuly na posledních místech n-tic $\boldsymbol{\alpha}$. Pak lze psát

$$\begin{aligned}
&\mathscr{P}(n, 0, 0, \ldots) - \mathscr{P}(1, 1, 1, \ldots, 1) = \\
&= [\mathscr{P}(n, 0, 0, \ldots) - \mathscr{P}(n-1, 1, 0, \ldots)] + \\
&+ [\mathscr{P}(n-1, 1, 0, \ldots) - \mathscr{P}(n-2, 1, 1, 0, \ldots)] + \\
&+ [\mathscr{P}(n-2, 1, 1, 0 \ldots) - \mathscr{P}(n-3, 1, 1, 1, 0, \ldots)] + \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +
\end{aligned}$$

$$+ [\mathscr{P}(2, 1, 1, \ldots 1, 0) - \mathscr{P}(1, 1, 1, \ldots 1)].$$

Všimněme si nyní výrazů v hranatých závorkách; využijeme přitom toho, že symetrický průměr se nemění při permutaci složek n-tice $\boldsymbol{\alpha}$, a že tedy např. $\mathscr{P}(n, 0, 0, \ldots) = \mathscr{P}(0, n, 0, \ldots)$, $\mathscr{P}(n-1, 1, 0, \ldots) = \mathscr{P}(1, n-1, 0, \ldots)$ atd. (viz poznámku VI.23). Pak je

$$\mathscr{P}(n, 0, 0, \ldots) - \mathscr{P}(n-1, 1, 0, \ldots) =$$

$$= \frac{1}{2}\{\mathscr{P}(n, 0, 0, \ldots) + \mathscr{P}(0, n, 0, \ldots) -$$

$$- \mathscr{P}(n-1, 1, 0, \ldots) - \mathscr{P}(1, n-1, 0, \ldots)\} =$$

$$= \frac{1}{2n!}\sum (x_{i_1}^n + x_{i_2}^n - x_{i_1}^{n-1}x_{i_2} - x_{i_1}x_{i_2}^{n-1}) =$$

$$= \frac{1}{2n!}\sum (x_{i_1}^{n-1} - x_{i_2}^{n-1})(x_{i_1} - x_{i_2});$$

$$\mathscr{P}(n-1, 1, 0, 0, \ldots) - \mathscr{P}(n-2, 1, 1, 0, \ldots) =$$

$$= \frac{1}{2}\{\mathscr{P}(n-1, 0, 1, 0, \ldots) + \mathscr{P}(0, n-1, 1, 0, \ldots) -$$

$$- \mathscr{P}(n-2, 1, 1, 0, \ldots) - \mathscr{P}(1, n-2, 1, 0, \ldots)\} =$$

$$= \frac{1}{2n!}\sum (x_{i_1}^{n-1}x_{i_3} + x_{i_2}^{n-1}x_{i_3} - x_{i_1}^{n-2}x_{i_2}x_{i_3} - x_{i_1}x_{i_2}^{n-2}x_{i_3}) =$$

$$= \frac{1}{2n!}\sum (x_{i_1}^{n-2} - x_{i_2}^{n-2})(x_{i_1} - x_{i_2})\,x_{i_3};$$

$$\mathscr{P}(n-2, 1, 1, 0, 0, \ldots) - \mathscr{P}(n-3, 1, 1, 1, 0, \ldots) =$$

$$= \frac{1}{2}\{\mathscr{P}(n-2, 0, 1, 1, 0, \ldots) +$$

$$+ \mathscr{P}(0, n-2, 1, 1, 0, \ldots) - \mathscr{P}(n-3, 1, 1, 1, 0, \ldots) -$$

$$-\mathscr{P}(1, n-3, 1, 1, 0, \ldots)\} =$$

$$= \frac{1}{2n!} \sum (x_{i_1}^{n-3} - x_{i_2}^{n-3})(x_{i_1} - x_{i_2}) x_{i_3} x_{i_4}$$

atd., až konečně

$$\mathscr{P}(2, 1, 1, \ldots, 1, 0) - \mathscr{P}(1, 1, \ldots, 1) =$$

$$= \frac{1}{2} \{\mathscr{P}(2, 0, 1, 1, \ldots, 1) +$$

$$+ \mathscr{P}(0, 2, 1, 1, \ldots, 1) - 2\mathscr{P}(1, 1, \ldots, 1)\} =$$

$$= \frac{1}{2n!} \sum (x_{i_1} - x_{i_2})^2 x_{i_3} x_{i_4} \ldots x_{i_n};$$

všude se sčítá přes všechny permutace $[i_1, i_2, \ldots, i_n]$ čísel $1, 2, \ldots, n$.

