Shodnost a podobnost v konstrukčních úlohách

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

SHODNOST A PODOBNOST V KONSTRUKČNÍCH ÚLOHÁCH

46

Vydal ÚV matematické olympiády v nakladatelství Mladá fronta

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

JAROSLAV ŠEDIVÝ

Shodnost a podobnost v konstrukčních úlohách

PRAHA 1980
VYDAL ÚV MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY
V NAKLADATELSTVÍ MLADÁ FRONTA

PŘEDMLUVA

V této publikaci Školy mladých matematiků jsou za sebou zařazeny dva svazky, které k sobě tematicky patří. Ve svých prvních vydáních měly názvy: Shodná zobrazení v konstruktivních úlohách (svazek 3) a O podobnosti v geometrii (svazek 7).

V obou svazcích jde především o konstrukční využití těch zobrazení v rovině, která se probírají v našich středních školách. Podobná zobrazení jsou méně známá, proto je výklad o nich zde poněkud podrobnější a navazuje na informace o dělicím poměru, o podobnosti trojúhelníků, o mocnosti bodu ke kružnici apod.

Původní svazky edice jsou v této publikaci zařazeny za sebou, ale zůstávají samostatnými celky s vlastním číslováním kapitol, odstavců, řešených příkladů, úloh i obrázků. V textu jsou provedeny jen ty změny, které přizpůsobují jeho jazyk současné normě; množinová terminologie a symbolika se však uplatňuje jen střídmě, protože se dosud neužívá ve všech středních školách už od 1. ročníku. Ti z vás, kteří ji dobře ovládají, si snadno s její pomocí zkrátí slovní formulace použité zejména v rozboru úloh a v zápisech konstrukcí.

V textu je přes 30 řešených příkladů konstrukčních úloh, některé z nich jsou i dost obtížné. Nespokojujte se při jejich čtení pohledem na připojený obrázek, ale načrtněte si vlastní obrázek, začněte zadáním úlohy a doplňujte jej pak postupně dalšími čarami a body podle popisu řešení. To je mnohem poučnější než pohled na hotový obrázek, kde nejsou vyznačeny všechny pomocné čáry a body. Teprve potom vyřešte stejnou úlohu i při jiných vzájemných polohách daných útvarů, při jiných velikostech daných úseček a úhlů apod.

Těžiště vaší práce s knížkou má spočívat v samostatném řešení úloh, které jsou připojeny v závěru kapitol nebo článků, někde i bezprostředně za řešeným příkladem. Obtížnější odstavce a cvičení jsou označeny hvězdičkou; k nim se můžete vrátit i později.

Při přípravě nového vydání této publikace mi významnou měrou pomáhali dr. Vladimír Doležal a dr. Alena Šarounová, oběma děkuji za rychlou a účinnou pomoc.

J. Š.

ČÁST PRVNÍ

Shodná zobrazení v konstrukčních úlohách

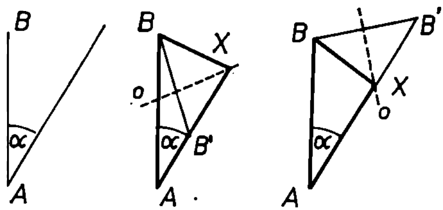
KAPITOLA I

NĚKOLIK ÚLOH ÚVODEM

Ve škole se učíte řešit konstrukční úlohy. Jsou to ty úlohy, jež vyžadují sestrojení jistého útvaru, který vyhovuje daným podmínkám. Řešení úlohy zpravidla zakončujete grafickým sestrojením hledaného útvaru. Uvědomili jste si však, že v praktickém životě nebývá cílem jen nakreslení hledaného útvaru, ale především zjištění jeho rozměrů a polohy? Proto také praktik potřebuje řešení konstrukční úlohy především tehdy, chce-li bez nákladného nebo zdlouhavého experimentování zjistit rozměry a polohu tělesa, které je třeba umístit podle daných podmínek. Vezměme si příklad, ve kterém jde o zjištění délky cesty.

Příklad 1. *Jirka s Milanem se vypravili na výlet. Do stanice* A *jeli vlakem, od ní se vydali pěšky přímo k rozhledně na obzoru. Šli dlouho lesem. Když vyšli z lesa ven, viděli, že se žene bouře. Chtěli se vrátit, ale člověk, kterého potkali, jim ukázal směr do vesnice* B, *kam je o tři kilometry blíže než na stanici* A. *Před vesnicí si Milan všiml směrové tabule, na níž bylo udáno, že vzdálenost z* B *do* A *je osm kilometrů. Zpátky na stanici* A *se svezli autobusem po přímé silnici. Doma se nemohli dohodnout, kolik kilometrů vlastně ušli. Jak byste je rozsoudili, kdybyste odhadli, že jejich cesta od stanice* A *k rozhledně se odchylovala od přímé silnice z* A *do* B *o* 30°?

Jistě vás napadne nakreslit si ve zvoleném měřítku plánek. Dospějete asi k obr. 1a, kde α označuje úhel o velikosti 30°. Nemůžete však zakreslit bod X, který by odpovídal místu, v němž změnili směr. Přitom je nutné znát bod X, chceme-li z náčrtku odměřit délku úseček AX, XB. Musíme tedy řešit úlohu na sestrojení trojúhelníku ABX. Co o něm víme? Je zřejmě $AB = 8$, $\alpha = 30°$, $AX - BX = 3$.*) Formulujme si příslušnou geometrickou úlohu:



Obr. 1 a, b, c

Sestrojte aspoň jeden trojúhelník ABX, je-li dáno $AB = 8$, $\sphericalangle BAX = 30°$, $AX - BX = 3$.

Je tedy dána velikost strany, úhlu k ní přilehlého a rozdílu dvou dalších stran trojúhelníku. Postupujme tak, jak jste zvyklí řešit konstrukční úlohu. Nakresleme si libovolný trojúhelník ABX (obr. 1 b). Vyznačme si v něm na polopřímce AX úsečku $AB' = AX - BX$. Trojúhelník ABB' lze sestrojit, protože známe jeho úhel BAB' a strany ležící na jeho ramenech. Jak sestrojíme bod X, střed otáčení, které převedlo bod B v bod

*) Někoho z vás možná napadlo, že je vhodné užít hyperboly s ohnisky A, B. Je to možné, ale málo přesné a zdlouhavé.

B'? Zřejmě jako průsečík osy úsečky BB' a přímky AB'. Proveďte si konstrukci bodu X sami a rozhodněte spor Jirky s Milanem.

