O náhodě a pravděpodobnosti

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

O NÁHODĚ A PRAVDĚPODOBNOSTI

50

Vydal ÚV matematické olympiády v nakladatelství Mladá fronta

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

ADAM PŁOCKI

O náhodě a pravděpodobnosti

PRAHA 1982
VYDAL ÚV MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY
V NAKLADATELSTVÍ MLADÁ FRONTA

Recenzovali Stanislav Hojek a RNDr. Milan Koman, CSc.

PŘEDMLUVA

„Je pozoruhodné, že věda, která začínala úvahami o hazardních hrách, se nakonec mohla stát nejdůležitějším předmětem lidského poznání". To řekl P. S. Laplace, jeden z tvůrců „podivuhodné matematiky", za niž je teorie pravděpodobnosti pokládána. Je to skutečně podivuhodná matematika. Často i ten, kdo se skvěle vyzná v aritmetice, vyniká v algebře a zbožňuje geometrii, si vůbec neví rady s pravděpodobností. Ta je dnes opravdu jednou z nejdůležitějších matematických disciplín. Matematici ji vyznávají nejen proto, že je zajímavá, ale hlavně pro její užitečnost.

Teorie pravděpodobnosti dnes pomáhá v práci ekonomům i zemědělcům, sociologům i fyzikům, učí se jí astronomové, fyzici, a dokonce i jazykovědci. Není to dostatečný důvod k tomu, abychom i my okusili aspoň trochu z půvabů téhle zajímavé matematiky?

Tuto knížku jsem napsal pro vás, žáky středních škol, kteří chcete poznat neobyčejný půvab teorie pravděpodobnosti, dozvědět se, co to je a k čemu to slouží ve světě, v němž žijeme. Sepsal jsem v ní náměty svých besed s vašimi polskými vrstevníky, se členy matematického kroužku v Domě mládeže v Krakově. Ti vymysleli mnoho ze zajímavých příkladů, které v knížce najdete. A vy jistě vymyslíte ještě lepší. Až se do knížky začtete, přesvědčíte se o tom, že teorie pravděpodobnosti je matematika trochu zvláštní, zajímavá a ne příliš obtížná.

Začali jsme citátem. Knížka také citátem končí. Přečtěte si předem její poslední dvě věty. Možná že vás ještě víc povzbudí k četbě této knížky.

Přeji Vám mnoho pěkných zážitků při setkání s teorií pravděpodobnosti.

Adam Płocki

1. kapitola

NÁHODNÝ POKUS A PROSTOR JEHO VÝSLEDKŮ

1.1. NÁHODA

Často slyšíme, že „to byla osudná náhoda“, že „někdo někoho náhodou potkal“. Říkáme, že „ve sportce byla tažena čísla“.

Před začátkem zápasu soupeři losují o hřiště. Co to znamená, že losují? A jak to dělají?

Často, když chceme nestranným způsobem vybrat jednu ze dvou možností, hodíme si mincí. Mince se hodí do výšky tak, aby se ve vzduchu několikrát obrátila, než dopadne na zem. Po dopadu je nahoře buď strana se státním znakem, tradičně nazývaná „lev“ (tento výsledek označme písmenem l), nebo druhá strana, „panna“ (výsledek označme p). Můžeme před hodem předpovědět jeho výsledek? Děti někdy hrají hru „panna nebo lev“. Nejdříve si vsadí na pannu nebo na lva; pak se hází. Vyhraje ten, komu se předpověď podařila (sázka je předpověď, jak to dopadne).

Hodíme-li mincí a zjistíme, která strana je nahoře, provedli jsme určitý pokus. Věnujme mu trochu pozornosti. Můžeme zkoumat zákony, které určují chování mince od okamžiku jejího vyhození až po dopad. Na chování mince má jistě vliv rychlost dodaná minci, teplota prostředí, výška, proudění vzduchu atd. Fyzikálních zákonů, které chování mince ovlivňují, je mnoho. A jsou velice složité. Malé změny rychlosti nebo výšky způsobí velké změny konečného výsledku. V důsledku velkého množství složitých zákonů, jimiž se pohyb mince řídí, je zhola nemožné předpovědět výsledek hodu. Je-li mnoho viníků, bývá vina svalována na jednoho. My řekneme, že chování mince se řídí náhodou, která také rozhoduje o výsledku hodu. Budeme říkat, že výsledek hodu je *náhodný*.

Vzpomeňte si, jak se hraje na fanty. Osoba, která vytahuje fanty z krabice, má zavázané oči. Obsah krabice je dobře promíchán. Nedají-li se fanty rozeznat hmatem, je výběr fantu poslepu náhodný. Takovéto vytahování je *náhodný výběr*.

Podobně vylovení ryby z rybníka je náhodný výběr. O tom, která ryba zabere, rozhoduje tolik okolností, že můžeme krátce říci, že o tom rozhoduje náhoda.

Při různých hrách se užívá hrací kostka. Takovou kostkou se hází a hráči pozorují, která stěna se po hodu objeví nahoře. Podobně jako při házení mincí rozhoduje i zde o výsledku náhoda.

1.2. NÁHODNÝ POKUS

Hod mincí, vytažení fantu, vylovení ryby, hod kostkou jsou jednoduché příklady navzájem podobných pokusů. O výsledku každého z nich rozhoduje náhoda. Takové pokusy nazveme *náhodné pokusy*.

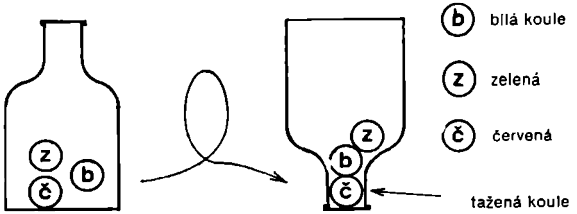
Rozhlédneme-li se kolem sebe pozorně, nebude nám dělat potíže všimnout si jevů nebo pokusů, které jsou náhodné.

Příklad 1.1. (Pohlaví potomka.) Rodiče čekají dítě. Bude-li to chlapeček nebo holčička, závisí na mnoha okolnostech (jsou to genetické zákony). Říkáme, že o tom rozhoduje náhoda. Zjištění pohlaví dítěte je zajímavý příklad náhodného pokusu.

Příklad 1.2. (Tah koulí.) V televizi můžeme každý týden sledovat přenos tahu šesti čísel sportky. Složitý přístroj vybírá složitým způsobem po jedné kouli z urny. Složitý mechanismus má divákovi dát představu o tom, jak mnoho zákonitostí určuje výběr té a ne jiné koule. Výběr koule (a tím i jejího čísla) pokládáme za náhodný. Říkáme, že je to *náhodný výběr*.

Ke zmíněnému losování však vůbec není tak důmyslný mechanismus zapotřebí. Stačí k tomu v podstatě stejný, ale konstrukčně mnohem jednodušší přístroj. Vezměme si láhev a několik stejně velkých kuliček s průměrem o něco menším, než je průměr hrdla. Kuličky, ze kterých má být jedna vytažena, nasypeme do láhve. Láhev zazátkujeme, několikrát s ní zatřepeme a rychle ji obrátíme dnem vzhůru. O tom, která z kuliček spadne do hrdla jako první, rozhodne náhoda. Láhev s kuličkami budeme dále nazývat *přístroj pro tah koulí.*

Ve sportce se táhne koulí několik. Tažená koule se už dalšího tahu neúčastní. Mluvíme o *náhodném výběru bez vracení.* Kdyby se několikrát táhlo po jedné kouli, ale

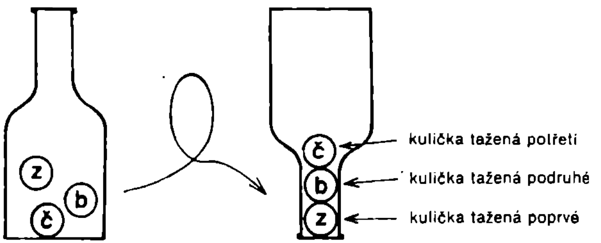


Obr. 1.1. Přístroj pro tah koulí

tažená koule se vždy vracela zpět do urny, šlo by o *náhodný výběr s vracením.*

Přístroj pro tah koulí, který známe z obr. 1.1, můžeme použít k trojímu výběru s vracením. Zopakujeme-li třikrát protřepání a zjištění kuličky, která spadla do hrdla jako první, dostaneme výsledek trojího výběru jedné koule s vracením.

Prodlužme hrdlo láhve skleněnou trubičkou tak dlouhou, aby se do ní vešly tři kuličky. Zatřepeme lahví a pak ji rychle obraťme dnem vzhůru. Kuličky spadnou v určitém pořadí do trubičky. Tu, která spadne jako první, budeme považovat za kuličku, která byla tažena jako první. Kuličku, která za ní bude v trubičce bezprostředně následovat, budeme považovat za kuličku taženou při druhém výběru ze zbylých kuliček atd. (obr. 1.2).



Obr. 1.2. Přístroj pro trojí tah bez vracení koulí do urny

Příklad 1.3. (Pečení bochánků s rozinkami.) Do těsta nasypali 100 rozinek. Těsto dobře promísili a napekli z něho 100 bochánků. Rozinky se do jednotlivých bochánků dostaly náhodně. O tom, kolik rozinek se dostalo do určitého bochánku, rozhodla náhoda. Zkoumání rozmístění rozinek v bocháncích je pěkný příklad náhodného pokusu. K tomuto příkladu se ještě vrátíme.

Příklad 1.4. (Střelba do terče.) Střelec střílí do terče. O tom, který bod zasáhne, rozhoduje (ať je střelec sebelepší) náhoda. Střelba je také příklad náhodného pokusu.

Některé náhodné pokusy jsou jednoduché (tah jedné koule, hod mincí), jiné probíhají na etapy (trojí výběr koule, dvojí hod mincí).

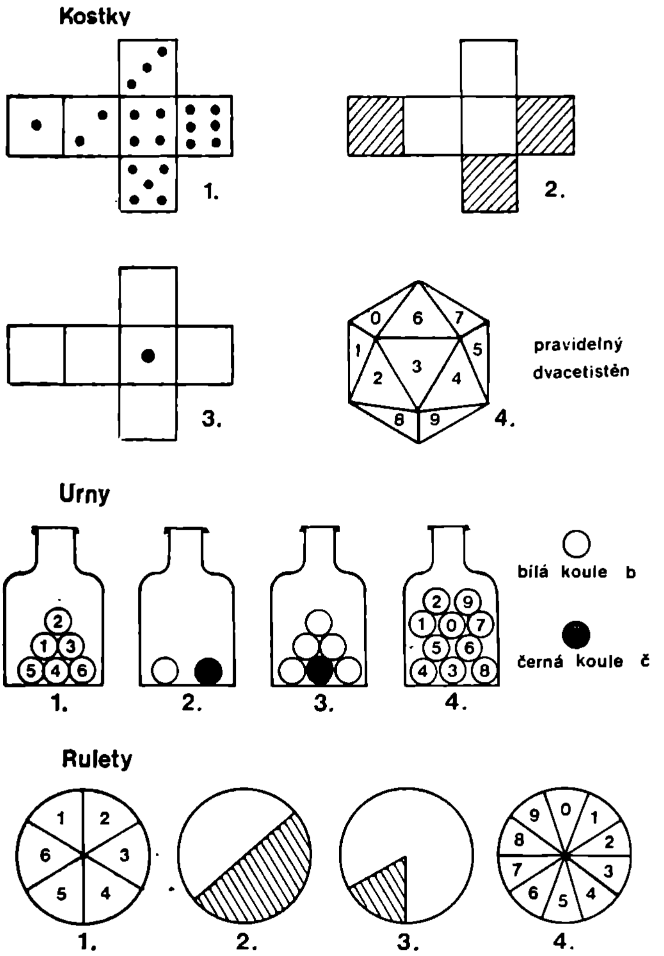
1.3. URNY, KOSTKY, RULETY

Při našich schůzkách s pravděpodobností budou hrát důležitou úlohu různé kostky a různé urny. Teorii pravděpodobnosti každý spojuje s házením kostkou, s tažením jedné nebo několika koulí z urny, a také s ruletou. Ruleta je kruhový terč, kolem jehož středu se volně otáčí ručička (šipka). Terč rulety je většinou rozdělen na části. Ručičku roztočíme, aby vykonala několik otáček. Pozorujeme, ve které části terče se ručička zastaví. Řekneme, že ruleta vybrala tuto část. To je další příklad náhodného pokusu.

Ruletu si sami snadno zhotovíte pomocí špendlíku, roztažené sponky a kroužku z tuhého papíru (terč).

Kromě různých kostek se šesti stěnami budeme při našich schůzkách s pravděpodobností užívat také pravidelného dvacetistěnu. Jeho stěny jsou rovnostranné trojúhelníky. Očíslujeme si je. Do dvou vepišme číslici 0. Do jiných dvou číslici 1 atd., až do posledních dvou číslici 9.

Při našich dobrodružstvích s pravděpodobností bude-


Kostky
1.
2.
3.
pravidelný dvacetistěn
4.
Urny
1.
2.
3.
4.
bílá koule b
černá koule č
Rulety
1.
2.
3.
4.

Obr. 1.3,

me užívat různé kostky, urny a rulety. Pro naši potřebu si je očíslujeme (obr. 1.3).

1.4. PROSTOR VÝSLEDKŮ

Hod mincí mohl skončit jedním ze dvou možných výsledků. Zakódovali jsme je písmeny l a p. I nadále zde vylučujeme možnost, že by mince dopadla na hranu. Kdyby k tomu došlo, řekneme, že se hod nepodařil a že k náhodnému pokusu nedošlo.

Při hodu mincí se dá těžko předpovědět, jaký bude výsledek, ale určitě to bude právě jedna z možností l nebo p. Množina $\{l, p\}$ je množinou všech a priori*) možných výsledků hodu mincí.

Házejme kostkou č. 1 a pozorujme, kterou stranou padne nahoru. Výsledek se dá zakódovat např. obrázkem té horní stěny. Při tomto způsobu kódování dostaneme následující množinu všech možných výsledků:

{⚅, ⚄, ⚃, ⚂, ⚁, ⚀}.

Kostku č. 3 budeme dále nazývat s-kostka. Má pět stejných prázdných stěn bez teček a jednu s tečkou. Hod s-kostkou může vést k jednomu ze dvou možných výsledků: □ nebo ⊡. Množina všech možných výsledků hodu s-kostkou a zjištění horní stěny je

{□, ⊡}.

Jednotlivé výsledky náhodných pokusů budeme určitým způsobem kódovat. Množinu všech možných výsledků náhodného pokusu nazveme *prostorem výsledků* a označíme písmenem Ω (případně s indexy).

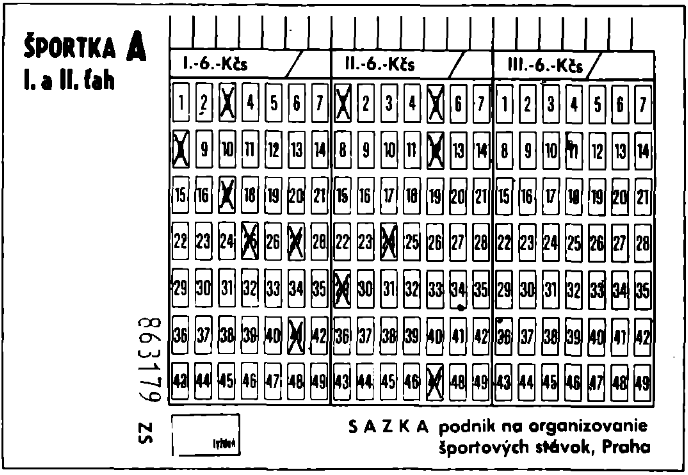
---

*) a priori — předem, jen na základě úvahy

Zjištění pohlaví narozeného dítěte vede ke dvěma výsledkům. Buď se narodí chlapec (tento výsledek zakódujeme symbolem ♂), nebo se narodí děvče (tento výsledek zakódujeme symbolem ♀). Kódovací symboly jsme přejali od genetiků. Prostor výsledků tohoto zjišťování je množina

$$\Omega = \{♀, ♂\} .$$

Příklad 1.5. Před tahem sportky se vyplňuje sázenka přeškrtnutím šesti ze 49 čísel. Obr. 1.4 znázorňuje část sázenky s dvěma sázkami. Vyplněná sázenka představuje výsledek výběru bez vracení šesti ze 49 čísel, na která hráč vsadil. Tah šesti ze všech 49 čísel je náhodný pokus. Jeho výsledky je možno kódovat řádně vyplně-



Obr. 1.4. Vyplněná sázenka sportky jako kód jednoho výsledku náhodného výběru šesti ze 49 čísel

nými sázenkami. Vyplněná sázenka je kódem (šifrou) šestiprvkové podmnožiny (neboli kombinace) množiny 49 čísel. Vzpomeneme-li si na své znalosti z kombinatoriky, okamžitě řekneme, kolik je možných výsledků tohoto pokusu. Počet všech prvků prostoru výsledků je zároveň počtem všech jednotlivých sázenek, jimiž lze vyčerpat všechny možné výsledky našeho náhodného pokusu.

Příklad 1.6. Výsledek střelby do terče je možno ztotožnit se zasaženým bodem terče. Jestliže střelec chybil, řekneme, že se nestřílelo. Výsledek střelby je tedy množina všech zásahů do terče. Prostor výsledků je množina všech bodů terče (stručně řečeno terč). Prostor výsledků má v tomto případě nekonečně mnoho prvků.

V další kapitole se naučíme kódovat výsledky a určovat prostory výsledků v různých případech náhodných pokusů.

Úloha 1.1. Uveďte příklady náhodných pokusů, s nimiž jste se setkali.

Úloha 1.2. Vyplněná sázenka sazky je také kódem výsledku určitého náhodného pokusu. O jaký pokus jde? Kolik prvků má prostor výsledků? Jak se v kombinatorice nazývají takto zakódované výsledky?

2. kapitola

STROMY NEBOLI GRAFICKÉ ZNÁZORNĚNÍ PRŮBĚHŮ A VÝSLEDKŮ NÁHODNÉHO POKUSU

2.1. JAK KÓDOVAT VÝSLEDKY NĚKOLIKAETAPOVÉHO POKUSU

Teorii pravděpodobnosti si spojujeme s vytahováním koulí a házením kostek. Ale tentokrát budeme vytahovat kostky!

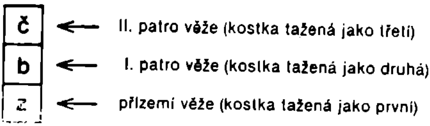
Příklad 2.1. V krabičce *U* jsou tři stejně velké hrací kostky: červená $\boxed{\check{c}}$, zelená $\boxed{z}$ a bílá $\boxed{b}$. Vytahujme po jedné kostce tak dlouho, až bude krabička prázdná. Z postupně vytažených kostek stavme přízemí, I. a II. patro věže jako ze stavebnice. Bude nás zajímat jen barva vytažených kostek, teček na jejich stěnách si všímat nebudeme.

Kostky můžeme vytahovat jednu po druhé, jak se nám budou líbit. Takový výběr však nebude náhodný, o tom, která kostka bude dalším patrem věže, nebude rozhodovat náhoda, ale náš zrak a vkus. Přenechme proto výběr kostek náhodě. Zamíchejme pečlivě obsah krabičky a se zavřenýma očima vytahujme po jedné kostce. To je trojí tah jedné kostky bez vracení. Náhodný pokus probíhá ve třech etapách.

Věž, která během náhodného pokusu vzniká, umožňuje přesnou rekonstrukci jeho průběhu. Věž je zakódovaná historie vyprázdnění krabičky *U* náhodným výběrem. Věží jsme zakódovali průběh i konečný výsleděk náhodného pokusu. Víme-li, jak věž vznikala, a vidíme-li ji, můžeme snadno říci, jak náhodný pokus probíhal.

Kolik různých věží může vzniknout? Kolik je všech možných výsledků našeho náhodného pokusu? Co je prostor výsledků?

Krabička U je pro matematika množina $\{\boxed{\text{č}}, \boxed{\text{b}}, \boxed{\text{z}}\}$. V množině nehraje pořadí prvků žádnou roli. Konečnou množinu lze uspořádat, tj. stanovit, který z jejích prvků budeme považovat za první, který za druhý atd., a který



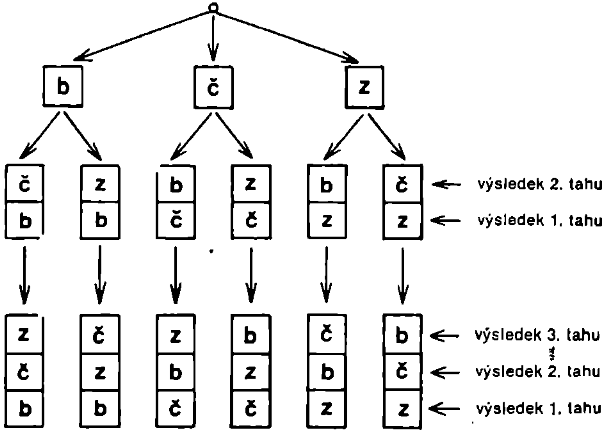
Obr. 2.1.

nakonec za poslední. Když jsme stavěli věž, stanovili jsme určité pořadí kostek. Kostka z přízemí je první, kostka z I. patra je druhá, kostka z II. patra je třetí. Věž je tříčlenná posloupnost, jejímiž členy jsou barevné kostky. Členy této posloupnosti jsou navzájem různé. Věž je posloupnost tří různých kostek (obr. 2.1).

Posloupnost, kterou věž představuje, je permutace množiny U. Výsledek i průběh náhodného výběru tedy kódujeme permutacemi množiny U. Všech výsledků (věží) je tolik, kolik je permutací tříprvkové množiny U.

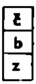
Průběh náhodného výběru, tj. postupné etapy stavby věže, se dají přehledně znázornit pomocí jednoduchého grafu (obr. 2.2).

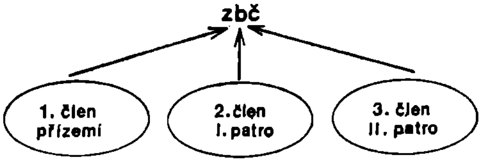
Kostky můžeme jednoduše označit počátečními písmeny názvů jejich barev. Věž je posloupnost, zapíšeme



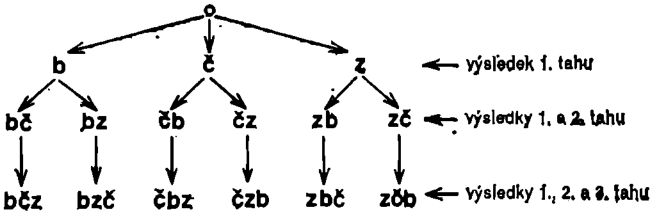
Obr. 2.2. Jak může postupně vyrůstat věž neboli jak může probíhat náhodné vyprazdňování krabičky *U*

ji tedy tak, jak se v matematice posloupnosti obvykle zapisují, tj. jeden člen za druhým, a ne, jak tomu bylo u věže, jeden nad druhým.

Věž  zapíšeme teď stručně, jako posloupnost



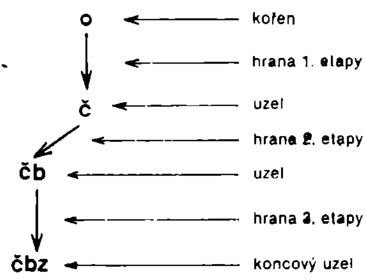
Graf z obr. 2.2 se tak zjednoduší. Je na obr. 2.3.



Obr. 2.3.

2.2. STROMY

Grafy z obr. 2.2 a 2.3 se nazývají *stromy*.*) Stromem jsme znázornili průběh a výsledky určitého náhodného pokusu. Právě tyto stromy pro nás budou v dalším výkladu obzvlášť důležité. Domluvme se na terminologii. Bod *o*, od něhož začínáme strom kreslit, nazveme *kořen*. Výsledky dalších etap jsou *uzly*. Orientované úsečky spojující dva za sebou následující uzly jsou *hrany*. Posledním uzlům budeme říkat *koncové uzly*. Posloupnost



Obr. 2.4.

*) *Pozn. recenzenta:* Termín strom se v teorii grafů užívá v širším smyslu než v této knize. Zde by bylo přesnější užívat názvu kořenový strom nebo strom logických možností.

hran spojující kořen s koncovým uzlem je *větev*. Budeme také říkat, že koncový uzel, který zakončuje danou větev, na ní *visí* (jako ovoce na stromě). Na obr. 2.4 je část stromu z obr. 2.3, a to jedna větev, na níž visí koncový uzel *čbz*.

Co je koncový uzel? To je přece konečný výsledek (jistým způsobem zakódovaný) trojího náhodného výběru kostky z krabičky U bez vracení. Tento výsledek visí (jako plod) na větvi našeho stromu. Na větvích stromu z obr. 2.2 visí všechny možné výsledky vyprazdňování krabičky U náhodným výběrem zakódované pomocí věží. Na tomto stromě visí všechny možné věže, všechny možné permutace množiny U. Kolik jich je? Spočtěme to pomocí stromu.

Přízemí věže mohlo vzniknout třemi způsoby. Z kořene vycházejí tři hrany. To je 1. etapa. Kostka se do krabičky nevrátila, vždyť se stala přízemím věže. 2. etapa, 2. tah se provádí ze dvou kostek, které zbyly v U. Na každé už postavené přízemí je možno I. patro přistavět pouze dvěma způsoby. Z konce každé hrany 1. etapy vycházejí dvě hrany 2. etapy. V krabičce U už zbyla jen jedna kostka. Na každé už postavené přízemí s I. patrem je možno dostavět II. patro jen jedním způsobem. Všech možností je tedy 3.2.1, tedy 3!. Všimněme si, že je to počet všech větví stromu.

Pomocí stromu jsme dostali vzorec pro počet všech permutací tříprvkové množiny, který známe z kombinatoriky. Kdyby krabička obsahovala n kostek různých barev, byl by počet různých n-podlažních věží (počet permutací množiny, též počet všech možných výsledků vyprazdňování krabičky náhodným výběrem) roven $n!$.

Na stromě jsme snadno zjistili počet všech výsledků určitého náhodného pokusu. Je jich tolik, kolik je na stromě koncových uzlů, tedy i kolik má strom větví.

Ze stromu také snadno získáme prostor výsledků. Stačí jen „otrhat“ jeho koncové uzly—výsledky. Množina vytvořená těmito „otrhanými“ výsledky je prostor výsledků Ω. Když otrháme výsledky ze stromu na obr. 2.3, dostaneme

$$\Omega = \{b\check{c}z, bz\check{c}, \check{c}bz, \check{c}zb, zb\check{c}, z\check{c}b\}.$$

Příklad 2.2. V krabičce U je n různých předmětů. Dále máme n očíslovaných zásuvek $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Vybereme náhodně jeden předmět (jeden prvek množiny U) a dáme ho do zásuvky z_1. Ze zbylých n-1 prvků opět jeden náhodně vybereme. Ten dáme do z_2. Tak pokračujeme dál, až bude krabička U prázdná. Do každé zásuvky dáme právě jeden předmět. V každých dvou různých zásuvkách budou různé předměty. Tak se n předmětů z krabičky U (n prvků množiny U) rozmístí do n zásuvek. Každé takové rozmístění je také permutace množiny U. Výsledky (a průběh) náhodného rozmisťování budeme kódovat permutacemi množiny U. Každá taková permutace zachycuje průběh a výsledek rozmisťování. Prostor výsledků tohoto rozmisťování má tedy $n!$ prvků.

Úloha 2.1. Nakreslete strom náhodného rozmisťování pro $n = 4$.

Úloha 2.2. V krabičce jsou čtyři korálky: červený — *č*, zelený — *z*, bílý — *b* a modrý — *m*. Vybírejme náhodně po jednom korálku bez vracení, až bude krabička prázdná. Korálky navlékejme na nit tak, jak je postupně vybíráme. Dílem náhody (náhoda totiž rozhoduje o pořadí korálků) vznikne šňůrka korálků. Šňůrka je podobně jako věž zakódovaný výsledek náhodného výběru. Podíváme-li se na šňůrku, snadno zrekapituluje-

me průběh výběru. Kolik je možných výsledků vyprazdňování krabičky?
Pozor: Šňůrky *bčzm* a *mzčb* jsou různé!

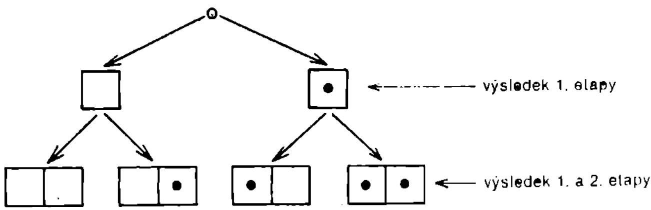
Úloha 2.3. V krabičce U jsou čtyři kostky: bílá b, zelená z, červená $č$ a modrá m. Třikrát náhodně vybíráme po jedné bez vracení a z vybraných kostek postupně stavíme věž. Kolik je teď možných výsledků tohoto náhodného výběru? Nakreslete strom. Jak se v kombinatorice nazývají posloupnosti, které kódují výsledky?

Úloha 2.4. V krabičce je 5 předmětů, ale zásuvky jsou jen 3. Z krabičky postupně vybereme bez vracení 3 předměty a dáme je do zásuvek stejně jako v příkladě 2.2. Kolik je možností pro výsledek takového náhodného rozmístění? Jak jste zakódovali výsledky?

Teď budeme náhodně vybírat kostky z krabičky, ale s vracením. Po vytažení kostky si poznamenáme, která to byla (nakreslíme si ji), a pak ji před dalším tahem vrátíme do krabičky. Teď se nám těžko budou stavět věže z vytažených kostek. Tak si ty věže nakreslíme.

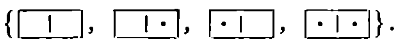
Příklad 2.3. V krabičce U jsou opět čtyři kostky: b, $č$, z, m. Táhněme třikrát s vracením. Věž, kterou dostaneme, si nakreslíme. Teď může vzniknout např. věž *ččč*. Posloupnosti (věže), jimiž kódujeme průběh a výsledky náhodného vybírání, nemusí mít různé členy. Jak se v kombinatorice nazývají posloupnosti tohoto typu? Kolik jich je? A jak vypadá strom? V každé etapě je stejný počet možností. Z každého uzlu (jakož i z kořene) vycházejí v každé etapě 4 hrany. Máme tři etapy, tedy celkem 4.4.4 neboli 4^3 hrany. Tolik výsledků obsahuje Ω. Určete prostor výsledků (předem si nakreslete strom).

Příklad 2.4. Dvakrát hodíme s-kostkou*) a všímáme si, která stěna bude nahoře. To je dvouetapový náhodný pokus. Strom na obr. 2.5 znázorňuje jeho průběh.



Obr. 2.5. Strom dvojího hodu s-kostkou

Výsledky pokusu kódujeme pomocí domina. Prostor výsledků je množina



Domluvíme se, že výsledky hodu s-kostkou i obyčejnou kostkou budeme nadále označovat počtem teček, které budou po hodu na horní stěně. Podle této úmluvy budeme výsledky dvojího hodu kódovat dvojicemi čísel. Při tomto způsobu kódování bude naposledy uvedený prostor výsledků množina {00, 01, 10, 11}.

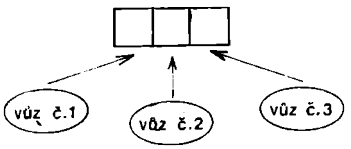
Úloha 2.5. Třikrát hodíme mincí. Znázorněte pokus stromem a sestavte prostor výsledků.

Příklad 2.5. Na zastávce tramvaje čekají dvě paní, které se neznají. Neznáme je ani my, a tak si je pojmenujeme paní X a paní Y. Přijela souprava sestavená ze tří vozů. Očíslujeme je 1, 2, 3. Paní nastoupily a vybraly si vůz

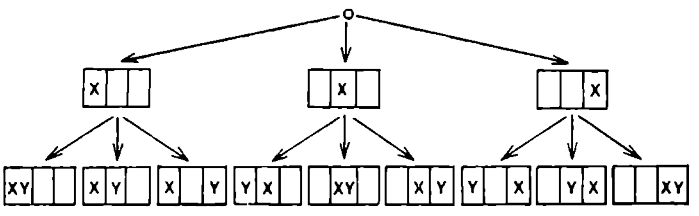
*) s-kostka byla popsána na str. 11

náhodně. Kdyby se znaly, nesjpíše by nastoupily do stejného vozu. Pozorujeme, do kterého vozu která paní nastoupí; je to náhodný pokus. Jaké jsou možnosti? Kolik jich je? Jak je zakódujeme?

Na tyto otázky nám pomůže najít odpověď strom. Rozdělme si pozorování na dvě etapy. V první etapě zjistíme, který z vozů si vybere paní X. Ve druhé etapě zjistíme, do kterého vozu nastoupí paní Y. Na obr. 2.6 je strom, který průběh nastupování velmi názorně popisuje. Nakreslíme si soupravu:



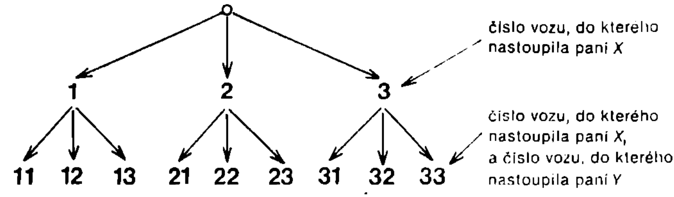
Dvě etapy jsou postupné „obsazování“ soupravy paní X a paní Y.



Obr. 2.6. Jak paní X a Y mohly obsadit tramvaj

Kódování výsledků nástupu můžeme značně zjednodušit. Každé paní přiřaďme číslo vozu, do kterého nastoupila. Napřed paní X, pak paní Y. Dvojice 32 tedy znamená, že paní X nastoupila do třetího vozu a paní Y

si vybrala druhý vůz. Tato dvojice je výsledek $\boxed{\;|\,Y\,|\,X}$. Výsledek $\boxed{|XY|\;}$ bude odpovídat dvojici 22. Při tomto způsobu kódování se strom velice zjednoduší; je na obr. 2.7.

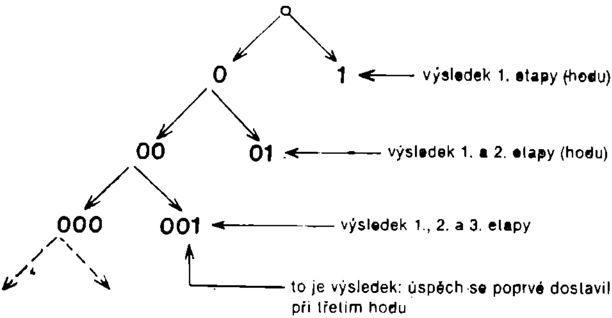


Obr. 2.7.

Při tomto jednoduchém způsobu kódování je prostor výsledků Ω množina dvojic. Je to kartézský součin $\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$.

Setkali jsme se zde (a nebylo to poprvé) s jistým náhodným rozmístěním prvků (paní) do zásuvek (vozů). V praxi se často vyskytují jevy, které se určují a interpretují jako rozmanitá rozmísťování jistých prvků do jistých přihrádek, které si představujeme jako zásuvky.

Příklad 2.6. (Čekání na první úspěch.) V některých hrách, kterých se účastní náhoda (jsou to tzv. náhodné hry), nesmí hráč postavit svou figurku na start, dokud mu nepadne šestka. Opakuje hod kostkou tak dlouho, až mu poprvé padne šestka. Pro hráče, který hází a čeká na právo postavit svou figurku na start, je házení kostkou vlastně totéž jako házení s-kostkou. Hledisko, podle kterého rozlišuje stěny, je, zda jde o tu výjimečnou mezi šesti nebo ne. Výjimečná stěna je stěna s tečkou na s-kostce. Ostatních pět jsou ty prázdné. Padne-li hráči výjimečná stěna, je to pro něj úspěch. Nabízí se, abychom tohle házení nazvali čekáním na první úspěch. Na obr. 2.8 je tento náhodný pokus znázorněn stromem. Úspěch je označen číslem 1, neúspěch číslem 0.