Protože $x_{i_k} \geqq 0$, je (44) součtem nezáporných násobků nezáporných výrazů tvaru

$$(45) \quad (x_{i_1}^{\varkappa} - x_{i_2}^{\varkappa})(x_{i_1} - x_{i_2}), \quad \varkappa = 1, 2, \ldots, n-1,$$

a tedy je $\mathscr{P}(n, 0, 0, \ldots) - \mathscr{P}(1, 1, \ldots, 1) \geqq 0$ čili

$$A_n(\mathbf{x}^n) \geqq G_n(\mathbf{x}^n).$$

Tím jsme dokázali opět (po kolikáté už ?) nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem. Rovnost v poslední nerovnosti nastane právě tehdy, budou-li všechny výrazy tvaru (45) nulové, tj. pro $x_{i_1} = x_{i_2}$ čili pro $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Všimneme si nyní vzájemného vztahu symetrických průměrů $\mathscr{P}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\alpha})$ a $\mathscr{P}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\beta})$ v závislosti na chování n-tic $\boldsymbol{\alpha}$ a $\boldsymbol{\beta}$. Speciálně nás bude zajímat, kdy pro **všechny** n-tice $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ platí

$$(46) \qquad \mathscr{P}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\alpha}) \leqq \mathscr{P}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\beta}).$$

Protože symetrické průměry nezávisí na pořadí čísel α_i, resp. β_i, budeme všude v dalším předpokládat, že

$$(47) \qquad \alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \ldots \geqq \alpha_n \geqq 0, \quad \beta_1 \geqq \beta_2 \geqq \\ \geqq \ldots \geqq \beta_n \geqq 0.$$

Uvedeme bez důkazu toto tvrzení:

VI.27. Tvrzení. *Nerovnost* (46) *platí pro všechna* $\mathbf{x} > \mathbf{0}$, *jsou-li splněny vedle podmínky* (47) *ještě tyto podmínky:*

$$(48) \qquad \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n,$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k \leqq \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_k$$
$$\textit{pro } k = 1, 2, \ldots, n - 1.$$

Rovnost v (46) *nastává právě tehdy, je-li buď* $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}$, *nebo* $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Pro platnost nerovnosti (46) je tedy podstatná platnost soustavy nerovností (48). Existují kritéria, která umožňují ověřit platnost vztahů (48):

VI.28. Úloha. Budiž $\boldsymbol{\beta} \geqq \mathbf{0}$ a nechť je n-tice $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ dána vzorci

$$(49) \qquad \alpha_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\beta_j, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

kde n^2 daných čísel c_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ má tyto vlastnosti: Pro $i, j = 1, 2, \ldots, n$ je

$$(50) \qquad c_{ij} \geqq 0, \quad \sum_{i=1}^{n} c_{ij} = 1 \quad \text{a} \quad \sum_{i=1}^{n} c_{ji} = 1.$$

Dokažte, že pak n-tice $\boldsymbol{\alpha}$ a $\boldsymbol{\beta}$ splňují podmínky (48).

Předcházejících tvrzení nyní využijeme k důkazu této věty:

VI.29. Věta. *Budiž* $\boldsymbol{\gamma} \geqq \mathbf{0}$, $\gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_n = 1$. *Pak platí pro každou n-tici* $\mathbf{x} > \mathbf{0}$

$$G_n(\mathbf{x}) \leqq \mathscr{P}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\gamma}) \leqq A_n(\mathbf{x}). \tag{51}$$

Důkaz. Protože podle (42) je $G_n(\mathbf{x}) = \mathscr{P}\left(\mathbf{x}; \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \ldots, \frac{1}{n}\right)$, stačí ukázat, že existují čísla c_{ij} vyhovující podmínkám (50) a taková, že

$$\frac{1}{n} = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\gamma_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{52}$$

Pak totiž plyne první nerovnost v (51) z (46), kde ovšem klademe $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right)$ místo $\boldsymbol{\alpha}$ a $\boldsymbol{\gamma}$ místo $\boldsymbol{\beta}$. Podmínky (50) i vztah (52) však platí zřejmě pro $c_{ij} = \frac{1}{n}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$.