Protože úloha je vzata ze skutečnosti, kde místo X opravdu existovalo, má jistě řešení. Dosáhli jsme cíle, pokud jde o zodpovězení otázky v úloze. Zamysleme se však nad *matematickou úlohou*, ke které jsme došli. Co myslíte, má úloha vždy řešení, ať zvolíme úsečky AB, $AX - BX$ a úhel α jakkoliv?

Provedeme *diskusi*, řeknete si jistě. Sestrojení trojúhelníku ABB' je jednoznačné*) a vždy možné. Osu o úsečky BB' lze jistě také sestrojit jednoznačně. Nejistá je pouze existence bodu X. Přímka o protne přímku AB' vždy, pokud není $BB' \perp AB'$, tj. $AB' = AB . \cos \alpha$. Je-li $AB' \neq AB . \cos \alpha$, existuje vždy právě jeden průsečík X přímek o a AB'.

Na obr. 1 c je zobrazen trojúhelník ABX sestrojený podle postupu, který jsme odvodili. Je zřejmě $\sphericalangle BAX = \alpha$, AB má danou velikost, ale úsečka AB' není rozdílem úseček AX, BX, ale jejich součtem. Sestrojili jsme sice *trojúhelník* ABX, ale ten *nemá požadované vlastnosti*.

Na co jsme zapomněli při řešení? Vynechali jsme zřejmě *zkoušku výsledku konstrukce*. Vidíte, jak ošidná může být fráze „to plyne z rozboru“! Buďte si vědomi toho, že zkouška výsledku konstrukce je ve skutečnosti nejdůležitější částí řešení. Ověřuje, zda konstrukce, kterou jsme odhadli podle rozboru, vede k cíli, tj. k sestrojení útvaru, který má požadované vlastnosti. Je obdobou zkoušky, kterou provádíte při řešení algebraických úloh.

---

*) Trojúhelníků ABB' lze sestrojit nekonečně mnoho, jsou však všechny navzájem shodné.

Vraťme se k obr. 1b, c. K tomu, aby úsečka AB' byla shodná s rozdílem $AX - BX$, je zřejmě nezbytné, aby bod X ležel za bodem B' na polopřímce AB'. Zdůvodněte, že tento případ nastane právě tehdy, když je úhel $AB'B$ tupý, tj. $AX - BX < AB \cdot \cos \alpha$.

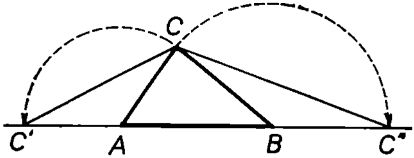
Příklad 2. *Letadlo přeletělo z letiště A na letiště B ležící 200 km severněji. Pilot změnil směr letu pouze jednou, z letiště A letěl po polopřímce svírající s polopřímkou AB úhel o velikosti α. Podle spotřeby pohonných hmot bylo zjištěno, že uletěl 300 km. Zjistěte vzdálenost letišť A, B od místa X, nad kterým letadlo změnilo směr letu.*

Úloha vede zřejmě ke konstrukci trojúhelníku ABX, je-li známa jeho strana AB, $\sphericalangle XAB = \alpha$ a součet úseček AX, BX. Zakreslete si pro zajímavost na svém náčrtku několik bodů X, nabývá-li α různých hodnot.

Ukažme si nyní, že je užitečné pokusit se při řešení geometrické úlohy o nalezení praktického problému, který vede k uvažované úloze.

Příklad 3. *Jsou dány úsečky p, v_c a úhel α. Sestrojte alespoň jeden trojúhelník ABC, pro který platí: $AB + BC + CA = p$, $\sphericalangle BAC = \alpha$, vzdálenost bodu C od přímky AB je rovna v_c.*

Řešení úlohy možná znáte. Provádí se obvykle tak, že se úsečky AC, BC otočí do poloh AC', BC'' na přímce AB (obr. 2). V trojúhelníku $CC'C''$ je $C'C'' = p$, $\sphericalangle CC'C'' = \frac{\alpha}{2}$, jeho výška je rovna v_c. Tento trojúhelník dovedete sestrojit; body A, B pak zjistíte pomocí os úseček CC', CC''.



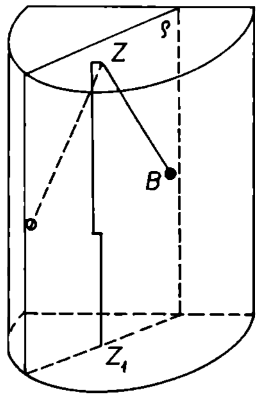
Obr. 2

Jestliže se však nepustíte ihned do mechanického řešení úlohy, ale představíte si, kdy by bylo třeba takovou úlohu řešit, přijdete na jednodušší řešení.

Takovým problémem by bylo postavení trojúhelníkové ohrádky, máte-li k dispozici prkno, které je třeba rozřezat na takové tři díly, aby každý z nich byl stranou trojúhelníku s prvky α, v_c. V praxi bychom si jistě nejprve vytyčili úhel α a na jeho rameni bod C, který má od druhého ramene vzdálenost v_c. Vidíte, že tím máte vyznačenu stranu AC; odřízněte ji z prkna. Nyní zbývá problém jednodušší: *sestrojte trojúhelník ABC, znáte-li jeho stranu $b = AC$, úhel α a úsečku shodnou se součtem dvou zbývajících stran.* Tuto úlohu již umíte řešit z příkladu 2. Proveďte si úplné řešení úlohy; víte, že skrývá úskalí ve zkoušce výsledku konstrukce. Z úlohy si můžete odnést poučení, že bývá mnohdy užitečné umístit při řešení nepolohových úloh úhel. Vyhnete se tak jeho sestrojování v průběhu konstrukce, často i zjednodušíte řešení.

V příkladech 1 až 3 jsme používali zobrazení jen minimálně. Ukažme si nyní dvě úlohy, ve kterých má zobrazení podstatný význam.

Příklad 4. *V uzavřené skleněné skříni, která má tvar půlválce* (obr. 3), *je na stojanu zavěšeno matematické* *kyvadlo. Bod závěsu kyvadla je nad bodem Z_1 podlahy skříně. Stanovte rovinu, v níž se kyvadlo pohybuje v případě, že se hmotný bod v krajních polohách kyvu dotýká stěn skříně.**)

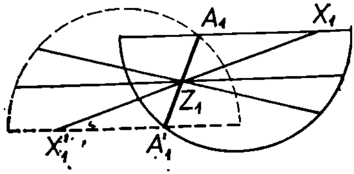


Obr. 3

Řešení. Sestrojme si půdorys skříně a v něm vyznačme kolmý průmět Z_1 bodu závěsu kyvadla do roviny podlahy (obr. 4). Polohy hmotného bodu B při maximálních výchylkách označme A, A', jejich průměty A_1, A_1'. Je zřejmě $Z_1A_1 = Z_1A_1'$. Řešení naší úlohy vyžaduje řešení této geometrické úlohy:

Je dán půlkruh a jeho vnitřní bod Z_1. Sestrojte úsečku A_1A_1' tak, aby bod Z_1 byl jejím středem a body A_1, A_1' ležely na hranici půlkruhu.