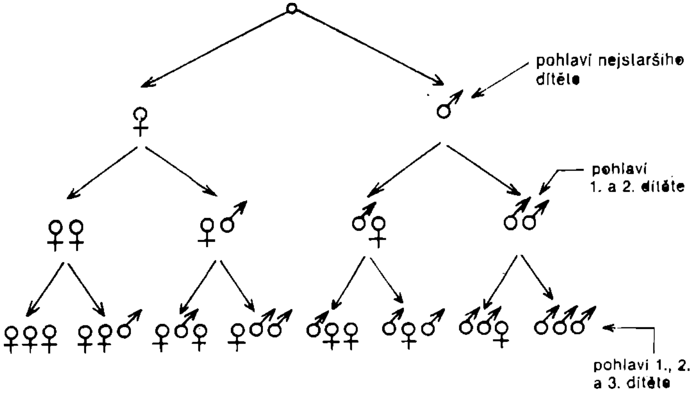


Obr. 2.8. Čekání na první úspěch

Zakódované výsledky čekání na první úspěch visí na větvích stromu. Větví je nekonečně mnoho. Prostor výsledků je zde nekonečná množina.

Příklad 2.7. Manželé si naplánovali tři děti. Zjišťování pohlaví postupně se rodících dětí je náhodný pokus. Předpokládejme, že naše rodina plán provede (podobně jako jsme předpokládali, že střelec zasáhne terč). Jak může provedení plánu proběhnout? Nakresleme si strom (obr. 2.9).
Prostor výsledků {♀♀♀, ♀♀♂, ♀♂♀, ♀♂♂, ♂♀♀, ♂♀♂, ♂♂♀, ♂♂♂} je množina.

Průběh plánu má osm možností.



Obr. 2.9. Chlapci a děvčata mezi třemi potomky

Úloha 2.6. V urně (krabici) jsou tři nerozlišitelné bílé koule *b*, 2 červené *č* a 1 zelená *z*. Sestavte strom i prostor výsledků pro trojí tah jedné koule z krabice

a) bez vracení,

b) s vracením.

Úloha 2.7. Dopravní hlídka kontroluje projíždějící vozy. Přitom postupně kontroluje brzdy (mohou být dobré nebo špatné), pneumatiky (zjišťují počet špatných) a stav světel (světla mohou fungovat dobře, špatně nebo vůbec ne). Testování vozu je náhodný pokus. Znázorněte ho pomocí stromu a sestavte prostor výsledků testování.

Mezi náhodnými pokusy, se kterými jsme se setkali, byly pokusy s konečným prostorem výsledků. Především jimi se budeme dále zabývat. Musíme však mít na paměti, že kolem nás je mnoho (a to zajímavých) jevů, které jsou náhodné pokusy s nekonečně mnoha možnými výsledky.

3. kapitola

JEV

3.1. JISTÝ, NEMOŽNÝ, MOŽNÝ

Vezměme si krabičku *U* se dvěma červenými a dvěma zelenými kostkami. Trojí náhodný výběr kostky bez vracení určí věž. O tom, jaká to bude věž, rozhodne náhoda. Zkusme před výběrem předpovědět jeho výsledek, tj. přesně popsat, jaká věž vznikne. Můžeme si ji předem nakreslit, pak táhnout kostky, postavit věž a porovnat předpověď s tím, co se stalo. Předpověď, výběr a porovnání můžeme považovat za jednoduchou hru. Kdo předpověděl správně, vyhraje, komu se předpověď nepodařila, prohraje. Odkud to známe? Podobnou hrou se přece každý týden baví dospělí. Napřed vyplní sázenky sportky. To je pokus o přesnou předpověď, jak tah čísel sportky dopadne. Pak se koná tah a potom se (netrpělivě a nervózně) porovnává výsledek tahu s předpovědí. A také se buď vyhrává, nebo prohrává (ale nehraje se o body).

Uhodli jste, jaká bude věž? Většinou ne. Stejně jako se většinou nepodaří uhodnout čísla sportky.

Při naší hře jsme se snažili přesně uhodnout výsledek. Předpovídání však nemusí jít do všech podrobností. Hru si obměníme. Teď se smí na lístek napsat slovy, co se stane, ale není nutné přesně určit, jakou barvu budou mít jednotlivá patra věže. Podaří-li se nám tato obecnější předpověď, získáme bod.

Dejme tomu, že tři hráči X, Y a Z na své lístky napsali:

X: Ve věži bude červená a zelená kostka.

Y: Věž bude jednobarevná.

Z: Ve věži bude víc červených kostek než zelených.

Dále přijde trojí tah kostky bez vracení, stavba věže a porovnání s předpovědí každého z hráčů.

Záleží na tom, kdo bude provádět tah? Samozřejmě že ne! Šanci, že vytáhne takovou a ne jinou kostku, má X, Y i Z stejnou, stejnou jako kdokoliv jiný ochotný se zúčastnit. Bude těžké ohodnotit výhry hráčů? Každý napsal, jaká věž se podle něho po tahu objeví. Na jejich lístcích jsou popsány slovy určité jevy. Jak to bude s výhrou u každého z nich?

Hráč X má jisté, že vyhraje. Ve věži bude jistě červená i zelená kostka. Je nemožné, aby vyhrál Y (jak to odůvodníte?). Hráč Z nemá výhru jistou, není však nemožná. Je možné, že vyhraje.

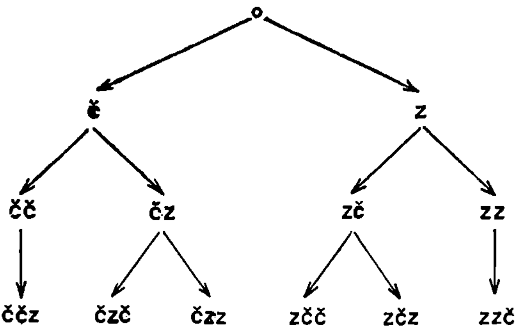
3.2. JEV

Každý hráč vsadil na nějaký jev, který popsal slovy. Označme tyto jevy postupně A, B, C. Jev A je *jistý*. Jev B je *nemožný*. Jev C je *možný*.

Na obr. 3.1 je strom uvedeného vybírání kostek z krabičky U. Když ze stromu otrháme všechny výsledky, dostaneme prostor výsledků

$$\Omega = \{\check{c}\check{c}z,\ \check{c}z\check{c},\ \check{c}zz,\ z\check{c}\check{c},\ z\check{c}z,\ zz\check{c}\}.$$

Dostali jsme tak všechny možné věže (zakódované posloupnostmi), které mohou uvedeným náhodným výběrem vzniknout.



Obr. 3.1. Náhodný výběr kostek bez vracení z krabičky, ve které jsou dvě kostky *č* a dvě kostky *z*

Dejme tomu, že výsledek byla věž *čzč*. Kdo v tom případě vyhrál? Pro koho byl tento výsledek příznivý? Jistě vyhrál X. Vyhrál také Z. Výsledek *čzč* je pro výhru těchto dvou hráčů příznivý. Říkáme, že výsledek je příznivý pro jev, na který vsadil X, a pro jev, na který vsadil Z. Stručně řekneme, že výsledek *čzč* je *příznivý pro jev A*. Výsledek *čzč* je také příznivý pro jev C. Výsledek *čzč* však *není příznivý pro jev B*.

Pro jev C jsou příznivé ještě další dva výsledky *ččz* a *zčč*. Množina {*čzč*, *ččz*, *zčč*} je množina všech výsledků z Ω, které jsou příznivé pro jev C. Tuto množinu můžeme chápat jako kód jevu C. Pišme tedy $C =$ {*čzč*, *ččz*, *zčč*}. Jev popsaný slovy se tak dá vyjádřit jako podmnožina prostoru výsledků, a to jediným způsobem.

Pro jev A je příznivý každý výsledek. Jev A tedy zakódujeme množinou Ω, $A = \Omega$.

Co s jevem B? Pro jev B není příznivý žádný výsledek. Jeho kód je prázdná množina, $B = \emptyset$.

Úloha 3.1. Jevy A, B a C, které hráči popsali slovy, souvisely s náhodným výběrem kostek bez vracení a se stavbou věží. Můžeme samozřejmě uvažovat ještě mnoho dalších jevů souvisejících s tímto pokusem, například:

D: Přízemí věže bude zelené.
E: Přízemí a I. patro budou mít stejnou barvu.
F: Přízemí a I. patro budou červené.
G: Aspoň jedno podlaží (přízemí nebo některé patro) budou zelené.

Zakódujte tyto jevy, vyjádřete je jako podmnožiny množiny Ω. Pro jev F je příznivý jen jeden výsledek *ččz*. Kód jevu F bude jednoprvková množina {*ččz*}. Píšeme F = {*ččz*}.

Přišli jsme na kloub tomu, jak kódovat jevy související s náhodným pokusem, máme-li zakódovány jeho výsledky.

Příklad 3.1. Množina Ω = {⚁, ⚃, ⚀, ⚂, ⚅, ⚄} je, jak si snadno domyslíme, prostor výsledků při hodu obyčejnou kostkou a zjištění horní stěny po jejím dopadu. Popišme slovy různé jevy:

A: Padne sudý počet teček.
B: Padne stěna, na níž je počet teček dělitelný sedmi.
C: Na stěně, která se objeví nahoře, bude aspoň 5 teček.
D: Počet teček na horní stěně nebude větší než 6.

Tyto jevy zapíšeme jako podmnožiny prostoru Ω takto:

A = {⚃, ⚁, ⚅}, $B = \emptyset$, C = {⚅, ⚄}, $D = \Omega$.

Úloha 3.2. Popište slovy zakódované jevy:

E = {⚃, ⚂, ⚁}, F = {⚀, ⚁}

Úloha 3.3. Pomocí rulety č. 4 vybíráme (náhodně) dvakrát po jedné z deseti číslic. Výsledek výběru bude dvojice číslic. Prostor výsledků bude

$$\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \times \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

neboli $\Omega = \{xy : x, y \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}\}$.

Zakódujte následující jevy:

A: Vybraná dvojice číslic bude tvořit dvojciferné číslo.
B: Vybraná dvojice bude číslo dělitelné číslem 25.
C: Dostaneme dvojici, která bude tvořit číslo ne větší než 90.
D: Vybraná dvojice bude tvořit číslo dělitelné třemi.
E: Vybraná dvojice bude číslo dělitelné 51.
F: Vybraná dvojice číslic bude tvořit číslo dělitelné jedenácti.

Pozor: Dvojice xy znamená číslo, v němž x jsou desítky a y jednotky. Nespleťte si to s označením xy pro součin x, y, které se užívá v algebře!
Jevy kódujeme množinami. Množinu můžeme popsat buď výčtem všech jejích prvků, nebo nutnou a postačující podmínkou k tomu, aby prvek do množiny patřil. Podmínky, které popisují některé z množin A až F, jsou kritéria dělitelnosti. Zopakujte si je.

Příklad 3.2. V příkladu 2.7 rodiče sledovali pohlaví svých tří dětí, jak se postupně rodily. To je zajímavý příklad náhodného pokusu. Množina {♀♀♀, ♀♂♀} je podmnožina prostoru výsledků. Všimněme si prvků této množiny. Charakteristická společná vlastnost obou (všech) prvků této množiny je, že nejstarší i nejmladší dítě jsou děvčata. Žádný další výsledek z Ω už tuto vlastnost nemá. Uvažovaná množina je jev A, který slovy popíšeme takto: nejmladší a nejstarší z trojice dětí bude děvče. Jevu B — nejmladší dítě je chlapec — bude odpovídat množina

$$\{♀♀♂, ♀♂♂, ♂♀♂, ♂♂♂\}.$$

Úloha 3.4. Popište slovy jev $C = \{♀♀♂, ♀♀♀\}$. Zakódujte jevy

D: Nejmladší dítě bude děvče.
E: Všechny děti budou děvčata.
F: Chlapců bude víc než děvčat.
G: Narodí se právě jeden chlapec a dvě děvčata.

Příklad 3.3. V příkladu 2.5 nastupovaly paní X a Y do tramvajové soupravy. Věnujme jim trochu pozornosti. Prostor výsledků bude $\Omega = \{11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33\}$. Podmnožina $A = \{11, 22, 33\}$ je množina právě těch výsledků, kdy obě paní nastoupily do stejného vozu. A je následující jev: Obě paní nastoupily do téhož vozu. Jevu B — paní nastoupily do různých vozů — odpovídá množina $B = \{12, 13, 21, 23, 31, 32\}$.

Úloha 3.5. Popište slovy jev $C = \{12, 11, 13\}$. Zakódujte jevy popsané slovy takto:

D: Paní X nastoupí do prostředního vozu.
E: Paní X ani paní Y nenastoupí do prvního vozu.

Teď je vhodná chvíle, abychom definovali jev. Definici jevu zatím zformulujeme pro případ, že souvisí s náhodným pokusem, při němž je množina všech možných výsledků konečná.

Definice 3.1. *Náhodný jev*, který souvisí s náhodným pokusem o konečném počtu všech možných výsledků, budeme říkat každé podmnožině prostoru výsledků tohoto náhodného pokusu. Často budeme místo náhodný jev říkat jenom *jev*.

V našich příkladech a úlohách se vyskytovaly jevy, pro které byl příznivý každý výsledek. Kódovali jsme je množinou všech možných výsledků, tj. celým prostorem výsledků. Kdybychom si na tyto jevy vsadili, měli bychom výhru jistou. Mezi všemi podmnožinami prostoru výsledků má celý prostor výsledků významné postavení.

Definice 3.2. Prostor výsledků (jako jedna z podmnožin téhož prostoru výsledků) se nazývá *jistý jev.*

Definice 3.3. Prázdné množině (to je podmnožina prostoru výsledků) se říká *nemožný jev.*

Příklad 3.4. Hoďme dvakrát kostkou č. 1 a pokaždé sledujme, která stěna se objeví nahoře. Výsledky kódujme (podle úmluvy z příkladu 2.4) dvojicemi počtů teček, které se objevily (po dopadu) na horních stěnách. Prostor výsledků si nejlépe znázorníme čtvercovou tabulkou

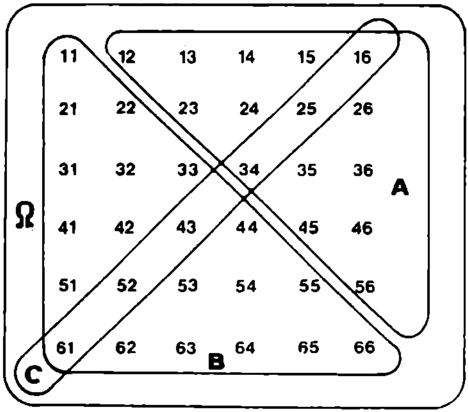
	11	12	13	14	15	16
	21	22	23	24	25	26
	31	32	33	34	35	36
	41	42	43	44	45	46
Ω	51	52	53	54	55	56
	61	62	63	64	65	66

Do tabulky zaneseme jevy

A: Počet teček při prvním hodu bude menší než při druhém hodu.

B: Při druhém hodu nepadne víc teček než při prvním.

C: Součet teček z obou hodů bude 7.
D: Při prvním hodu padne stěna se šesti tečkami.
E: Při prvním hodu padne nanejvýš 5 teček.
F: Součet teček z obou hodů bude menší než 20.
G: Součet teček z obou hodů bude 13.



Obr. 3.2. Některé podmnožiny prostoru výsledků (jevu) při dvojím hodu obyčejnou kostkou

Úloha 3.6. Zakódujte (vyznačením v tabulce) ostatní jevy z minulého příkladu.

Je-li výsledek pro jev příznivý, patří výsledek do množiny, kterou je jev zakódován (stručně: do množiny, která je ten jev). Povede-li pokus k tomuto výsledku, řekneme, že nastal příslušný jev.

Jestliže výsledek dvojitého hodu kostkou byla dvojice 66, pak nastal jev D a také nastal jev B. Výsledek 66 je příznivý pro oba jevy. V tomto případě nenastal jev E, ani A, ani C.

3.3. JAK SE SJEDNOCUJÍ JEVY? CO JE TO PRŮNIK JEVŮ? OPAČNÉ JEVY. DISJUNKTNÍ JEVY

Jevy jsou vlastně množiny. Můžeme proto mluvit o sjednocení jevů a o průniku jevů. Také má smysl mluvit o disjunktních jevech. Operace s jevy nejsou nic jiného než nám dobře známé operace s příslušnými množinami.

Příklad 3.5. Vraťme se k jevům z minulého příkladu a všimněme si, že $A \cap B = \emptyset$. Jevy A a B jsou disjunktní. Co to znamená? Žádný výsledek příslušného náhodného pokusu není současně příznivý pro první i druhý jev. Dále platí $A \cup B = \Omega$, sjednocení jevů A, B je jistý jev. Obě tyto vlastnosti můžeme souhrnně vyjádřit tak, že pro jev B jsou příznivé právě ty výsledky, které nejsou příznivé pro jev A. Do množiny (jevu) B patří právě ty výsledky z Ω, které nepatří do množiny (jevu) A.

Definice 3.4. Jev B, do kterého patří (pro který jsou příznivé) právě ty výsledky z Ω, které nepatří do jevu A, nazveme *jev opačný* k A a označíme symbolem A'. Je-li jev B opačný k A, je také jev A opačný k B. O těchto jevech můžeme tedy stručně říkat, že jsou *opačné.*

Jev B z minulého příkladu je opačný k A, tj. $B = A'$. Dva jevy jsou opačné, právě když jsou disjunktní, a jejich sjednocení je jistý jev.

Úloha 3.7. V příkladech, které jsme probrali, najděte opačné jevy.

Úloha 3.8. V přístroji pro tah koulí jsou čtyři kuličky očíslované 0, 1, 2, 3. Dvakrát táhneme s vracením po jedné kuličce. Říkáme, že táhneme číslo, kterým je kulička očíslována. Výsledek náhodného pokusu je dvojice číslic. Tuto dvojici budeme považovat za číslo. Číslice tažená jako první znamená počet desítek, druhá počet jednotek. Dvojice 03 je prostě číslo 3. Vyjádřete průběh tohoto náhodného pokusu stromem. Sestavte prostor výsledků. Následuje několik jevů souvisejících s naším pokusem:

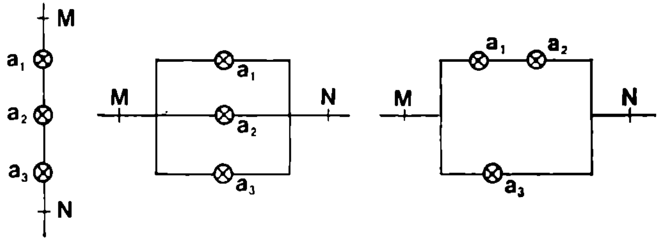
A: Dostaneme číslo dělitelné čtyřmi.
B: Dostaneme liché číslo.
C: Číslo, které náhodným výběrem dostaneme, bude dělitelné dvěma.
D: Číslo bude dvojciferné.
E: Číslo bude dělitelné třemi.
F: Číslo bude dělitelné číslem 33.
G: Dostaneme číslo větší než 33.
H: Číslo bude větší než 21.

Zakódujte tyto jevy. Popište slovy jevy $C \cap E$, $B \cup C$, $B \cup A$. Uveďte disjunktní jevy. Uveďte opačné jevy.

Úloha 3.9. Řidič projíždí městečkem. Na jeho trase jsou tři rušné křižovatky řízené světly. Signalizace není synchronizována, tj. řízení jedné křižovatky nesouvisí s řízením ostatních. O tom, se kterou barvou se řidič setká, rozhoduje náhoda. Očíslujeme křižovatky tak, jak jdou za sebou, a sledujme, s kterými barvami (*č* - červená, *z* - zelená, *o* - oranžová) se řidič na křižovatkách postupně setká. Sestavte strom tohoto tříetapového náhodného pokusu. Popište prostor výsledků. Zakódujte jevy

A: Řidič nebude muset na křižovatkách zastavit.
B: Zastaví ho jen světla na křižovatce č. 2.

C: Řidič bude muset zastavit nejvýše na dvou křižovatkách.



Obr. 3.3.

Úloha 3.10. Na obr. 3.3 jsou části MN tří elektrických obvodů. Sledujme v určitém okamžiku žárovky a_1, a_2, a_3 zapojené do obvodu (žárovka je buď dobrá - 1, nebo spálená - 0). Budeme předpokládat, že ke spálení žárovky dochází náhodně. Naše pozorování je tedy náhodný pokus. V každém z případů a) b) c) ho znázorněte stromem a sestavte prostor výsledků. Označme A_k jev, že žárovka a_k je spálená. Vyjádřete jevy A_k jako podmnožiny prostoru výsledků. Pomocí jevů A_k vyjádřete jevy

B: Proud nebude obvodem procházet, neboť je obvod přerušen.

C: Proud bude procházet.

Návod: V případě b) je např. $B = A_1 \cap A_2 \cap A_3$.

4. kapitola

ČETNOST JEVU
PRAVDĚPODOBNOST JEVU

4.1. O JISTÉ PRAVIDELNOSTI, KTERÁ SE PROJEVUJE PŘI HÁZENÍ MINCÍ

Sedlák měl dva syny, Petra a Pavla, a ještě 100 ovcí. Mezi ovcemi byly některé pěkné, jiné horší. Otec se rozhodl, že ovce rozdělí synům. Vznikl tak problém, jak to udělat, aby dělení bylo objektivní a žádný syn ho neobvinil z nespravedlnosti. Otec se rozhodl, že čí bude která ovce, neurčí on, ale náhoda. „Hodím mincí, a padne-li lev, dostane ovci Pavel. Když padne panna, vezme si ovci Petr," řekl synům.

Než byly ovce rozděleny, bylo třeba stokrát hodit mincí. Dopadlo to takto:

lplllplpll pllppp llpp llplplplpl lplpllllpl plllppllp
ppllppplpp lpplplppll ppplllppll llplpppl pp lppppppl pp

Po prvních deseti hodech se Petrovi zdálo, že mu křivdí, ale ve druhé desítce dostal víc ovcí. Čím víc bylo hodů, tím méně se lišily počty Petrových a Pavlových ovcí. Jaký byl konečný výsledek dělení?

Petr dostal ovcí 51 a Pavel 49. Je překvapivé, že dělení, při němž se uplatňovala náhoda (vždyť náhoda rozhodovala o dělení), dopadlo tak spravedlivě. Způsob dělení ovcí, který otec navrhl, je opravdu velmi objektivní. Těžko můžeme minci obvinit z nadržování. Mince dávala Petrovi a Pavlovi stejnou šanci, když se rozhodovalo, čí bude ovce.

Pravděpodobnost, která se při mnohonásobném hodu mincí*) projevuje, spočívá v tom, že počty hozených lvů a panen se vyrovnávají, přesněji řečeno, stabilizují.**)

Z tabulky výsledků otcových hodů vyplývá následující závěr: Házíme-li mincí mnohokrát za sebou, pak přibližně stejně často padá lev i panna. Oba výsledky jsou stejně možné. Oba mají stejnou šanci.

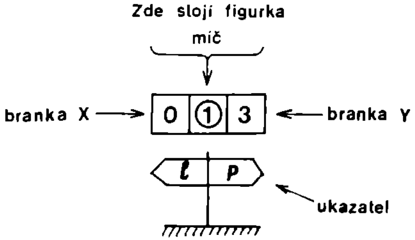
Tento závěr jsme mohli očekávat. Když je mince souměrná, není žádný důvod k tomu, aby padala nahoru jednou stranou častěji než druhou, aby jeden výsledek měl větší šanci než druhý. Kdybychom házeli s-kostkou, byly by také dva možné výsledky. Ale s-kostka má pětkrát víc stěn bez tečky než s tečkou. Výsledek ⊡ má pětkrát menší šanci než výsledek □. Při házení s-kostkou padne pětkrát častěji □ než ⊡. Můžete si to ověřit pokusem. Jen je třeba házet mnohokrát. (Místo s-kostky můžete použít obyčejnou kostku.)

4.2. STEJNÉ ŠANCE. MENŠÍ ŠANCE. VĚTŠÍ ŠANCE

Příklad 4.1. (Hra lev-panna.) Je to jednoduchá náhodná hra. Účastní se jí hráči X a Y. Na obr. 4.1 vidíte jednoduché hřiště. Padne-li při hodu mincí p, vyhrává X a míč padne do branky Y. Padne-li l, vyhrává Y a míč padne do branky X.

Je důležité, kdo hází mincí? Ovšemže ne! A je důle-

*) Uvažujeme stejnorodou minci pravidelného tvaru.
**) *Pozn. recenzenta:* Přesněji řečeno: stabilizuje se poměr počtu lvů k počtu panen.



Obr. 4.1.

žité, kdy se mincí házelo? Bylo-li to minutu, hodinu, rok nebo ještě déle před vstřelením míče do příslušné branky? To jistě nemá význam. Když je tomu tak, nemusejí hráči X a Y vůbec mincí házet. Provedl to za ně Pavlův a Petrův otec. Hráči mohou klidně využít seznam sedlákových výsledků (výsledků stonásobného hodu mincí). Říkejme mu sedlákova tabulka.

Teď už se nemusí házet mincí. Stačí jen z tabulky číst postupně výsledky a příslušným způsobem kopat do míče a dávat body. Tabulka stačí až ke stonásobnému opakování hry. Kolikrát vyhraje X? Kolikrát vyhraje Y? Budeme to zaznamenávat tak, že po každém hodu (tj. po přečtení každého písmene ze sedlákovy tabulky) uděláme čárku do tabulky

vyhrál X			tolikrát vyhrál X
vyhrál Y			tolikrát vyhrál Y

Podíváme-li se na vyplněnou tabulku, zjistíme, že oba hráči mají v této hře stejné šance. Vyplývá to z toho, že při mnohonásobném hodu mincí padá lev i panna přibližně stejně často.

Uvedená hra lev-panna je příklad velmi jednoduché náhodné hry, tj. hry, v níž o výsledku rozhoduje výlučně náhoda a ne schopnosti, dovednosti nebo umění hráčů, jako např. při hře v šachy.

Příklad 4.2. Obměňme předcházející hru. Změníme pravidla. Teď bude třeba mincí hodit dvakrát. Padne-li alespoň jednou lev, bude míč putovat do branky Y (bod získá X). Padne-li při obou hodech panna, vyhraje Y a míč se vstřelí do branky X. Výsledky dvojitého hodu mincí zakódujeme dvojicemi. Házet mincí vůbec nemusíme. Stačí jen číst ze sedlákovy tabulky po dvou písmenech. Klidně můžeme číst od konce. Sedlákova tabulka stačí k padesátinásobnému opakování hry. Jaké teď budou šance hráčů? To se dá zjistit, přesněji řečeno, odhadnout.

Prostor výsledků dvojího hodu mincí je množina $\Omega = \{ll, lp, pl, pp\}$ (nakreslete strom). Pro výhru hráče X jsou příznivé výsledky ll, lp a pl. Pro výhru hráče Y je příznivý jen výsledek pp. Pro jev A — vyhraje hráč X — jsou příznivé tři výsledky: ll, lp, pl. Jev A je množina $\{ll, lp, pl\}$. Pro jev B — vyhraje hráč Y — je příznivý jen výsledek pp, takže $B = \{pp\}$.

Všechny čtyři výsledky z Ω jsou stejně možné. Každý ze čtyř výsledků má stejnou šanci. Třikrát víc těchto stejně možných výsledků je příznivých pro výhru X (jev A). Tato krátká úvaha nás vede k tomu, abychom hráči X přiznali třikrát větší šanci než hráči Y.

Potvrdí to praxe, tj. pokus? Už teď můžeme hru padesátkrát opakovat. Nezabere nám to mnoho času, vždyť házet mincí nemusíme. Poznamenejme si opět výsledky těchto padesáti her do tabulky

vyhrál X		37	tolikrát vyhrál X
vyhrál Y		13	tolikrát vyhrál Y

Tabulka umožňuje odhadnout šanci hráčů v naší nové hře. A odhad, jak vidíme, zcela potvrzuje náš předpokládaný poměr šancí.

Úloha 4.1. Zavedeme teď ještě jiné pravidlo kopání míče na hřišti z obr. 4.1. Padnou-li při dvojím hodu mincí samí lvi nebo samé panny, vyhraje X. Padne-li jednou lev a jednou panna (nezáleží na tom, v jakém pořadí), vyhraje Y. Jaké teď mají hráči šance? Ověřte svůj odhad tak, že opět budete hru padesátkrát opakovat (s použitím sedlákovy tabulky).

Úloha 4.2. Budeme si hrát s kostkou, která má stěny dvou typů (s tečkou a bez tečky). Padne-li stěna s tečkou, vyhraje X, padne-li prázdná stěna (bez tečky), vyhraje Y. Kolikrát menší šanci bude mít hráč X než hráč Y, jde-li o nám známou s-kostku? Kolik stěn s tečkou musí mít kostka, aby byly šance obou hráčů stejné? Kolik stěn s tečkou musí mít kostka, aby hráč X měl dvakrát menší šanci než hráč Y?

4.3. POMĚRNÁ ČETNOST JEVU. PRAVDĚPODOBNOST JEVU

Snažili jsme se odhadnout šanci, že nastanou určité jevy (vyhraje X, prohraje X apod.). Zkusme teď tyto šance ohodnotit, vyjádřit je číselně. Dostaneme tak informaci o budoucnosti, můžeme toho využít k jakémusi „předpovídání“ budoucnosti. Z čeho budeme při hodnocení šance vycházet? Asi spíše z toho, co se už stalo, tedy z minulosti. Vyjdeme z toho, co bylo, a zkusíme usoudit, co bude.

Pro některé jevy šanci ohodnotíme snadno, pro jiné to zatím tak snadné nebude.

Už jsme o výsledcích některých náhodných pokusů říkali, že jsou stejně možné. Tak tomu bylo, když jsme házeli mincí, obyčejnou hrací kostkou, když jsme pracovali s přístrojem pro tah koulí očíslovaných různými čísly. Mince padala stejně často jednou i druhou stranou nahoru. Potvrdil to pokus. Když jsme stokrát hodili mincí, počty lvů a panen se zpočátku velice lišily, ale s rostoucím počtem hodů jsme zjistili překvapivou tendenci k jejich vyrovnávání.

S vyprávěním o sedlákovi souvisejí tyto jevy:

A: Ovci dostane Pavel.

B: Ovci dostane Petr.

Jsou to jevy spojené s náhodným výběrem jedné ovce, čili s jedním hodem mincí. Pro každý z těchto jevů je příznivý jeden výsledek. Když mluvíme o šanci, že nastane jev A, mluvíme zároveň o šanci výsledku l. Šance jevu B je zároveň šancí výsledku p.

Na otázku, jak často nastal jev A, jak často dostal ovci Pavel, by dal odpověď poměr počtu případů, kdy nastal jev A (tomuto počtu říkáme *četnost jevu* A), k počtu všech přidělování jedné ovce. Tento poměr je $\frac{49}{100}$.

Pro jev B je to poměr $\frac{51}{100}$. Poměr, o kterém právě mluvíme, je tzv. *poměrná četnost jevu.* Při stu hodech jsou poměrné četnosti obou našich jevů A, B velmi blízké ke zlomku $\frac{1}{2}$. Poměrné četnosti jsou si skoro rovny. Šance jevu A a B jsme už předtím pokládali za stejné. Hovorově bychom řekli, že jevy A a B, nebo — na tom nezáleží — výsledky hodu mincí l a p, jsou stejně pravděpodobné.

Šance jevů A a B jsou v poměru 1 : 1. Šance každého z nich je tedy vyjádřena zlomkem $\frac{1}{1+1}$, čili $\frac{1}{2}$. Právě tomuto zlomku je blízká poměrná četnost jevu A. Číslo $\frac{1}{2}$ budeme chápat jako pravděpodobnost jevu A a zapisovat takto:

P (ovci dostane Pavel) $= \frac{1}{2}$, nebo stručně $\mathsf{P}(A) = \frac{1}{2}$, nebo také $\mathsf{P}(l) = \frac{1}{2}$. Podobně u jevu B píšeme P(ovci dostane Petr) $= \frac{1}{2}$, nebo stručně $\mathsf{P}(B) = \frac{1}{2}$, nebo také $\mathsf{P}(p) = \frac{1}{2}$.

Jak najdeme číslo, které chápeme jako pravděpodobnost jevu? Toto číslo úzce souvisí s výsledky pokusů (s minulostí). Způsob jeho určování už známe.

Nechť jev A souvisí s jistým náhodným pokusem, který můžeme za stejných podmínek mnohokrát opakovat. Opakujme ho n-krát. Spočteme, kolikrát byl výsledek příznivý jevu A (kolikrát nastal jev A). Toto číslo označme $c_n(A)$. Zajímavější by však byl poměr této četnosti k číslu n, tj. zlomek

$$\frac{c_n(A)}{n}.$$

Zlomek vyjadřuje, při jaké části opakovaných pokusů nastal jev A. Tento zlomek, tento poměr je právě poměrná četnost jevu A.

Definice 4.1. Zlomek

$$f_n(A) = \frac{c_n(A)}{n} = \frac{\text{četnost jevu } A \text{ při } n\text{-násobném opakování pokusu}}{\text{počet všech opakování pokusu}}$$

se nazývá *poměrná četnost jevu A*.

V příkladu se sedlákem jsme měli

$$f_{100}(A) = \frac{49}{100}, \; f_{100}(B) = \frac{51}{100}.$$

Občas, aby byl zápis srozumitelnější, napíšeme do závorek místo písmen A nebo B slovní popis příslušného jevu, např.

$$f_{100}(\text{ovci dostal Pavel}) = \frac{49}{100}.$$

Je-li pro jev A příznivý jen jeden výsledek ω, budeme stručně mluvit o poměrné četnosti toho výsledku a zapisovat ji $f_n(\omega)$. Poslední rovnost budeme zapisovat také $f_{100}(l) = \dfrac{49}{100}$.

Úloha 4.3. Zde jsou výsledky mnohokrát opakovaného hodu hrací kostkou:

56426 61555 26233 54142 46321 62645 12263 34111 33216 54443 31232 53412

Určete poměrnou četnost každého ze šesti výsledků. Nechť A, B, C, D jsou jevy popsané slovy v příkladu 3.1. Najděte $f_{60}(A)$, $f_{60}(B)$, $f_{60}(C)$ a $f_{60}(D)$. Potvrzují tyto poměrné četnosti naše očekávání, naše hodnocení šance, že jevy nastanou? Proveďte podobné výpočty pro výsledky vašeho pokusu např. také šedesátinásobného hodu hrací kostkou.

S rostoucím n má poměrná četnost $f_n(A)$ (A je opět jev z příkladu o sedlákovi) podivuhodnou tendenci ke stabilizaci, k oscilování kolem určitého čísla. V příkladě se sedlákem oscilovaly $f_n(A)$ a $f_n(B)$ kolem čísla $\frac{1}{2}$. Toto číslo budeme chápat jako ideální poměrnou četnost. Je to vhodný kandidát na číselnou míru šance, že nastane daný jev. Ideální poměrné četnosti jevu budeme říkat *pravděpodobnost jevu.*

Stabilizace poměrných četností $f_n(l)$ a $f_n(p)$ je dobře vidět z následující tabulky

	$n = 10$	$n = 20$	$n = 50$	$n = 100$
p	3	9	20	51
l	7	11	30	49
$f_n(p)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{20}{50}$	$\frac{51}{100}$
$f_n(l)$	$\frac{7}{10}$	$\frac{11}{20}$	$\frac{30}{50}$	$\frac{49}{100}$

Při házení mincí je $\Omega = \{l, p\}$. Tabulka nás vede, abychom stanovili $\mathsf{P}(l) = \frac{1}{2}$, $\mathsf{P}(p) = \frac{1}{2}$.