Druhá nerovnost v (51) pak má tvar

$$\mathscr{P}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\gamma}) \leqq \mathscr{P}(\mathbf{x}; 1, 0, \ldots, 0) \tag{53}$$

— viz (40). Volíme-li tedy v (46) $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\beta} = (1, 0, \ldots, 0)$, pak platí vztah (49) s čísly c_{ij} definovanými takto: c_{ij} je j-tý prvek v i-tém sloupci ve čtvercovém schématu

$$\begin{array}{llll}
\alpha_1, & \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{n-1}, & \alpha_n, \\
\alpha_2, & \alpha_3, \alpha_4, \ldots, \alpha_n, & \alpha_1, \\
\alpha_3, & \alpha_4, \alpha_5, \ldots, \alpha_1, & \alpha_2, \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
\alpha_{n-1}, & \alpha_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-3}, & \alpha_{n-2}, \\
\alpha_n, & \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-2}, & \alpha_{n-1}.
\end{array}$$

Podmínky (50) jsou v tomto případě opět splněny, a platí tedy i nerovnost (53).

VI.30. Příklad. Uvažujme n-tice $\boldsymbol{\alpha} = (1, 0, 0, \ldots, 0)$, $\boldsymbol{\beta} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \ldots, 0\right)$, $\boldsymbol{\gamma} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, \ldots, 0\right)$ atd., obecně

$$\boldsymbol{\varkappa} = \Big(\underbrace{\frac{1}{k}, \frac{1}{k}, \ldots, \frac{1}{k}}_{k\text{-krát}}, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{(n-k)\text{-krát}}\Big), \; k = 4, 5, \ldots .$$

Zřejmě je

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n = \ldots = \varkappa_1 + \varkappa_2 + \ldots + \varkappa_n = 1,$$

$$\alpha_1 > \beta_1 > \gamma_1 > \ldots > \varkappa_1,$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2 > \gamma_1 + \gamma_2 > \ldots > \varkappa_1 + \varkappa_2,$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 > \ldots > \varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3 \text{ atd., obecně tedy}$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m \geqq \beta_1 + \beta_2 + \beta_m \geqq \ldots \geqq \varkappa_1 + \varkappa_2 + \ldots + \varkappa_m$$

($m = 1, 2, \ldots, n - 1$). Jsou tedy splněny podmínky (48) a z tvrzení VI.27 pak plyne

$$\mathscr{P}(\mathbf{x}; \varkappa) \leqq \ldots \leqq \mathscr{P}(\mathbf{x}; \gamma) \leqq \mathscr{P}(\mathbf{x}; \beta) \leqq \mathscr{P}(\mathbf{x}; \alpha).$$

Protože

$$\mathscr{P}(\mathbf{x}; \alpha) = A_n(\mathbf{x}) \text{ a } \mathscr{P}(\mathbf{x}; \varkappa) =$$
$$= \mathscr{P}(\mathbf{x}^{1/k}; \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{k\text{-krát}}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{(n-k)\text{-krát}}) = p_k(\mathbf{x}^{1/k})$$

— viz (43) —, ukázali jsme, že

$$A_n(\mathbf{x}) = p_1(\mathbf{x}) \geqq p_2(\mathbf{x}^{1/2}) \geqq p_3(\mathbf{x}^{1/3}) \geqq \ldots \geqq$$
$$\geqq p_k(\mathbf{x}^{1/k}) \geqq p_{k+1}(\mathbf{x}^{1/(k+1)}) \geqq \ldots \geqq p_n(\mathbf{x}^{1/n}) = G_n(\mathbf{x}). \tag{54}$$

Porovnejme tuto formuli s formulí (19) (viz též poznámku VI.7).

VI.31. Úloha. Platí nějaká nerovnost mezi výrazy $p_k(\mathbf{x}^{1/k})$ z (54) a $[p_k(\mathbf{x})]^{1/k}$ z (19)?

Návod. Uvědomte si, že pro $k = 1$ a $k = n$ se jedná o tytéž výrazy. Pro $n = 3$ a $k = 2$ je

$$p_2(\mathbf{x}^{1/2}) = \frac{1}{3}(\sqrt{x_1x_2} + \sqrt{x_2x_3} + \sqrt{x_3x_1}); \quad [p_2(\mathbf{x})]^{1/2} =$$
$$= \sqrt{\frac{x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1}{3}}$$

a z Cauchyho nerovnosti (viz např. [1], str. 45) plyne, že

$$1 . \sqrt{x_1x_2} + 1 . \sqrt{x_2x_3} + 1 . \sqrt{x_3x_1} \leqq$$
$$\leqq \sqrt{3} . \sqrt{x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1},$$

čili

$$p_2(\mathbf{x}^{1/2}) \leqq [p_2(\mathbf{x})]^{1/2},$$

a podobně lze postupovat i pro $n > 3$.