*) Hmotný bod se neodráží od stěn, ale vrací se od nich samovolně po dotyku bez rázu.



Obr. 4

Jak by postupoval praktik, který by se nechtěl „zdržovat" geometrickým řešením? Nepochybně by zkoušel, odhadl by přibližnou polohu hledané roviny kyvu, rozkýval kyvadlo a sledoval, zda se hmotný bod dotkne stěn.

Při geometrickém řešení můžeme také začít experimentem. Zvolme bod X_1 hranice půlkruhu, považujme jej za půdorys krajní polohy hmotného bodu B a přiřaďme mu bod X_1' souměrně sdružený s bodem X podle středu Z_1. Na obr. 4 jsou přiřazeny tímto způsobem souměrně sdružené body většímu počtu neoznačených bodů hranice kruhu. Co vytvářejí tyto souměrně sdružené body? Víte, že to je opět hranice půlkruhu shodného s původním, protože popsaným přiřazením sestrojujeme vlastně obraz daného půlkruhu v souměrnosti podle středu Z_1.

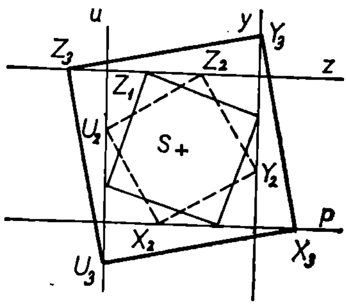
Obraz půlkruhu můžete snadno sestrojit, zobrazíte-li nejprve střed kruhu a koncový bod jeho průměru. Hledané body náležejí hranici půlkruhu a jejímu obrazu v souměrnosti podle středu Z_1. Dokončete sami řešení, nezapomeňte na zkoušku výsledku konstrukce. O jakou vlastnost středové souměrnosti se tento důkaz opírá? Kolik může mít úloha řešení?

Při řešení geometrické úlohy bylo třeba sestrojit dva neznámé body A_1, A_1'. Využili jsme předpisu, který přiřazuje neznámému bodu A_1 neznámý bod A_1'. Na řadě úloh poznáte, že tohoto obratu užíváme velmi často.

Dalším typem úloh, při jejichž řešení je vhodné užít zobrazení, jsou úlohy na vyšetření geometrických míst bodů. Takový postup je přirozený zvláště v těch případech, kdy předpis, podle kterého můžeme sestrojit každý bod hledané množiny, je jednoduchý a představuje známé zobrazení.

Příklad 5. *Je dána množina všech čtverců $XYZU$, jež mají společný střed S a jejichž vrchol X probíhá danou přímku. Vyšetřete, které útvary jsou množinami všech bodů Y, Z, U.*

Na obr. 5 jsou nakresleny tři čtverce dané množiny, smysl obíhání vrcholů X, Y, Z, U je vždy kladný. Nedívejte se jen na hotový obrázek, ale sestrojte si také několik čtverců. Uvědomíte si jistě, že když zvolíte bod X



Obr. 5

na p, sestrojíte vždy bod Z jako bod středově souměrný s X podle S. Každému vrcholu X čtverce lze proto přiřadit bod Z jako obraz bodu X ve středové souměrnosti. Z toho plyne, že každý bod Z leží na přímce z souměrně sdružené s přímkou p podle středu S. Každý bod přímky z je také vrcholem čtverce, jehož protější vrchol leží na p. Platí proto, že *množinou všech bodů Z je přímka $z \parallel p$.*

Jak přiřadíme bodu X vrchol Y příslušného čtverce? Zřejmě otočíme bod X kolem S o 90° v kladném smyslu. Z vlastností otáčení plyne, že *množinou všech bodů Y je přímka y kolmá k p.* Obdobně stanovíme množinu všech bodů U jako obraz přímky p v otočení o 90° v záporném smyslu.

Při řešení příkladů 4 a 5 jsme se přesvědčili, že je vhodné vyhledávat takové vztahy mezi význačnými body útvarů, které lze chápat jako důsledek jistého zobrazení. Takový přístup k řešení úloh odpovídá modernímu pojetí geometrie jako vědy zkoumající, které vlastnosti útvarů se nemění při určitých druzích transformací (zobrazení).

1. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dána velikost jeho úhlu β, výšky v_A a součtu $BC + CS + SA$ úseček trojúhelníka (bod S je středem strany AB).

2. Zvolte si v příkladu 4 skříň ve tvaru kvádru a řešte stejnou úlohu.

3. Je dána množina pravidelných šestiúhelníků $ABCDEF$ se společným vrcholem A. Víme, že množinou bodů C je kružnice neprocházející bodem A. Vyšetřte, které útvary jsou množinami vrcholů B, D, E, F šestiúhelníků.

[Popište předpisy, podle kterých sestrojíte jednotlivé vrcholy šestiúhelníka, znáte-li jeho vrchol A a zvolíte-li jeho vrchol C na dané kružnici. Užijte také otočení a stejnolehlosti.]

KAPITOLA II

SHODNÁ ZOBRAZENÍ V ROVINĚ

V úlohách minulé kapitoly jsme použili středové souměrnosti a otočení. Znáte jistě i další shodná zobrazení — identitu*), osovou souměrnost a posunutí. Dříve než budeme řešit pomocí každého druhu shodnosti určité typy úloh, probereme si některé jejich společné vlastnosti.

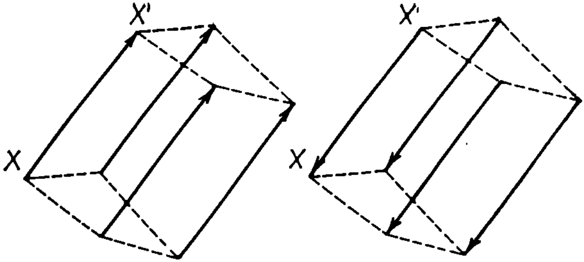
Shodné zobrazení v rovině budeme označovat velkým polotučným písmenem **Z** (v rukopise pište velké psací „zet"). Skutečnost, že zobrazení přiřazuje bodu X bod X', zapíšeme symbolicky $\mathbf{Z}(X \to X')$. Směr šipky je podstatný, protože přiřazení $X' \to X$ může představovat jiné zobrazení. Tak např. posunutí znázorněné na obr. 6 vlevo přiřazuje bodu X bod X'. Posunutí přiřazující bodu X' bod X**) je zřejmě inverzní (zpětné) posunutí.