Příklad 4.3. Ve skutečném světě, který nás obklopuje, se setkáváme s mnoha příklady stabilizace poměrných četností. Už známe příklad (vzatý ze života) náhodného pokusu, který provádějí rodiče očekávající potomka. Opakování tohoto pokusu je zjišťování pohlaví u narozených dětí (nemusejí to být děti týchž rodičů, protože proces utváření pohlaví probíhá vždy stejně). Statistické ročenky nám poskytují zajímavé údaje — jak počty provedených zjištění (čísla n), tak čísla $c_n(♀)$ a $c_n(♂)$. Sestavme z těchto údajů tabulku podobně jako při házení mincí. Údaje uvádějí počet chlapců a děvčat narozených v Polsku v letech 1928, 1929 a 1930.*)

	1928	1928—1929	1928—1930
	n = 990 993	n = 1 985 094	n = 3 007 905
♀	477 339	956 675	1 451 414
♂	513 654	1 028 419	1 556 491
$f_n(♀)$	0,482	0,482	0,483
$f_n(♂)$	0,518	0,518	0,517

Pohlaví narozeného dítěte bylo tedy zjištěno celkem 3 007 905krát. To je velmi mnoho. Při uvažovaném náhodném pokusu je $\Omega = \{♀, ♂\}$. Tabulka umožňuje stanovit následující odhad hodnoty ideálních četností čili pravděpodobností:

$$\mathsf{P}(♀) \doteq 0{,}48, \qquad \mathsf{P}(♂) \doteq 0{,}52.$$

Řekneme-li tedy, že $\mathsf{P}(♀) = \frac{1}{2}$, $\mathsf{P}(♂) = \frac{1}{2}$, nebudeme daleko od pravdy. Nyní nám pokus připomíná hod mincí.

*) *Pozn. recenzenta:* Obdobné údaje novějšího data pro ČSSR lze nalézt v každoročně vydávané Statistické ročence ČSSR.

Mnohonásobné opakování jiných zjišťování, jako např. počtu úmrtí v roce, počtu telefonních hovorů vedených v daném časovém úseku přes danou ústřednu, počtu zápalek v automaticky plněných krabičkách (náhoda rozhoduje, kolik se tam dostane zápalek), zjišťování velikosti inteligenčního kvocientu a čísla bot náhodně vybraných dospělých lidí, poskytuje zajímavé údaje. Je z nich patrna stabilizace poměrných četností výsledků. Z velkého chaosu vystupuje překvapivá tendence k jistým zákonitostem. Ty pak slouží k prognózám, k předpovídání, co se stane.

Mnohonásobné opakování daného náhodného pokusu umožňuje odhadnout hodnotu pravděpodobnosti jevu. Tato hodnota je mírou šance, že jev nastane, a umožňuje v jistém smyslu předpovědět budoucnost. Byla určena na základě minulosti, odhadli jsme ji podle toho, co se dělo dříve, v minulosti, během pokusu.

Všimněme si, že tabulka z příkladu 4.2 umožňuje odhadnout pravděpodobnosti některých jevů souvisejících s dvojím hodem mincí.

$$\mathsf{P}\,(\text{alespoň jednou padne lev}) \doteq \frac{37}{50},$$

$$\mathsf{P}\,(\text{padnou dvě panny}) \doteq \frac{13}{50}.$$

Jednoduchá úvaha (vycházející z toho, co víme o světě, který nás obklopuje, vedla k závěru, že šance uvažovaných jevů jsou v poměru 3 : 1. Zlomek $\frac{3}{3+1}$, čili $\frac{3}{4}$, je tedy ideální poměrná četnost jevu, že alespoň jednou padne lev.

$$\mathsf{P}\,(\text{alespoň jednou padne lev}) = \frac{3}{4},$$

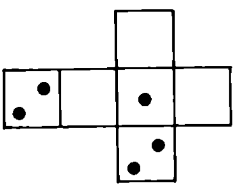
$$\mathsf{P}\,(\text{padnou dvě panny}) \quad = \frac{1}{4}.$$

Příklad 4.4. Při házení krychlovou kostkou je $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Je-li kostka pravidelná, měla by se každá stěna objevovat nahoře stejně často. Je tedy $\mathsf{P}(1) = \mathsf{P}(2) = \ldots = \mathsf{P}(6) = \frac{1}{6}$. K tomu závěru jsme nedošli na základě pokusů, ale na základě našich zkušeností. Kdyby se někomu chtělo mnohokrát házet kostkou, pokus by náš závěr určitě potvrdil. Pro s-kostku je $\Omega = \{\square, \boxdot\}$, $\mathsf{P}(\square) = \frac{5}{6}$, $\mathsf{P}(\boxdot) = \frac{1}{6}$.

Úloha 4.4. Porovnejte šance, že nastanou jevy A a B, pro následující dvojice jevů:

A: 1. července bude v Praze sněžit.
B: 1. července bude v Praze pršet.
A: Při příštím tahu sportky uhodnu číslo 5.
B: Při příštím tahu sportky uhodnu aspoň jedno číslo.
A: Příští středu potkám na ulici spolužáka.
B: Příští středu potkám na ulici Karla Gotta.

Úloha 4.5. Házíme kostkou, jejíž síť je na obr. 4.2, a po dopadu zjistíme, která stěna je nahoře. Určete prostor výsledků. Určete pravděpodobnost každého výsledku. Na základě čeho jste ji určili?



Obr. 4.2.

Úloha 4.6. Při dvojím hodu mincí je $\Omega = \{ll, lp, pl, pp\}$. Doplňte:

$$\mathsf{P}(ll) = \qquad \mathsf{P}(pp) =$$
$$\mathsf{P}(lp) = \qquad \mathsf{P}(pl) =$$

Úloha 4.7. Dejme tomu, že jsme mnohokrát hodili pravidelným dvacetistěnem s očíslovanými stěnami (viz str. 9). Po dopadu jsme zjišťovali číslo horní stěny a výsledek pokusu jsme kódovali tímto číslem. Na poslední stránce této knížky jsou pod nadpisem Tabulka náhodných čísel uvedeny výsledky hodů. Uvažujte prvních 300 výsledků (prvních šest řádků). Vypočtěte $f_{300}(0), f_{300}(1), f_{300}(2), \ldots, f_{300}(9)$. Potvrzují tyto výsledky, že každá číslice (každý výsledek) má tutéž šanci, že každá číslice je stejně pravděpodobná? Doplňte

f_{300} (padla sudá číslice) =
f_{300} (padla lichá číslice) =

5. kapitola

SIMULACE, ANEBO JAK POMOCÍ JISTÉ KNÍŽKY STŘÍLET KACHNY A PÉCI BOCHÁNKY S ROZINKAMI

5.1. KOSTKY, RULETY A URNY, KTERÉ SE CHOVAJÍ STEJNĚ

Cílem našeho zkoumání bylo zatím vymezení pojmu pravděpodobnost jevu. Je to číslo, které hodnotí šanci, že jev nastane. Abychom je získali, musíme mnohokrát opakovat příslušný náhodný pokus. Často však nelze pokus mnohokrát zopakovat v krátké době. U některých pokusů je mnohonásobné opakování zcela nemožné, u jiných příliš nákladné. Týká se to hlavně pokusů, které mají v praxi větší význam než hody kostkami nebo tahy kuliček. Jsou to např. výzkum šíření epidemie, sledování počtu nehod, pozorování srážek fotonů a elektronů atd.

Ukazuje se však, že určité pokusy lze zastoupit, napodobit, simulovat jinými. Některé pokusy probíhají obdobně.

Příklad 5.1. Hoďme kostkou č. 1. Všechny výsledky hodu jsou stejně možné. Kódovali jsme je počtem teček, které se objevily na horní stěně. Platí

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

$$\mathsf{P}(1) = \mathsf{P}(2) = \mathsf{P}(3) = \mathsf{P}(4) = \mathsf{P}(5) = \mathsf{P}(6) = \frac{1}{6}.$$

Roztočme teď ruletu č. 1 a sledujme, na jaké číslo ukáže šipka. Výsledky pokusu zakódujeme číslem, které ruleta vybrala. Z tvaru rulety soudíme, že každý výsledek má stejnou šanci. I zde dostáváme

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

$$\mathsf{P}(1) = \mathsf{P}(2) = \mathsf{P}(3) = \mathsf{P}(4) = \mathsf{P}(5) = \mathsf{P}(6) = \frac{1}{6}.$$

Přístrojem č. 1 je možno vybírat kuličky. Sledujme číslo kuličky. Opět je $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Každá kulička má stejnou šanci. I v tomto případě je každý výsledek stejně možný, tj. $\mathsf{P}(1) = \mathsf{P}(2) = \mathsf{P}(3) = \mathsf{P}(4) = \mathsf{P}(5) = \mathsf{P}(6) = \frac{1}{6}$.

Kostka č. 1, ruleta č. 1 i přístroj pro tah koulí č. 1 umožňují náhodně vybírat jedno z čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6. Kostka, ruleta i přístroj se při vybírání chovají stejně.

Co z toho plyne? Při hře Člověče, nezlob se se hází kostkou, kostkou č. 1. Nemáme-li ji po ruce, můžeme házení kostkou zastoupit, napodobit čili simulovat vybíráním čísla pomocí přístroje č. 1 nebo rulety č. 1.

Všimněte si analogie mezi hodem mincí a zjištěním pohlaví narozeného dítěte.

Úloha 5.1. Pomocí kostky č. 2, rulety č. 2 a přístroje pro tah koulí č. 2 (urny) můžeme náhodně vybírat jednu ze dvou barev. Určete prostor výsledků každého z těchto pokusů. Pro každý pokus určete pravděpodobnost každého výsledku. Jaký závěr odtud plyne?

Úloha 5.2. Mezi ruletami, kostkami a přístroji pro tah koulí najděte ty, které se chovají stejně.

Na základě našich poznatků dostáváme geniální nápad. Některé náhodné pokusy lze nahradit jinými. Určité pokusy lze simulovat jinými pokusy.

5.2. TABULKA NÁHODNÝCH ČÍSEL ANEB KNÍŽKA NAPSANÁ KOSTKOU

Kostka č. 4 se chová stejně jako ruleta č. 4 a přístroj pro tah koulí č. 4. Je to pravidelný dvacetistěn. Hoďme kostkou a sledujme, které číslo se objeví na horní stěně. Kostka č. 4 nám umožňuje vybrat jednu z deseti číslic. Každá má při tomto náhodném výběru stejnou šanci. Je tedy

$$\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$$

$$\mathsf{P}(0) = \mathsf{P}(1) = \mathsf{P}(2) = \ldots = \mathsf{P}(9) = \frac{1}{10}.$$

Opakujme hod kostkou mnohokrát a poznamenejme si číslice, které postupně padnou. Dostaneme tak soubor náhodných číslic. Je-li posloupnost číslic, kterou takto dostaneme, dostatečně dlouhá, měla by se v ní každá číslice vyskytovat přibližně stejně často. To nám zaručí dokonalá kostka. Její úlohu může úspěšně plnit dokonalá ruleta č. 4 nebo dokonalý přístroj pro tah koulí č. 4. V praxi však těžko získáme dokonalé pomůcky. Při sestavování „dokonalého" souboru náhodných číslic nahrazují člověka elektronické počítače. Dlouhé soubory náhodných číslic, uspořádané do řádek a sloupců, zaplňují stovky stran tlustých knih s názvem TABULKY NÁHODNÝCH ČÍSEL. Úryvek z takové knihy je na str. 169.

Opišme odtud část čtvrtého řádku a třetího sloupce:

```
    2
    2
    0
68582 97054 282
    6

    4
    0
```

Tabulky náhodných čísel, jejichž vznik jsme stručně popsali, mají ještě další vlastnosti. Každá z deseti číslic se v nich vyskytuje stejně často. Pravděpodobnost jejího výskytu na libovolném, náhodně vybraném místě, je $\frac{1}{10}$. Každá ze sta dvojic číslic 00, 01, 02, ..., 99 se také vyskytuje stejně často. Pravděpodobnost jejího výskytu na náhodně vybrané dvojici sousedních míst je $\frac{1}{100}$. Pro každou z tisíce trojic číslic 000, 001, 002, ..., 999 je pravděpodobnost $\frac{1}{1000}$ atd.

Budeme-li mluvit o tabulkách náhodných čísel, budeme vždy mít na mysli soubor náhodných číslic se zmíněnými vlastnostmi. Jsou totiž také tabulky náhodných čísel, které mají jiné vlastnosti.

Zbývá už jen otázka, která čtenáře asi znepokojuje: K čemu jsou tabulky a knihy náhodných čísel? Kdo je čte? Nebylo by lépe vydávat detektivky, ty jsou přece zajímavější? O velkém významu tabulek náhodných čísel se hned zmíníme.

Úloha 5.3. Pan X se rozhodl sestavit si sám tabulky náhodných čísel. Stál s tužkou a sešitem u východu z nádraží a ptal se lidí na den a měsíc narození. Nehodí se přece ptát se na rok. Když se někdo narodil např. 11. dubna, napsal si pan X čtyři číslice: 1104. V sešitě pana X vzniká řada náhodných číslic, a to tak dlouhá, na jakou bude mít pan X čas a trpělivost. Bude to tabulka náhodných čísel s vlastnostmi, o kterých jsme mluvili? Proč?

5.8. SIMULACE POMOCÍ TABULEK NÁHODNÝCH ČÍSEL

Mnoho náhodných pokusů, které jsou důležité pro praxi, ale obtížně se provádějí, budeme simulovat čtením číslic z tabulek náhodných čísel. Tabulky náhodných čísel nám umožní rychle získat výsledky různých náhodných pokusů mnohokrát opakovaných.

Uvědomte si, že sedlákova tabulka byl prototyp tabulky náhodných čísel. Sedlákovu tabulku jsme také využili k simulování jiných pokusů tak, že jsme četli písmena z tabulky.

Příklad 5.2. Má-li být hra v příkladu 4.1 (hra lev-panna) spravedlivá, tj. mají-li být šance obou hráčů stejné, musí být mince dokonale pravidelná. Ale taková mince neexistuje! Zahrajme si tedy bez házení mincí. V tabulkách náhodných čísel se každá číslice vyskytuje stejně často. Sudých čísel je právě tolik jako lichých. Pravděpodobnost, že na náhodně určeném místě v tabulkách je sudá číslice, je tatáž jako pro lichou číslici. Vybereme „poslepu" řádek a sloupec v tabulce náhodných čísel. O tom, která číslice bude v jejich průsečíku, rozhodne náhoda. Ta dává každé číslici stejnou šanci. Bude-li tam sudá číslice, řekneme, že padl lev. Bude-li tam číslice lichá, pokládejme ji za pannu.

Takovéto čtení a překlad číslic z tabulky dává výsledky mnohokrát opakovaného hodu mincí. Číst můžeme po sobě následující číslice téhož řádku nebo sloupce. Můžeme číst doprava nebo obráceně, zdola nahoru nebo shora dolů. To je jedno. Slovníček pro překlad je jednoduchý. Spočívá na tom, že

$$\mathsf{P}(\text{na libovolném místě bude sudá číslice}) = \frac{1}{2}, \mathsf{P}(l) = \frac{1}{2}.$$

P(na libovolném místě bude lichá číslice) $= \frac{1}{2}$, $P(p) = \frac{1}{2}$.

SLOVNÍK PRO SIMULOVÁNÍ HODU MINCÍ:

číslice 0, 2, 4, 6, 8 — padl lev
číslice 1, 3, 5, 7, 9 — padla panna

Při simulaci stonásobného hodu mincí přečteme z tabulky náhodných čísel (od libovolného místa počínajíc) sto po sobě následujících číslic a přeložíme je do jazyka lvů a panen pomocí našeho slovníku. Všimli jste si, kolik času jsme ušetřili?

Úloha 5.4. Proveďte simulaci stonásobného hodu mincí. Určete $f_{100}(l)$ a $f_{100}(p)$.

Příklad 5.3. a) Pomocí tabulek náhodných čísel lze simulovat i hod hrací kostkou. Můžeme tedy hrát Člověče, nezlob se bez kostky, ale s tabulkami náhodných čísel. Vyškrtejme z tabulek číslice 0, 7, 8 a 9. Ostatní číslice budeme chápat jako příslušné výsledky hodu kostkou. Opravňuje nás k tomu skutečnost, že po vyškrtání zůstalo v tabulkách jen šest různých číslic. Každá se bude se stejnou pravděpodobností $\left(\frac{1}{6}\right)$ vyskytovat na náhodně vybraném místě.

b) Kdybychom z takto upravených tabulek (vynechali jsme číslice 0, 7, 8, 9) četli číslice a překládali je podle následujícího slovníku

SLOVNÍK PRO SIMULACI HODU S-KOSTKOU:

číslice 1, 2, 3, 4, 5 — padla □
číslice 6 — padla ⚀

simulovali bychom hod s-kostkou.

Úloha 5.5. Proveďte simulaci šedesátinásobného hodu kostkou č. 1. Najděte poměrnou četnost pro všechny výsledky.

Zmínili jsme se o podivuhodné pravidelnosti, která provází mnohonásobné opakování náhodného pokusu za stejných podmínek. Právě simulace nám umožňuje pozorovat tuto vlastnost náhody. Provedení pokusu je leckdy z různých důvodů nemožné, příliš nákladné nebo časově náročné. Pravděpodobnost určitých jevů určíme buď na základě výsledků pokusů, nebo na základě výsledků simulace, která je napodobí. Později se pravděpodobnost jistých jevů naučíme určovat pomocí teorie, tj. vět, vzorců, různých pravidel. Podivuhodné bude srovnání praktických a teoretických výsledků. Výsledky získané oběma cestami budou stejné.

Příklad 5.4. Rodiče, kteří si naplánovali tři děti, se zajímají o pravděpodobnost různých náhodných jevů souvisejících s pohlavím narozených dětí. Pomůžeme jim při předpovídání. Došli jsme k závěru (trochu jsme zjednodušili skutečnost), že $\mathsf{P}(♀) = \mathsf{P}(♂) = \frac{1}{2}$. Sudou číslici v tabulkách náhodných čísel překládáme jako ♀, lichou číslici jako ♂. Abychom zjednodušili zápisy, budeme ♀ označovat jako 0 a ♂ jako 1. Otevřeme tabulky náhodných čísel na libovolné stránce. Dejme tomu, že to je stránka otištěná na konci naší knížky. Od libovolného místa (můžeme je náhodně vybrat) budeme číst po sobě následující trojice číslic. Po překladu to budou trojice dětí uvažovaných rodičů. Budeme např. číst trojice čísel ve čtvrtém a následujících řádcích. Jsou to (nahoře jsou číslice, pod nimi překlad)

685	829	705	428	251	637	875	728	518	854	350	061	634
001	001	101	000	011	011	011	100	110	010	110	001	010
351	867	679	796	064	611	298	196	801	008	766	391	708
111	001	011	110	000	011	010	110	001	000	100	111	100
532	442	373	007	749	582	902	097	437	529	228	073	959
110	000	111	001	101	100	100	011	011	101	000	011	111
178	506	286	101	751	652	409	159	469	667	843	580	092
110	100	000	101	111	010	001	111	001	001	001	100	010
068	198	823	509	790	123	770	152					
000	110	001	101	110	101	110	110					

Simulací jsme tak rychle získali 60 opakování, a tedy 60 výsledků pokusu.

Uvažujme různé jevy související s naším náhodným pokusem:

A: Nejstarší dítě bude chlapec,
B: Nejmladší dítě bude děvče,
C_0^3: V trojici budou samá děvčata,
C_1^3: V trojici bude jediný chlapec,
C_2^3: V trojici budou právě dva chlapci,
C_3^3: V trojici budou tři chlapci.

Podivné označení posledních čtyř jevů se hned vyjasní. Určeme poměrné četnosti uvedených jevů. Pro jev A jsou příznivé trojice, v nichž první číslice je 1. Takovýchto trojic máme celkem 29. Je tedy $f_{60}(A) = \frac{29}{60}$, a můžeme říci, že $\mathrm{P}(A) \doteq \frac{29}{60}$, čili přibližně $\frac{1}{2}$. Souhlasí to s naší domněnkou?

Pro jev C_0^3 jsou příznivé trojice, v nichž není číslice 1.

Takových výsledků máme 7. Je tedy $f_{60}(C_0^3) = \frac{7}{60}$,

takže $\mathsf{P}(C_0^3) \doteq \frac{7}{60}$.

Poměrnou četnost a přibližnou hodnotu pravděpodobnosti ostatních jevů snadno najdete sami. Brzy už budeme tyto přibližné hodnoty moci srovnat s přesnými hodnotami stanovenými na základě teorie.

Úloha 5.6. Pro jistý náhodný pokus je prostor výsledků množina $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$. Popište, jak byste pokus simulovali, je-li

a) $\mathsf{P}(\omega_1) = \frac{1}{2}$, $\mathsf{P}(\omega_2) = \frac{3}{8}$, $\mathsf{P}(\omega_3) = \frac{1}{8}$,

b) $\mathsf{P}(\omega_1) = \mathsf{P}(\omega_2) = \mathsf{P}(\omega_3) = \frac{1}{3}$,

c) $\mathsf{P}(\omega_1) = \frac{1}{7}$, $\mathsf{P}(\omega_2) = \frac{2}{7}$, $\mathsf{P}(\omega_3) = \frac{4}{7}$.

Úloha 5.7. Simulujte pomocí tabulek náhodných čísel šedesát hodů hrací kostkou a přibližně určete

P(padne sudý počet teček) $\doteq$

P(počet teček nebude větší než 4) $\doteq$

P(počet teček bude dělitelný třemi) $\doteq$

P(počet teček bude nejvýše 6) $\doteq$

P(padne 6 teček) $\doteq$

5.4. JAK SE VYBÍRAJÍ NÁHODNÉ VZORKY

Když se má z nějaké skupiny lidí vybrat jeden nebo několik členů, většinou se losuje. Na stejné lístky se napíší jména členů skupiny, lístky se sbalí podobně jako v loterii a nasypou se do čepice. Po důkladném promíchání se se zavřenýma očima vytáhne jeden nebo několik lístků. Tento obřad je přece simulace náhodného výběru prvku (nebo prvků) z množiny, která hraje úlohu urny.

Je-li však prvků (osob) několik tisíc, způsob losování, který jsme popsali, není už vhodný pro praktické použití.

Sériově vyráběné zboží vždy podléhá kontrole. Dejme tomu, že bylo vyrobeno n výrobků. Číslo n jsou často tisíce nebo desetitisíce. Výrobky dělíme na dobré (0) a špatné (1). Ohodnotit jakost výrobků znamená odpovědět na otázku, jaký je poměr počtu m vadných výrobků k počtu n všech výrobků.

Tento poměr je poměrná četnost vadných výrobků, podrobněji, je to

$$f_n \text{ (náhodně vybraný výrobek je vadný).}$$

Poměrná četnost je přibližnou hodnotou pravděpodobnosti, že náhodně vybraný výrobek (např. později zakoupený v obchodě) bude vadný, špatný, prostě zmetek.

Jak se bude kontrola provádět? Kdyby se zkoumal každý výrobek, zabralo by to příliš mnoho času a zaměstnalo příliš mnoho lidí. Taková kontrola jakosti by byla nehospodárná. Kdybychom takto chtěli zkontrolovat 10 000 masových konzerv, museli bychom každou otevřít. Tak bychom je všechny zničili, k prodeji by se už nehodily.

Vyberme si ze všech výrobků (tzv. *populace*) zcela náhodným způsobem určitých r kusů. Těchto r náhodně vybraných výrobků je *náhodný vzorek z populace*. Výrobky ze vzorku zkontrolujme. Z počtu vadných kusů ve vzorku budeme usuzovat na počet m vadných kusů v celé populaci. Jak budeme usuzovat, si povíme později. Teď stojíme před jiným, neméně zajímavým problémem:

jak náhodně vybírat r kusů do vzorku? Jak to udělat, aby o tom, dostane-li se daný výrobek do vzorku nebo ne, rozhodovala náhoda a aby každý výrobek měl stejnou šanci? Tento problém není tak jednoduchý, jak se zdá. Ukážeme si jednu z mnoha metod výběru prvku do vzorku z populace o konečném počtu prvků.

Příklad 5.5. Populace bude 10 000 konzerv. Jejich jakost máme ohodnotit tak, že vyzkoušíme 100 náhodně vybraných konzerv. Náhodný vzorek vybereme pomocí tabulek náhodných čísel. Očíslujeme konzervy 0000 až 9999. Každá tak dostala čtyřmístné číslo. Je jedno, v jakém pořadí jsme konzervy číslovali. Otevřme tabulky náhodných čísel na libovolné stránce. Dejme tomu, že to je stránka otištěná na konci naší knížky. Vyberme si libovolný řádek, třeba šestý. Vypišme si od tohoto řádku počínaje všechny čtveřice číslic, které po sobě následují ve čtyřech libovolných, ale pevně určených sloupcích, např. ve sloupcích 7, 8, 9 a 10. Dostaneme soubor čtveřic 2922, 0681, 0110, 4591, ... Jsou to čísla konzerv, které vezmeme do vzorku. Chceme-li vybrat vzorek náhodným výběrem bez vracení, vyloučíme čtveřice, které se při čtení vyskytly podruhé. Pokračujeme tak dlouho, dokud nezískáme 100 čtveřic (jestli různých nebo ne, záleží na typu výběru).

Číslo sloupce a číslo řádku, odkud začneme číst, můžeme vybrat náhodně, třeba také pomocí tabulek.

Úloha 5.8. Je třeba zkontrolovat, zda studentům prvních ročníků bylo sociální zabezpečení (stipendia, poukázky do menzy, dekrety na lůžka v koleji) přiznáno podle příslušných předpisů. Podle pokynu nadřízených orgánů stačí zevrubně prozkoumat materiály 30 % studentů. Aby výsledky kontroly ukazovaly skutečný stav, je nutno třicetiprocentní vzorek vybrat nezaujatě. V prvním ročníku studuje 100 studentů. Bylo rozhodnuto, že budou zkontrolovány materiály prvních třiceti studentů podle abecedy. Tento vzorek nebyl vybrán náhodně. Proč?

Úloha 5.9. V továrně vyrobili 2000 televizorů. Mají se zkontrolovat tak, že se podrobně přezkoumá 50 televizorů. Vzorek se má vybrat náhodně s vracením. Popište, jak byste to provedli pomocí tabulek náhodných čísel.

5.5. JAK ODHADNOUT PRAVDĚPODOBNOST JEVU POMOCÍ SIMULACE

Příklad 5.6. V příkladu 2.5 stály na zastávce dvě paní X a Y. Přijela tramvajová souprava se třemi vozy. Paní nastoupily do náhodně zvolených vozů. Sledovali jsme, do kterého vozu každá paní nastoupila. Výsledky našeho pozorování jsme kódovali dvojicemi číslic. První číslice ve dvojici znamená číslo vozu, který si vybrala paní X, a druhá číslo vozu, kam nastoupila paní Y. O tom, který vůz si každá paní vybrala, rozhodla náhoda. Každému vozu dejme stejnou šanci. Každý výsledek našeho pozorování tak pokládáme za stejně možný, za stejně pravděpodobný. Uvažujme několik jevů souvisejících s naším náhodným pokusem:

A: Obě paní nastoupily do téhož vozu.
B: Každá paní nastoupila do jiného vozu.
C: Obě paní nastoupily do druhého vozu.

Výběr vozu můžeme simulovat jistým přístrojem pro tah koulí nebo jistou zvláštní kostkou. Kterým přístrojem, kterou kostkou a jak, na to si jistě odpovíte sami.

My budeme simulaci provádět pomocí tabulek náhodných čísel. Vynechme z nich číslice 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0. Zbylé číslice čteme po dvojicích. Každá dvojice bude jeden výsledek. Budeme-li číst od začátku naší tabulky na str. 169, dostaneme následující dvojice:

22 23 31 31 33 31 32 13 32 11 33 13 32 13 31 32 21 12
23 22 33 21 13 22 21 32 13 13 31 11 21 13 13 22 33 22
32 22 31 21 11 21 32 12 31 23 12 13 11 31 22 11 11 33
13 22 11 32 33 12 21 21 32 22 22 33 21 13 33 33 13 23
22 12 21 22 33 12 33 21 22 12 22 23 33 32 13 21 33 12
32 23 22 11 33 13 13 33 32 12.

Spočítejme výsledky příznivé pro jevy A, B a C. Pro jev A jsou příznivé dvojice, v nichž jsou obě číslice stejné. V našem souboru je jich 38. Je tedy

$$f_{100}(A) = \frac{38}{100} = 0{,}38 \text{ a } \mathsf{P}(A) \doteq 0{,}38.$$

Pro jev B jsou příznivé dvojice různých čísel. Máme jich 62, takže

$$f_{100}(B) = \frac{62}{100} = 0{,}62 \text{ a } \mathsf{P}(B) \doteq 0{,}62.$$

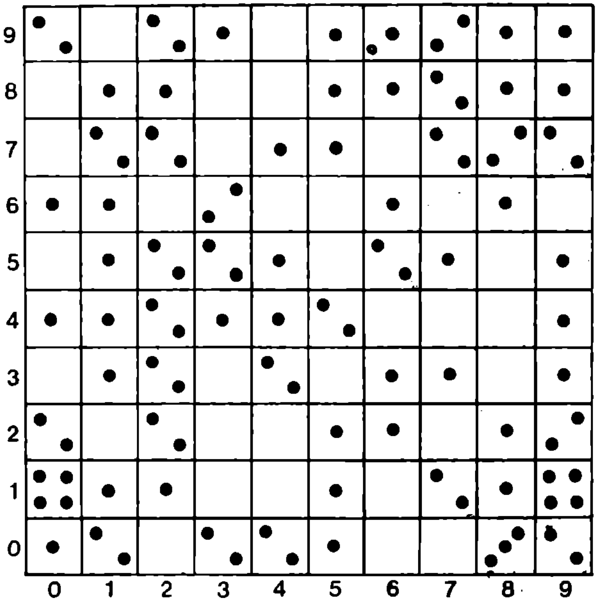
Pro jev C je příznivá jen dvojice 22. V našem souboru je jich 15. Je tedy

$$f_{100}(C) = \frac{15}{100} = 0{,}15 \text{ a } \mathsf{P}(C) \doteq 0{,}15.$$

Přibližné hodnoty pravděpodobností, které jsme dostali, později srovnáme s teoretickými hodnotami, které získáme pomocí teorie pravděpodobnosti. Uvidíme, že se budou lišit velmi málo.

Příklad 5.7. (Simulace pečení bochánků s rozinkami.) Do kynutého těsta jsme nasypali 100 rozinek. Po důkladném promíchání jsme z něho napekli 100 bochánků. Rozinky se do bochánků dostaly náhodně. Náhoda rozhodla o tom, kolik rozinek se dostalo do bochánku. Bude jistě zajímavé odhadnout hodnoty

P(bochánek bude bez rozinek),
P(v bochánku bude právě jedna rozinka),
P(v bochánku budou právě dvě rozinky),
P(v bochánku budou aspoň tři rozinky).



Obr. 5.1.

Pečení bochánků můžeme simulovat. Náhodné rozmístění rozinek v bocháncích nám nejlépe dají tabulky náhodných čísel. Zakódujeme každý ze sta bochánků dvojicí číslic. Bochánek se tak stane bodem čtvercové sítě z obr. 5.1. Přečteme též z tabulek náhodných čísel 100 po sobě následujících dvojic číslic. Číst začneme např. od šestého řádku. První dvojice, na kterou narazíme, bude 97. Je to bochánek, do kterého se náhodně dostala první ze sta rozinek. Udělejme do čtverečku 97 tečku. Další bochánky, do nichž se náhodně dostanou další rozinky, budou 43, 75, 29, 22, 80, 73, 95, 91, 78, 50 atd. Do příslušných čtverečků si také namalujeme tečky — rozinky.

Ve 33 bocháncích — čtverečcích — rozinky nebudou. V 39 bocháncích bude právě 1 rozinka. Do 25 bochánků se dostanou právě 2 rozinky, ve třech bocháncích budou aspoň 3 rozinky.

Kdyby se nám chtělo ještě několikrát pečení zopakovat (číst náhodná čísla byste samozřejmě začali odjinud), divili byste se, jak by se rozinky pokaždé rozmístily obdobně, pokud jde o počet bochánků s jednou, dvěma, alespoň třemi nebo žádnou rozinkou. Na tom se projevují podivuhodné vlastnosti náhody. Naše simulace a pokus dávají přibližné hodnoty

$$\mathsf{P}(\text{bochánek bude bez rozinek}) \doteq \frac{33}{100} = 0{,}33\,,$$

$$\mathsf{P}(\text{v bochánku bude jediná rozinka}) \doteq \frac{39}{100} = 0{,}39\,,$$

atd.

Úloha 5.10. Do přístavu připluje během 100 dní 100 lodí. Příjezdy lodí jsou zcela náhodné. Sledujeme počet dní, kdy nepřijede žádná loď, připluje právě 1, právě 2, alespoň 3. Toto pozorování připomíná náš výzkum, kolik rozinek se dostane do jednotlivých bochánků. Bochánky odpovídají dnům, rozinky lodím — analogie je zřejmá.

Pro přístavní zaměstnance je důležité znát šanci, pravděpodobnost, že daný den nepřipluje žádná loď, připluje právě jedna, právě dvě atd. Souvisí totiž s požadavky na pracovní síly při vykládce a nakládce lodí. Simulováním zmíněného náhodného připlouvání lodí odhadněte hodnotu pravděpodobností

P(daný den nepřipluje do přístavu žádná loď),
P(daný den připluje právě jedna loď),
P(daný den připlují právě dvě lodě),
P(daný den připlují aspoň tři lodě).

Příklad 5.8. (Lov kachen.) Pět lovců se vydalo na lov. Jsou to výborní lovci, nikdy nechybí cíl. Najednou se objevilo hejno šesti kachen. Každý lovec si rychle jednu vybere, zamíří a střelí. O tom, kdo si kterou kachnu vybral, rozhoduje náhoda. Okamžik, během něhož si lovci vybírají, je natolik krátký, že se nemohou rozmyslet (a vybrat si tu největší), ani se mezi sebou dohodnout, kdo si kterou vybere. Každá kachna má tedy tutéž šanci, že bude ulovena kterýmkoliv lovcem. Tento lov je další případ náhodného pokusu. Sledujeme, který lovec si vybral kterou kachnu. Jaký bude výsledek? Mohlo se stát, že si všichni vybrali tutéž. Nebo mohl každý ulovit jinou. Očíslujeme lovce i kachny. Každému lovci přiřaďme kachnu, kterou ulovil. Dostaneme tak funkci — pětici. O jejích členech rozhoduje náhoda, členy pětice jsou kachny (jejich pořadová čísla), které si příslušní lovci vybrali. Každá kachna má tutéž šanci. Celkem jich je 6, na každou tedy připadá šance $\frac{1}{6}$.

Prostor výsledků bude množina všech pětic se členy z množiny {1, 2, 3, 4, 5, 6} (z množiny čísel kachen). Pětice 23522 se rozšifruje takto:

lovec č. 1 střelil kachnu č. 2,
lovec č. 2 si vybral kachnu č. 3
atd.

Náhodný výběr kachen připomíná hod kostkou. Kdybychom hodili kostkou pětkrát a zaznamenali si čísla, která padla, dostali bychom jeden výsledek lovu. Přišli jsme na to, jak lovit bez střílení, jak lovit kostkou a ne puškou. Teď můžeme jít na lov s tabulkami náhodných čísel v ruce. Vysvětlete, jak byste to provedli. Uvedeme ještě několik jevů souvisejících s lovem kachen:

A: Každý zasáhne jinou kachnu.
B: Všichni střelí kachnu č. 3.
C: Lov přežijí právě dvě kachny.
D: Zahyne právě jedna kachna (všichni střelili tutéž).
E: Lov přežije kachna č. 1.