VI.32. Úloha. Ukažte, že pro kladné číslo r platí

$$\mathscr{P}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\alpha}) = \mathscr{P}\left(\mathbf{x}^r; \frac{\boldsymbol{\alpha}}{r}\right),$$

$$\mathscr{P}(\mathbf{x}; \alpha_1 + r, \alpha_2 + r, \ldots, \alpha_n + r) = \\ = \mathscr{P}(\mathbf{x}; r, r, \ldots, r)\, \mathscr{P}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\alpha}).$$

VI.33. Úloha. Položme $\boldsymbol{\alpha} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, \ldots, 0\right)$, $\boldsymbol{\beta} = \left(\frac{3}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, 0, \ldots, 0\right)$. Pak $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n = 1$, a jak průměr $\mathscr{P}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\alpha})$, tak průměr $\mathscr{P}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\beta})$ leží podle věty VI.29 mezi $A_n(\mathbf{x})$ a $G_n(\mathbf{x})$. Obě n-tice splňují první podmínku v (48), nikoliv však druhou, neboť $\alpha_1 < \beta_1$, ale $\alpha_1 + \alpha_2 > \beta_1 + \beta_2$. Nemůžeme proto zaručit, že by pro všechna $\mathbf{x}$ platila nerovnost (46) nebo nerovnost opačná. Nalezněte n-tici $\mathbf{x}$ takovou, aby bylo $\mathscr{P}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\alpha}) < \mathscr{P}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\beta})$, a jinou n-tici $\mathbf{y}$, aby bylo $\mathscr{P}(\mathbf{y}; \boldsymbol{\alpha}) > \mathscr{P}(\mathbf{y}; \boldsymbol{\beta})$. [Pro $n = 3$ lze volit $\mathbf{x} = (1, 1, 2^{10})$, $\mathbf{y} = (1, 1, 2^{-10})$.]

VI.34. Úloha. V [1], str. 82, je dokázána tzv. *Schurova nerovnost*

$$x^\lambda(x - y)(x - z) + y^\lambda(y - x)(y - z) + \\ + z^\lambda(z - x)(z - y) \geqq 0 \tag{55}$$

(čísla x, y, z jsou nezáporná, λ je reálné). Provedeme-li násobení naznačené v (55), můžeme tuto nerovnost zapsat takto:

$$\frac{1}{3}(x^{\lambda+2} + y^{\lambda+2} + z^{\lambda+2}) - \frac{2}{6}(x^{\lambda+1}y + x^{\lambda+1}z + y^{\lambda+1}x +$$

$$+ y^{\lambda+1}z + z^{\lambda+1}x + z^{\lambda+1}y) + \frac{1}{3}(x^\lambda yz + xy^\lambda z + xyz^\lambda) \geqq 0$$

neboli pomocí symetrických průměrů pro $n = 3$ a trojici $\mathbf{u} = (x, y, z)$ takto:

$$\mathscr{P}(\mathbf{u}; \lambda + 2, 0, 0) - 2\mathscr{P}(\mathbf{u}; \lambda + 1, 1, 0) + \\ + \mathscr{P}(\mathbf{u}; \lambda, 1, 1) \geqq 0.$$

Dokažte, že Schurovu nerovnost lze rozšířit (s jistými omezujícími předpoklady) i na případ $n > 3$, tj. ukažte, že pro $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) > \mathbf{0}$, $\lambda \geqq 0$, $\delta > 0$, $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \geqq 0$ platí

$$\mathscr{P}(\mathbf{x}; \lambda + 2\delta, 0, 0, \boldsymbol{\alpha}) - 2\mathscr{P}(\mathbf{x}; \lambda + \delta, \delta, 0, \boldsymbol{\alpha}) + \\ + \mathscr{P}(\mathbf{x}; \lambda, \delta, \delta, \boldsymbol{\alpha}) \geqq 0.$$

VI.35. Na závěr jedna snadná úloha: Budiž $n \geqq 3$; nechť má rovnice

$$a_0t^n + a_1t^{n-1} + a_2t^{n-2} + \ldots + a_{n-1}t + a_n = 0$$

($a_0 \neq 0$) jen kladné kořeny. Dokažte, že platí

$$|a_0a_n| \leqq \frac{1}{n^2}|a_1a_{n-1}|.$$

Seznam dosud vydaných svazků edice
ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ
v nakladatelství Mladá fronta