Jestliže shodné zobrazení $\mathbf{Z}(X \to X')$, *nazýváme shodné zobrazení přiřazující* $X' \to X$ *inverzním vzhledem k zobrazení* **Z** *a označujeme je* $\mathbf{Z}^{-1}(X' \to X)$.

---

*) Identitou (totožností) rozumíme takové zobrazení v rovině, které přiřazuje každému bodu roviny týž bod. Je možné, že jste užívali termínu identita v jiném významu, v této brožuře však bude mít jen výše uvedený význam.

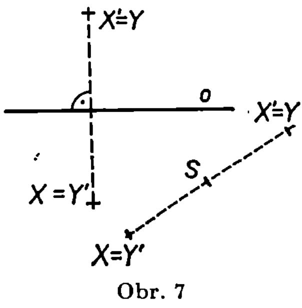
**) Obrázek vpravo má představovat tytéž body X, X' jako obrázek vlevo. Vyznačení obou šipek v témž obrázku by bylo nepřehledné.



Obr. 6

Je pozoruhodné, že zobrazení inverzní k identitě, středové a osové souměrnosti je totožné s původním zobrazením. Všimněte si na obr. 7 středu S a dvojice bodů X, X'. Bod $Y = X'$ má ve středové souměrnosti se středem S obraz Y', který splývá s bodem X. Protože tomu tak je pro všechny body roviny, je středová souměrnost se středem S totožná se zobrazením k ní inverzním. Zcela stejnou úvahu můžeme provést pro osovou souměrnost O s osou o (obr. 7).

Slyšeli jste jistě o *útvarech samodružných* v některém zobrazení. Jsou to ty útvary, které splývají se svým



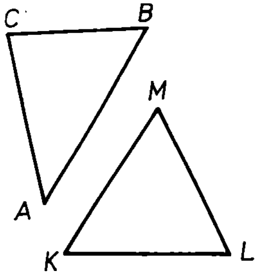
Obr. 7

obrazem v příslušném zobrazení. V otočení kolem bodu S jsou samodružné všechny kružnice se středem S, v posunutí $P(X \rightarrow X')$ jsou samodružné všechny přímky směru XX'. Každý útvar, o kterém říkáme, že je souměrný podle středu, je samodružný v souměrnosti podle tohoto středu. Přesvědčte se o tom u čtverce, kruhu, elipsy, hyperboly. Osově souměrné jsou rovnoramenné trojúhelníky, deltoidy, kružnice, elipsa, hyperbola, parabola atd. Ověřte si přitom, že útvar může být samodružný, i když žádný jeho bod není samodružný.

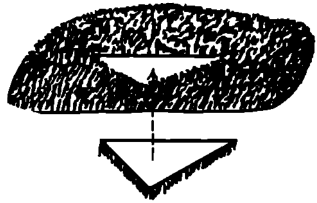
Shodnosti jste dělili na přímé a nepřímé podle toho, zda bylo třeba obracet průsvitku při přemisťování bodů roviny pomocí průsvitky. Z jmenovaných typů shodností je nepřímá pouze osová souměrnost. Na obr. 8 je zobrazen trojúhelník ABC; přesvědčte se, že se tento trojúhelník nemůže ztotožnit sám se sebou, otočíme-li průsvitku na rub. Rovnoramenný trojúhelník KLM však lze přenést tak, že se ztotožní sám se sebou, převrátíme-li průsvitku na rub. Bod K přejde v M, bod M v K, bod L je samodružný.

Na základě poznatků získaných v minulém odstavci můžete poradit kožešníkovi, který se dostal do nepříjemné situace.

Kožešník chtěl opravit poškozený kabát. Vystřihl poškozenou část kožešiny, otvor zarovnal na trojúhelník podobný trojúhelníku ACB na obr. 8. Dále chtěl vystřihnout z náhradního kousku kožešiny shodný trojúhelník, aby jej mohl vsadit do otvoru. Podložil kožešinu pod kabát, ale do srsti si nemohl vyznačit obvod trojúhelníku (obr. 9). Otočil proto kožešinu na rub a na vydělanou kůži si vyznačil hranici řezu. Pak vystřihl vyznačený trojúhelník a chystal se šít. Ať však dělal co dělal, nemohl vystřižený *trojúhelník zasadit tak, aby jeho srst zakryla otvor. Jak byste vysvětlili tuto podivnou věc a jak byste poradili kožešníkovi, který už nemá podobnou kožešinu?*

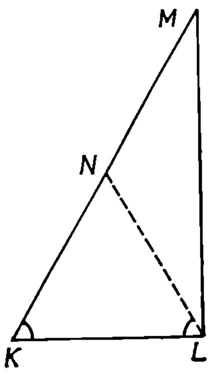


Obr. 8



Obr. 9

Otvor v kabátě a vystřižený trojúhelník jsou zřejmě nepřímo shodné, proto je nelze ztotožnit bez obracení. Vystřižený trojúhelník je třeba rozstřihnout na rovnoramenné trojúhelníky, protože ty lze ztotožnit po obrácení na rub. Řešení ukazuje obr. 10 pro pravoúhlý



Obr. 10

trojúhelník KLM. Dokažte, že trojúhelníky KLN, LMN jsou opravdu rovnoramenné. Každý trojúhelník lze složit z rovnoramenných trojúhelníků (použijte rozdělení trojúhelníka na pravoúhlé trojúhelníky).

Zůstaňme ještě krátce u zaměstnání, která pracují s jehlou. Jaký je vztah mezi kusy kůže vystřiženými do tvaru podrážky pro levou a pravou botu? Všimněte si, jak krejčí nebo švadlena vystřihuje z látky díly obleků, např. levou a pravou část zad kabátu. Jak svým postupem předcházejí tomu, abychom na jedné straně zad kabátu nenosili látku na ruby?

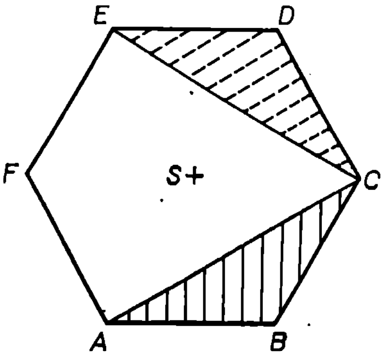
Často se ptáme, v kolika různých shodných zobrazeních je daný útvar samodružný. Každý útvar je samodružný v identitě. Nás ovšem zajímají především další shodná zobrazení. Rovnoramenný trojúhelník KLM se stranou $KL = LM$ na obr. 8 je samodružný v osové souměrnosti, která vyměňuje body K, M. Zapišme si přiřazení vrcholů trojúhelníku KLM ve zobrazeních, která jej reprodukují (ve kterých je samodružný): identita J ($K \to K$, $L \to L$, $M \to M$), osová souměrnost O($K \to M$, $L \to L$, $M \to K$).