Úloha 5.11. Hodnoty pravděpodobností těchto jevů jsou zajímavé pro lovce i pro kachny. Odhadněte je tak, že budete lov padesátkrát simulovat pomocí tabulky náhodných čísel ze str. 169.

Úloha 5.12. Ředitel napsal 6 různých dopisů různým adresátům. Sekretářka je vložila do obálek a z roztržitosti je zalepila. Na zalepené obálky náhodně napsala adresy. Kam dopisy šly, o tom rozhodla náhoda. Simulujte náhodný pokus, o kterém jsme se právě zmínili. Pomocí 50 výsledků simulace určete pravděpodobnosti

P(žádný dopis nedojde na správnou adresu),
P(na všech obálkách bude správná adresa),
P(právě jeden dopis dojde na správnou adresu).

Úloha 5.13. Kvočna sedí na čtyřech vejcích. Dejme tomu, že je stejně pravděpodobné, že se z každého vejce může vylíhnout jak slepička, tak kohoutek. Simulujte sezení na vejcích pomocí tabulky náhodných čísel a odhadněte

P(vylíhnou se samé slepičky),
P(vylíhnou se samí kohoutci),
P(vylíhne se stejně slepiček jako kohoutků).

Označme B_k^4 náhodný jev, že se ze čtyř vajec vylíhne právě k kohoutků. Pro které k bude P(B_k^4) největší?

6. kapitola

NÁHODNÉ HRY

Z mnoha her, které znáte, si zvláštní pozornost zaslouží hry, při kterých o výhře a prohře rozhoduje jen náhoda. V takové hře může i nejhorší žák ze třídy porazit svého učitele. Nepatří mezi ně šachy ani mariáš. Člověče nezlob se je náhodná hra — o postupu figurek rozhoduje náhoda, výsledek hodu kostkou. Právě náhodné hry jsou zajímavé téma. S jednou velmi jednoduchou náhodnou hrou jsme se seznámili už v příkladu 4.1. Ukážeme si další náhodné hry.

6.1. NÁHODNÁ KOPANÁ

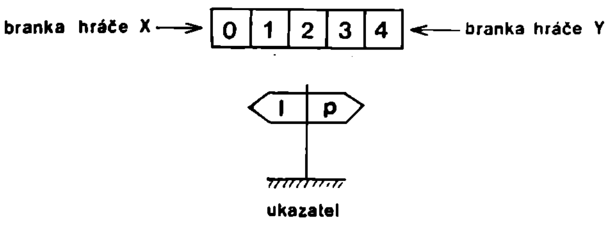
Na obr. 6.1 vidíme hřiště. V poli dvě stojí figurka — míč. Pole 0 je branka hráče X a pole 4 je branka hráče Y. Pohyb je dán výsledkem hodu mincí. Padne-li lev, míč se posune o jedno pole doleva, padne-li panna, o jedno pole doprava. Házíme mincí a posunujeme figurku, dokud se nedostane do některé branky. Pak řekneme, že padla branka. Není důležité, kdo hází mincí. Šance, že padne lev nebo panna, je stejná, ať hází nejhorší hráč ze třídy nebo učitel matematiky.

Dostane-li se míč do branky hráče Y, vyhraje hráč X, který vstřelil branku. Dostane-li se míč do pole 0, vyhraje Y, který vstřelil branku.

Může se stát, že mincí házíme mnohokrát, ale míč se do branky nedostane. Aby hra nebyla nudná, změníme trochu pravidla. Nepadne-li během šesti hodů branka, skončí utkání nerozhodně.

Naše hra je náhodný pokus. Jak jeho průběh zakódujeme? Jak ho znázorníme stromem?

Průběh utkání můžeme kódovat čísly polí, v nichž byl míč od začátku až do konce hry. Stejně dobře můžeme průběh i výsledek hry kódovat posloupností lvů a panen. V každém utkání se míč několikrát posunul. Dostal-li se míč do branky po k hodech, řekneme, že utkání trvalo k hodů. Nedostal-li se během šesti hodů míč do branky, utkání skončilo nerozhodně. Řekneme, že trvalo 6 hodů. Utkání zakódované $lppp$ trvalo 4 hody. Každému výsledku hry, tj. utkání, jsme tak přiřadili číslo. Toto číslo je doba trvání utkání měřená neobvyklým způsobem. Setkáváme se se zajímavou funkcí, která prostor výsledků zobrazuje do množiny čísel. Tuto funkci označme T. Bude např. $T(lppp) = 4$. Slovy popíšeme funkci jako dobu trvání jednoho utkání.



Obr. 6.1.

Úloha 6.1. Znázorněte průběh a výsledky náhodné kopané stromem. Určete prostor výsledků. Na obrázku stromu připište ke každému výsledku příslušnou hodnotu funkce T.

Následující různé jevy souvisejí s naší hrou:

A: Vyhraje hráč X.
B: Hráč X prohraje (vyhraje hráč Y).
C: Utkání skončí nerozhodně.
D: Utkání bude trvat dva hody.
E: Utkání skončí po čtyřech hodech brankou v síti hráče X.
F: Utkání skončí po pěti hodech brankou v síti hráče Y.
G_k: Utkání bude trvat k hodů.

Ještě je třeba tyto jevy zakódovat — udělejte to sami. Stojí za úvahu, že např. jev F je nemožný jev.

Ohodnoťme dále, jaké šance uvedené jevy mají. Kromě hodnot jejich pravděpodobností budou zajímavé i jiné hodnoty. Nabízí se přece otázka, jaká bude průměrná doba trvání utkání. Kolik hodů připadne průměrně na jedno utkání?

Místo házení mincí budeme číst z tabulek náhodných čísel. Čteme např. od konce tabulky po sloupcích zdola nahoru. Číslice překládejme do jazyka lvů a panen — sudé číslici odpovídá l, liché číslici p. Skupiny číslic odpovídající jednotlivým utkáním budeme oddělovat čárkami. Po překladu dostaneme následující soubor výsledků simulovaného házení mincí. Pod každým utkáním je připsána doba jeho trvání T.

pp/plll/pp/pp/pp/pp/pp/ll/pp/lppp/ll/plplll/ll/plplpl/
2 4 2 2 2 2 2 2 2 4 2 6 2 6

/lppp/ll/plll/ll/ll/plll/ll/plll/pp/ll/pllppl/ll/pllpll/
4 2 4 2 2 4 2 4 2 2 6 2 6

/pp/pp/pp/plplpl/pp/pp/pp/ll/plpp/ll/plplpp/ll/plll/ll/
2 2 2 6 2 2 2 2 4 2 6 2 4 2

|lppp|pp|lplpll|pllppl|plll|ll|pp|lppp|ll|ll|plpllp|lpll|

4 2 6 6 4 2 2 4 2 2 6 4

|pllppl|pp|plplpp|pp|lpll|lpplpp|lplpll|pp|lppp|plplll|

6 2 6 2 4 6 6 2 4 6

|lpll|ll|pp|pllppl|plplpp|pp|ll|

4 2 2 6 6 2 2

Celkem 234krát jsme „hodili mincí“ a dostali jsme tak 70 zápasů. Spočítejme, kolikrát nastaly naše jevy A až F. Bude to

$$A\text{-}32,\ B\text{-}31,\ C\text{-}7,\ D\text{-}39,\ E\text{-}6,\ F\text{-}0.$$

Přibližné hodnoty pravděpodobností budou

$$\mathsf{P}(\text{vyhraje hráč } X) \doteq \frac{32}{70}\,,$$

$$\mathsf{P}(\text{utkání skončí nerozhodně}) \doteq \frac{7}{70}\,.$$

Ukazuje se, že šance obou hráčů jsou stejné.

Věnujme teď trochu pozornosti funkci T, tj. době trvání jednoho utkání měřené počtem hodů.

Všimneme si jevu G_k. Můžeme ho vyjádřit a zapsat v jazyce funkce T. Jev G_k označme symbolem $\{T = k\}$. Uvědomte si, že $D = G_2 = \{T = 2\}$. Neplatí však, že $E = \{T = 4\}$. Proč ne?

Funkce T může nabývat hodnot 2, 4 a 6. Určeme poměrné četnosti jevů $\{T = k\}$ pro $k = 2, 4, 6$. Připomeňme si, že

$$f_n(\{T = k\}) = \frac{\text{počet utkání, která trvala } k \text{ hodů}}{\text{počet všech utkání}}$$

Dostaneme tabulku

$\{T = k\}$	$\{T = 2\}$	$\{T = 4\}$	$\{T = 6\}$
$f_{70}(\{T = k\})$	$\frac{39}{70}$	$\frac{15}{70}$	$\frac{16}{70}$

které budeme říkat *přibližné rozložení funkce T*. Funkce T je příklad tzv. náhodné veličiny. Je to funkce, která zobrazuje prostor výsledků nějakého náhodného pokusu do množiny čísel. Naše tabulka určitým způsobem charakterizuje naši funkci T, jejíž hodnoty závisejí na náhodě. Tabulka nás informuje, kterých hodnot funkce T nabývá a jak velké jsou šance, že nabude jednotlivých hodnot. Řekneme, že

$$\mathsf{P}(T \text{ nabude hodnoty } 2) \doteq \frac{39}{70},$$

$$\mathsf{P}(T \text{ nabude hodnoty } 4) \doteq \frac{15}{70},$$

$$\mathsf{P}(T \text{ nabude hodnoty } 6) \doteq \frac{16}{70}.$$

Teď je na řadě otázka, jaká je průměrná doba trvání jednoho utkání. Označme ji $\mathsf{E}T$. Je to *střední hodnota náhodné veličiny T*. Abychom průměrnou dobu, průměrný počet hodů připadající na jedno utkání určili, budeme postupovat následujícím způsobem: Spočítáme, kolik hodů trvala všechna utkání celkem. Vydělíme-li tento počet sedmdesáti, zjistíme, kolik hodů průměrně připadlo na jedno utkání. Celkový počet hodů dostaneme sečtením dob všech utkání. Vezmeme to po pořádku. Nejprve zjistíme, kolik utkání trvalo 2 hody, pak kolik jich trvalo 4 hody a kolik 6 hodů. Dostaneme 39 utkání po dvou hodech, 15 utkání po 4 hodech a 16 po šesti. Celkový počet hodů (celková doba trvání 70 utkání) bude

$$2.39 + 4.15 + 6.16 = 234 \text{ hodů} .$$

Na jedno utkání připadne průměrně $\frac{234}{70}$, čili přibližně 3,34 hodu, $\mathsf{E}T \doteq 3{,}34$. Uvědomte si, že

$$\mathsf{E}T \doteq \frac{2.39 + 4.15 + 6.16}{70} =$$

$$= 2 . \frac{39}{70} + 4 . \frac{15}{70} + 6 . \frac{16}{70} =$$

$$= 2.f_{70}(\{T = 2\ ) + 4.f_{70}(\{T = 4\}) + 6.f_{70}(\{T = 6\}).$$

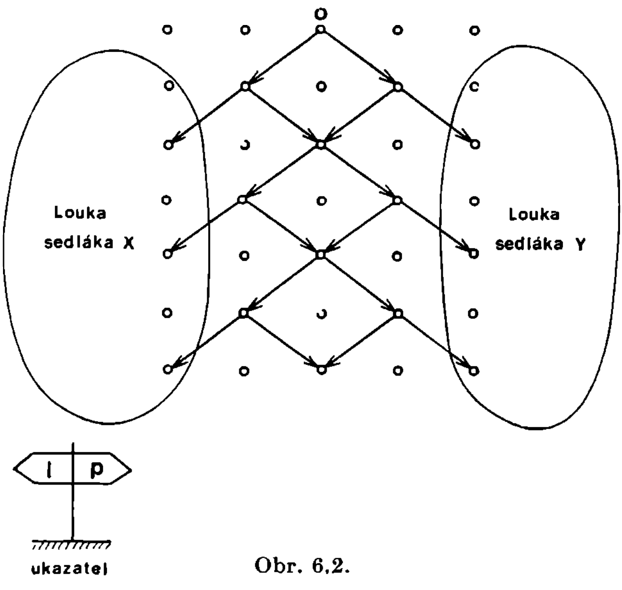
Přibližná střední hodnota $\mathsf{E}T$ je tedy zajímavý součet. Jeho sčítanci jsou součiny hodnot, kterých funkce T nabývá s přibližnými pravděpodobnostmi jejich nabývání. K tomu se ještě vrátíme.

Úloha 6.2. Na začátku utkání teď míč bude v poli 3. Jak se změní šance jevů A, B, a C? Jakých hodnot bude nabývat náhodná veličina T? Určete přibližné rozložení funkce T a $\mathsf{E}T$. Můžete k tomu klidně použít soubor lvů a panen na str. 70—71. Jen čárky mezi utkáními budou jinde.

Úloha 6.3. K hřišti připojme ještě jedno pole 5. Na začátku utkání je míč v poli 3. Řešte podobné problémy jako v úloze 6.1,

6.2. DVĚ LOUKY A VLK

Mezi loukami dvou sedláků X a Y je hustý les. Lesem vedou stezky (obr. 6.2). V bodě o je vlk. Při hře ho zastoupí figurka. Vlk bude běhat po stezkách. Hod mincí rozhodne o tom, kterým směrem poběží. Padne-li panna, poběží na jihovýchod, padne-li lev, na jihozápad. Znázorňuje to ukazatel. Na každé křižovatce znovu hodíme mincí, abychom mohli figurku posunout dál. Když bude vlk takto procházet lesem, může se náhodně dostat na některou louku, tj. na konce stezky. Dostane-li se na louku sedláka Y, vyhraje X. Dostane-li se na louku sedláka X, pak X prohraje. Po šesti hodech však vlk



Obr. 6.2.

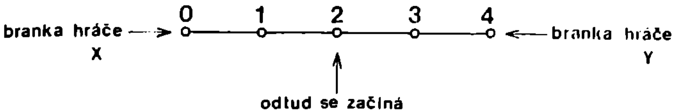
může obě louky minout. Poběží dál, ale jeho další cesta nás už nezajímá. Dopadne-li to tak, řekneme, že utkání skončilo nerozhodně.

Teď si můžeme zahrát a několikrát hodit mincí. Výsledky hry můžeme kódovat pomocí lvů a panen. Čtveřice *lppp* kóduje průběh vlkovy cesty lesem. Kudy vlk běžel? Zaveďme znovu dobu trvání jednoho utkání měřenou počtem hodů. Tato doba je zároveň rovna počtu úseků, které vlk proběhl od startu až do konce cesty. Uvažujme opět několik jevů:

A: Vlk se dostane na louku Y (vyhraje X).
B: Vlk se dostane na louku X (vyhraje Y).
C: Vlk obě louky mine.
D: Po dvou hodech se vlk dostane na některou louku.
E: Po čtyřech hodech se vlk dostane na louku sedláka X.
F: Po pěti hodech bude vlk na louce Y.
G_k: Vlkova cesta bude trvat k hodů.

Všimli jsme si, že *lppp* je kód jisté cesty lesem. Nakresleme si ji. Tudy poběží vlk, tudy půjde figurka, padne-li za sebou lev, panna, panna a panna. Cesta — a tedy i utkání — bude trvat 4 hody.

Máme už k dispozici soubor výsledků 234 hodů mincí. Využijeme ho, abychom si hru na vlka mohli zahrát mnohokrát. Budeme postupně číst písmena souboru a příslušně tahat figurkou. Skončí-li hra, uděláme čárku u toho jevu našeho seznamu, pro který byl výsledek příznivý. Skupiny písmen, odpovídající v souboru jednotlivým zápasům, oddělme čárkami. S překvapením zjistíme, že čárky od minulé hry se bezvadně hodí i pro novou hru. To je podivuhodné! Není to snad způsobeno náhodnou shodou okolností? Není! Mohli jsme to vědět předem. Snadno vysvětlíme, proč je tomu tak. Kdybychom si totiž list s lesem a loukami dali do výše očí a sledovali hru ze strany, viděli bychom, že se vlk pohybuje stejně jako míč na hřišti. Z louky X se stane branka X, z louky Y branka Y. Cesta vlka lesem se bude jevit jako pohyb figurky po přímce, přesněji řečeno, po průmětech křižovatek lesních stezek na přímku. Průměty můžeme pokládat za pole hřiště. Na obr. 6.3. vidíte, jak teď bude hřiště vypadat.

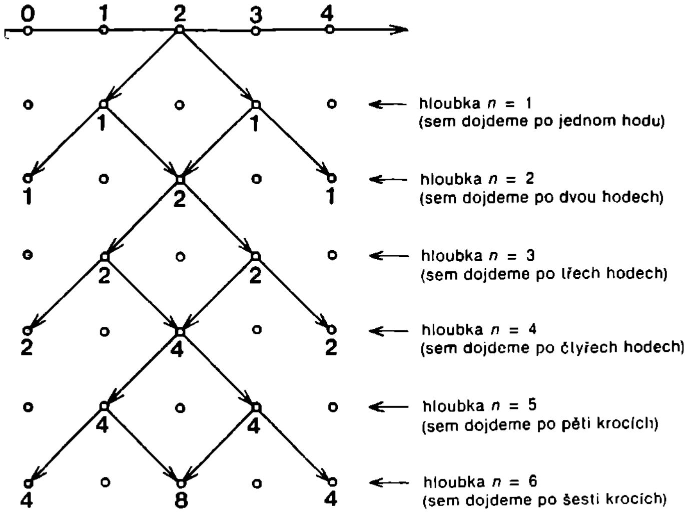


Obr. 6.3.

Náš objev nám umožní řešit mnoho zajímavých problémů souvisejících s náhodnou kopanou. Ptejme se, kolika způsoby se může míč dostat do různých polí na hřišti po dvou, třech, čtyřech, pěti a šesti hodech. Předtím bychom byli těžko hledali odpověď. Teď je to snadná záležitost. Ke každé křižovatce v obr. 6.2 připišme počet způsobů, jak se tam vlk může dostat. Každá křižovatka bude mít dvě souřadnice. První souřadnice křižovatky bude číslo jejího průmětu na přímku procházející startem. Druhá souřadnice křižovatky bude počet úseků, po kterých se do ní vlk dostane, tzv. hloubka křižovatky (obr. 6.4).

Z obr. 6.4 můžeme vyčíst, kolika způsoby a kdy se vlk může dostat na danou křižovatku. To je zároveň odpověď i na otázku, kolika způsoby a kdy se může míč dostat na dané pole hřiště.

Úloha 6.4. Hřiště má 6 polí očíslovaných 0, 1, 2, 3, 4, 5 a hra začíná v poli 3. Kam se míč může dostat po 2, 3,



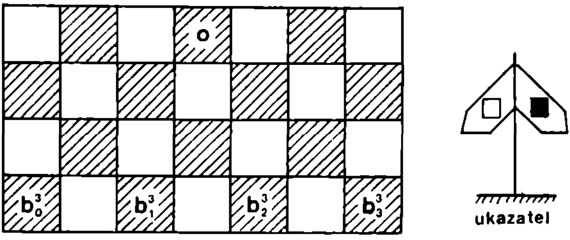
Obr. 6.4.

4, 5 a 6 hodech? Kolika způsoby se tam může dostat? Pomůže vám síť cest. Nakreslete si ji.

6.3. ZÁVODY NA ŠACHOVNICI

Na obr. 6.5 je šachovnice. Každý z hráčů (může jich být mnoho, budeme se zabývat jen jedním z nich) postaví svou figurku na startovní pole označené *o*. Ukazatel udává, jak se táhne figurkou v závislosti na výsledku hodu kostkou. Kostka je krychle, některé stěny má bílé a ostatní černé. Po třech hodech figurka dojde k jednomu z cílů. Bude-li to cíl označený b_k^3, hráč získá k bodů, $k = 0, 1, 2, 3$.

Připravme si tři černé a tři bílé čtverečky. Házejme kostkou, tahejme figurkou podle ukazatele a zároveň stavme věž ze čtverečků. Padne-li při prvním hodu např. černá, po tahu figurkou si stranou postavme z černého čtverečku přízemí věže. (Bude to plochá věž). Padne-li



Obr. 6.5.

bílá, figurka potáhne jiným směrem a „plochá" věž bude mít bílé přízemí. Podobně postupujme při druhém a třetím hodu. Po třech hodech figurka dojde k jednomu z cílů a stranou vznikne s přispěním náhody plochá věž.

Budeme-li házet mnohokrát, vznikne mnoho věží a figurka mnohokrát přejde přes šachovnici. Zatím nám nezáleží na tom, kolik je na kostce bílých a kolik černých stěn. Každá cesta figurky je vzájemně jednoznačně kódována věží. Věž je uspořádaná trojice. K cíli b_k^3 vedou cesty kódované věžemi, které mají právě k černých podlaží ($k = 0, 1, 2, 3$).

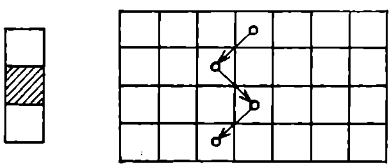
Do svých úvah opět zavedeme čas. Jde o závody na šachovnici. Postupné etapy závodu, postupné tahy figurky, probíhají v po sobě následujících časových jednotkách, např. dnech. Závod, o kterém je řeč, trvá 3 dny. Je to třídenní závod. Snadno ho prodloužíme na 4, 5, 6, ... až n dní. Stačí jen rozšířit a prodloužit šachovnici.

Třídenní závod budeme mnohokrát opakovat. Sestavíme tabulku, kam budeme vedle cílů kreslit věže, které je kódují. Až budeme mít už hodně věží, obrátíme svou pozornost na to, co mají společného všechny věže u daného cíle. Např. věž  umístíme k cíli b_1^3.

cíl b_0^3	věže, které...
cíl b_1^3 	věže, které...
cíl b_2^3	věže, které...
cíl b_3^3	věže, které mají všechna podlaží černá

Vyplněná tabulka nás vede k závěru, že k cíli b_k^3 vedou cesty zakódované věžemi, které mají právě k černých podlaží. K cíli b_k^3 figurka dojde, když udělá právě k kroků jihovýchodním směrem.

Na obr. 6.6 je věž a schéma šachovnice s vyznačenou cestou, která odpovídá věži. Pro různé věže můžeme do schématu šachovnice zakreslit příslušné cesty.

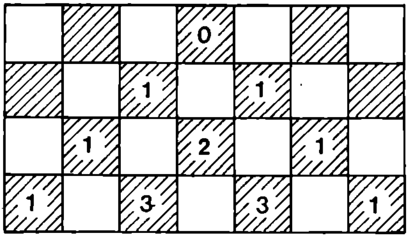


Obr. 6.6.

A obráceně, k daným cestám můžeme kreslit příslušné věže.

Kolik cest vede ke každému z cílů? Kolik je všech možných cest?

Počty cest, které vedou k jednotlivým cílům, můžeme najít velmi snadno tak, že je postupně vpisujeme do jednotlivých polí šachovnice. Čísla tvoří známý Pascalův trojúhelník (viz obr. 6.7).



Obr. 6.7.

Úloha 6.5. Najděte počty cest vedoucích ke každému z cílů, trvá-li závod týden. Kolik je všech možných cest týdenního závodu?

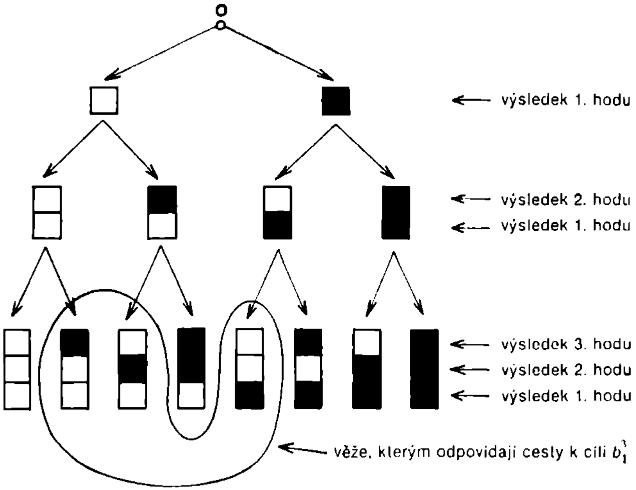
Strom na obr. 6.8 znázorňuje průběh a výsledky stavby věží při závodě na šachovnici.

Budeme dále uvažovat několik jevů souvisejících s naším závodem. Pro zvláštní jevy zavedeme zvláštní označení. Jako B_k^3 označíme následující jev: figurka dojde k cíli b_k^3 — hráč získá k bodů. To jsou čtyři jevy, pro $k = 0, 1, 2, 3$. Další jevy, které nás budou zajímat:

A: Hráč získá aspoň 2 body.

B: Hráč získá nejvýše 1 bod.

C: Hráč nezíská více než 2 body ani méně než 1 bod.



Obr. 6.8.

Úloha 6.6. Kostka má stejný počet černých i bílých stěn. Kolikrát byste museli hodit kostkou, abyste závod provedli padesátkrát? Určete $\mathsf{P}(B_k^3)$ pro $k = 0, 1, 2, 3$. Můžete simulovat házení kostkou pomocí souboru ze str. 70—71. Bude-li výsledek simulovaného závodu příznivý pro jev, udělejte do příslušného řádku tabulky čárku. Všimněte si, jak se počty čárek rozložily v řádcích tabulky. Porovnejte je s počty cest, které vedou k příslušným cílům.

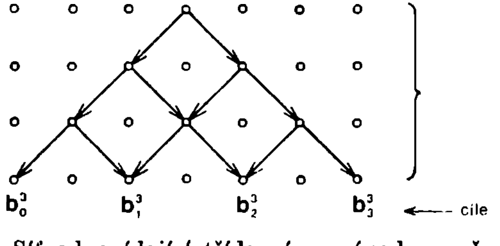
jev B_0^3	$f_{50}(B_0^3) = \dots$
jev B_1^3	$f_{50}(B_1^3) = \dots$
jev B_2^3	$f_{50}(B_2^3) = \dots$
jev B_3^3	$f_{50}(B_3^3) = \dots$

Každý výsledek hry je pro hráče spojen s počtem bodů, které získal. I zde tedy dostáváme funkci, která zobrazuje prostor výsledků do množiny čísel. Slovy ji popíšeme jako počet bodů získaných v závodě. Je to další příklad tzv. náhodné veličiny.

O tom, kolik bodů hráč získá, rozhoduje, kolikrát padne při trojím hodu kostkou černá. Padne-li černá, budeme mluvit o úspěchu, padne-li bílá, o neúspěchu.

Úloha 6.7. Prodlužte šachovnici, aby se hodila pro sedmidenní závod. Aby se figurka dostala k jednomu z cílů, bude nutno hodit kostkou sedmkrát. Označme cíle b_0^7, $b_1^7, \ldots, b_6^7, b_7^7$. Pro $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ označíme jako B_k^7 následující jev: figurka dojde k cíli b_k^7. Kostka má opět 3 černé a 3 bílé stěny. Využijte souboru výsledků hodu mincí na str. 70—71 a simulujte závody, dokud nevyčerpáte soubor. Podobně jako dříve dělejte k příslušným jevům čárky do tabulky. Porovnejte počty čárek u každého jevu s počty cest, které vedou k příslušným cílům. Jevu B_k^7 odpovídá cíl b_k^7.

Představme si, že jde o lyžařský závod. Účastníci projíždějí příslušné cesty na lyžích. Na sněhu zůstanou stopy. Kdybychom projeli všechny možné cesty na

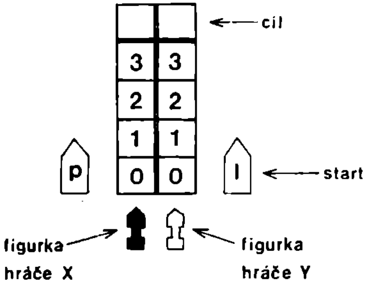


Obr. 6.9. Síť odpovídající třídennímu závodu na šachovnici

sněhové šachovnici, vytvořily by síť z obr. 6.9. Takové sítě mají v teorii pravděpodobnosti ohromný význam.

6.4. ZÁVODY V BĚHU

Na obr. 6.10 vidíte běžeckou dráhu se dvěma pruhy. Na startu stojí dvě figurky-běžci. Jeden patří hráči X a druhý hráči Y. Výsledek hodu mincí rozhoduje o tom, která figurka postoupí o jedno políčko k cíli. Udává to ukazatel. Házíme tak dlouho, až jedna figurka dojde k cíli a vyhraje závod. Její majitel získá bod.



Obr. 6.10.

Při opravdových závodech v běhu se měří čas. Uděláme to i zde. Dejme tomu, že hody budeme provádět v pravidelných intervalech, např. po minutě. Běh bude trvat tolik minut, kolikrát se při závodě házelo. Už dříve jsme měřili čas počtem hodů, což je vlastně totéž. Je důležité, kdo hází? Ne, už několikrát jsme to zdůrazňovali. Také není důležité, kdy se mincí házelo. Nemusíme házet, už jsme to dělali v příkladě o náhodné kopané. Soubor výsledků ze str. 70—71 se bude hodit i teď.

Vezměme si jeden z možných průběhů hry. Provedeme ho tak, že několikrát hodíme mincí a příslušným způsobem budeme pohybovat figurkami. Na počátku souboru jsou písmena $pppllllp|pppp|pppp|p\ldots$. (Čárkami opět oddělujeme bloky, které kódují jeden výsledek.) Sedmice $pppllllp$ je zakódovaný průběh jednoho závodu. Po sedmi minutách doběhl běžec X do cíle. Co se dělo v jednotlivých minutách, snadno vyčteme ze sedmice. Průběh a výsledky závodů budeme kódovat posloupnostmi prvků množiny $\{l,p\}$. Budou to posloupnosti různé délky.

Úloha 6.8. Utvořte strom závodů v běhu. Jaké podmínky musí splňovat posloupnost, aby kódovala nějaký výsledek hry? Kolika způsoby se mohou dva běžci na dráze předhánět?

S naší náhodnou hrou souvisí mnoho zajímavých jevů. Nejvíce hráče zajímají tyto jevy:

A: V závodě zvítězí X.
B: V závodě zvítězí Y.
A_j: V j-té minutě doběhne X do cíle jako první.
B_j: V j-té minutě zvítězí Y.
C_j: Závod bude trvat j minut.

Snadno zjistíme, že $A_3 = B_3 = \emptyset$, $A_4 = llll$, $B_4 = pppp$.

Úloha 6.9. Zakódujete jevy A_j a B_j pro $j = 5, 6$ a 7.

Každý výsledek hry je spojen s určitou cestou. Můžeme mu přiřadit číslo, které je dobou trvání této cesty, což je počet hodů při závodě. Toto přiřazení je funkce definovaná na prostoru výsledků, náhodná veličina. Označme ji T. Bude např. $T(llll) = 4$, $T(pppllllp) = 7$. Obor hodnot funkce T je množina $\{4,5,6,7\}$.

Všimněme si, že $C_j = A_j \cup B_j$. Jevu C_j jsou příznivé právě ty výsledky ω, pro které je $T(\omega) = j$. Pro $j = 4, 5, 6, 7$ tedy zavedeme označení $C_j = \{T = j\}$.

Když jsme do hry zavedli čas, měli bychom se zeptat, jak dlouho bude průměrně trvat jeden závod, kolik hodů připadne průměrně na jeden závod.

Úloha 6.10. Pomocí souboru výsledků házení mincí simulujte mnohonásobné opakování závodu v běhu a určete $\mathsf{P}(A)$, $\mathsf{P}(B)$, $\mathsf{P}(A_j)$, $\mathsf{P}(B_j)$ a $\mathsf{P}(C_j)$ pro $j = 4, 5, 6, 7$.

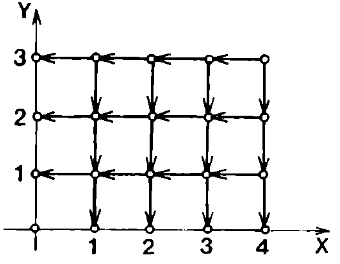
Úloha 6.11. Pomocí výsledku úlohy 6.10 určete rozložení náhodné veličiny T. Vyplňte tabulku

$\{T = j\}$	$\{T = 4\}$	$\{T = 5\}$	$\{T = 6\}$	$\{T = 7\}$
$f_n(\{T = j\})$				

Mějte na paměti, že $\{T = j\} = C_j$. Až vyplníte tabulku, určete průměrnou dobu trvání závodu, tj. $\mathsf{E}T$.

6.5. NÁMOŘNÍ BITVA

Na moři probíhá bitva. Bojují lodě dvou armád X a Y. Armáda X má x lodí, armáda Y jich má y. Armády jsou vlastně hráči. Místo děl budeme v bitvě potřebovat černobílou kostku nebo ruletu. Padne-li černá, ztratí jednu loď armáda Y. Padne-li bílá, přijde o loď armáda X. Barvu vybíráme náhodně pomocí kostky nebo rulety, dokud není jedna armáda poražena, tj. počet jejích lodí se zmenší na nulu. Průběh hry budeme modelovat cestou figurky po síti. Figurku postavme na start v bodě (x, y). Souřadnice x, y jsou celá čísla a znamenají počty lodí armád X, Y. Dejme tomu, že $x = 4$, $y = 3$. Po prvním výstřelu ztratí armáda X nebo armáda Y jeden křižník. Ztrátu znázorníme posunutím figurky do jiného bodu sítě. Ztratila-li loď armáda X, je stav bitvy (x-1, y) a do tohoto posuneme figurku. Patřila-li první potopená loď armádě Y, provede figurka první krok do bodu (x, y-1). Po určitém počtu výstřelů dojde figurka na osu OX nebo OY. Bod sítě,



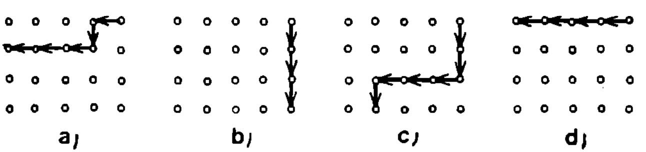
Obr. 6.11.

v němž figurka v daném okamžiku je, znázorňuje stav bitvy. Jeho souřadnice jsou počty lodí obou armád. Na obr. 6.11 vidíte síť, po které se bude figurka pohybovat.

Jak může bitva probíhat? Kolika způsoby může každá armáda zvítězit?

Průběh bitvy můžeme kódovat pomocí cesty, kterou prošla figurka.

Úloha 6.12. Na obr. 6.12 jsou kódy několika bitev mezi armádou X se čtyřmi loděmi a armádou Y se třemi. Popište průběh bitev. Kdo zvítězil?



Obr. 6.12.

Úloha 6.13. Polovina terče v ruletě je bílá a polovina černá. Taková ruleta se chová stejně jako pravidelná mince. Simulujte mnohokrát výběr barvy, vybojujte mnoho bitev a určete pravděpodobnost následujících jevů:

A: V bitvě zvítězí armáda X.
B: V bitvě zvítězí armáda Y.
C: Armáda X odejde z bitevního pole vítězně se třemi loděmi.
D: Armáda Y neztratí v bitvě ani jednu loď.

Každému výsledku hry (bitvy) lze přiřadit počet vypálených střel. Je to počet kroků figurky od zahájení do konce bitvy. Opět dostáváme funkci, která zobrazuje prostor výsledků do množiny čísel. Označme ji jako L. Určete její rozložení a průměrný počet výstřelů v jedné bitvě.

S výsledky hry souvisejí i jiná čísla, např. počet lodí, které zůstaly po bitvě armádě X, počet lodí, které ztratila armáda Y, atd.

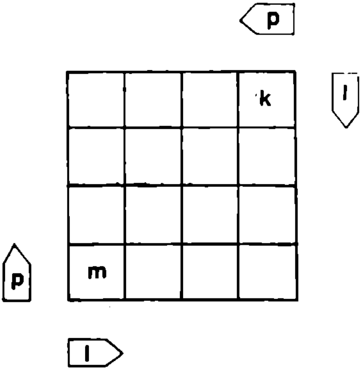
Úloha 6.14. Označme U počet lodí, s nimiž opouští armáda X bitevní pole. Určete hodnoty funkce U pro výsledky zakódované cestami na obr. 6.12. Určete obor hodnot funkce U. Popište jev $\{U = 0\}$.