---

1. *František Hradecký - Milan Koman - Jan Vyšín:* Několik úloh z geometrie jednoduchých těles, 1961, 1963 a 1977
2. *Jiří Sedláček:* Co víme o přirozených číslech, 1961, 1965 a 1976
3. *Jaroslav Šedivý:* Shodná zobrazení v konstruktivních úlohách, 1962
4. *Miroslav Šisler - Jiří Jarník:* O funkcích, 1962 a 1963
5. *František Veselý:* O nerovnostech, 1963
6. *Rudolf Výborný:* Matematická indukce, 1963 a 1966
7. *Jaroslav Šedivý:* O podobnosti v geometrii, 1963 a 1967
8. *Jiří Váňa:* O rovnicích s parametry, 1964 a 1970
9. *Jan Vyšín:* Konvexní útvary, 1964
10. *Jiří Sedláček:* Faktoriály a kombinační čísla, 1964
11. *Josef Holubář:* Geometrická místa bodů v prostoru, 1965
12. *Karel Havlíček:* Prostory o čtyřech a více rozměrech, 1965
13. *Miroslav Šisler - Josef Andrys:* O řešení algebraických rovnic, 1966
14. *František Veselý:* O dělitelnosti čísel celých, 1966
15. *Milan Koman:* Jak vyšetřujeme geometrická místa metodou souřadnic, 1966
16. *Stanislav Horák:* Kružnice, 1966
17. *Jaromír Hroník:* Úlohy o maximech a minimech funkcí, 1967
18. *Karel Havlíček:* Analytická geometrie a nerovnosti, 1967
19. *Jiří Jarník:* Komplexní čísla a funkce, 1967
20. *Bruno Budinský - Stanislav Šmakal:* Goniometrické funkce, 1968
21. *Alois Apfelbeck:* Kongruence, 1968
22. *Tibor Šalát:* Dokonalé a spriatelené čísla, 1969
23. *Jaroslav Morávek - Milan Vlach:* Oddělitelnost množin, 1969
24. *Ján Gatial - Milan Hejný:* Stavba Lobačevského planimetrie, 1969
25. *Leo Bukovský - Igor Kluvánek:* Dirichletov princíp, 1970
26. *Karel Hruša:* Polynomy v moderní algebře, 1970

27. *Stanislav Horák:* Mnohostěny, 1970
28. *Bruno Budinský - Stanislav Šmakal:* Vektory v geometrii, 1971
29. *František Zítek:* Vytvořující funkce, 1972
30. *Milan Koman - Jan Vyšín:* Malý výlet do moderní matematiky, 1972 a 1974
31. *Oldřich Odvárko:* Booleova algebra, 1973
32. *Jan Vyšín - Jitka Kučerová:* Druhý výlet do moderní matematiky, 1973
33. *Jaroslav Morávek:* O dynamickém programování, 1973
34. *Ladislav Rieger:* O grupách, 1974
35. *Alois Kufner:* Co asi nevíte o vzdálenosti, 1974
36. *Ján Černý:* O aplikáciach matematiky, 1976
37. *Beloslav Riečan - Zdena Riečanová:* O pravdepodobnosti, 1976
38. *Juraj Bosák:* Latinské štvorce, 1976
39. *Alois Kufner:* Nerovnosti a odhady, 1975
40. *Antonín Vrba:* Princip matematické indukce, 1977
41. *Bohdan Zelinka:* Rovinné grafy, 1977
42. *Ladislav Beran:* Uspořádané množiny, 1978
43. *Jiří Jarník:* Posloupnosti a řady, 1979
44. *Bohdan Zelinka:* Matematika hrou i vážně, 1979
45. *Antonín Vrba:* Kombinatorika, 1980
46. *Jaroslav Šedivý:* Shodnost a podobnost v konstrukčních úlohách, 1980
47. *Arnošt Niederle:* Zajímavé dvojice trojúhelníků, 1980
48. *František Veselý:* O nerovnostech a nerovnicích, 1982
49. *Pavel Vít:* Řetězové zlomky, 1982
50. *Adam Płocki:* O náhodě a pravděpodobnosti, 1982
51. *N. B. Vasiljev, V. L. Gutenmacher:* Přímky a křivky, 1982

OBSAH

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

ALOIS KUFNER

Symetrické funkce

Pro účastníky matematické olympiády
vydává ÚV matematické olympiády
v nakladatelství Mladá fronta
Řídí akademik Josef Novák
Obálku navrhl Jaroslav Příbramský
K tisku připravil Vladimír Doležal
Odpovědná redaktorka Libuše Rousková
Technický redaktor Vladimír Vácha
Publikace číslo 4501
Edice Škola mladých matematiků, svazek 52
Vytiskl MÍR, novinářské závody, n. p.
závod 1, Praha 1, Václavské nám. 15
5,11 AA, 5,47 VA. 120 stran
Náklad 6500 výtisků. 1. vydání
Praha 1982. 508/21/82.5

23-105-82 03/2 Cena brož. výt. 6 Kčs

23-105-82
03/2
Cena brož.
6 Kčs