Mějme dán pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$ (obr. 11). Počet shodných zobrazení, která jej reprodukují, je možno určovat zkusmo. Výhodnější však je užít vlastností shodných zobrazení, zejména věty o určenosti.

Jsou-li dány dva shodné trojúhelníky $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$, *existuje právě jedno shodné zobrazení v rovině, které přiřazuje* $A \to A'$, $B \to B'$, $C \to C'$.

Je samozřejmé, že při shodném zobrazení pravidelného šestiúhelníku přejdou sousední vrcholy opět v sousední vrcholy. Počet shodností reprodukujících pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$ stanovíme tak, že určíme počet trojic za sebou následujících vrcholů (trojice

DEF je různá od *FED*!), které určují trojúhelníky shodné s trojúhelníkem *ABC*. Jsou to po řadě trojice *ABC*, *BCD*, *CDE*, *DEF*, *EFA*, *FAB* a *CBA*, *DCB*,



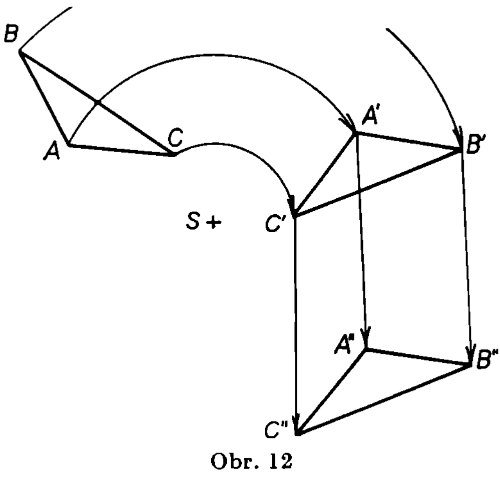
Obr. 11

EDC, *FED*, *AFE*, *BAF*, celkem dvanáct. Zapište si přiřazení příslušných vrcholů shodných trojúhelníků a určete druh shodnosti, která zobrazuje po řadě vrcholy *A*, *B*, *C* základního trojúhelníku *ABC* do bodů zvolené trojice. Vezmete-li například trojice *ABC* a *CDE*, $Z(A \rightarrow C,\ B \rightarrow D,\ C \rightarrow E)$, dostanete otočení (rotaci) o 120° v kladném smyslu. V případě, že vezmete trojici z druhé šestice, jde vždy o osovou souměrnost, stanovte její osu.

Určete počet shodností reprodukujících pravidelný n-úhelník. Kolik z nich je osových souměrností, kolik středových a kolik rotací? Proč mezi nimi není nikdy posunutí?

Sestrojíme-li útvar U′ jako obraz útvaru U v některém shodném zobrazení $Z_1(\text{U} \rightarrow \text{U}')$, není samozřejmě zakázáno sestrojit ještě obraz U″ útvaru U′ v dalším shodném zobrazení Z_2. Chápeme-li shodné zobrazení útvarů jako jejich přemístění, je zřejmé, že i konečný výsledek, kterého jsme dosáhli, tj. přemístění útvaru U na útvar U″, je shodným zobrazením útvaru U na útvar U″.

Na obr. 12 je zobrazen trojúhelník ABC nejprve na trojúhelník $A'B'C'$ v otočení se středem S o úhel 120° v záporném smyslu. Tento trojúhelník je pak zobrazen posunutím v trojúhelník $A''B''C''$. Je zřejmé, že existuje shodné zobrazení v rovině, které převede trojúhelník ABC přímo v trojúhelník $A''B''C''$. Na obr. 12 je tímto zobrazením otočení se středem S' o úhel 120° v záporném smyslu. Bod S' sestrojte jako průsečík os úseček AA'', BB'', CC''. O výsledném otočení říkáme, že vzniklo složením prvního otočení a uvedeného posunutí.



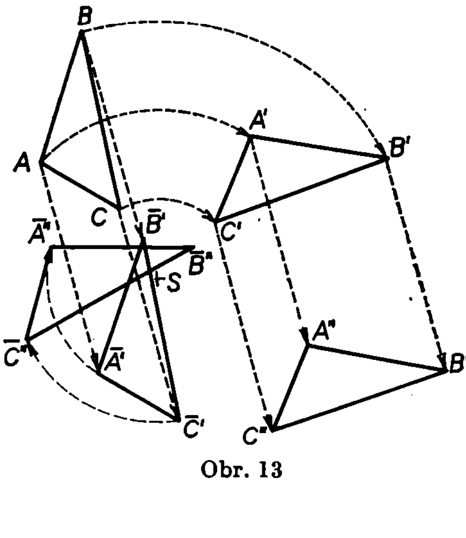
Obr. 12

Jsou-li dána dvě shodná zobrazení Z_1, Z_2 v rovině a přiřazuje-li $Z_1(X \to X')$, $Z_2(X' \to X'')$, nazýváme shodné zobrazení $Z_3(X \to X'')$ složením zobrazení Z_1, Z_2 v tomto pořadí a zapisujeme $Z_3 = Z_1 Z_2$.

Zápis $Z_3 = Z_1 Z_2$ má tvar součinu; skutečně se také někdy hovoří o součinu zobrazení. Raději si však nezvykejte na tento termín. Česká terminologie užívá termínů skládání, složení apod.

Proveďte si řadu příkladů na skládání otočení s posunutím podle obr. 12, skládejte dále dvě posunutí. Složte dvě otočení s různými středy, jejichž úhly otočení jsou navzájem opačné, dostanete posunutí.

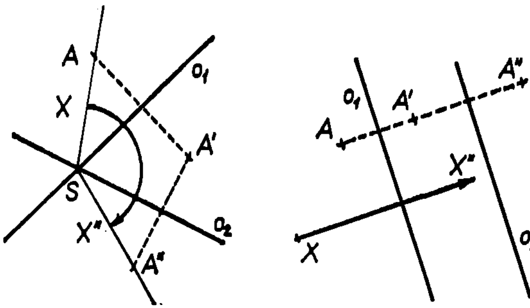
Zkuste složit zobrazení v uvedených příkladech v opačném pořadí (obr. 13). Přesvědčíte se, že obraz trojúhelníka ABC v zobrazení $Z_1 Z_2$ je jiný než obraz téhož trojúhelníka v zobrazení $Z_2 Z_1$. Při skládání dvou posunutí jsou však zobrazení $Z_1 Z_2$, $Z_2 Z_1$ totožná.