Úloha 6.15. Znázorněte průběh s výsledky hry stromem.

Úloha 6.16. Určete rozložení funkce U. Určete $\mathsf{E}U$, tj. průměrný počet lodí, které zbyly armádě X po bitvě.

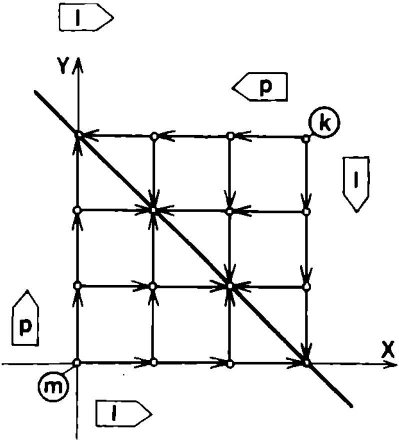
Podobné problémy můžeme řešit v případě, kdy má armáda X čtyři lodě a armáda Y pět lodí, obě armády mají po pěti lodích atd.

Na obr. 6.13 je šachovnice, po níž bude kočka honit myš. Kočka je figurka hráče *K* a je v poli *k*, myš je figurka hráče *M* a je v poli *m*. Kočka s myší jsou připraveny k honičce po šachovnici, obě s mincí v „ruce". Směry budeme opět číst stejně jako na mapě. Oba hráči hodí mincí a táhnou do sousedního pole podle toho, co jim padlo. Řídí se ukazatelem. Padne-li např. myši panna, táhne na sever, na sousední pole. Po třech hodech dojde myš na úhlopříčku šachovnice. Také kočka dojde po třech hodech na úhlopříčku. Svedla-li ji náhoda do téhož pole, hra tím ze známých důvodů skončila a vyhrál hráč *K*. Dostaly-li se do různých polí úhlopříčky, už se nikdy nesetkají. Myš kočce utekla a zvítězil hráč *M*.



Obr. 6.13.

Abychom hru mohli snáze rozebrat, nahradíme šachovnici sítí. Podobně jsme postupovali už v případě závodu na šachovnici. Síť je na obr. 6.14 umístěna v souřadné soustavě. Bod *m* je v počátku a bod *k* má souřadnice (3,3). Úseky, které figurka projde po jednom hodu,

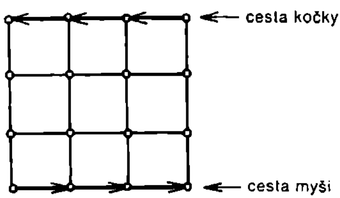


Obr. 6.14.

jsou jednotlivé úsečky. Tento úsek přejde figurka jedním krokem. Po třech hodech mincí udělala myš tři kroky a dostala se do určitého bodu přímky, která má rovnici

$$y = 3 - x\,.$$

Každý výsledek honičky a zároveň její průběh zakódujeme dvěma trojicemi. Tyto dvě trojice označíme (f, g). Trojice f se skládá z výsledků tří hodů mincí myši. V síti



Obr. 6.15.

jí odpovídá určitá cesta, kterou proběhne myš. Trojice g je výsledek trojího hodu mincí kočky. V síti jí odpovídá cesta, kterou se na úhlopříčku dostane kočka.

Průběh honičky na obr. 6.15 kódují dvě trojice (lll, ppp).

Úloha 6.17. Určete průběh honičky zakódované (lpl, plp). Zakreslete ho do sítě. Chytila kočka myš?

Prostor výsledků má $2^3 . 2^3 = 2^6$ prvků. Tolika způsoby může hra probíhat. Všimněme si několika jevů, které s hrou souvisejí.

A: Kočka chytí myš (vyhraje hráč K).

B: Myš kočce uteče (vyhraje hráč M).

A_{ik}: Kočka chytí myš v bodě (i, k).

Má-li bod (i, k) ležet na přímce $y = 3 - x$, neboli $x + y = 3$, musí být $i + k = 3$ (a ovšem $i, k = 0, 1, 2, 3$). Jevu A_{ik} jsou příznivé páry trojic, z nichž každá má právě na k místech člen p. Takových trojic je $\binom{3}{k}$. Myš se tedy do bodu (i, k) přímky $x + y = 3$ může dostat $\binom{3}{k}$ způsoby. Stejným počtem způsobů se tam může dostat kočka. Kočka a myš se mohou setkat v bodě (i, k), tedy $\binom{3}{k} . \binom{3}{k}$ způsoby. Pro jev A_{ik}, kde $k = 0, 1, 2, 3$ a $i = 3 - k$, je příznivých $\binom{3}{k} . \binom{3}{k}$ výsledků.

Úloha 6.18. Ke každému bodu sítě připište, kolika způsoby se do něho může dostat myš (pro body pod úhlopříčkou) nebo kočka (pro body nad úhlopříčkou). V bodech úhlopříčky budou dvojice stejných čísel. Čísla najdeme velmi snadno, tvoří přece Pascalův trojúhelník. Úhlopříčka je společná základna dvou stejných Pascalových trojúhelníků. Srovnejte počty výsledků příznivých pro setkání kočky s myší získané uvedeným způsobem, s čísly získanými předtím.

Mohou nastat celkem čtyři jevy A_{ik}: A_{30}, A_{21}, A_{12}, A_{03}. Každé dva z těchto jevů jsou disjunktní. Jak byste to odůvodnili? Pro jev A, o kterém jsme už mluvili, platí $A = A_{30} \cup A_{21} \cup A_{12} \cup A_{03}$. Jevy A, B jsou opačné.

Abychom získali jeden výsledek hry, musíme šestkrát hodit mincí.

Úloha 6.19. Pomocí tabulek náhodných čísel simulujte házení mincí a opakujte hru šedesátkrát. Pomocí získaných výsledků určete $\mathsf{P}(A)$ a $\mathsf{P}(B)$.

Úloha 6.20. Uveďte vlastní příklad náhodné veličiny, která přirozeným způsobem souvisí s naší hrou.

7. kapitola

PRAVDĚPODOBNOST

Od jisté doby věnujeme svou pozornost hodnocení šancí, že nastanou různé jevy. Mírou šance je číslo, kolem kterého se zajímavým způsobem „točí“ poměrná četnost jevu, roste-li počet opakování příslušného náhodného pokusu. Číslo, kolem něhož poměrná četnost osciluje, jsme nazvali pravděpodobnost jevu. Víme už, jak ji přibližně určit. U jednoduchých jevů ji dokonce dokážeme určit přesně.

7.1. VLASTNOSTI POMĚRNÉ ČETNOSTI

Uvažujme určitý náhodný pokus. Označme Ω prostor jeho výsledků a $\boldsymbol{S}$ množinu všech náhodných jevů, které s pokusem souvisejí. Budeme zkoumat vlastnosti poměrné četnosti jevu. Abychom našli poměrnou četnost jevu A z množiny $\boldsymbol{S}$, musíme pokus opakovat n-krát při týchž podmínkách. Jako $c_n(A)$ jsme označili, kolik jsme takto získali výsledků příznivých pro jev A. Poměrná četnost pak bude

$$f_n(A) = \frac{c_n(A)}{n}.$$

Všimněme si, že pro každý jev A z množiny $\boldsymbol{S}$ platí

$$0 \leqq c_n(A) \leqq n .$$

Vydělíme-li tuto nerovnost číslem n, dostaneme zajímavou vlastnost poměrné četnosti:

(f1) Pro každé $A \in \boldsymbol{S}$ platí $0 \leqq f_n(A) \leqq 1$.

Jistý jev je množina Ω. Každý výsledek je pro něj příznivý. Pro každé n je $c_n(\Omega) = n$, a platí tedy:

(f2) Pro každé n je $f_n(\Omega) = 1$.

Vezměme libovolné dva disjuntní jevy A a B z množiny $\boldsymbol{S}$. Neexistuje výsledek, který by byl příznivý zároveň pro oba jevy A i B. Je-li výsledek příznivý pro jev $A \cup B$, znamená to, že je buď příznivý pro jev A, nebo pro jev B. Pro oba jevy příznivý být nemůže. Z toho plyne, že

$$c_n(A \cup B) = c_n(A) + c_n(B) .$$

Vydělíme-li obě strany číslem n, dostaneme další důležitou vlastnost poměrné četnosti:

(f3) Je-li $A \in \boldsymbol{S}$, $B \in \boldsymbol{S}$ a $A \cap B = \emptyset$, platí
$$f_n(A \cup B) = f_n(A) + f_n(B) .$$

Nemožný jev je prázdná množina $\emptyset$. Poněvadž pro každé n je $c_n(\emptyset) = 0$, platí

(f4) $f_n(\emptyset) = 0$ pro každé n .

Uvedeme ještě dvě vlastnosti poměrné četnosti:

(f5) Pro každé n a každé $A \in \boldsymbol{S}$ je $f_n(A') = 1 - f_n(A)$.

(f6) Pro každé $A \in \boldsymbol{S}$, $B \in \boldsymbol{S}$ je $f_n(A \cup B) = f_n(A) + f_n(B) - f_n(A \cap B)$.

Každému jevu A z množiny $\boldsymbol{S}$ chceme teď přiřadit právě jedno číslo $\mathsf{P}(A)$ — pravděpodobnost jevu A. Chceme tedy definovat funkci P na množině $\boldsymbol{S}$ všech jevů souvisejících s daným náhodným pokusem. Číslo $\mathsf{P}(A)$ má být mírou šance, že nastane jev A, a tedy musí být spřízněno s poměrnou četností $f_n(A)$. Funkce P musí proto mít vlastnosti analogické vlastnostem poměrné četnosti. Z tohoto důvodu zavádíme následující definici pravděpodobnosti P.

Definice 7.1. Náhodný pokus nechť má konečný prostor výsledků Ω. Množina $\boldsymbol{S}$ všech podmnožin prostoru Ω je množina všech jevů souvisejících s daným náhodným pokusem. *Pravděpodobnost* P budeme říkat reálné funkci definované na množině $\boldsymbol{S}$, která vyhovuje následujícím třem podmínkám:

(P1) Pro každé $A \in \boldsymbol{S}$ je $\mathsf{P}(A) \geqq 0$.

(P2) $\mathsf{P}(\Omega) = 1$.

(P3) Pro každé dva jevy $A \in \boldsymbol{S}$ a $B \in \boldsymbol{S}$ takové, že $A \cap B = \emptyset$, platí $\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B)$.

Podmínkám (P1), (P2) a (P3) se říká *axiomy pravděpodobnosti*.

Ještě malé vysvětlení k suché definici. Hodnoty pravděpodobnosti P jsou teď definovány jen pro jevy, ne pro výsledky. Při házení mincí je p výsledek, jev je $\{p\}$. Definovali jsme $\mathsf{P}(\{p\})$ a ne $\mathsf{P}(p)$. Abychom zjednodušili dorozumívání, budeme někdy psát krátce $\mathsf{P}(p)$ místo $\mathsf{P}(\{p\})$ a ani v řeči to nebudeme rozlišovat.

Všimněte si, že při definici pravděpodobnosti se uplatnily jen některé vlastnosti poměrné četnosti uvedené v odst. 7.1. Dá se totiž ukázat, že z těchto vlastností už vyplývají ostatní. Dá se např. ukázat, že $\mathsf{P}(\emptyset) = 0$, $\mathsf{P}(A) \leqq 1$ a že $\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A \cap B)$. Pravděpodobnost P je funkce a často ji budeme zadávat pomocí tabulky.

Příklad 7.1. Při hodu mincí je $\Omega = \{l, p\}$. Množina jevů je $\boldsymbol{S} = \{\emptyset, \{l\}, \{p\}, \Omega\}$. Funkce P definovaná tabulkou

P:	$\emptyset$	$\{p\}$	$\{l\}$	Ω	jevy z množiny $\boldsymbol{S}$
	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	pravděpodobnosti jevů

je pravděpodobnost, protože splňuje všechny axiomy pravděpodobnosti. Avšak také funkce P_1 a P_2 definované tabulkami

P_1:	$\emptyset$	$\{p\}$	$\{l\}$	Ω
	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	1

P_2:	$\emptyset$	$\{p\}$	$\{l\}$	Ω
	0	0	1	1

splňují axiomy pravděpodobnosti. Funkce P_1 a P_2 jsou ve smyslu definice 7.1 také pravděpodobnosti definované na $\boldsymbol{S}$. Teď jste asi zmateni. Ostatně můžeme snadno uvést nekonečně mnoho dalších funkcí definovaných na $\boldsymbol{S}$, které budou mít také právo na název pravděpodobnost. Také budou splňovat axiomy pravděpodobnosti.

Ze všech nekonečně mnoha funkcí, které jsou podle definice 7.1 pravděpodobnosti definované na $\boldsymbol{S}$, jen jedna zasluhuje zvláštní pozornost. Je-li mince pravidelná, bude to funkce P definovaná první tabulkou. Hodnoty funkce P se shodují s ideálními poměrnými četnostmi jevů. Pro každý jev A z množiny $\boldsymbol{S}$ jevů souvisejících s házením mincí je $\mathsf{P}(A)$ míra šance, že jev A nastane.

Pro funkci P_1 tomu tak není. Je $\mathsf{P}_1(\{l\}) = \frac{5}{6}$ a v případě, že mince je pravidelná, se číslo $\frac{5}{6}$ neshoduje s ideální poměrnou četností jevu $\{l\}$. V tomto případě pro nás nebude mít pravděpodobnost P_1 (ani P_2 nebo jakákoliv různá od P) prakticky žádný význam. Pro hod pravidelnou mincí má pravděpodobnost P zvláštní význam — její hodnoty souvisejí s četností. Funkce P_1 a P_2 takovou vlastnost nemají.

Dále budeme uvažovat jen pravděpodobnost související s daným náhodným pokusem, jejíž hodnoty souvisejí s četností. Dostanete-li tedy za úkol určit pravděpodobnost jevu, budeme mít vždy na mysli tuto pravděpodobnost.

Příklad 7.2. Funkce P_1 je výborný kandidát na pravděpodobnost hodu s-kostkou. Výsledky hodu stačí kódovat takto: l - prázdná stěna, p - stěna s tečkou.

Úloha 7.1. Nechť $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$. Na množině $\boldsymbol{S}$ všech podmnožin prostoru Ω definujme pravděpodobnost P tabulkou

	$\emptyset$	ω_1	ω_2	Ω
P:	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

Na kostce jsou dva druhy stěn. Nakreslete ji, víte-li, že P je pravděpodobnost pro hod touto kostkou.

Úloha 7.2. Definujte pravděpodobnost P pro tažení kuličky:

a) pomocí přístroje pro tah koulí č. 2,

b) pomocí přístroje č. 3.

7.3. VLASTNOSTI PRAVDĚPODOBNOSTI

V množině jevů $\boldsymbol{S}$ je vždy nemožný jev, jev $\emptyset$. V našich úvodních úvahách o pravděpodobnosti se objevil několikrát. Hodnota jeho pravděpodobnosti byla vždy nula. V axiomech pravděpodobnosti o tom není řeč. Vyplývá snad z axiomů, že $\mathsf{P}(\emptyset) = 0$? Ukážeme, že skutečně ano. Dokážeme první větu naší teorie.

Věta 7.1. *Pravděpodobnost nemožného jevu je nula.*

Jak to dokážeme? Zatím toho přece moc nevíme, známe jen axiomy pravděpodobnosti.

Zvolme jakýkoliv jev $A \in \boldsymbol{S}$. Nechť P je pravděpodobnost definovaná na $\boldsymbol{S}$. Do $\boldsymbol{S}$ patří také $\emptyset$. Platí

(i) $$A \cup \emptyset = A$$

(ii) $$A \cap \emptyset = \emptyset$$

Využijme axionu P3, podmínka (ii) nám to dovolí. Vezmeme-li $B = \emptyset$, dostaneme

$$\mathsf{P}(A \cup \emptyset) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(\emptyset)\,.$$

Podle (i) je však vlevo $\mathsf{P}(A)$, a tedy

(iii) $$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(\emptyset)\,.$$

Na (iii) se dívejme jako na rovnici o neznámé $\mathsf{P}(\emptyset)$.

Dostaneme z ní $\mathsf{P}(\emptyset) = \mathsf{P}(A) - \mathsf{P}(A) = 0$, což jsme měli dokázat.

Nabízí se otázka, platí-li také obrácená věta. Je-li $\mathsf{P}(A) = 0$, plyne odtud, že A je nemožný jev? Obrácená věta neplatí. Abychom to ukázali, stačí uvést příklad jevu A, pro který je $\mathsf{P}(A) = 0$ a který není nemožný. (Takovému příkladu se říkává protipříklad.) V našem případě už protipříklad známe — stačí si jen dobře prohlédnout tabulku, která definuje pravděpodobnost P_2. Který jev to je? Z našeho výkladu plyne: nemožný jev a jev s nulovou pravděpodobností není totéž!

Úloha 7.3. Dokažte následující větu.

Věta 7.2. $\mathsf{P}(A') = 1 - \mathsf{P}(A)$.

Podle věty 7.1 musí v tabulce, kterou definujeme pravděpodobnost P, pod $\emptyset$ být vždy 0. Podle věty 7.2 stačí, uvedeme-li v tabulce hodnoty funkce P jen pro některé vhodné jevy. Pro ostatní jevy můžeme už pak hodnoty funkce P vypočítat pomocí teorie, tj. podle vzorce z věty 7.2.

Hodnoty pravděpodobnosti budeme tedy určovat na základě pokusů, simulace nebo úvah jen pro určité jevy. Pro ostatní jevy je vypočteme pomocí teorie, tj. vět.

Úloha 7.4. Doplňte tabulku, aby definovala pravděpodobnost

	$\emptyset$	ω_1	ω_2	Ω
P:		$\frac{79}{93}$		

kde $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$.

Úloha 7.5. Jistý náhodný pokus má prostor výsledků $\Omega = \{a, b, c\}$. Doplňte tabulku pravděpodobností.

	A	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{b,c\}$	$\{a,b,c\}$
a)	$\mathsf{P}_1(A)$	$\frac{1}{7}$			$\frac{3}{7}$			
b)	$\mathsf{P}_2(A)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$					
c)	$\mathsf{P}_3(A)$	p_1	p_2	p_3				

Ve třetím řádku je $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ a čísla p_1, p_2, p_3 jsou kladná.

Poslední úloha nás vede k zajímavému nápadu. Kdybychom hodnoty pravděpodobnosti P určili pro jednoprvkové jevy (stručně řečeno výsledky), byla by tím pravděpodobnost P už určena pro všechny jevy. Zkrátka, i když trochu nepřesně: Známe-li hodnoty pravděpodobnosti všech výsledků, známe už také hodnoty pravděpodobnosti všech ostatních jevů.

Příklad 7.3. Při hodu kostkou je $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Abychom definovali pravděpodobnost P, měli bychom udat 2^6 jejích hodnot. Tolik je totiž všech jevů souvisejících s hodem. Stačí však udat hodnoty pravděpodobnosti jen pro „výsledky". Je-li kostka pravidelná, je

$$\mathsf{P}(1) = \mathsf{P}(2) = \mathsf{P}(3) = \mathsf{P}(4) = \mathsf{P}(5) = \mathsf{P}(6) = \frac{1}{6}.$$

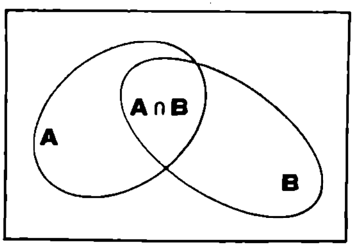
V příkladu 3.1 na str. 29 je uvedeno několik jevů. Dostáváme pro ně

$$P(A) = P(\{2, 4, 6\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6}.$$

$$P(C) = P(\{5, 6\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}.$$

S funkcemi, které měly podobné vlastnosti jako pravděpodobnost, jste se už nejednou v matematice a fyzice setkali.

Představme si čtverec jednotkového obsahu. Bude to prostor výsledků Ω a $\boldsymbol{S}$ bude množina všech podmnožin čtverce, které mají obsah. Obsah je funkce definovaná na $\boldsymbol{S}$. Označme ji také písmenem P. Všimněte si, že



Obr. 7.1.

obsah vyhovuje axiomům pravděpodobnosti. Pravděpodobnost tedy můžeme pokládat za míru. To nám umožní najít myšlenku důkazů mnoha dalších vlastností pravděpodobnosti. Na obr. 7.1 vidíte dvě množiny A a B, pro které je definován obsah P. Všimněte si, že

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

To nám umožňuje — s využitím určitých geometrických poznatků o útvarech, které mají obsah — dokázat následující větu.

Věta 7.3. *Je-li* P *pravděpodobnost definovaná na* $\boldsymbol{S}$, $A \in \boldsymbol{S}$ *a* $B \in \boldsymbol{S}$, *pak*

$$\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A \cap B) .$$

Úloha 7.6. Na kostce jsou stěny bez teček, s jednou tečkou, se dvěma a se třemi. Nakreslete kostku, víte-li, že pro sledování počtu teček na horní stěně po hodu platí

$$\mathsf{P}(0) = \frac{1}{6}, \quad \mathsf{P}(1) = \frac{2}{6}, \quad \mathsf{P}(3) = \frac{2}{6}.$$

8. kapitola

NÁHODNÉ PROCHÁZKY A PRAVDĚPODOBNOSTNÍ POČÍTADLO

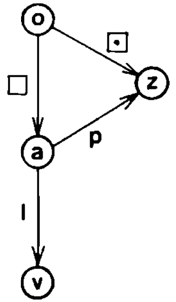
8.1. NÁHODNÉ PROCHÁZKY

Při hře na vlka a dvě louky figurka (vlk) putovala po dané síti. O směru její cesty rozhodovala náhoda. Takovým cestám budeme říkat *náhodné procházky*. Pohyb míče po hřišti při náhodné kopané byla také náhodná procházka. Náhodná procházka je i cesta figurky při závodech na šachovnici. Námořní bitvu jsme také znázornili jako náhodnou procházku figurky po určité síti.

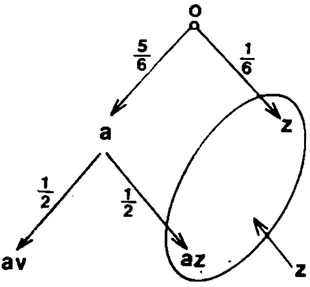
S podobnými náhodnými procházkami se setkáváme nejen u her. Let vosy po pokoji také připomíná náhodnou procházku. Částice hmoty se pohybují chaoticky. Pohyby částic kapalin nebo plynů jsou také náhodné procházky. Náhodné procházky částic hmoty jsou známy pod názvem Brownův pohyb.

Náhodné procházky jsou zvláštním případem náhodného pokusu. Věnujme jim trochu pozornosti. Vyjdeme od velmi jednoduché náhodné hry.

Příklad 8.1. (Koza, vlk a zelí.) Na obr. 8.1 je jednoduchá síť, po které se pohybuje koza. Zastupuje ji figurka. Koza vychází z bodu o. Cíle jsou body v a z. V bodě v čeká vlk, v bodě z je zelné pole. Aby figurka-koza mohla udělat první krok, musíme hodit s-kostkou. Padne-li prázdná stěna, jde figurka (koza) do bodu a, padne-li stěna s tečkou, jde do bodu z. Dostane-li se do bodu z, putování končí výhrou. Dostane-li se do bodu *a*, házíme ještě jednou, tentokrát však mincí. Ukazatele na obrázku znázorňují, jak se má v závislosti na výsledcích hodu táhnout. Dostane-li se figurka do bodu *v*, znamená to prohru.



Obr. 8.1.



Obr. 8.2.

Příčiny neúspěchu jsou zřejmé — koza se setkala s vlkem. Tuto jednoduchou hru si může zahrát hráč sám. Zajímá nás, kudy koza putuje a ke kterému cíli se dostane. Hledíme-li takto na procházku, napadne nás, abychom výsledky a průběh naší hry (našeho náhodného pokusu) kódovali pomocí cest, které figurka projde od startu do cíle. V síti jsou jen tři cesty. Dvě z nich mají po dvou úsecích. Ke každému úseku v síti připišme pravděpodobnost, že jím figurka projde. Jsou to pravděpodobnosti jednotlivých výsledků při hodu s-kostkou nebo mincí a můžeme je snadno určit.

Znázorněme naši hru (jde o náhodný pokus) stromem (obr. 8.2). Každé cestě v síti odpovídá právě jedna větev stromu. Větev kóduje cestu. Úsekům cesty odpovídají hrany stromu. Ke každé hraně stromu připišme pravděpodobnost jevu, že po ní projde koza. Podobně připišme pravděpodobnosti k úsekům cest v síti. Prostor výsledků bude $\Omega = \{av, az, z\}$. Uvažujme několik jevů souvisejících s naší hrou:

Z: Koza se dostane k zelí.
V: Koza se dostane k vlkovi.

Zakódujme je: $Z = \{az, z\}$, $V = \{av\}$. Ptejme se dále na pravděpodobnosti $\mathsf{P}(Z)$ a $\mathsf{P}(V)$. Ptáme-li se na $\mathsf{P}(V)$, ptáme se na pravděpodobnost, že pokus proběhne tak, jak na stromě znázorňuje větev, na které visí výsledek *av*. $\mathsf{P}(V)$ je pravděpodobnost výsledku *av*.

Abychom obě pravděpodobnosti odhadli, mohli bychom hru n-krát opakovat (n by muselo být dost velké přirozené číslo). To znamená, že bychom museli kozu n-krát vypustit ze startu s příkazem, aby se pohybovala podle uvedených pravidel. Kdybychom nechtěli kozu tak týrat, mohli bychom na start postavit ne jednu, ale celé stádo n koz. Pro každou z nich bychom pak museli zvlášť házet s-kostkou a pak mincí, posunovat je po síti a pak spočítat, kolik se jich dostalo do v a kolik do z.

Jak se figurky-kozy rozmístí? Máme-li předpovědět, jaký počet koz se prvním krokem dostane do a a jaký do z, odhadneme, že $\frac{5}{6}$ koz půjde do a a $\frac{1}{6}$ do z. O rozmístění koz sice rozhoduje náhoda, ale rozdíl mezi naší pravděpodobností a skutečností bude s největší pravděpodobností malý. Když situaci idealizujeme (zjednodušíme — ve fyzice i v matematice se často zjednodušuje), řekneme, že $\frac{1}{6}n$ figurek půjde do z a $\frac{5}{6}n$ do a. Zjednodušení vyžaduje, aby n bylo dělitelné šesti (aby došly celé kozy). U cíle z je tedy po prvním kroku $\frac{1}{6}n$ koz a v bodě a jich je $\frac{5}{6}n$.

Předpověď dalšího rozmístění koz, které se dostaly do a, říká, že polovina, tj. $\frac{1}{2}$ z $\frac{5}{6}n$, půjde do v a druhá polovina, tj. také $\frac{1}{2}$ z $\frac{5}{6}n$, půjde do z. Po idealizaci, zjednodušení situace, jsme předpověděli, že k cíli z se dostalo celkem $\frac{1}{6}n + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6}n$ koz a k cíli v se dostalo $\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6}n$ koz.

Poměr

$$\frac{\text{počet koz, které se dostaly k cíli } z}{\text{počet všech koz, které putovaly}}$$

je ideální poměrná četnost jevu Z — koza se dostane k zelí, a tedy

$$\mathsf{P}\,(\text{koza se dostane k zelí}) = \frac{\frac{1}{6}n + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6}n}{n} = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6}.$$

Podobně

$$\mathsf{P}(\text{koza se dostane k vlkovi}) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6}n}{n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6}.$$

Zřejmě, aby k cílům došly „celé" kozy, musí být počet koz postavený na start dělitelný $2.6 = 12$.

8.2. PRAVIDLO NÁSOBENÍ A PRAVIDLO SČÍTÁNÍ

Pro jev V je příznivý jen jeden výsledek. Pravděpodobnost jevu V je pravděpodobnost, že figurka půjde určitou cestou, cestou *av*. Tato cesta se skládá ze dvou úseků. Pravděpodobnost, že tudy figurka půjde, je součin $\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6}$, což je součin pravděpodobností pro oba úseky.

Síť bychom mohli prodloužit, takže cesty by se mohly skládat z více než dvou úseků. Snadno usoudíme (podobně jako v našem jednoduchém případě), že pravděpodobnost, že figurka půjde danou cestou sítě, pak bude součin pravděpodobností, že půjde jednotlivými úseky dané cesty. To je podstata tzv. pravidla násobení.

PRAVIDLO NÁSOBENÍ (pro náhodné procházky): Pravděpodobnost, že procházka povede danou cestou sítě od startu k cíli, je rovna součinu pravděpodobností, že povede jednotlivými jejími úseky.

Každému úseku cesty odpovídá hrana stromu. Každé cestě odpovídá větev, a tedy i výsledek, který na ní visí. Pravidlo násobení můžeme tedy přenést i na stromy. Stromy jsou také sítě. Průběh pokusu si můžeme představit jako náhodnou procházku figurky po větvi stromu od kořene do jednoho z koncových bodů. Dostáváme tak důležité pravidlo pro pravděpodobnost víceetapových náhodných pokusů znázorněných pomocí stromu.

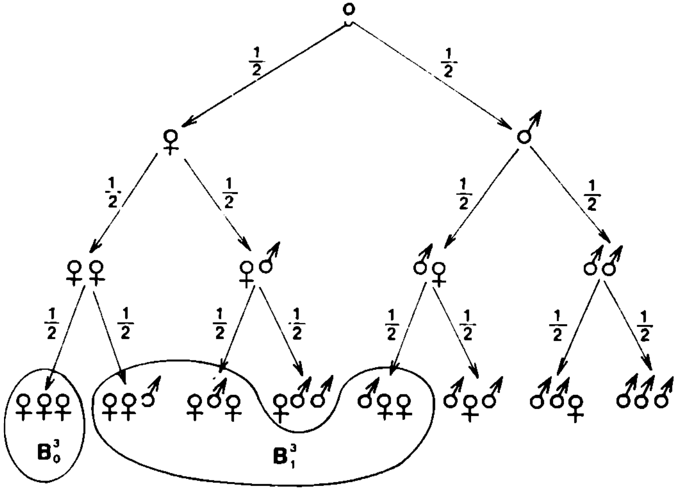
PRAVIDLO NÁSOBENÍ (pro stromy): Pravděpodobnost výsledku, který visí na dané větvi stromu, je rovna součinu pravděpodobností, které odpovídají všem hranám dané větve.

Máme-li tedy víceetapový pokus znázorněn stromem a známe-li pravděpodobnosti všech výsledků jednotlivých etap (což jsou pravděpodobnosti odpovídající jednotlivým etapám), můžeme určit pravděpodobnost daného výsledku.

Příklad 8.2. Usoudili jsme, že $\mathsf{P}(l) = \mathsf{P}(p) = \frac{1}{2}$. V příkladu 5.4 jsme pomocí simulace určili pravděpodobnost určitých jevů souvisejících s rodinou, která plánuje tři děti. Připomeňme si, že z našich úvah plynulo, že

$$\mathsf{P}(\text{narodí se samá děvčata}) \doteq \frac{7}{60}\,.$$

Na obr. 8.3 je strom, k jehož hranám jsou připsány



Obr. 8.3.

pravděpodobnosti. Pro jev B_0^3 — narodí se samá děvčata — je příznivý jen výsledek ♀♀♀. Pomocí pravidla součinu pro stromy dostaneme

$$\mathsf{P}(\text{narodí se samá děvčata}) = \mathsf{P}(♀♀♀) =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

Tuto hodnotu jsme dostali na základě určitého vzorce, pravidla. V příkladu 5.4 jsme pravděpodobnost odhadli pomocí pokusu. Hodnoty $\frac{1}{8}$ a $\frac{7}{60}$ se liší jen nepatrně. Kdybychom byli pokus simulovali ještě víckrát, hodnoty by se s největší pravděpodobností shodovaly ještě lépe.

Úloha 8.1. Vraťme se opět k paním X a Y, které nastupují do tramvajové soupravy se třemi vozy. Každý vůz má tutéž šanci, že si ho daná paní vybere (vyloučíme možnost, že v prvním voze je hezký řidič, předpokládáme, že všechny vozy jsou stejně obsazeny, atd.). Vozy jsou tři a tak každému dáme pravděpodobnost $\frac{1}{3}$. Pomocí pravidla násobení pro stromy určete pravděpodobnosti všech výsledků nastupování. Označme P(obě paní nastoupí do druhého vozu) jako P(22). Porovnejte hodnotu P(22), kterou jste zjistili, s hodnotou, ke které jsme došli v příkladu 5.6.

Úloha 8.2. V krabičce jsou čtyři hmatem nerozlišitelné kostky, dvě červené a dvě zelené. Třikrát náhodně vybereme po jedné kostce bez vracení a z vytažených kostek budeme stavět věže. Určete pravděpodobnost vzniku pro každou z možných věží.

Úloha 8.3. Na farmě je 90 % slepic vhodných pro chov. Z každých 100 slepic vhodných pro chov jich 50 vyniká vysokou nosností. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraná slepice z farmy bude vynikat vysokou nosností?

Úloha 8.4. Snadno určíme pravděpodobnost libovolného výsledku náhodných her, kterými jsme se zabývali. Určete pravděpodobnost několika výsledků námořní bitvy a hry na vlka a dvě louky. Užijte pravidlo násobení pro sítě (procházky).

Vraťme se k příkladu 8.1. Pro jev Z — koza se dostane k zelí — jsou příznivé dva výsledky (z, az) a platí $\mathsf{P}(Z) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6}$. Tento součet má dva sčítance. První je pravděpodobnost, že figurka půjde cestou z. Druhý sčítanec, součin $\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6}$, je podle pravidla násobení pravděpodobnost, že půjde cestou az.

PRAVIDLO SČÍTÁNÍ (pro procházky): **Vede-li k danému cíli více cest, je pravděpodobnost dosažení daného cíle rovna součtu pravděpodobností průchodu každou z těchto cest.**

Vraťme se ke stromu. Pro dosažení cíle z (pro jev Z) jsou příznivé dva výsledky na stromě.

PRAVIDLO SČÍTÁNÍ (pro stromy): **Je-li pro daný jev příznivých více výsledků na stromě, je pravděpodobnost daného jevu rovna součtu pravděpodobností těchto výsledků.**

Příklad 8.3. Pomocí pravidla sčítání (a násobení) určete pravděpodobnost jevu B_1^3 — ze tří narozených dětí bude právě jeden chlapec. Jev B_1^3 je znázorněn na obr. 8.3. Jsou pro něj příznivé tři výsledky. Podle pravidla násobení pro stromy je

$$\mathsf{P}(B_1^3) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+$$
$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}.$$

Porovnejte tuto hodnotu s hodnotou z příkladu 5.4.

Úloha 8.5. Pomocí uvedených pravidel určete

a) P(nejstarší dítě bude chlapec),
b) P(nejmladší dítě bude děvče),
c) $\mathsf{P}(B_2^3)$ a $\mathsf{P}(B_3^3)$.

Úloha 8.6. Pomocí pravidla násobení a pravidla sčítání určete

a) P(každá paní nastoupí do jiného vozu),
b) P(obě paní nastoupí do téhož vozu),
c) P(ani jedna paní nenastoupí do vozu č. 3).

Opět se jedná o jevy související s paními X a Y čekajícími na tramvaj. Srovnejte výsledky s hodnotami z příkladu 5.6.

Úloha 8.7. Při chemickém postřiku ovocných stromů hyne 70 % housenek. To znamená, že

$$\mathsf{P}(\text{housenka zahyne po prvním postřiku}) = 0{,}7.$$

Housenky, které přežijí, se stanou odolnější proti prostředku a při druhém postřiku jich hyne jen 20 %. Jaká je pravděpodobnost, že housenka nepřežije dva postřiky?