Obr. 13

Skládání zobrazení není vždy komutativní, může být $Z_1 Z_2 \neq Z_2 Z_1$.

Zatím jsme neskládali osové souměrnosti a středové souměrnosti. Přesvědčte se, že složením dvou osových souměrností O_1, O_2, jejichž osy o_1, o_2 se protínají v bodě S, je otočení kolem středu S (obr. 14). V případě že osy o_1, o_2 osových souměrností O_1, O_2 jsou rovnoběžné a různé, dostanete posunutí. Jaký je směr tohoto posunutí?

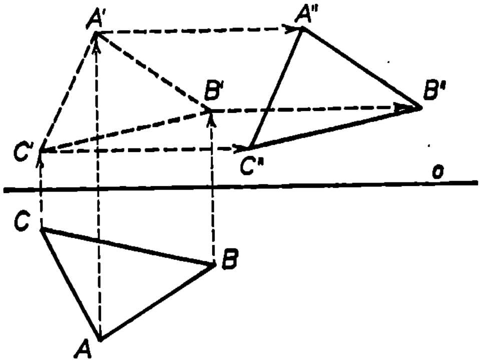


Obr. 14

Složíte-li dvě středové souměrnosti s různými středy, dostanete posunutí.

Jak vidíte, je skládání zobrazení zajímavé. Nemůžeme se bohužel zabývat hlouběji skládáním zobrazení ani obráceně rozkládáním jedné shodnosti na dvě nebo nebo tři složky. Lze dokázat, že *každé shodné zobrazení v rovině je možno vyjádřit jako zobrazení složené z osových souměrností, jejichž počet není větší než tři.*

Zkoušejte si zobrazovat trojúhelníky nebo jiné útvary v zobrazení složeném ze dvou nebo tří osových souměrností, středové a osové souměrnosti atd, Při systematickém výkladu této partie se dá ukázat, že *existuje* *celkem pět různých druhů shodných zobrazení v rovině*, a to *identita*, *otočení a posunutí* jako shodnosti přímé a *osová souměrnost a posunuté zrcadlení* jako shodnosti nepřímé. Posunutým zrcadlením rozumíme zobrazení složené z osové souměrnosti a posunutí ve směru osy (obr. 15). Má posunuté zrcadlení samodružný bod? Je některá přímka samodružná v posunutém zrcadlení?



Obr. 15

4. Která shodná zobrazení reprodukují kosočtverec?

5. Ve kterých shodných zobrazeních jsou samodružné útvary mající tvar stojatých tiskacích písmen D, E, H, N, Z?

6. Jestliže každé ze dvou zobrazení reprodukuje daný útvar, reprodukují jej i zobrazení, která vzniknou složením daných zobrazení v libovolném pořadí. Přesvědčte se o správnosti věty na zvolených příkladech (čtverci, šestiúhelníku atd.).

7. Nakreslete si profil přímého schodiště a představte si útvar, který z tohoto profilu vznikne, přidáváme-li bez omezení další schody na oba konce schodiště. Určete shodná zobrazení, v nichž je tento útvar samodružný. Kolik má středů souměrnosti?

8. Zobrazte si podobně jako ve cvičení 7 „nekonečný" žebřík a vyhledejte shodná zobrazení, která jej reprodukují. Jsou mezi nimi posunutá zrcadlení?

9. Zamyslete se nad problémem, které trojúhelníky lze rozstřihnout na tři rovnoramenné trojúhelníky.

[Využijte nejprve středu kružnice opsané trojúhelníku, pak dělení trojúhelníku výškou na dva pravoúhlé trojúhelníky. Kdy je pravoúhlý trojúhelník rovnoramenný?]

10. Přesvědčte se, že složením dvou osových souměrností, jejichž osy jsou navzájem kolmé, vznikne středová souměrnost. Zdůvodněte na základě toho středovou souměrnost elipsy.

KAPITOLA III

STŘEDOVÁ SOUMĚRNOST

V této kapitole si ukážeme některé typy úloh, které lze řešit výhodně pomocí středové souměrnosti. Jistě víte, jak přiřazujeme obraz danému bodu nebo útvaru (přímce, kružnici). Připomeňme si ještě dvě věty o středové souměrnosti v rovině. Jsou to věty, které říkají, že za jistých předpokladů existuje právě jedna středová souměrnost mající dané vlastnosti.

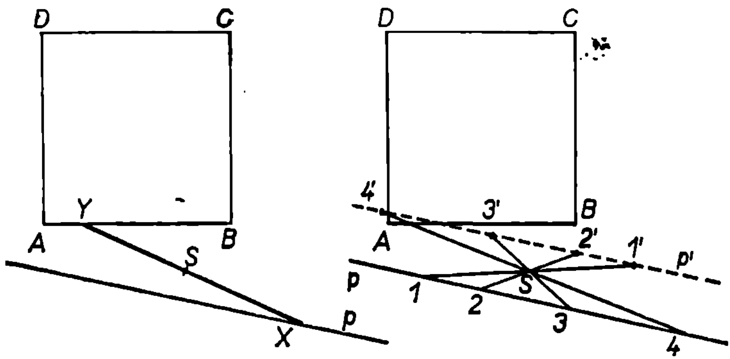
Je-li dán v rovině bod S, existuje právě jedna středová souměrnost se středem S.

Je-li dána v rovině dvojice různých bodů A, B, existuje právě jedna středová souměrnost, která zobrazuje A v B, B v A. Jejím středem je střed úsečky AB.

Zabývejme se nejprve problémem „vzpříčení“ úsečky mezi dvěma útvary tak, aby byla půlena daným bodem S.

Příklad 6. *Je dán čtverec $ABCD$, přímka p a bod S. Sestrojte úsečku XY tak, aby jejím středem byl bod S a aby bod X ležel na p, bod Y na hranici čtverce.*

Rozbor. Úloha má dva neznámé body X, Y, které jsou však závislé. Kdybychom znali bod X, přiřadili bychom mu snadno bod Y jako obraz v souměrnosti podle středu S. Bodem X je však některý bod přímky p, „vyzkoušíme“ tedy několik bodů přímky p, podobně jako jsme experimentovali při řešení úlohy v příkladě 4. Na obr. 16b jsou pokusy číslovány, nepodařilo se však zkusmo najít hledanou úsečku XY. Je zřejmé, že hledaný bod Y je bodem přímky p', která je obrazem přímky p v souměrnosti podle středu S. Zapišme si výsledek rozboru:



Obr. 16 a, b

Je-li úsečka XY řešením úlohy, pak
bod X je obrazem bodu Y v souměrnosti podle středu S,
bod Y leží 1. *na hranici čtverce $ABCD$,*
2. *na obrazu p' přímky p v souměrnosti podle středu S.*

Konstrukce.

K_1: *Sestrojíme obraz p' přímky p v souměrnosti podle středu S.*

K_2: *Sestrojíme společný bod Y přímky p' a obvodu čtverce.*

K_3: *Sestrojíme obraz X bodu Y v souměrnosti podle středu S.*

K_4: *Sestrojíme úsečku XY.*

Zkouška výsledku konstrukce. Z konstrukce K_2 plyne, že bod Y leží na hranici čtverce. Z konstrukce K_3 plyne, že bod S je středem úsečky XY. Protože podle K_1 zobrazuje souměrnost $S(p \to p')$, zobrazuje také $p' \to p$, proto bod X (obraz bodu Y přímky p') leží na přímce p. Dokázali jsme, že sestrojená úsečka má žádané vlastnosti.

Diskuse. Konstrukce K_1 má právě jedno řešení. Počet řešení konstrukce K_2 závisí na vzájemné poloze přímky p' a hranice čtverce; tyto útvary mohou mít společnou úsečku, dva různé body, jediný bod nebo žádný bod. Konstrukce K_3 má jediné řešení. Konstrukce K_4 má řešení, pokud je $X \neq Y$.

Není-li bod S společným bodem hranice čtverce a přímky p, má úloha právě tolik řešení, kolik jich má konstrukce K_2. Je-li bod S společným bodem hranice čtverce a přímky p, má úloha vždy o jedno řešení méně než konstrukce K_2.

Všimněte si řešení příkladu 6 pozorně, zvláště zápisu. Nejste asi zvyklí psát *shrnutí rozboru.* Je však užitečné zapsat si, co jsme zjistili o neznámých bodech. Musí to být takové jejich vlastnosti, na základě kterých je možno tyto body sestrojit. Zpravidla udáváme, na kterých daných nebo z daných údajů sestrojitelných základních křivkách*) leží každý neznámý bod. *Užíváme-li metody zobrazení, můžeme neznámý bod sestrojit jako obraz jiného bodu v některém zobrazení.*

Je vám jistě zřejmé, že jsme při řešení příkladu 6

*) Při konstrukcích kružítkem a pravítkem jsou základními křivkami kružnice a přímky. Neznámé body sestrojujeme jako společné body základních křivek.

mohli přiřazovat obrazy bodům hranice čtverce. Dostali bychom obraz čtverce v souměrnosti podle středu S. Proveďte si řešení tímto způsobem a zapište si je podrobně podle vzoru řešení příkladu 6.

Zvolíme-li místo přímky a čtverce jiné útvary, zůstane princip řešení zřejmě stejný. Podívejte se na obr. 16a, kde je silně vyznačena úsečka XY. Dovedli byste sestrojit čtverec, jehož úhlopříčkou je úsečka XY? Jistěže ano; pak také vyřešíte i následující úlohu.

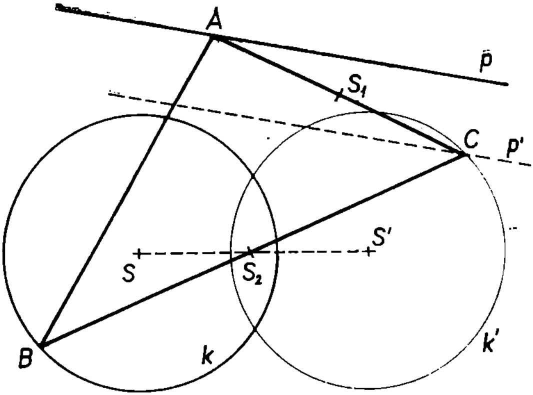
Příklad 7. *Jsou dány přímky a, b a bod S. Sestrojte čtverec $XYZU$ o středu S, jehož vrchol X leží na a, vrchol Z na b.*

Řešení. Sestrojíte-li úsečku XZ o středu S, proveďte navíc konstrukci čtverce o úhlopříčce XZ. Zapište si podrobné řešení.

Uveďme si nyní úlohu, ve které se použije dvou středových souměrností.

Příklad 8. *Je dána přímka p, kružnice $k(S, r)$ a body S_1, S_2 navzájem různé. Sestrojte trojúhelník ABC tak, aby jeho vrchol A ležel na p, vrchol B na k a body S_1, S_2 byly po řadě středy stran AC, BC.*

Rozbor (obr. 17). Všechny vrcholy trojúhelníku jsou neznámé, bod C je však obrazem bodu A v souměrnosti S_1 o středu S_1 a bodu B v souměrnosti S_2 o středu S_2. Bod A leží na přímce p, jeho obraz $A' = C$ leží na obrazu p' přímky p v souměrnosti S_1. Bod B leží na k, jeho obraz $B' = C$ leží na obrazu k' kružnice k v souměrnosti S_2. Shrňme výsledek rozboru:



Obr. 17

Má-li úloha řešení,

leží bod C 1. *na obraze p′ přímky p v* S_1,
2. *na obraze k′ kružnice k v* S_2.

Konstrukce. Jednotlivé kroky konstrukce popíšete snadno sami. Pamatujte však na to, že poslední krok konstrukce musí sestrojit hledaný útvar.

Zkoušku a diskusi proveďte podle vzoru příkladu 6. Úloha může mít nejvýše dvě různá řešení.*)

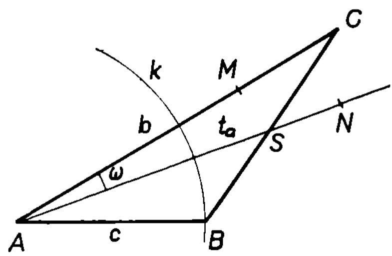
Úlohy 6, 7, 8 jsou *polohové konstrukční úlohy*, protože požadují sestrojení útvaru, jehož význačné prvky mají mít předepsanou polohu. Pomocí středové souměrnosti lze však řešit i *nepolohové konstrukční úlohy*, tj. úlohy nepožadující od žádného prvku hledaného útvaru,

*) Úlohu můžete řešit také pomocí jediného zobrazení. Určete je jako složení středových souměrností se středy S_1, S_2. Který bod je obrazem bodu A ve výsledném zobrazení?

kde má ležet. Sestrojování neznámých bodů však provádíme na základě polohových vlastností (hledáme společné body dvou základních křivek). Chceme-li řešit nepolohovou úlohu, musíme z ní nejprve učinit úlohu polohovou, a to tak, že *umístíme* některý z daných prvků útvaru (úhel, úsečku apod.). Umístění tohoto prvku předchází vlastnímu řešení úlohy, napíšeme je proto jako konstrukci K_0.