O jaký náhodný pokus se zde jedná? Provedeme postřik a pozorujeme, zahyne-li daná housenka nebo ne.

Nezahynula-li, postřik opakujeme. Nakreslete strom (ne ten, který stříkáme). Pomocí pravidla násobení a sčítání pro stromy (ty, které nestříkáme) určete

$$P(\text{housenka zahyne po prvním nebo po druhém postřiku}).$$

8.3. PRAVDĚPODOBNOSTNÍ POČÍTADLO

V případě s kozou, vlkem a zelím jsme na start postavili n figurek s tím, že číslo n bylo hodně velké. Při přemísťování figurek jsme situaci určitým způsobem zjednodušili. Je přece jasné, že n figurek se v síti na obr. 8.1 nemusí po prvním kroku rozmístit v poměru 5 : 1, jak jsme to udělali. Při přemísťování figurek jsme situaci idealizovali, jak se v matematice často dělá. Figurky jsme rozdělili podle ideálních poměrných četností.

Zjednodušme situaci ještě dál. Proč prohánět n koz? Při zjednodušení, které jsme provedli v našem případě, stačí vzít jen 12 figurek. 10 jich půjde do a, 2 do z. Každá figurka zastupuje dvanáctinu celého stáda n koz. Jak jsme došli k číslu 12?

Aby stádo mohlo udělat první krok, musí na startu být alespoň 6 figurek. Pět jich přejde do a a jedna do z. Figurka, která se dostala do z, procházku skončila. Figurky v a se musejí rozdělit na polovinu — polovina jich půjde do v a polovina do z. Je jich však 5 a rozdělení se nedá provést. „Automat“ se nám nějak zasekl.

Postavme do výchozí pozice dalších 6 figurek a zopakujme jejich rozmístění. Do a se tak dostane posila složená z pěti nových figurek (koz). V a bude pak 10 figurek a v z 2 figurky. Figurky v a se rozdělí na polovinu (po pěti) do v a do z. Všech 12 figurek se dostalo od startu do cíle (ukončily procházku). K cíli z se dostalo $2 + 5$, tj. 7 z dvanácti figurek:

$$\mathrm{P}(\text{figurka — koza se dostane k cíli } z) = \frac{7}{12}.$$

K cíli v se dostalo 5 z dvanácti figurek:

$$\mathrm{P}(\text{koza se dostane k cíli } v) = \frac{5}{12}.$$

Došli jsme ke stejným hodnotám jako v příkladu 8.1.

Dostáváme tak další jednoduchý postup pro určení pravděpodobnosti, že se figurka při náhodné procházce dostane k danému cíli. Když se všechny figurky dostaly k cílům, určíme tuto pravděpodobnost podle následujícího pravidla:

$$\mathrm{P}(\text{figurka se dostane k cíli } x) =$$
$$= \frac{\text{počet figurek, které došly do } x}{\text{počet figurek, které došly do cílů}}.$$

Figurky se z každé pozice rozmisťují v poměru příslušných pravděpodobností.

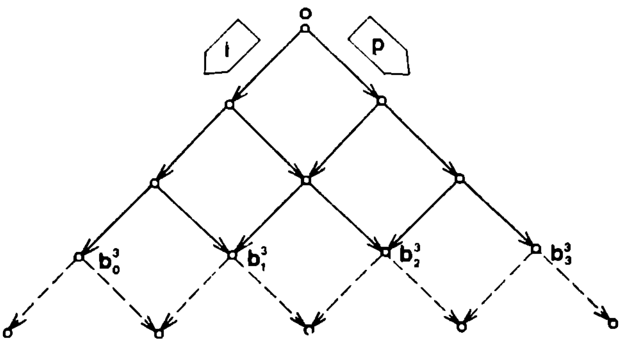
Pravděpodobnostní počítadlo*) se skládá ze sítě a několika figurek nebo knoflíků, které se po něm pohybují uvedeným způsobem. Nechť z dané pozice vycházejí úsečky $d_1, d_2, \ldots, d_k$ a nechť $p_1, p_2, \ldots, p_k$ jsou příslušné pravděpodobnosti, že figurka půjde těmito úseky. Uveďme pravděpodobnosti na společného jmenovatele. Předpokládáme přitom, že všechny uvažované pravděpodobnosti jsou zlomky (racionální čísla). Společný jmenovatel označme m. Předpokládejme, že $p_j = \frac{n_j}{m}$ pro $j = 1, 2, \ldots, k$. Aby se z této pozice mohly figurky rozmístit dál, musí být počet figurek v této pozici násobkem čísla m. Je-li jich tam tm (kde t je přirozené

*) Ve starší literatuře se můžete setkat s názvem *Englův abakus*.

číslo), půjde tn_1 figurek po úseku d_1, tn_2 figurek po úseku d_2 atd. Po úseku d_k půjde tn_k figurek.

Počítadlo umožňuje určit velmi jednoduše pravděpodobnosti jevů souvisejících s náhodnými procházkami po konečném i nekonečném počtu cest. Ukážeme si to na jednoduchých příkladech.

Příklad 8.4. Při honičce na šachovnici umíme určit pravděpodobnost různých jevů. Teď je určíme pomocí pravděpodobnostního počítadla. Nakresleme si síť (obr.



Obr. 8.4.

8.4) a dejme tomu, že o směru, kterým se bude figurka pohybovat, bude rozhodovat výsledek hodu mincí. Určeme pravděpodobnost dosažení každého cíle, tj.

$$P(\text{figurka se dostane k cíli } b_k^3)$$

pro $k = 0, 1, 2, 3$.

Ke každému úseku sítě připíšeme číslo $\frac{1}{2}$. Je to pravděpodobnost, že tudy figurka půjde, házíme-li mincí. Jde-li o třídenní závod (k cíli se dojde třemi kroky), snadno usoudíme, že bude stačit, postavíme-li na start 8 knoflíků nebo figurek. Z nich se jeden dostane do b_0^3, tři do b_1^3, tři do b_2^3 a jeden do b_3^3. Dostáváme

$$\mathsf{P}(\text{figurka se dostane k cíli } b_0^3) = \frac{1}{8},$$

$$\mathsf{P}(\text{figurka se dostane k cíli } b_1^3) = \frac{3}{8},$$

$$\mathsf{P}(\text{figurka se dostane k cíli } b_2^3) = \frac{3}{8},$$

$$\mathsf{P}(\text{figurka se dostane k cíli } b_3^3) = \frac{1}{8}.$$

Úloha 8.8. Házejme teď s-kostkou. Stěnu s tečkou chápejme jako l, stěnu bez tečky jako p. Na kostce je tedy pět stěn p. Ukazatele u sítě na obr. 8.4 zůstanou beze změny, jen pravděpodobnosti se změní. Určete

$$\mathsf{P}(\text{figurka se dostane k cíli } b_k^3)$$

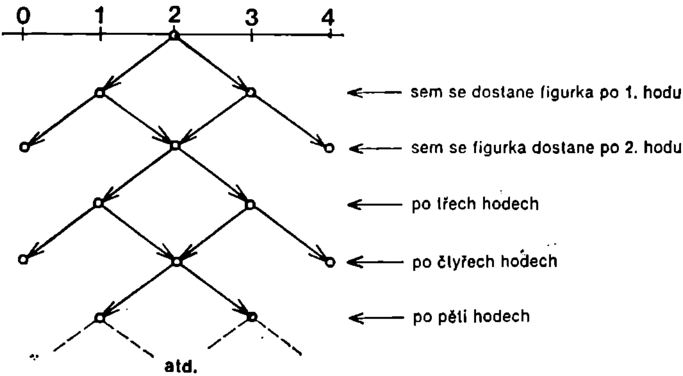
pro $k = 0, 1, 2, 3$ pomocí počitadla.

Úloha 8.9. Uvažujme čtyřdenní závod s použitím mince. Určete pomocí pravděpodobnostního počítadla

$$\mathsf{P}(\text{figurka se dostane k cíli } b_k^4)$$

pro $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Ke každému bodu sítě připište počet cest, kterými se do něho lze dostat. Srovnejte tato čísla s pravděpodobnostmi, které jste našli. Co zjistíte?

Příklad 8.5. Dva hráči X a Y mají po dvou korunách. Házejí mincí (nezáleží na tom, kdo hází). Padne-li lev, prohraje korunu hráč X, padne-li panna, vyhraje hráč X korunu na hráči Y. Hrají, dokud jeden z nich neprohraje všechny peníze. Zabývejme se hráčem X. Změny jeho finanční situace si znázorníme pomocí figurky a sítě na obr. 8.5.



Obr. 8.5.

Ze sítě snadno vyčteme, kolik korun bude mít po kolika hodech a kolika způsoby hráč X. Podle pravidla násobení a sčítání můžeme vypočítat

P(hráč X vyhraje po n-tém hodu všechny peníze),

P(hráč X prohraje po n-tém hodu všechny peníze).

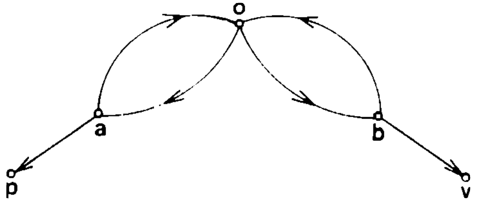
Nebudeme mít obtíže ani s určením pravděpodobností

P(hráč X vyhraje všechny peníze),

P(hráč X prohraje všechny peníze).

Všimněte si, že síť na obr. 8.5 nápadně připomíná síť, kterou jsme znázornili náhodnou kopanou. Kdybychom odstranili nerozhodné výsledky a připustili, aby se hrálo nekonečně dlouho, byly by obě sítě úplně stejné.

Po druhém hodu mincí se figurka dostane buď k cíli p_2 (hráč X všechno prohraje), nebo k cíli v_2 (hráč X všechno vyhraje), nebo do pozice o_2. Poslední možnost je vlastně totéž jako návrat do výchozí pozice, na start. Oba hráči mají totiž opět po dvou korunách. Naši hru tedy můžeme znázornit jako náhodnou procházku po trochu jednodušší síti (obr. 8.6).



Obr. 8.6.

Pozice p odpovídá tomu, že hráč X všechno prohraje, pozice v tomu, že všechno prohraje hráč Y a vyhraje hráč X.

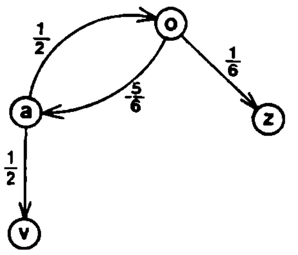
Stačí, když ze startu vypustíme čtyři figurky. Po dvou krocích se jedna dostane do p, jedna do v a dvě se vrátí na start.

P(hráč X všechno vyhraje) = P(figurka se dostane do $v) = \frac{1}{2}$,

P(hráč X všechno prohraje) = P(figurka se dostane do $p) = \frac{1}{2}$.

Úloha 8.10. Určete pravděpodobnost, že hráč X všechno vyhraje a že všechno prohraje, házíme-li s-kostkou (prázdná stěna znamená, že X prohraje korunu, stěna s tečkou znamená, že korunu vyhraje).

Úloha 8.11. Vraťme se ke koze, vlku a zelí, jen síť trochu pozměňme. Úsek mezi pozicemi a, z nasměrujme zpět



Obr. 8.7.

ke startu. Novou síť vidíte na obr. 8.7. Hra se tak podstatně změní. Teď existuje nekonečně mnoho různých cest. Pravidla putování zůstala nezměněna. Nejdříve házíme s-kostkou, potom mincí. Určete pomocí pravděpodobnostního počítadla

P(koza se dostane k vlkovi),
P(koza se dostane k zelí).

9. kapitola

KLASICKÁ A GEOMETRICKÁ PRAVDĚPODOBNOST. METODA MONTE CARLO

9.1. KLASICKÝ PROSTOR

Kdykoliv jsme se setkali s nějakým náhodným pokusem, postupovali jsme vždy stejně. Nejprve jsme se zamysleli nad množinou všech možných výsledků pokusu a sestavili jsme prostor výsledků Ω. Občas jsme si přitom pomáhali stromem. Pak jsme uvažovali různé jevy, které s pokusem souvisejí. Popisovali jsme je slovy a kódovali jsme je podmnožinami prostoru výsledků. Množinu všech jevů souvisejících s naším náhodným pokusem jsme označili $\boldsymbol{S}$. Pro každý jev z této množiny jsme se snažili určit číslo, kterému se říká pravděpodobnost jevu. Sestrojili jsme tak funkci P definovanou na množině $\boldsymbol{S}$. Vznikla tak trojice $(\Omega, \boldsymbol{S}, \mathsf{P})$, která popisovala daný náhodný pokus. Pro vytváření této trojice měl strom velký význam.

Pokud Ω byla konečná množina (tímto případem se především zabýváme), stačilo funkci P definovat zadáním jejích hodnot pro všechny výsledky (přesněji — pro jednoprvkové množiny z $\boldsymbol{S}$).

Mezi mnoha nám známými náhodnými pokusy jsou takové, pro něž jsou všechny výsledky stejně možné. Stejně možné, stejně pravděpodobné byly oba výsledky hodu mincí. V tom případě je

$$\Omega = \{l, p\}, \ \boldsymbol{S} = \{\emptyset, \{l\}, \{p\}, \{l, p\}\}.$$

Stanovíme-li $\mathsf{P}(l) = \frac{1}{2}$, $\mathsf{P}(p) = \frac{1}{2}$, definujeme pravděpodobnost P. Funkce P přiřazuje všem výsledkům stejné hodnoty.

Prostor výsledků hodu mincí nebo prostor výsledků hodu kostkou (č. 1) je tzv. prostor stejně možných výsledků, jinými slovy, stejně pravděpodobných výsledků.

Vraťme se opět k rodičům, kteří by chtěli mít tři děti. Jak si vzpomínáte, souvisel s tím zajímavý náhodný pokus. Jeho průběh a množinu výsledků jsme znázornili stromem na obr. 2.9. Pomocí tohoto stromu a pravidla násobení snadno ukážeme, že pravděpodobnost každého z osmi výsledků (to jsou všechny) je $\frac{1}{8}$.

Z náhodných pokusů, které známe, snadno vyberete takové, které mají všechny výsledky stejně pravděpodobné, i takové, které tuto vlastnost nemají.

Definice 9.1. Je-li prostor Ω konečný a hodnoty pravděpodobnosti všech výsledků Ω jsou stejné, řekneme, že je to *prostor stejně pravděpodobných výsledků* čili stručně *klasický prostor*.

Poslední název má původ v počátcích teorie pravděpodobnosti, kdy se zkoumaly jen pokusy se stejně pravděpodobnými výsledky. Byly to hlavně hody mincí, vytahování karet a podobné náhodné pokusy související s hazardními hrami.

Je-li prostor Ω klasický a obsahuje-li n prvků, má každý výsledek pravděpodobnost $\frac{1}{n}$.

Úloha 9.1. Určitý náhodný pokus má klasický tříprvkový prostor výsledků. Další náhodný pokus spočívá v jeho dvojím opakování za stejných podmínek. Ukažte pomocí stromu, že má také klasický prostor výsledků.

Z úlohy 9.1 plyne, že prostor výsledků dvojího hodu kostkou (viz obr. 3.2) je klasický. Všech výsledků je 36, a každý má tedy pravděpodobnost $\frac{1}{36}$.

9.2. VĚTA O KLASICKÉM PROSTORU

Uvažujme náhodný pokus s prostorem výsledků $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$. Předpokládejme, že je to klasický prostor, tzn.

$$\mathsf{P}(\omega_1) = \mathsf{P}(\omega_2) = \ldots = \mathsf{P}(\omega_n) = \frac{1}{n}.$$

Dále uvažujme jev A, který je k-prvkovou podmnožinou prostoru Ω, kde $k \geqq 2$. Dejme tomu, že $A = \{\omega_{j_1}, \omega_{j_2}, \ldots, \omega_{j_k}\}$. Jak víme,

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(\omega_{j_1}) + \mathsf{P}(\omega_{j_2}) + \ldots + \mathsf{P}(\omega_{j_k}).$$

Všechny sčítance na pravé straně jsou rovny $\frac{1}{n}$ a je jich právě k, takže

$$\mathsf{P}(A) = k \cdot \frac{1}{n} = \frac{k}{n}.$$

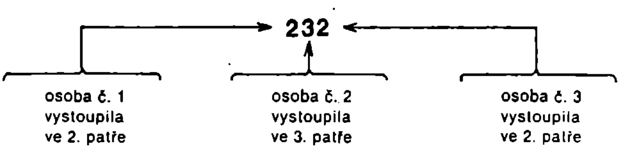
Co je v tomto vzorci n a co k? Číslo n je počet všech — stejně pravděpodobných — výsledků, je to počet prvků množiny Ω. Číslo k je počet výsledků příznivých pro jev A. Abychom určili $\mathsf{P}(A)$ v případě, kdy je prostor výsledků klasický, nepotřebujeme vědět, které výsledky jsou pro jev A příznivé. Stačí znát, kolik jich je. Odvodili jsme větu 9.1.

Věta 9.1. (Věta o klasickém prostoru.) *Je-li pro jev A příznivých k z n stejně pravděpodobných výsledků, je* $\mathsf{P}(A) = \dfrac{k}{n}$.

Věta o klasickém prostoru tvrdí, že je-li prostor výsledků klasický, k určení $\mathsf{P}(A)$ stačí znát jen počet prvků prostoru výsledků a počet prvků množiny A.

Teď by prospělo, kdybyste si zopakovali vzorce pro počet prvků různých množin, které jste probírali v kombinatorice.

Příklad 9.1. V přízemí pětipatrového domu nastupují do výtahu tři navzájem cizí lidé. Budeme sledovat, kdo v kterém patře vystoupí. Očíslujme patra i osoby. Až výtah vyjede nahoru, dostaneme konkrétní výsledek našeho náhodného pokusu. Můžeme ho zakódovat trojicí čísel z množiny $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, což jsou čísla pater. Trojici rozšifrujeme takto:



Prostor Ω je množina všech trojic prvků množiny $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Kolik je jich? To snadno spočteme pomocí stromu. Pokus má tři etapy. První etapa je volba patra, ve kterém vystoupí osoba č. 1. Je pět možností, kterým odpovídá pět hran stromu. Druhá etapa je volba patra, v němž vystoupí druhá osoba. Opět je pět možností. Z každého uzlu stromu bude vycházet dalších pět hran. Podobně to bude pro třetí etapu. Celkem dostaneme 5.5.5 čili 5^3 větví. Tolik bude i výsledků. Je to počet tříprvkových variací s opakováním z pěti prvků. Každé patro má stejnou šanci, že si je zvolí kterákoliv osoba. Všechny možné způsoby, kterými mohou osoby vystoupit z výtahu, pokládáme za stejně pravděpodobné, každému způsobu přiznáme stejnou pravděpodobnost. Prostor Ω je klasický.

Uvažujme několik jevů souvisejících s naším pokusem:

A: Všichni vystoupí ve 3. patře.
B: Každý vystoupí v jiném patře.
C: Osoba č. 2 vystoupí ve 3. patře.

K určení $\mathsf{P}(B)$ potřebujeme znát počet výsledků příznivých pro jev B. Jsou to právě ty výsledky, které jsou zakódovány trojicemi s různými složkami (každý v jiném patře). Např. $123 \in B$, ale $232 \notin B$. Jsou to variace bez opakování a je jich 5.4.3. Množina (jev) B má 5.4.3 prvků, prostor Ω má 5^3 prvků. Podle věty o klasickém prostoru je

$$\mathsf{P}(B) = \frac{5.4.3}{5^3} = \frac{4.3}{5^2} = \frac{12}{25}.$$

Úloha 9.2. Určete $\mathsf{P}(A)$ a $\mathsf{P}(C)$.

Úloha 9.3. Určete $\mathsf{P}(A)$, $\mathsf{P}(B)$ a $\mathsf{P}(C)$ pomocí simulace sta opakování cesty výtahem. Porovnejte výsledky.

Příklad 9.2. Určíme pravděpodobnost pro nástup paní X a Y do tramvajové soupravy se třemi vozy. Prostor výsledků je klasický a má 3^2 čili 9 prvků. Uvažujme jevy z příkladu 5.6. Je

$$A = \{11, 22, 33\} \text{ a tedy } \mathsf{P}(A) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3},$$

$$B = \{12, 13, 21, 23, 31, 32\} \text{ a tedy } \mathsf{P}(B) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3},$$

$$C = \{22\} \text{ a tedy } \mathsf{P}(C) = \frac{1}{9}.$$

Úloha 9.4. a) Určete pravděpodobnosti

P(paní X nastoupí do vozu č. 1),

P(ani jedna paní nenastoupí do třetího vozu).

b) Na stanici přišla ještě jedna cizí paní Z. Určete pravděpodobnosti

P(všechny paní nastoupí do téhož vozu),

P(každá paní nastoupí do jiného vozu),

P(paní X a Y nastoupí do druhého vozu),

P(ani jedna paní nenastoupí do třetího vozu).

Úloha 9.5. Ředitel napsal tři dopisy. V úloze 5.12 jsme se dověděli, co s nimi sekretářka provedla. Určete pravděpodobnost jevů uvedených ve zmíněné úloze (tam jsme je odhadli opakováním velkého množství pokusů). Porovnejte výsledky.

Úloha 9.6. Dvakrát hodíme hrací kostkou a body, které padly, sečteme. Označme A_k jev, že dostaneme součet k. Určete pravděpodobnost $\mathsf{P}(A_k)$ pro všechna možná k. Pro které k je $\mathsf{P}(A_k)$ největší?

Návod: Výsledky kódujte dvojicemi bodů, které jste získali při 1. a 2. hodu. Dostanete první z následujících dvou tabulek. Druhá vznikne z první nahrazením každé dvojice součtem.

počet bodů získaných 1. hodem

počet bodů získaných druhým hodem

	1	2	3	4	5	6
1	11	12	13	14	15	16
2	21	22	23	24	25	26
3	31	32	33	34	35	36
4	41	42	43	44	45	46
5	51	52	53	54	55	56
6	61	62	63	64	65	66

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

V úloze 9.6 jsme prostor výsledků Ω zobrazili do množiny čísel (každému výsledku z Ω jsme přiřadili příslušný počet bodů). Takovýmto funkcím se budeme zanedlouho věnovat.

Úloha 9.7. Určete pravděpodobnost, že vyhrajete I. pořadí

a) ve sportce,

b) v sazce.

Úloha 9.8. V sérii n výrobků je jich m vadných. Výrobky přišly do prodejny. Nákup r výrobků je náhodný výběr r prvků z urny, která obsahuje uvažovanou sérii. Určete pravděpodobnost, že mezi r zakoupenými výrobky bude k vadných (vada se projeví až při užívání, v prodejně ne).

Úloha 9.9. V krabici je 100 šroubů a 10 z nich je vadných. Z krabice vytáhneme poslepu 10 šroubů. Určete pravděpodobnost, že všechny vytažené šrouby budou dobré.

V tomto odstavci se budeme zabývat některými nekonečnými prostory.

Příklad 9.3. Na obvod terče rulety je navinut interval $\langle 0,1)$. Každému bodu obvodu terče odpovídá právě jedno reálné číslo z tohoto intervalu. Pozorujeme-li, v kterém bodě se zastaví roztočená šipka rulety, dostaneme číslo. Bude to číslo náhodně vybrané ruletou a budeme jím kódovat výsledek tohoto náhodného pokusu. Je-li ruleta dobrá, má každý výsledek stejnou šanci, stejně jako tomu bylo u rulety č. 4. Rozdíl je v tom, že teď je výsledků nekonečně mnoho, $\Omega = \langle 0,1)$. Uvažujme následující dva jevy související s naším pokusem:

A: ruleta vybere číslo větší než $\frac{1}{2}$.

B: ruleta vybere číslo $\frac{1}{3}$.

Těmto jevům odpovídají podmnožiny $A = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $B = \left\{\frac{1}{3}\right\}$ prostoru výsledků. Poměru počtu výsledků příznivých pro jev A k počtu všech výsledků bude teď odpovídat poměr délky množiny A k délce celého prostoru. Naše úvahy o klasickém prostoru můžeme zobecnit následujícím způsobem: Je-li prostor výsledků úsečka a všechny výsledky jsou stejně možné, je

$$\text{(1)} \qquad \mathsf{P}(A) = \frac{\text{délka množiny } A}{\text{délka prostoru } \Omega}.$$

Je-li prostor výsledků úsečka, jevy budou takové její podmnožiny, které mají délku. Množina jevů $\boldsymbol{S}$ bude množina podmnožin prostoru Ω, které mají délku.

Dostáváme odtud

$$\mathsf{P}(A) = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2},$$

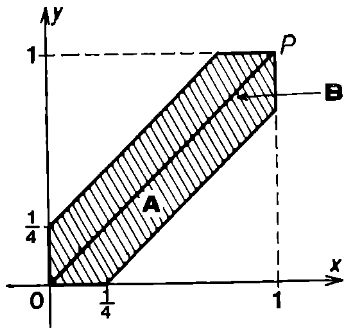
$$\mathsf{P}(B) = 0,$$

i když $B \neq \emptyset$. K čemu nám může jev B posloužit? Kde jsme hledali příklad takového jevu?

Příklad 9.4. Dva rytíři X a Y se mají utkat v souboji. Utkání má proběhnout v časovém rozmezí, které označíme jako interval $\langle 0,1)$. Každý rytíř si pomocí rulety (z minulého příkladu) vybere dobu, kdy se objeví na určitém místě. Podle dohody nebude jeden na druhého čekat déle než čtvrt hodiny. Náhoda může tedy způsobit, že se neutkají, souboj pak bude zrušen. K tomu dojde, bude-li časový rozdíl mezi jejich příchody na místo souboje větší než $\frac{1}{4}$.

Výběr doby příchodu na místo souboje je náhodný pokus. Písmenem x označme dobu, kterou si vybral rytíř X, a písmenem y dobu rytíře Y. Prostor výsledků je množina všech dvojic (x, y) takových, že $x \in \langle 0,1)$ a $y \in \langle 0,1)$. Každé dvojici čísel odpovídá bod roviny. Prostor výsledků bude tedy podmnožina roviny, a to čtverec (obr. 9.1).

Ruleta zaručuje, že každý výsledek (každý bod) je stejně možný. Prostor výsledků je opět nekonečný a výsledky jsou — podobně jako u klasického prostoru — stejně možné. Uvažujme dva jevy související s naším soubojem.



Obr. 9.1. Doba příchodu na souboj

A: k souboji dojde,
B: oba rytíři si vyberou tutéž dobu.

Pro jev A jsou příznivé právě ty dvojice (x, y), pro něž $|x - y| \leqq \frac{1}{4}$. Pro jev B dvojice, v nichž $x = y$. Jevu A odpovídá vyšrafovaný šestiúhelník, jevu B úsečka OP (viz obr. 9.1).

Prostor výsledků svým charakterem opět připomíná klasický prostor. Pravděpodobnost jevu bude poměr obsahu jevu k obsahu celého prostoru výsledků.

Je-li prostor výsledků podmnožinou roviny, má-li obsah a jsou-li všechny výsledky stejně možné, je

$$\text{(2)} \qquad \mathsf{P}(A) = \frac{\text{obsah množiny } A}{\text{obsah prostoru } \Omega}\,.$$

V tomto případě budou jevy takové podmnožiny prostoru Ω, které mají obsah. Všechny takovéto podmnožiny vytvoří množinu jevů $\boldsymbol{S}$.

Pravděpodobnost definovaná vzorci (1) a (2) se nazývá geometrická pravděpodobnost.

Úloha 9.10. Určete $P(A)$ a $P(B)$ pro jevy A, B z příkladu 9.4.

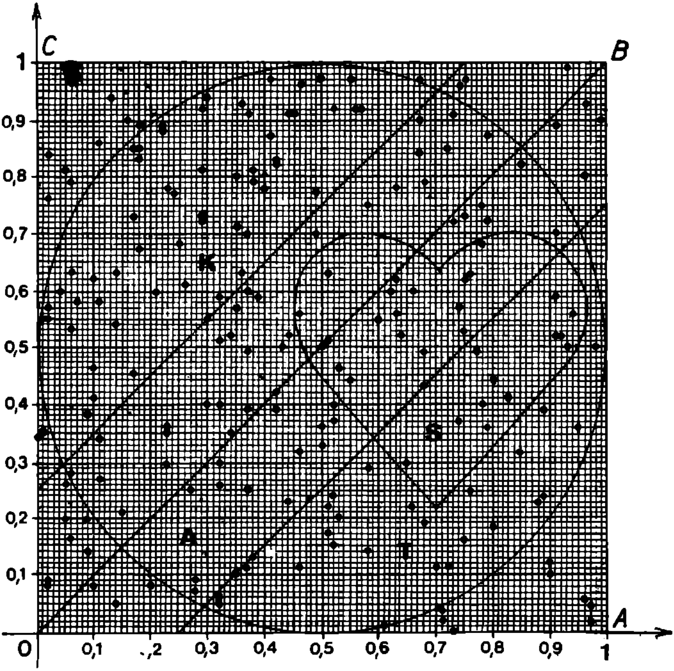
Příklad 9.5. Při střelbě do terče je prostor výsledků terč. Je to podmnožina roviny, která má obsah (terč je kruh). Výsledky však v tomto případě nejsou stejně možné. Sledujeme-li, jak jsou zásahy rozloženy, vidíme, že častěji jsou zasahovány body poblíž středu (vždyť na střed míříme). V případě tohoto nekonečného prostoru výsledků nelze tedy pravděpodobnost definovat vzorcem (2).

Úloha 9.11. Mezi místy A a B vzdálenými 10 km bylo přerušeno telefonní spojení. Určete pravděpodobnost, že místo poruchy je od místa A vzdáleno méně než 500 m.

Úloha 9.12. Pomocí rulety s navinutým intervalem $\langle 0,1)$ vybíráme dvě čísla b, c. Určete pravděpodobnost, že rovnice $x^2 + 2\sqrt{b}x + c = 0$ bude mít řešení v oboru reálných čísel.

9.4. URČOVÁNÍ GEOMETRICKÝCH PRAVDĚPODOBNOSTÍ A METODA MONTE CARLO

Na milimetrovém papíru vyznačme čtverec o straně 10 cm a považujme ho za jednotkový čtverec. Bude znázorňovat prostor výsledků pro náhodný výběr dvou čísel z intervalu $\langle 0,1)$ pomocí rulety. Výběr můžeme simulovat pomocí tabulek náhodných čísel. Dvojici číslic z tabulky budeme chápat jako první a druhou číslici za desetinnou čárkou vybraného čísla. Např. dvojici 32 odpovídá číslo 0,32. Náhodné číslice budeme číst po



Obr. 9.2. Čtverec s náhodnými body

čtyřech. Např. čtveřici 3206 odpovídá výsledek z prostoru Ω — dvojice čísel (0,32; 0,06).

Vezměme naši tabulku a čtěme čtveřice číslic od začátku. Příslušné body zakreslujme do čtverce Ω. Zakreslíme-li 200 bodů, bude čtverec poset náhodnými body. Jejich celkem rovnoměrné rozložení potvrzuje stejné šance všech bodů (teď jde o body s racionálními souřadnicemi). Pro pravděpodobnost $\mathsf{P}(A)$ dostáváme

$$(3) \qquad \mathsf{P}(A) \doteq$$

$$\doteq \frac{\text{počet zakreslených bodů, které padly do množiny } A}{\text{počet všech zakreslených bodů}} .$$

Do množiny odpovídající jevu A z příkladu 9.4 padlo 87 bodů. Simulací jsme dostali hodnotu $\mathsf{P}(A) \doteq \frac{87}{200} \doteq$ $\doteq 0{,}435$. V úloze 9.10 jsme dostali $\mathsf{P}(A) = \frac{7}{16} \doteq 0{,}4375$. Vidíme, že výsledky se liší jen nepatrně.

Na obr. 9.2 je ve čtverci kromě náhodných bodů zakresleno několik útvarů. Jsou to trojúhelník $T =$ $= \Delta OAB$, srdce S a kruh K. Představme si hru, při které se ruletou vybírá dvojice čísel z intervalu $\langle 0,1)$. Padne-li příslušný bod do srdce S, vyhráváte s korun. Jevu, že vyhrajete s korun, odpovídá množina S. Pokládáme-li obsah prostoru výsledků za jednotkový, je podle vzorce (2) $\mathsf{P}(S) =$ obsah útvaru S. Na druhé straně pomocí simulace dostáváme

$$\mathsf{P}(S) \doteq \frac{\text{počet náhodných bodů, které padly do } S}{\text{celkový počet náhodných bodů}} .$$

Vidíme, že tak můžeme určovat obsah rovinných útvarů obsažených v Ω:

$$(4) \qquad \text{obsah útvaru } F \doteq$$

$$\doteq \frac{\text{počet náhodných bodů, které padly do } F}{\text{celkový počet náhodných bodů}} .$$

A to je podstata *metody Monte Carlo.*

Obsah trojúhelníku T je roven $\frac{1}{2}$. Podle (3) dostaneme, že obsah trojúhelníku T je přibližně $\frac{95}{200}$. Do trojúhelníku T totiž padlo 95 bodů. Vidíme, že obě hodnoty se jen málo liší.

Obsah kruhu K o poloměru $\frac{1}{2}$ je roven $\frac{1}{4}\pi$. Metoda Monte Carlo určuje, že obsah kruhu K je přibližně $\frac{162}{200} \doteq 0{,}81$. Odtud dostáváme $\frac{1}{4}\pi \doteq 0{,}81$ neboli $\pi \doteq 4 . 0{,}81 = 3{,}24$. Určili jsme tak přibližnou hodnotu čísla π. Kdybychom měli náhodných bodů více, určili bychom ji ještě přesněji.

Pro útvar S dostaneme, že jeho obsah je přibližně roven $\frac{31}{200} \doteq 0{,}155$.

Na průhlednou fólii můžeme kreslit rozmanité útvary obsažené v našem čtverci. Přiložíme-li fólii na obrázek se zakreslenými náhodnými body a počítáme příslušné body, určíme přibližně obsah obrazců metodou Monte Carlo.

10. kapitola

JEŠTĚ JEDNOU HONIČKA NA ŠACHOVNICI A KVOČNY NA VEJCÍCH NEBOLI BERNOULLIOVO SCHÉMA

10.1 BERNOULLIŮV POKUS

Budeme se zabývat kvočnou sedící na vejcích. Z každého vejce se vylíhne kohoutek nebo slepička. Předpokládáme-li, že vejce jsou zdravá, jiná možnost není. O tom, co se vylíhne, rozhoduje náhoda. Bude-li to slepička, bude to hospodyně považovat za úspěch, bude-li to kohoutek, za neúspěch. Z kohoutka totiž mnoho užitku není, jakmile povyroste, bude se muset zabít. Sledujeme-li, co se z vejce vylíhne, provádíme náhodný pokus se dvěma výsledky. Vysezení n vajec je vlastně totéž jako n-násobné vysezení jednoho vejce.

Sledujme činnost kontrolora v továrně. Zkoumá každý zhotovený výrobek, je-li dobrý nebo vadný. Zkouška vede k jednomu ze dvou výsledků: výrobek je dobrý, nebo je to zmetek. Odhalení zmetku je pro kontrolora úspěch.

Definice 10.1. Náhodný pokus, který má dvouprvkový prostor výsledků, se nazývá *Bernoulliův pokus.* *)

Hod mincí, hod s-kostkou, zjištění pohlaví narozeného dítěte, zjištění, vzklíčilo-li zaseté semeno, zkoumání, je-li výrobek vadný, jsou Bernoulliovy pokusy. U Ber-

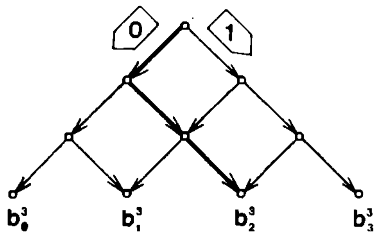
*) J. Bernoulli (1654—1705), švýcarský matematik a fyzik, který položil základy teorie pravděpodobnosti.

noulliových pokusů budeme také mluvit o úspěchu a neúspěchu. Slovo neúspěch nebude mít přitom záporné zabarvení. Úspěch budeme kódovat číslicí 1 a neúspěch číslicí 0. Dále budeme označovat $\mathsf{P}(1) = p$, $\mathsf{P}(0) = q$.

Známe různé příklady Bernoulliových pokusů a známe také víceetapové náhodné pokusy související s Bernoulliovým pokusem. Např. pokus, který jsme nazvali čekání na první úspěch (příklad 2.6), spočívá v opakování Bernoulliova pokusu tak dlouho, až se poprvé dostaví úspěch.

10.2. BERNOULLIOVO SCHÉMA JAKO NÁHODNÁ PROCHÁZKA

Vraťme se k závodům na šachovnici (odst. 6.3). Šachovnici jsme nahradili jednoduchou sítí. Připomeňme si to: Bernoulliův pokus je teď hod s-kostkou. Skončí-li pokus



Obr. 10.1.

úspěchem, figurka postoupí na jihovýchod, skončí-li neúspěchem, na jihozápad (obr. 10.1). Po trojím zopakování téhož pokusu se figurka dostane od jednoho z cílů b_k^3.

Uvedený náhodný pokus je příklad náhodné procházky. Někdo jiný by však mohl říci, že to je trojí opakování stejného Bernoulliova pokusu.

Jak budeme kódovat výsledky naší procházky, zajímá-li nás, kudy a ke kterému cíli figurka putovala? U náhodných procházek jsme výsledky kódovali cestami, které náhoda figurce určila. Všimněte si silně vyznačené cesty na obr. 10.1. Nejsnadněji ji zakódujeme trojicí 011. Trojice z nul a jedniček si odpovídají s cestami v síti. Cest v síti je právě tolik jako takových trojic. Jsou to tříprvkové variace ze dvou prvků $\{0, 1\}$ a je jich 2^3. Tolik výsledků obsahuje prostor Ω náhodné procházky, a tedy i trojího opakování Bernoulliova pokusu.

Kdyby kvočna seděla na třech vejcích, mohli bychom zjišťování, co se z nich vyklube, spojit s procházkou po síti z obr. 10.1. Síť má tři úrovně, každá odpovídá jednomu opakování pokusu. Vylíhne-li se slepička, figurka se posune na jihovýchod, vylíhne-li se kohoutek, na jihozápad. Průběh líhnutí modelujeme náhodnou procházkou po síti.

Náhodný jev, že se vylíhne k slepiček, se v jazyce náhodných procházek vyjádří tak, že se figurka dostane k cíli b_k^3 ($k = 0, 1, 2, 3$). Můžeme to popsat ještě jinak: Při trojnásobném opakování pokusu nastane právě k-krát úspěch. Tento jev označíme B_k^3.

Kvočna může sedět na n vejcích, kontrolor může prohlédnout n výrobků, zahradník může sledovat n zasetých semen atd.

Definice 10.2. Náhodný pokus spočívající v n-násobném opakování téhož Bernoulliova pokusu nazýváme *Bernoulliovo schéma s n pokusy.*

Jev B_k^n znamená, že v Bernoulliově schématu s n pokusy nastal úspěch právě k-krát.

Vraťme se opět ke kvočně sedící na třech vejcích. Pro jev B_k^3 je příznivých $\binom{3}{k}$ výsledků. Právě tolik cest vede k cíli b_k^3. Zakódujeme např. jev B_2^3 — kvočna vysedí právě dvě slepičky ze tří vajec.

$$B_2^3 = \{011, 101, 110\}$$

Podle pravidla násobení je $\mathsf{P}(011) = qpp = p^2q$, $\mathsf{P}(101) = pqp = p^2q$ a $\mathsf{P}(110) = ppq = p^2q$. Každý výsledek příznivý pro jev B_2^3 má tutéž pravděpodobnost p^2q. Zapišme ji ve tvaru p^2q^{3-2}. Pravděpodobnost $\mathsf{P}(B_2^3)$ je součet stejných sčítanců, kterých je $\binom{3}{2}$, a tedy

$$\mathsf{P}(B_2^3) = \binom{3}{2}p^2q^{3-2}\,.$$

Podobnými úvahami najdeme vzorce pro pravděpodobnost ostatních jevů B_0^3, B_1^3, B_3^3.

Uvažujem Bernoulliovo schéma s n pokusy a jev B_k^n. Je pro něj příznivých právě tolik výsledků, kolik cest vede v příslušným způsobem prodloužené síti k cíli b_k^n. Tato síť bude mít n úrovní a $n + 1$ cílů. Označíme je od západu k východu b_0^n, b_1^n, ..., b_n^n. Jejich indexy obsahují informace o cestách, které k nim vedou. Horní index udává počet kroků od startu do cíle (počet pokusů), dolní index pak počet kroků směřujících na jihovýchod (počet úspěchů).

K cíli b_k^n vede $\binom{n}{k}$ cest. Pro jev B_k^n je příznivých $\binom{n}{k}$ výsledků. Každému výsledku příznivému pro jev B_k^n odpovídá n-tice, v níž je právě k jedniček. Odpovídá mu cesta skládající se z n úseků, z nichž právě k směřuje na jihovýchod a $n—k$ na jihozápad. Pravděpodobnost výsledku je rovna pravděpodobnosti průchodu cestou, která mu odpovídá. Podle pravidla násobení dostáváme:

Věta 10.1. *Pravděpodobnost každého výsledku příznivého pro jev B_k^n je p^kq^{n-k}. Je to pravděpodobnost průchodu cestou vedoucí k cíli b_k^n.*

K cíli b_k^n vede $\binom{n}{k}$ různých cest. Pro jev B_k^n je tedy příznivých $\binom{n}{k}$ výsledků. Pravděpodobnost průchodu každou z cest vedoucích k cíli b_k^n je stejná a podle věty 10.1 je rovna $p^k q^{n-k}$. Podle pravidla sčítání je tedy pravděpodobnost dosažení cíle b_k^n (bez ohledu na to, kterou cestou) součet $\binom{n}{k}$ sčítanců, rovných $p^k q^{n-k}$.

Věta 10.2. *Pravděpodobnost dosažení cíle b_k^n je rovna $\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.*

Dosažení cíle b_k^n odpovídá v Bernoulliově schématu s n pokusy jevu B_k^n.

Věta 10.3. *Označuje-li B_k^n jev, že v Bernoulliově schématu s n pokusy nastane právě k-krát úspěch a p je pravděpodobnost úspěchu v jednom pokusu, $q = 1 - p$, platí pro $k = 0, 1, 2, \ldots, n$*

$$\mathsf{P}(B_k^n) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

Všimněte si, že jevy $B_0^n, B_1^n, \ldots, B_n^n$ jsou vzájemně disjunktní a jejich sjednocení je jistý jev.

Úloha 10.1. Ukažte, že $\mathsf{P}(B_0^n) + \mathsf{P}(B_1^n) + \ldots + \mathsf{P}(B_n^n) = 1$.

Příklad 10.1. V autobusových garážích je 10 autobusů. Všechny se denně kontrolují, než vyjedou. Z dlouhodobé zkušenosti je známo, že pravděpodobnost, že autobus bude v daném dni schopen provozu, je rovna 0,8. Určete pravděpodobnost, že v daném dni bude schopno provozu právě 6 autobusů.

Kontrola postupně prohlíží každý z deseti autobusů. Je-li autobus schopen provozu, mluvíme o úspěchu. Pravděpodobnost úspěchu je 0,8. Neúspěch bude druhý výsledek prohlídky — autobus není v pořádku. Pravděpodobnost neúspěchu je $q = 1 - p = 0{,}2$. Prohlídka jednoho autobusu je Bernoulliův pokus. Kontrola deseti autobusů je desetinásobné opakování téhož pokusu, tedy Bernoulliovo schéma s deseti pokusy. Jev, že právě 6 autobusů bude schopno provozu, je jev B_6^{10}. Podle věty 10.3 je

$$\mathsf{P}(B_6^{10}) = \binom{10}{6}(0{,}8)^4(0{,}2)^6.$$

Úloha 10.2. Určete pravděpodobnost, že v daném dni budou schopny provozu aspoň 4 autobusy.

Úloha 10.3. Určete pravděpodobnost, že kvočna vysedí ze šesti vajec právě čtyři slepičky. Určete pravděpodobnost jevů

a) vylíhne se stejně slepiček i kohoutků,
b) vylíhnou se nanejvýše dva kohoutci,
c) vylíhnou se nanejvýš tři slepičky.

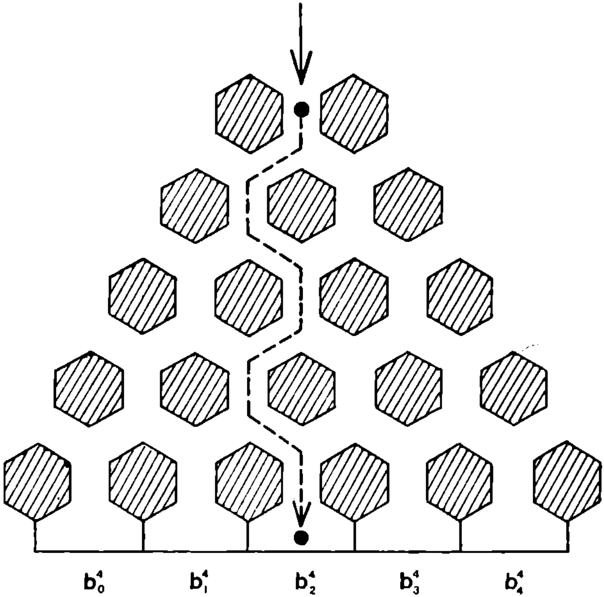
Úloha 10.4. Klíčivost semen určitého druhu bobu je 0,98. To znamená, ze P(semeno vyklíčí) = 0,98.

K pokusným účelům bylo zasazeno 10 semen. Určete pravděpodobnost, že z nich

a) vyklíčí právě 8,
b) nevyklíčí ani jedno.

10.3. GALTONOVA DESKA ČILI OPĚT O SIMULACI

Bernoulliovo schéma jsme modelovali pomocí náhodných procházek po síti. Na obr. 10.2 je znázorněn jednoduchý



Obr. 10.2.

přístroj, tzv. Galtonova deska. Šestiúhelníkové výstupky jsou odděleny uličkami. Vhodíme-li do horního otvoru kuličku, bude se čtyřikrát „rozhodovat“, kudy padat. Rozhodne o tom náhoda. Bludiště má takový tvar, že na každém rozcestí je šance pro výběr levé uličky (úspěch) stejná jako pro výběr pravé (neúspěch). Nakonec kulička spadne do jedné z pěti přihrádek — to jsou cíle. Kdybychom desku nakreslili schematicky, dostali bychom známou síť pro Bernoulliovo schéma se čtyřmi pokusy. Přihrádky proto označíme stejně jako cíle v síti. Abychom odhadli pravděpodobnost, že při náhodné procházce dojde figurka do určitého cíle, postavili jsme na start ne jednu, ale více figurek. Nasypme tedy do našeho přístroje m kuliček. Budeme tak simulovat m-násobné opakování procházky. Procházka je však Bernoulliovo schéma se čtyřmi pokusy a s pravděpodobností úspěchu v jednotlivém pokusu $p = \frac{1}{2}$. Všimněte si, že Galtonova deska také znázorňuje sezení na vejcích. Vhodíme-li do ní jednu kuličku, odpovídá to vysezení čtyř vajec. Spadne-li kulička do přihrádky b_k^4, znamená to, že se vylíhly právě čtyři slepičky.

Do horního otvoru přístroje jsme tedy nasypali větší množství kuliček. Sledujme, jak se kuličky rozdělí, jaká část se jich objeví v jednotlivých přihrádkách — cílech. Výsledek bude překvapující. Počty kuliček, které se dostanou k cílům, budou úměrné počtu cest, které k nim vedou, tedy číslům

$$\binom{4}{0} = 1, \binom{4}{1} = 4, \binom{4}{2} = 6, \binom{4}{3} = 4, \binom{4}{4} = 1.$$

(Kde jsou tato čísla v Pascalově trojúhelníku?) Galtonova deska umožňuje simulovat Bernoulliovo schéma pro $p = \frac{1}{2}$. Prodloužíme-li desku směrem dolů, bude odpovídat schématu s větším počtem pokusů.

Pomocí Galtonovy desky můžeme tedy určovat pravděpodobnost související s Bernoulliovým schématem.

Úloha 10.5. Jak byste pomocí Galtonovy desky určili pravděpodobnost jevu B_k^{10} — kvočna vysedí z deseti vajec právě k slepiček ($k = 0, 1, 2, \ldots, 10$)?

10.4. POČET ÚSPĚCHŮ V BERNOULLIOVĚ SCHÉMATU. OPĚT PRAVDĚPODOBNOSTNÍ POČÍTADLO

Výsledky sezení na vejcích kódujeme n-ticemi úspěchů a neúspěchů (jedniček a nul). Hospodyně považuje za úspěch počet slepiček, což je počet úspěchů v Bernoulliově schématu. Jev, že se vylíhne k slepiček, můžeme vyjádřit takto: V Bernoulliově schématu nastane právě k-krát úspěch. Sedí-li kvočna na n vejcích, jde o jev B_k^n. Věta 10.3 udává vzorec pro výpočet jeho pravděpodobnosti.

Nastane-li právě k úspěchů, je to totéž, jako když se figurka dostane k cíli b_k^n. Pomocí pravděpodobnostního počítadla určíme pro $n = 3$ pravděpodobnost jevu, že počet úspěchů bude roven k. Galtonova deska nám princip počítadla připomněla. V bludišti na desce se kuličky rozdělí náhodně, i když se zdá, že náhoda se řídí určitými zákony. Na počítadle však situaci idealizujeme — na každém rozcestí jde polovina figurek na jednu stranu a polovina na druhou. Stačí postavit na start 8 figurek. K cíli b_0^3 dojde 1, k cíli b_1^3 dojdou 3, k cíli b_2^3 dojdou 3 a k cíli b_3^3 dojde 1. Je tedy

$$\mathsf{P}(\text{počet úspěchů je } 0) = \mathsf{P}(B_0^3) = \frac{1}{8},$$

$$\mathsf{P}(\text{počet úspěchů je } 1) = \mathsf{P}(B_1^3) = \frac{3}{8},$$

$$\mathsf{P}(\text{počet úspěchů je } 2) = \mathsf{P}(B_2^3) = \frac{3}{8},$$

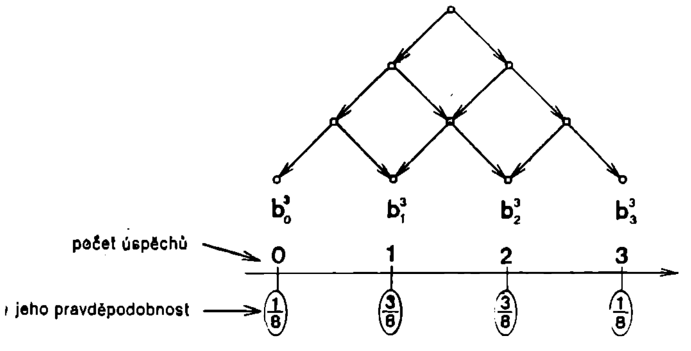
$$\mathsf{P}(\text{počet úspěchů je } 3) = \mathsf{P}(B_3^3) = \frac{1}{8}.$$

Tytéž hodnoty bychom dostali podle věty 10.3.

Pod síť nakreslíme osu a na ní vyznačíme body, které budou odpovídat počtu úspěchů (obr. 10.3). Pro každé k

jsme určili pravděpodobnost, že nastane právě k úspěchů. Připišme je tedy pod příslušné body osy.

Uvědomte si, že jsme každému výsledku Bernoulliova schématu přiřadili právě jedno číslo, totiž počet úspěchů. Výsledky Bernoulliova schématu jsou n-tice nul a jedniček. Číslo přiřazené výsledku je počet jedniček v n-tici. Toto přiřazení je funkce definovaná na prostoru výsledků. S podobnými funkcemi jsme se už seznámili při náhodných hrách. Jsou to náhodné veličiny. Náhodnou veličinu, která uvádí počet úspěchů v Bernoulliově schématu, s n pokusy označme S_n.



Obr. 10.3.

Úloha 10.6. V určitém Bernoulliově schématu je pravděpodobnost $p = \frac{1}{3}$. Určete hodnoty náhodné veličiny S_4 (počet úspěchů v Bernoulliově schématu se čtyřmi pokusy). Ke každé z těchto hodnot určete příslušnou pravděpodobnost pomocí pravděpodobnostního počítadla. Informace o funkci S_4 zapište do obrázku (podobně jako obr. 10.3).

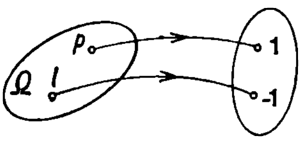
11. kapitola

NÁHODNÉ VELIČINY

11.1. ÚVOD

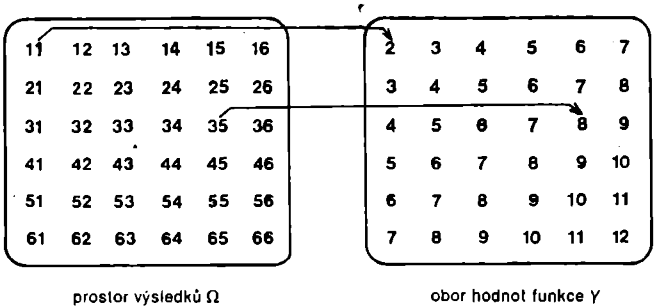
Výsledky náhodných pokusů jsme kódovali různým způsobem. Pomocí čísel, bodů i n-tic. Nejčastěji je budeme spojovat s čísly.

Příklad 11.1. Při klasické hře o peníze se hází mincí. Výsledek p znamená, že hráč X vyhraje korunu. Hráč X ho tedy spojuje s číslem 1. Výsledek l znamená, že hráč X korunu prohraje — bude ho spojovat s číslem —1. Hráč X tak nevědomky zobrazil prostor výsledků hodu mincí do množiny čísel. Na obr. 11.1 je graf, který toto zobrazení znázorňuje. Označíme-li zobrazení písmenem X, platí $X(p) = 1$, $X(l) = -1$.



Obr. 11.1.

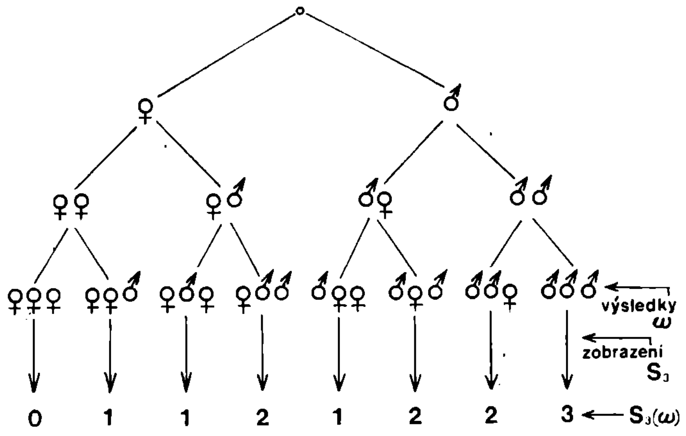
Příklad 11.2. V úloze 9.6 jsme házeli dvakrát kostkou. Hráč získá součet bodů z obou hodů. Každý výsledek dvou hodů (tj. dvojici čísel) hráč spojuje s číslem. Dvojici 3, 5 přiřadí číslo $3 + 5 = 8$. Hráč tedy zobrazí prostor výsledků do množiny čísel. Označíme-li toto zobrazení (funkci) písmenem Y, je např. $Y(35) = 3 + 5 = 8$. Na obr. 11.2 je zobrazení znázorněno (srovnejte je s tabulkou v úloze 9.6).



Obr. 11.2. Součet bodů, které padly při dvou hodech kostkou

Příklad 11.3. Výsledkem střelby do terče je zasažený bod. Prostor výsledků je terč rozdělený na očíslované části. Výsledek si střelec spojuje s počtem bodů, které získal, což je číslo části, kterou zasáhl. Střelec také zobrazil prostor výsledků do číselné množiny. Znázorněte toto zobrazení graficky.

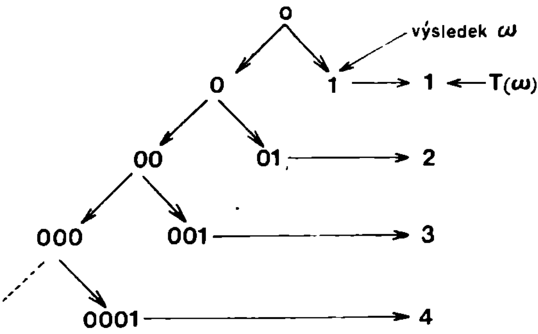
Příklad 11.4. Otcové jsou zvlášť šťastni, kdy se jim narodí syn. Otec, který si naplánoval tři děti, bude s každým výsledkem nám už známého pokusu spojovat úspěch s počtem chlapců mezi třemi dětmi. To je také zobrazení prostoru výsledků do množiny čísel. Toto zobrazení (funkci) označme písmenem S_3. Např. je $S_3(♀♀♀) = 0$.



Obr. 11.3. Počet chlapců mezi třemi dětmi

Příklad 11.5. (Doba čekání na první úspěch.) Vraťme se k náhodnému pokusu, kterému jsme říkali čekání na první úspěch. Opakuje se zde tentýž Bernoulliův pokus tak dlouho, až se poprvé dostaví úspěch. Předpokládáme přitom, že pokusy provádíme např. v minutových intervalech. S každým výsledkem spojujeme dobu — počet pokusů (minut). Je to opět funkce, která zobrazuje prostor výsledků Ω do množiny čísel. Označme ji písmenem T (viz obr. 11.4). Objevuje se tu zajímavý problém, jak dlouho se musí průměrně na takový úspěch čekat.

Příklad 11.6. S každým výsledkem lovu v příkladu 5.8 můžeme spojit počet kachen, které ho přežily. Např. při výsledku 23522 přežily 3 kachny (totiž kachny 1, 4 a 6).



Obr. 11.4. Doba čekání na první úspěch

Označíme-li tuto funkci Z, dostáváme např. $Z(11111) = 5$, $Z(66666) = 5$, $Z(12345) = 1$ atd.

Úloha 11.1. V úloze 5.12 o řediteli, dopisech a sekretářce jsme měli náhodný pokus, s jehož výsledky spojíme počet dopisů, které došly na správnou adresu. Označte tuto funkci písmenem U a najděte její hodnoty pro několik výsledků z Ω.

Úloha 11.2. Hospodyni zajímá počet slepiček, které vysedí kvočna (úloha 5.13). Každému výsledku sezení na vejcích přiřaďme počet slepiček. Opět dostáváme zobrazení prostoru výsledků do množiny čísel. Zakódujte výsledky (nakreslete strom) a zobrazení znázorněte graficky (podobně jako na obr. 11.3).

Na každém kroku se setkáváme s kódováním výsledků různých pokusů pomocí čísel a se spojováním výsledků s reálnými čísly. S náhodně koupeným bochánkem např. spojíme počet rozinek, které obsahuje. S náhodně koupenou krabičkou zápalek spojíme počet zápalek, které v ní najdeme. Počítáme-li vozidla, která projela určitým úsekem silnice v určitých časových intervalech, provádíme náhodný pokus. Jeho výsledky zakódujeme počtem vozidel. S těmito čísly můžeme dále spojit např. počty nákladních vozidel, která tudy projela. Každému představení v kině přiřazujeme počet prodaných lístků. Spojování výsledků náhodného pokusu s číslem už dávno známe. Když jsme si hráli na závod v běhu, měřili jsme dobu běhu. Každému závodu jsme přiřadili dobu jeho trvání. Byl to počet hodů potřebných k závodu. Podobně jsme každému výsledku námořní bitvy přiřadili počet vypálených střel.

11.2. NÁHODNÁ VELIČINA

V příkladech, které jsme uvedli, byl vždy prostor Ω zobrazen do množiny reálných čísel. Tato zajímavá zobrazení jsou funkce, definované na prostoru výsledků. Budeme je označovat velkými písmeny z konce abecedy.

Definice 11.1. Zobrazení prostoru výsledků Ω do množiny reálných čísel se nazývá *náhodná veličina*.

My se budeme zabývat jen náhodnými veličinami souvisejícími s pokusy, které mají konečný počet výsledků.

Náhodné veličiny jsou např. X, Y, S_3, T z předcházejících příkladů. Hodnotami náhodné veličiny Y z příkladu 11.2 jsou čísla 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. S každou hodnotou můžeme spojit podmnožinu všech výsledků, kterým funkce Y tuto hodnotu přiřazuje. Pro hodnotu 2 je to množina $\{11\}$, pro hodnotu 3 množina

$\{21, 12\}$, pro 4 množina $\{13, 22, 31\}$ atd. Největší je tato množina pro hodnotu 7 — $\{16, 25, 34, 43, 52, 61\}$. Uvedené množiny snadno určíme z obr. 11.2.

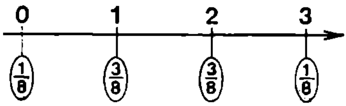
Množina $\{16, 25, 34, 43, 52, 61\}$ je množina všech výsledků $\omega \in \Omega$, pro které je $Y(\omega) = 7$. Tato množina je vlastně jev. Označíme ho $\{Y = 7\}$ a jeho pravděpodobnost označíme $\mathsf{P}(Y = 7)$. Podobně pro ostatní hodnoty náhodné proměnné Y: Pro $k = 2, 3, 4, \ldots, 11, 12$ označíme $\{Y = k\}$ jev, že funkce Y nabývá hodnoty k. Pravděpodobnost tohoto jevu označíme $\mathsf{P}(Y = k)$ a budeme mluvit o pravděpodobnosti, s níž náhodná veličina Y nabývá hodnoty k.

Úloha 11.3. Vysvětlete, proč je $\mathsf{P}(Y = 2) = \frac{1}{36}$, $\mathsf{P}(Y = 3) = \frac{2}{36}$. Pomocí obr. 11.2 najděte pravděpodobnosti, s nimiž nabývá náhodná veličina Y ostatních hodnot.

Příklad 11.7. V příkladu 11.4 jsme zavedli náhodnou veličinu S_3, která každému výsledku zjištění pohlaví tří narozených dětí přiřazovala počet chlapců. Tato náhodná veličina nabývá hodnot 0, 1, 2, 3. Z obr. 11.3 snadno vyčtete množiny $\{S_3 = k\}$ pro $k = 0, 1, 2, 3$. Utrhnete ze stromu výsledky, pro které S_3 nabývá hodnoty 1. Dostaneme množinu {♀♀♂, ♀♂♀, ♂♀♀}, což je jev $S_3 = 1$. Platí tedy $\mathsf{P}(S_3 = 1) = \frac{3}{8}$. Snadno zjistíme, že $\mathsf{P}(S_3 = 0) = \frac{1}{8}$, $\mathsf{P}(S_3 = 2) = \frac{3}{8}$ a $\mathsf{P}(S_3 = 3) = \frac{1}{8}$. S každou hodnotou náhodné veličiny spojujeme tedy číslo, které udává pravděpodobnost, s níž může veličina této hodnoty nabývat. Informace o náhodné veličině uspořádáme do tabulky

k	0	1	2	3	hodnoty funkce S_3
$P(S_3=k)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	jejich pravděpodobnosti

Jiným způsobem můžeme tuto informaci vyjádřit na číselné ose. K bodům osy, které odpovídají hodnotám náhodné veličiny, připíšeme hodnoty pravděpodobnosti, s níž veličina může této hodnoty nabývat. Na obr. 11.5 je grafické vyjádření informace o náhodné veličině S_3.



Obr. 11.5.

Tabulka i obr. 11.5 vyjadřují rozložení náhodné veličiny S_3. Už dříve jsme určovali rozložení některých náhodných veličin. Šlo o veličiny, které souvisely s našimi náhodnými hrami. Rozložení náhodné veličiny budeme vyjadřovat buď tabulkou, nebo pomocí číselné osy. Do prvního řádku tabulky napíšeme hodnoty, kterých náhodná veličina nabývá (uspořádáme je podle velikosti) a pod ně do druhého řádku napíšeme příslušné pravděpodobnosti.

Příklad 11.8. Při určité hře se hází kostkou. Padne-li liché číslo, ztrácí se 1 bod. Padne-li šestka, získávají se dva body. Padne-li dvojka nebo čtyřka, získává se 1/2 bodu. Hráč tedy spojuje každý výsledek s počtem získaných bodů. Platí

$X(⚀) = X(⚂) = X(⚄) = -1,$
$X(⚁) = X(⚃) = 1/2,$
$X(⚅) = 2.$

Výsledky jsme opět zakódovali obrázkem stěny, která se po hodu objevila nahoře. Náhodná veličina X nabývá hodnot $-1, \frac{1}{2}$, 2. Dostáváme

$\{X = -1\} = \{⚀, ⚂, ⚄\},$
$\{X = 1/2\} = \{⚁, ⚃\},$
$\{X = 2\} = \{⚅\},$

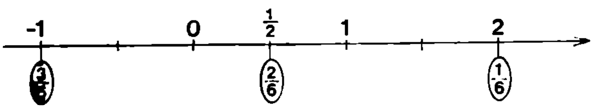
$$\mathsf{P}(X = -1) = \frac{3}{6}, \mathsf{P}\left(X = \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{6}, \mathsf{P}(X = 2) = \frac{1}{6}.$$

Informace o náhodné veličině X zapíšeme do tabulky

k	-1	$\frac{1}{2}$	2
$\mathsf{P}(X = k)$	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

Tabulka vyjadřuje rozložení náhodné veličiny X. Na obr. 11.6 je toto rozložení znázorněno na číselné ose.

Počet úspěchů v Bernoulliově schématu je zvláštní případ náhodné veličiny. Je-li $p = q = \frac{1}{2}$ a $n = 3$, je



Obr. 11.6.

její rozložení stejné jako na obr. 11.5. Označme S_n náhodnou veličinu, která udává počet úspěchů v Bernoulliově schématu s n pokusy. Pravděpodobnost úspěchu jednotlivého pokusu označme p. Potom pro $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ je

$$\mathsf{P}(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k},$$

kde $q = 1 - p$.

Úloha 11.4. Při určitém Bernoulliově pokusu je pravděpodobnost úspěchu $p = \frac{1}{3}$. Určete rozložení náhodné veličiny S_3 pomocí pravděpodobnostního počítadla. Srovnejte své výsledky s hodnotami, které dostanete z právě uvedeného vzorce pro $\mathsf{P}(S_3 = k)$.

Úloha 11.5. Při náhodné kopané jsme měřili dobu trvání zápasu. Dostali jsme tak náhodnou veličinu T. Její rozložení jsme určili pomocí simulace; je uvedeno v tabulce na str. 72. Určete pravděpodobnosti, s nimiž může veličina T nabývat svých hodnot, a srovnejte výsledky.

Úloha 11.6. V úloze 6.11 jsme určovali rozložení náhodné veličiny T, která udává dobu běhu. Určete její rozložení podle našeho vzorce a srovnejte výsledky.

11.3. STŘEDNÍ NEBOLI PRŮMĚRNÁ HODNOTA NÁHODNÉ VELIČINY

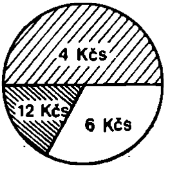
Na krabičce zápalek někdy bývá napsán např. průměrný obsah 50 zápalek. Co to znamená? Koupíte-li si krabičku zápalek, provedete náhodný výběr z velké urny. Urna obsahuje všechny krabičky, které jsou v prodeji. S každým výsledkem koupě — náhodného výběru, tedy s každou krabičkou zápalek, můžeme spojit počet zápalek, které krabička obsahuje. V různých krabičkách může být různý počet zápalek, ale průměrně jich tam je kolem 50. Počet zápalek přiřazený každé krabičce je náhodná veličina. Průměrná hodnota dává zajímavou informaci související s rozložením náhodné veličiny.

S náhodnou veličinou jsme se setkali také u lovu na kachny. Každému výsledku lovu přiřazovala počet kachen, které lov přežily. Velmi zajímavé by bylo vědět, kolik kachen v průměru lov přežije.

Každému zaměstnanci našeho závodu přiřaďme jeho měsíční výdělek. Průměrná hodnota měsíčního výdělku nám jistě dá zajímavou informaci o výdělcích v závodě.

Při náhodných hrách jsme mluvili o různých náhodných proměnných. V několika případech udávaly dobu trvání jednoho utkání. Ptali jsme se, jak dlouho bude v průměru utkání trvat, jaký bude průměrný počet kroků, které figurka potřebuje, aby došla k cíli, atd.

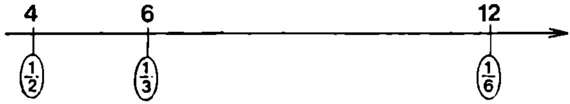
Uvedeme si ještě dva příklady, které vedou k důležitému pojmu, k tzv. střední hodnotě náhodné veličiny.



Obr. 11.7.

Příklad 11.9. Na obr. 11.7 je ruleta, která umožňuje vyhrát 4 Kčs, 6 Kčs nebo 12 Kčs. Hráč si chce zahrát 36krát. Kolik může vyhrát celkem a kolik v jedné hře? Označme X výhru v jedné hře. Obrázek rulety nám umožní určit rozložení této náhodné veličiny. Jeho znázornění na číselné ose vidíte na obr. 11.8. Ze souvislosti pravděpodobnosti a poměrné četnosti vyplývá, že asi v polovině, tj. v 18 případech, může počítat s výhrou 4 Kčs, asi ve třetině, tj. ve 12 případech, s výhrou 6 Kčs a ve zbylých 6 případech s výhrou 12 Kčs. Celkem má tedy naději na výhru asi

$$18.4\ \text{Kčs} + 12.6\ \text{Kčs} + 6.12\ \text{Kčs} = 216\ \text{Kčs}.$$



Obr. 11.8.

Na jednu hru tedy připadne v průměru $\frac{216}{36}$ Kčs. To je průměrná výhra v jedné hře, označíme ji $\mathsf{E}X$. Platí

$$\mathsf{E}X = \frac{18}{36}.4\ \text{Kčs} + \frac{12}{36}.6\ \text{Kčs} + \frac{6}{36}.12\ \text{Kčs} =$$
$$= \frac{1}{2}.4\ \text{Kčs} + \frac{1}{3}.6\ \text{Kčs} + \frac{1}{6}.12\ \text{Kčs}$$

Všimněte si, že $\mathsf{E}X = 4.\mathsf{P}(X = 4) + 6.\mathsf{P}(X = 6) + 12.\mathsf{P}(X = 12)$.

Dále si připomeňme, jak jsme na str. 72—73 určovali střední dobu $\mathsf{E}T$ trvání jednoho utkání. Přesnou hodnotu $\mathsf{E}T$ dostaneme, nahradíme-li poměrné četnosti příslušnými pravděpodobnostmi:

$$\mathsf{E}T = 2.\mathsf{P}(T = 2) + 4.\mathsf{P}(T = 4) + 6.\mathsf{P}(T = 6)$$

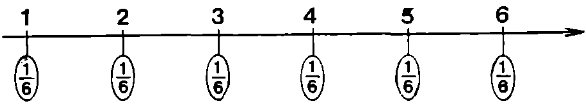
Právě provedené úvahy nás vedou k tomu, abychom střední hodnotu náhodné veličiny definovali takto:

Definice 11.2. *Střední hodnota náhodné veličiny* X, která nabývá hodnot $x_1, x_2, \ldots, x_m$ s pravděpodobnostmi $\mathsf{P}(X = x_1), \mathsf{P}(X = x_2), \ldots, \mathsf{P}(X = x_m)$, je číslo

$$\mathsf{E}X = x_1 . \mathsf{P}(X = x_1) + x_2 . \mathsf{P}(X = x_2) + \ldots + \\ + x_m . \mathsf{P}(X = x_m) .$$

Příklad 11.10. Náhodná veličina X je počet bodů při hodu kostkou. K určení $\mathsf{E}X$ potřebujeme znát rozložení náhodné veličiny X. Vidíme je na obr. 11.9. Dostáváme

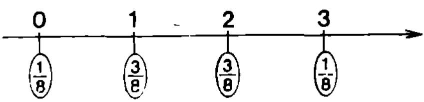
$$\mathsf{E}X = 1 . \frac{1}{6} + 2 . \frac{1}{6} + 3 . \frac{1}{6} + 4 . \frac{1}{6} + 5 . \frac{1}{6} + \\ + 6 . \frac{1}{6} = 3{,}5.$$



Obr. 11.9.

Příklad 11.11. Označme S_3 počet chlapců mezi třemi dětmi. Pomocí pravděpodobnostního počítadla můžeme zjistit rozložení této náhodné veličiny — vidíme je na obr. 11.10. Rozložení jsme také už našli při jiné příležitosti. Dostáváme

$$\mathsf{E}S_3 = 0 . \frac{1}{8} + 1 . \frac{1}{8} + 2 . \frac{1}{8} + 3 . \frac{1}{8} = 1{,}5.$$



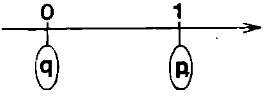
Obr. 11.10.

Úloha 11.7. V příkladu 5.4 jsme simulovali mnohonásobné opakování zjišťování pohlaví u trojic narozených dětí. Využijte výsledků simulace a odhadněte $\mathsf{E}S_3$. Brzy určíme $\mathsf{E}S_3$ jiným způsobem a uvidíme, že se výsledky budou dobře shodovat.

Na jednom prostoru výsledků můžeme definovat více náhodných veličin. Pak můžeme mluvit o součtu náhodných veličin. Jde o součet funkcí, které mají tentýž definiční obor. Bez důkazu uvedeme následující větu:

Věta 11.1. *Střední hodnota součtu náhodných veličin je rovna součtu středních hodnot těchto náhodných veličin.*

Příklad 11.12. S jedním Bernoulliovým pokusem spojme náhodnou veličinu X, která udává počet úspěchů. Zřejmě může nabývat hodnoty 0 nebo 1. Dále je $\mathsf{P}(X = 0) = q$, $\mathsf{P}(X = 1) = p$, kde $p + q = 1$. Na obr. 11.11 je znázorněno rozložení náhodné veličiny X.



Obr. 11.11.

Dostaneme $\mathsf{E}X = 0.q + 1.p = p$. Opakujeme-li tentýž pokus $n$krát, dostaneme n náhodných veličin. Označme X_k počet úspěchů v k-tém pokuse. Počet úspěchů v Bernoulliově schématu s n pokusy je S_n a dále

$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n .$$

Z věty 11.1 dostaneme jednoduchý vzorec pro určení střední hodnoty počtu úspěchů v Bernoulliově schématu

$$\mathsf{E}S_n = np .$$

Úloha 11.8. Určete střední hodnotu počtu slepiček, které vysedí kvočna ze 30 vajec.

Úloha 11.9. Pravděpodobnost, že mandelinka po postřiku zahyne, je $\frac{3}{4}$. Kolik mandelinek v průměru zahyne z deseti postříkaných?

Úloha 11.10. Určete $\mathsf{E}S_3$ jiným způsobem než v příkladu 11.11.

12. kapitola

PRAVDĚPODOBNOSTNÍ MODEL DĚDIČNOSTI

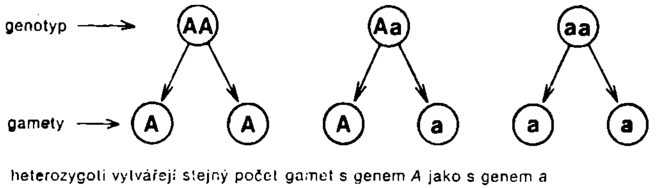
12.1. KRÁTCE O DĚDIČNÝCH VLASTNOSTECH

Zajímavý příklad praktického významu teorie pravděpodobnosti je využití pravděpodobnostních metod v genetice. Vyložíme si zjednodušeně princip, na jehož základě se dědí vlastnosti. Dědičné vlastnosti, jako např. barva květu, barva očí, barva srsti, délka křídel apod., jsou určovány a přenášeny zvláštními útvary, tzv. geny. Konkrétní vlastnost určují dva geny tvořící pár. Každá buňka organismu (s výjimkou pohlavních buněk) obsahuje stejnou dvojici genů. Geny, které určují danou vlastnost, se vyskytují ve dvou podobách, ve dvou formách. Jsou to tzv. *alely*. Jednu značme písmenem A, druhou písmenem a.*) V každé buňce jsou dva vláknité útvary, tzv. *chromozómy*. Geny v chromozómech připomínají korálky navlečené na nitky. Budeme se teď zajímat o dvojici genů, která určuje nějakou vlastnost. Jeden z genů je na prvním a druhý na druhém chromozómu. Buď jsou oba geny A, nebo oba a, nebo je jeden A a druhý a. Budeme proto mluvit o třech genotypech AA, aa, Aa. Protože v každé buňce jsou geny sestaveny stejně, můžeme určitého jednotlivce označit symbolem

*) V mezinárodně vžité symbolice označuje A dominantní gen, a recesívní gen. Proto i my budeme geny označovat malým a velkým písmenem.

AA, *aa* nebo *Aa* podle jeho genotypu. Genotypy *AA*, *aa* (i jednotlivci s takto sestavenými geny) se nazývají *homozygoti*, genotyp *Aa* se nazývá *heterozygot*.

Pohlavní buňky čili *gamety* vznikají dělením. Buňka se rozdělí na dvě části tak, že do každé se dostane jeden z páru chromozómů. Z heterozygota vzniknou dvě různé gamety, jedna s genem *A*, druhá s genem *a*. Z homozygota vzniknou stejné gamety.

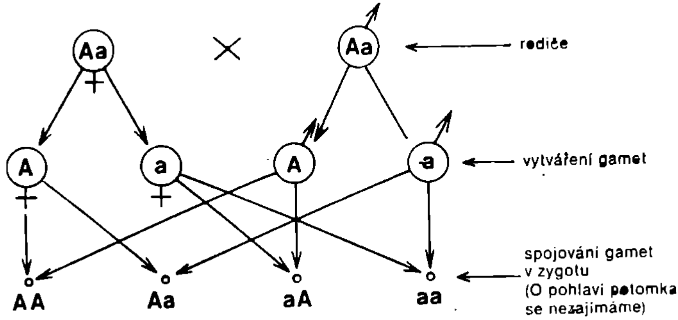


Obr. 12.1. Gamety vytvářené jednotlivými genotypy

Základ nového organismu vznikne spojením mateřské a otcovské gamety; říká se mu *zygot*. Zygot opět obsahuje dvojici genů — jeden pochází od matky, druhý od otce. Genotyp potomka se tedy takto vytvořil už při oplodnění. Vzhledem k tomu, že o tom, která mateřská a která otcovská gameta se spojí, rozhoduje náhoda, jde o náhodný pokus. Budeme označovat, stejně jako biologové, symbolem ♀ matku a symbolem ♂ otce. Napíšeme-li do kolečka dvojici genů, dostaneme srozumitelný kód pro označování genotypu matky a otce.

Na obr. 12.2 je jednoduše znázorněno křížení dvou heterozygotů, matky Aa♀ a otce Aa♂ :

Genotypy *Aa*, *aA* jsou stejné, ale dbejme přesto o pořadí. První gen dvojice bude gen od matky, druhý



Obr. 12.2.

od otce. Každé ze čtyř možných spojení má tutéž šanci. Při křížení dvou heterozygotů jsou tyto možnosti:

$$\mathsf{P}(\text{vznikne genotyp } AA) = \frac{1}{4},$$

$$\mathsf{P}(\text{potomek dvou heterozygotů bude heterozygot}) = \frac{1}{2},$$

$$\mathsf{P}(\text{vznikne homozygot } aa) = \frac{1}{4}.$$

Úloha 12.1. Gen A je dominantní, gen a recesívní. To znamená, že gen A potlačuje projevy genu a. Jedinec s genotypem Aa vypadá stejně jako jedinec s genotypem AA. Říkáme tedy, že jedinci Aa, AA mají stejný *fenotyp*, ale různé genotypy. Jsou tedy dva fenotypy: fenotyp jedinců AA, Aa fenotyp č. 1 a fenotyp jedince aa — fenotyp č. 2. Určete pravděpodobnost, že zkřížením dvou heterozygotů vznikne potomek s fenotypem č. 1. Určete pravděpodobnost, že to bude homozygot AA.

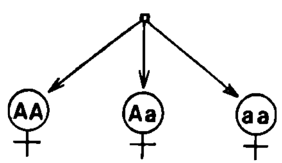
12.2. NÁHODNÉ KŘÍŽENÍ JEDINCŮ A JEHO SIMULACE

Pro určité populace a vlastnosti rozhoduje náhoda o tom, jaká matka (s jakým genotypem) a jaký otec (s kterým ze tří genotypů) se zkříží. Je např. prokázáno, že v lidské populaci je křížení jedinců, pokud jde o krevní skupinu, náhodné.

Náhodné křížení jedinců, které vede k vytvoření potomka (přesněji — jeho genotypu), je zajímavý náhodný pokus s několika etapami. Podívejme se na ně blíže. Nejprve se náhodně vyberou rodiče. Jak to popíšeme co nejjednodušeji? Jedince budeme chápat jako dvojice genů. Jsou tři typy jedinců — *AA*, *Aa*, *aa*. Množinu všech matek, populaci matek, si můžeme představit jako urnu, v níž jsou tři druhy papírových koleček. Jeden typ má na obou stranách písmeno *A*, představuje matky s genotypem *AA*. Matkám s genotypem *Aa* odpovídají kolečka, která mají z jedné strany *A* a z druhé *a*. Třetí typ koleček má z obou stran *a* — odpovídají matkám s genotypem *aa*. Populaci matek označíme $U_♀$.

Podobná urna s kolečky tří typů je populace otců; označíme ji $U_♂$.

Náhodný výběr matky pro křížení odpovídá náhodnému výběru kolečka z $U_♀$. To je první etapa našeho pokusu — je znázorněna na obr. 12.3.



Obr. 12.3. Výběr matky pro křížení

K vybrané matce dále náhodně vybereme otce. To bude druhá etapa — náhodný výběr kolečka z $U_♂$. Strom na obr. 12.3 si jistě snadno sami doplníte. Pro každý výsledek 1. etapy jsou tři možné výsledky 2. etapy. Po těchto dvou etapách jsou už rodiče ke křížení náhodně vybráni.

Co se bude dít dál? Matka předá potomkovi jeden ze svých dvou genů. O tom, který gen to bude, rozhodne náhoda — oba geny mají stejnou šanci. I tuto třetí etapu budeme modelovat tak, abychom ji mohli simulovat. Matčinu genotypu odpovídá kolečko. Budeme předpokládat, že se chová stejně jako mince při vrhu. Hodíme kroužkem a budeme sledovat, jaké písmeno se objeví nahoře. Bude jí odpovídat gen náhodně předaný potomkovi.

Ve čtvrté etapě náhodně předá potomkovi jeden ze svých genů otec. Odpovídá jí hod kroužkem, který znázorňuje otcův genotyp.

Nakonec slepíme obě kolečka k sobě těmi stranami, které po vrhu zůstaly vespod. Vznikne tak kolečko, které odpovídá genotypu náhodně vzniklého jedince.

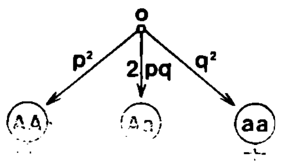
Analyzovali jsme zajímavý náhodný jev s několika etapami a popsali jsme, jak ho simulovat. Jistě jste si všimli, jak je model tohoto složitého procesu pomocí výběru koleček a hodů jednoduchý. Přesvědčuje nás o tom, že je užitečné zabývat se tahy koulí (koleček) a hody mincí, i když se zprvu tyto pokusy nezdály důležité. Jednoduché pokusy umožňují jednoduše modelovat a simulovat pokusy daleko složitější a pro praxi důležitější.

12.3. STROM POPISUJÍCÍ PRŮBĚH A VÝSLEDKY NÁHODNÉHO KŘÍŽENÍ

Pokus popsaný v minulém odstavci znázorníme stromem. Připomeňme si čtyři etapy pokusu:

1. etapa — výběr matky,
2. etapa — výběr otce,
3. etapa — výběr genu, který potomkovi předá matka,
4. etapa — výběr genu, který potomkovi předá otec.

Označme p pravděpodobnost, že náhodně vybraná matka má na daném místě svého genotypu gen A. Číslo $q = 1 - p$ je pak pravděpodobnost, že tam má gen a. Jak víme, pravděpodobnost náhodného výběru matky s genotypem AA je p^2, s genotypem Aa je $2\,pq$ a s genotypem aa je q^2. Připíšeme-li je do stromu znázorňujícího 1. etapu, dostaneme obr. 12.4. Předpokládejme, že i pro otce je ve 2. etapě

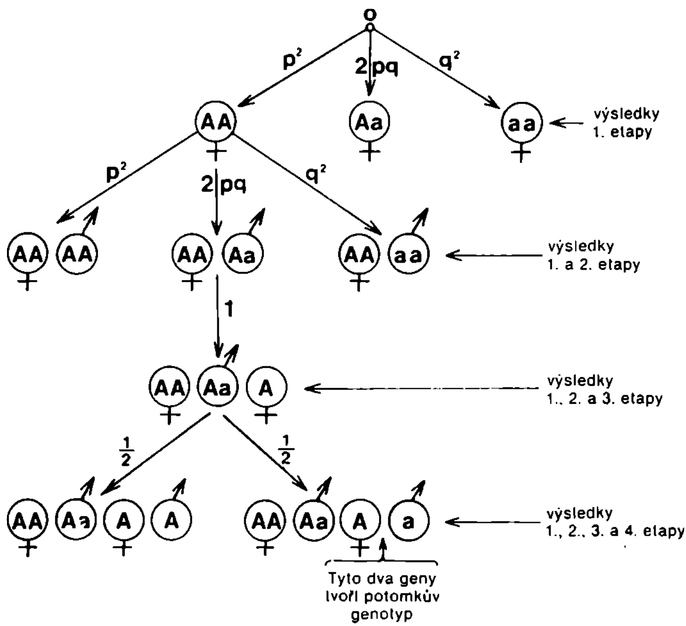


Obr. 12.4.

$$\mathrm{P}\,(AA\,♂) = p^2,\quad \mathrm{P}\,(Aa\,♂) = 2pq,\quad \mathrm{P}\,(aa\,♂) = q^2 .$$

Tyto pravděpodobnosti připišme k hranám druhé etapy.

Pokud jde o 3. etapu, např. matka AA♀ vytváří jen gamety s genem A, tedy A♀ . Určitě potomkovi předá gen A, žádný jiný přece nemá. U příslušné hrany bude tedy pravděpodobnost 1. Ve 4. etapě např. otec s genotypem Aa může potomkovi předat gen A s toutéž pravděpodobností $\frac{1}{2}$ jako gen a. U obou hran bude tedy číslo $\frac{1}{2}$. Na obr. 12.5 je jen část stromu, a jistě si ho snadno dokreslíte:



Obr. 12.5.

12.4. HARDYHO-WEINBERGŮV ZÁKON

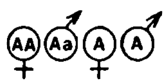
Předpokládejme, že jedinci z nějaké populace otců a matek se náhodně kříží. Při výběru se tedy neuplatňují žádné záměry ani vedlejší vlivy. Byla přitom pozorována zajímavá zákonitost: Ukazuje se, že poměrné četnosti jednotlivých genotypů zůstávají ve všech generacích stejné. Této skutečnosti si všimli genetici, ale vysvětlit ji umožnila teorie pravděpodobnosti. Je to tzv. Hardyho-Weinbergův zákon. Poprvé ho nezávisle na sobě popsali Hardy a Weinberg r. 1908.

Uvažujme následující jevy:

G_1^1: potomek bude mít genotyp AA,
G_2^1: potomek bude heterozygot Aa,
G_3^1: potomek bude mít genotyp aa.

Víme, že P(rodič má genotyp AA) $= p^2$. Ukážeme, že také P(potomek má genotyp AA) $= p^2$ neboli $\mathsf{P}(G_1^1) = p^2$. Analogicky bychom pak snadno ukázali, že $\mathsf{P}(G_2^1) = 2pq$, $\mathsf{P}(G_3^1) = q^2$.

Ze stromu nejprve otrhejme výsledky, které jsou příznivé pro jev G_1^1. Zjednodušíme si trochu značení. Výsledky budeme kódovat tak, že postupně napíšeme matčin genotyp, otcův genotyp, gen předávaný matkou a gen předávaný otcem. Výsledek



zapíšeme jako čtveřici (AA, Aa, A, A). Otrhali jsme tedy čtveřice, ve kterých jsou na posledních dvou místech geny A. Podle pravidla součinu pro ně dostaneme pravděpodobnosti

$$\mathsf{P}((AA, AA, A, A)) = p^2 . p^2 . 1 . 1 = p^4,$$

$$\mathsf{P}((AA, Aa, A, A)) = p^2 . 2pq . 1 . \frac{1}{2} = p^3q,$$

$$\mathsf{P}((Aa, AA, A, A)) = 2pq . p^2 . \frac{1}{2} . 1 = p^3q,$$

$$\mathsf{P}((Aa, Aa, A, A)) = 2pq . 2pq . \frac{1}{2} . \frac{1}{2} = p^2q^2.$$

Podle pravidla součtu pro stromy je

$$\mathsf{P}(G_1^1) = p^4 + p^3q + p^3q + p^2q^2 = p^2(p^2 + 2pq + q^2) = \\ = p^2(p + q)^2 = p^2 .$$

Ukázali jsme, že vybírají-li se rodiče ke křížení náhodně, vyskytují se v generaci potomků jedinci s genotypem AA s pravděpodobností p^2, tedy s toutéž pravděpodobností, s jakou se vyskytovali v generaci rodičů. Poměrná četnost výskytu genotypu AA v obou pokoleních je tedy stejná.

Úloha 12.2. Dokažte, že $\mathsf{P}(G_2^1) = 2pq$, $\mathsf{P}(G_3^1) = q^2$.

Úloha 12.3. Vysoká užitkovost hospodářských zvířat je často výsledkem kombinace dvou různých genů. To znamená, že heterozygoti Aa jsou pro chov výhodnější. Ukažte, že pravděpodobnost, že heterozygotní slepice (s genotypem Aa) s vysokou užitkovostí dá heterozygotního potomka, je rovna $\frac{1}{2}$ bez ohledu na otcův genotyp.

Návod: Strom náhodného pokusu souvisejícího s uvažovaným jevem (zkřížení matky s genotypem Aa a otce s náhodně vybraným genotypem) dostanete, když ze stromu na obr. 12.5 ulomíte část vyrůstající z uzlu

 .

13. kapitola

METODA MAXIMÁLNÍ VĚROHODNOSTI ANEB O TOM, JAK ODHADNOUT POČET VOLNĚ ŽIJÍCÍCH DIVOKÝCH ZVÍŘAT

„Jest zcela nepochybným faktem,
že nemůžeme-li poznat nejpravdivější soudy,
musíme se řídit soudy nejpravděpodobnějšími".
(Descartes, Pojednání o metodě)

Fyzik vyvozuje často různé hypotézy o složení hmoty, struktuře atomu atd. Z těchto teorií jsou některé více pravděpodobné, jiné méně pravděpodobné. Fyzik přijímá hypotézu nejpravděpodobnější jako pravdě nejbližší (nejvěrohodnější). Podobně uvažuje chemik, astronom, ekonom. Princip, o nějž se opírají jejich úvahy, je prostý: Nejvěrohodnější je to, co je nejpravděpodobnější. Teorie pravděpodobnosti nás učí určovat, počítat pravděpodobnost jevu. Teorie pravděpodobnosti umožňuje odhadnout šanci pro realizaci toho jevu, a tedy v jistém smyslu předpovídat budoucnost. Mnohem větší význam má však jiné „předpovídání budoucnosti". Opírá se o následující zásadu:

Existují-li v praxi dva jevy, první s velkou, druhý s malou pravděpodobností, budeme očekávat, že nastane jev s velkou pravděpodobností. Můžeme věřit, že jev s malou pravděpodobností nenastane. Podstata tohoto postupu, zvaného metoda maximální věrohodnosti, je formulována Descartesovými slovy. Z této metody vyplývá, že v případě dvou jevů, z nichž některý potom nastal (my nevíme který), dáme přednost tomu jevu, jehož pravděpodobnost je větší. Říkáme, že je věrohodnější.

Na metodě maximální věrohodnosti je založena metoda odhadování četnosti populace volně žijících zvířat (např. počet ryb v jezeře, zubrů v pralese, zajíců v určeném prostoru atd.).

Příklad 13.1. V určitém jezeře žije neznámý počet ryb. Abychom tento počet (označme jej n) odhadli, budeme postupovat takto: Vylovíme m ryb, označkujeme je a pustíme zpátky do jezera. Počkáme, až se všechny ryby promíchají, a potom vylovíme r ryb. Toto vylovení r ryb sítí je náhodné vybírání ryb. Jeho výsledky zakódujeme r-prvkovými podmnožinami množiny všech n ryb. Jsou to kombinace r-té třídy z prvků této množiny. Prostor výsledků tedy obsahuje $\binom{n}{r}$ prvků. Je to klasický prostor. Každý výsledek je třeba pokládat za stejně pravděpodobný. Nechť A_n^k označuje jev: Z těchto r náhodně vybraných ryb bude právě k ryb označkovaných. Jevu A_n^k je příznivých tolik výsledků, kolik je možných způsobů vylovení právě k kusů označkovaných ryb při vylovení r ryb. Tento počet se rovná

$$\binom{n}{k}\binom{n-m}{r-k},$$

kde $n - m$ je počet neoznačených ryb, $\binom{n}{k}$ je počet způsobů, jak vybrat k označených ryb, $\binom{n-m}{r-k}$ je počet možností, jak k nim přidat zbývajících $r - k$ neoznačených ryb.

Z věty o klasickém prostoru vyplývá, že

$$\mathsf{P}(A_n^k) = \frac{\binom{m}{k}\binom{n-m}{r-k}}{\binom{n}{r}}.$$

Došlo k jevu A_n^k, tj. vylovili jsme právě k označených ryb. Známe r, m a k. Ptáme se, jaké je n. Metoda maximální věrohodnosti říká, že n bude takové, pro které je $\mathsf{P}(A_n^k)$ největší. Nyní je tedy třeba vyhledat největší člen posloupnosti $\mathsf{P}(A_n^k)$. Je to posloupnost s kladnými členy. Maximum můžeme vyhledat tak, že zkoumáme, jaký je podíl n-tého členu se členem předcházejícím vzhledem k 1. Doporučujeme vám propočítat si to. Odpověď zní: $\mathsf{P}(A_n^k)$ je největší pro takové n, které splňuje podmínku $\frac{m}{n} = \frac{k}{r}$. Dal se takový výsledek předpokládat? Popsaná metoda odhadování počtu ryb patří k metodám postupného odchytu s pouštěním. První ji použil Lincoln v r. 1930 k odhadu počtu volně žijících divokých zvířat.

Úloha 13.1. K odhadu počtu kaprů v rybníce bylo chyceno 300 kusů, označkováno a puštěno zpět do rybníka. Po promísení ryb bylo chyceno znovu 200 kaprů, mezi nimiž bylo 50 předtím označkovaných. Jaký je odhad počtu kaprů v tomto rybníku?

Příklad 13.2. Továrna vyprodukovala sérii n kusů určitého zboží (např. žárovek, praček, televizorů, konzerv apod.). Než se toto zboží dostane na pulty obchodů, je třeba tuto sérii zboží podrobit kontrole jakosti. Mluvili jsme o tom již v odst. 5.4. Předpokládejme, že série má n kusů a že náhodný reprezentativní vzorek jsme vybrali pomocí náhodného výběru bez vracení. Náhodně vybraných r kusů zboží podrobíme důkladné kontrole. Nechť mezi těmito r kusy je právě k kusů vadných. Předpokládejme, že v celé sérii n kusů je m kusů vadných. Označme B_m^k jev, že těch k vadných kusů bylo vybráno ze série n kusů, která má m kusů vadných. Obdobně jako v předcházejícím příkladě jsme hledali takové n, při kterém $\mathsf{P}(A_n^k)$ byla maximální, musíme nyní nalézt m, pro které je $\mathsf{P}(B_m^k)$ největší.

Úloha 13.2. Dokažte, že $\mathsf{P}(B_m^k)$ nabývá maxima pro m, které vyhovuje vztahu $\dfrac{m}{n} = \dfrac{k}{r}$.

Na základě metody maximální věrohodnosti jsme určili, že nejpravděpodobnějším počtem vadných kusů v této sérii zboží je číslo m, vyhovující vztahu $\dfrac{m}{n} = \dfrac{r}{k}$.

Je to výsledek, který jsme očekávali. Vyjadřuje, že poměr počtu m vadných kusů k n, což je počet všech kusů, je stejný jako poměr počtu k vadných kusů v náhodně vybraném vzorku k počtu r všech kusů ve vzorku. K takovému závěru nás jistě vedla i naše intuice. Náhodný výběr kusů pro reprezentativní vzorek zaručuje, že se vzorek „podobá“ celé populaci.

Význam zde prakticky popsané metody je veliký. Nechť tyto skromné příklady potvrdí, jak značná je úloha matematiky a zvláště teorie pravděpodobnosti.

Naše pátrání zakončeme citátem: „Nejpřesvědčivější argumenty pro to, jakou hodnotu matematika skutečně má, poskytuje teorie pravděpodobnosti.“ To jsou slova slavného holandského didaktika matematiky Hanse Freudenthala.

Tabulka náhodných čísel

27252	37875	53679	01889	35714	63534	63791	76342	47717	73684
98259	74585	11863	78985	03881	46567	93696	93521	54970	37607
84068	43759	75814	32261	12728	09636	22336	75629	01017	45503
68582	97054	28251	63787	57285	18854	35006	16343	51867	67979
60646	11298	19680	10087	66391	70853	24423	73007	74958	29020
97437	52922	80739	59178	50628	61017	51652	40915	94696	67843
58009	20681	98823	50979	01237	70152	13711	73916	87902	84759
77211	70110	93803	60135	22881	13423	30999	07104	27400	25414
54256	84591	65302	99257	92970	28924	36632	54044	91798	78018
87493	69330	94065	35544	14050	03476	25804	49350	92525	87541
87569	22661	55970	52623	35419	76660	42394	63210	62626	00581
22896	62237	39635	63725	10463	87944	52075	90914	30559	35671
02697	32230	64527	97210	41355	79399	13941	88378	68503	33609
20080	15652	37216	00679	02088	34138	13953	68939	05630	27653
20550	95151	60557	57449	77115	87372	02574	07851	22428	39189
11861	69032	51915	23510	32050	52052	24004	94242	32063	45233
67699	01009	07050	73324	06732	27510	33761	65145	28152	39087
50064	39500	17450	18030	63124	48061	59412	42446	08882	27067
98126	17700	94400	76075	08317	27324	72723	24654	77371	26409
01657	92602	41043	05686	15650	29970	95877	23937	90740	16866
88698	41755	56216	66852	17748	04963	54859	51362	79907	77364
51865	09836	73966	65711	41699	11732	17173	43996	73122	88474
40300	08852	27528	84648	79589	95295	72895	70794	01041	74867
02760	28625	70476	76410	32988	10194	94917	13168	31553	67891
78450	26245	91763	73117	33047	03577	62599	00880	82899	66065

Doporučená literatura

[1] *B. Riečan, Z. Riečanová:* O pravdepodobnosti. Škola mladých matematiků sv. 37, MF, Praha 1976.

[2] *B. Zelinka:* Matematika hrou i vážně. Škola mladých matematiků sv. 44, MF, Praha 1979.

[3] *V. Dupač, J. Hájek:* Pravděpodobnost ve vědě a technice. Cesta k vědění sv. 3, NČSAV, Praha 1962.

[4] *B. V. Gněděnko, A. J. Chinčin:* Elementární úvod do teorie pravděpodobnosti. SNTL, Praha 1954.

[5] *A. M. Jaglom, I. M. Jaglom:* Pravděpodobnost a informace. Academia, Praha 1964.

[6] *A. A. Svešnikov a kol.:* Sbírka úloh z teorie pravděpodobnosti, matematické statistiky a teorie náhodných funkcí. SNTL, Praha 1971.

Seznam dosud vydaných svazků edice
ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ
v nakladatelství Mladá fronta

---

1. *František Hradecký - Milan Koman - Jan Vyšín:* Několik úloh z geometrie jednoduchých těles, 1961, 1963, 1977
2. *Jiří Sedláček:* Co víme o přirozených číslech, 1961, 1965, 1977
3. *Jaroslav Šedivý:* Shodná zobrazení v konstruktivních úlohách, 1962
4. *Miroslav Šisler - Jiří Jarník:* O funkcích, 1962 a 1963
5. *František Veselý:* O nerovnostech, 1963
6. *Rudolf Výborný:* Matematická indukce, 1963 a 1966
7. *Jaroslav Šedivý:* O podobnosti v geometrii, 1963 a 1967
8. *Jiří Váňa:* O rovnicích s parametry, 1964 a 1970
9. *Jan Vyšín:* Konvexní útvary, 1964
10. *Jiří Sedláček:* Faktoriály a kombinační čísla, 1964
11. *Josef Holubář:* Geometrická místa bodů v prostoru, 1965
12. *Karel Havlíček:* Prostory o čtyřech a více rozměrech, 1965
13. *Miroslav Šisler - Josef Andrys:* O řešení algebraických rovnic, 1966
14. *František Veselý:* O dělitelnosti čísel celých, 1966
15. *Milan Koman:* Jak vyšetřujeme geometrická místa metodou souřadnic, 1966
16. *Stanislav Horák:* Kružnice, 1966
17. *Jaromír Hroník:* Úlohy o maximech a minimech funkcí, 1967
18. *Karel Havlíček:* Analytická geometrie a nerovnosti, 1967
19. *Jiří Jarník:* Komplexní čísla a funkce, 1967

20. *Bruno Budinský - Stanislav Šmakal:* Goniometrické funkce, 1968
21. *Alois Apfelbeck:* Kongruence, 1968
22. *Tibor Šalát:* Dokonalé a spriatelené čísla, 1969
23. *Jaroslav Morávek - Milan Vlach:* Oddělitelnost množin, 1969
24. *Ján Gatial - Milan Hejný:* Stavba Lobačevského planimetrie, 1969
25. *Leo Bukovský - Igor Kluvánek:* Dirichletov princíp, 1970
26. *Karel Hruša:* Polynomy v moderní algebře, 1970
27. *Stanislav Horák:* Mnohostěny, 1970
28. *Bruno Budinský - Stanislav Šmakal:* Vektory v geometrii, 1971
29. *František Zítek:* Vytvořující funkce, 1972
30. *Milan Koman - Jan Vyšín:* Malý výlet do moderní matematiky, 1972 a 1974
31. *Oldřich Odvárko:* Booleova algebra, 1973
32. *Jan Vyšín - Jitka Kučerová:* Druhý výlet do moderní matematiky, 1973
33. *Jaroslav Morávek:* O dynamickém programování, 1973
34. *Ladislav Rieger:* O grupách, 1974
35. *Alois Kufner:* Co asi nevíte o vzdálenosti, 1974
36. *Ján Černý:* O aplikáciách matematiky, 1976
37. *Beloslav Riečan - Zdena Riečanová:* O pravdepodobnosti, 1976
38. *Juraj Bosák:* Latinské štvorce, 1976
39. *Alois Kufner:* Nerovnosti a odhady, 1975
40. *Antonín Vrba:* Princip matematické indukce, 1977
41. *Bohdan Zelinka:* Rovinné grafy, 1978
42. *Ladislav Beran:* Uspořádané množiny, 1978
43. *Jiří Jarník:* Posloupnosti a řady, 1979
44. *Bohdan Zelinka:* Matematika hrou i vážně, 1979
45. *Antonín Vrba:* Kombinatorika, 1980
46. *Jaroslav Šedivý:* Shodnost a podobnost v konstrukčních úlohách, 1980
47. *Arnošt Niederle:* Zajímavé dvojice trojúhelníků, 1980

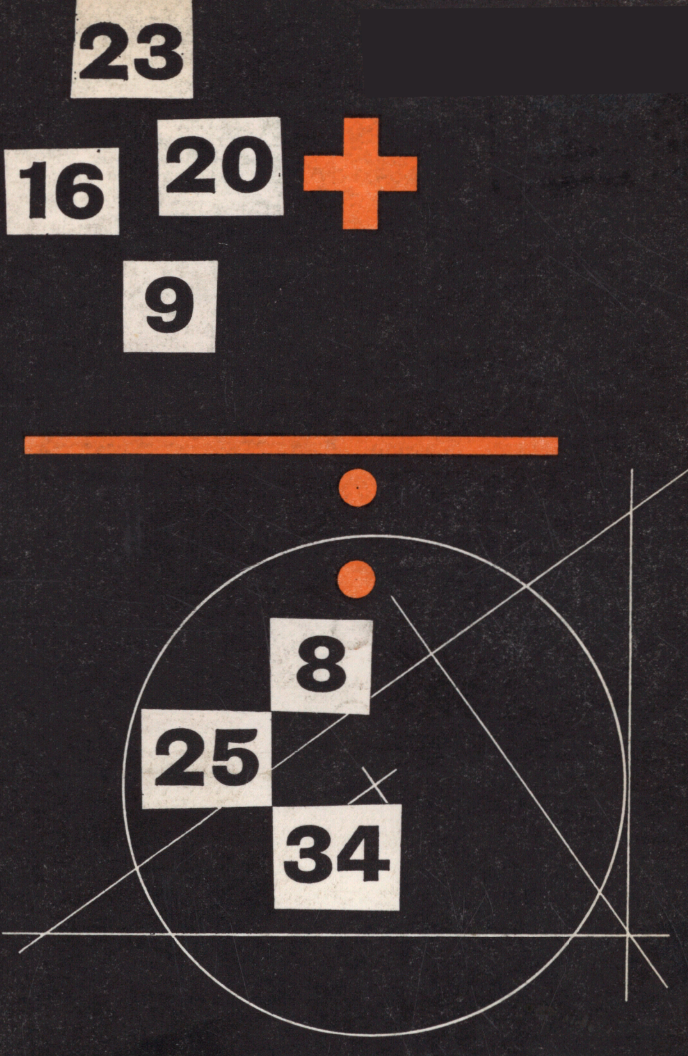
OBSAH

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

ADAM PŁOCKI

O náhodě a pravděpodobnosti

Pro účastníky matematické olympiády
vydává ÚV matematické olympiády
v nakladatelství Mladá fronta
Řídí akademik Josef Novák
Z polského originálu O symulacji probabilistycznej,
drzewach i prawdopodobienstwie
přeložila Eva Macháčková
Obálku navrhl Jaroslav Příbramský
K tisku připravil Vladimír Doležal
Technický redaktor Vladimír Vácha
Odpovědná redaktorka Libuše Rousková
Publikace číslo 4460
Edice Škola mladých matematiků, svazek 48
Vytiskl Mír, novinářské závody, n. p.,
závod 1, Praha 1, Václavské nám. 15
6,28 AA, 7,79 VA, 1. vydání. 176 stran.
Náklad 7500 výtisků. Praha 1982. 508/21/82.5
23-071-82 03/2 Cena brož. výtisku 9 Kčs



23-071-82
03/2
Cena brož.
Kčs 9,—