Příklad 9. *Sestrojte trojúhelník ABC, znáte-li jeho stranu c, těžnici t_a a dutý úhel ω sevřený těžnicí t_a a stranou b.*

Rozbor. Předpokládáme, že úloha má řešení a narýsujeme obr. 18. Považujme za umístěný útvar úhel $\sphericalangle MAN = \omega$ s vyznačenou úsečkou AS na rameni AN. Neznámé body B, C jsou souměrné podle středu S. Bod C leží na polopřímce AM, bod B na kružnici $k(A, c)$. Hledáme-li polohové vlastnosti bodů B, C, provádíme vlastně rozbor této polohové úlohy:



Obr. 18

Je dána polopřímka AM, kružnice $k(A, c)$ a bod S. Sestrojte úsečku BC tak, aby bod B ležel na k, bod C na polopřímce AM a aby bod S byl středem úsečky BC.

Tuto úlohu vyřešíme snadno podle vzoru úlohy 6. Výsledek rozboru lze formulovat takto:

Má-li úloha řešení,

leží bod C 1. *uvnitř polopřímky* AM,

2. *na kružnici* $k'(A', c)$, *která je obrazem kružnice* $k(A, c)$ *v souměrnosti podle středu* S.

Konstrukce.

K_0: *Umístíme úhel* $\sphericalangle MAS = \omega$, $AS = t_a$.

K_1: *Sestrojíme* $k(A, c)$.

K_2: *Sestrojíme* $k'(A', c)$ *jako obraz kružnice* k *v souměrnosti podle* S.

K_3: *Sestrojíme bod* C *jako společný bod vnitřku polopřímky* AM *a kružnice* k'.

K_4: *Sestrojíme bod* B *jako obraz bodu* C *v souměrnosti dle středu* S.

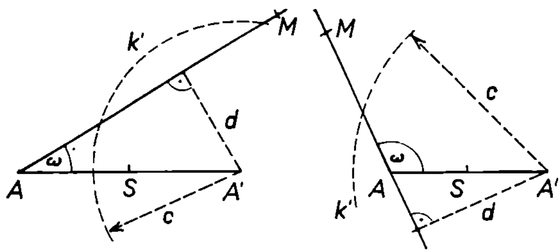
K_5: *Sestrojíme trojúhelník* ABC.

Zkouška. Již konstrukcí K_0 jsme dosáhli toho, že je $AS = t_a$, z K_4 plyne, že bod S je středem úsečky BC, proto úsečka $AS = t_a$ je těžnicí trojúhelníku ABC. Z K_0 a K_3 plyne dále, že $\sphericalangle CAS = \omega$ je úhlem sevřeným těžnicí a stranou AC. Z konstrukce K_4 plyne, že bod B leží na $k(A, c)$, je proto $AB = c$.

Diskuse. Konstrukci K_0 nediskutujeme, konstrukce K_1, K_2 mají jediné řešení. Konstrukcí K_3 můžeme dostat dva, jeden nebo žádný bod C. Konstrukce K_4 má jediné řešení, konstrukce K_5 také, pokud neleží body A, B, C na jedné přímce. Kdyby však body A, B, C ležely na přímce AM, ležel by i bod S na AM a úhel ω by byl nulový nebo přímý. Protože tomu tak není, má K_5 právě jedno řešení.

Počet řešení celé úlohy záleží tedy na vzájemné poloze polopřímky AM a kružnice k' (A', c).*)

U nepolohových úloh provádíme obvykle diskusi i podle daných údajů, v našem případě úhlu ω a úseček t_a, c. Tato diskuse vyžaduje znalost trigonometrie, speciálně trigonometrického řešení pravoúhlého trojúhelníku. Na obr. 19a je zobrazen případ, kdy je úhel ω ostrý. Kružnice $k'(A', c)$ má s vnitřkem polopřímky AM společné dva různé body právě tehdy, když je $d < c$ a současně $A'A = 2\,t_a > c$. Protože $d = AA' \sin\omega = 2\,t_a \sin\omega$, dostáváme podmínku $2\,t_a \sin\omega < c < 2\,t_a$.



Obr. 19 a, b

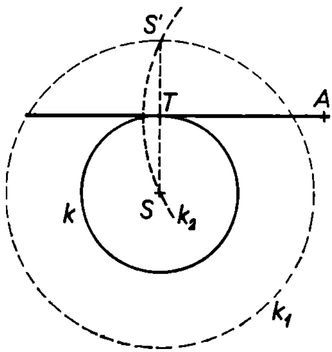
Je-li $c \geqq 2\,t_a$, má kružnice k' s vnitřkem polopřímky AM jediný společný bod. Na obr. 19b je úhel ω tupý, kružnice k' může mít s vnitřkem polopřímky AM nejvýše jeden společný bod, to nastane právě tehdy, když je $c > 2\,t_a$.

*) Také tuto úlohu můžete řešit tak, že ve středové souměrnosti se středem S zobrazíte polopřímku AM a vyhledáte společné body jejího obrazu a kružnice k.

V příkladech 6 a 9 byl vždy středem středové souměrnosti daný bod. V řadě úloh lze však využít i toho, že za střed souměrnosti zvolíme hledaný bod.

Příklad 10. *Je dána kružnice $k(S, r)$ a její vnější bod A. Sestrojte bod dotyku kružnice k s její tečnou procházející bodem A, nepoužívejte však Thaletovy kružnice.**)

Rozbor (obr. 20). Protože hledaným bodem T je některý bod kružnice k, musíme provést rozbor tak,



Obr. 20

jako by každý bod kružnice byl středem souměrnosti. Snadno dokážete, že obrazy bodu S v množině všech souměrností, které mají střed na kružnici k, leží na kružnici $k_1(S, 2r)$. Obraz S' bodu S v souměrnosti podle hledaného bodu T leží pak ještě na kružnici $k_2(A, AS)$, protože je $AS' = AS$. Rozbor můžeme shrnout takto:

*) Takovou konstrukci potřebujeme např. v Lobačevského geometrii, kde neplatí věta Thaletova.

Bod T je středem souměrnosti zobrazující bod S v bod S'.
Bod S' leží 1. *na* $k_1(S, 2r)$,
2. *na* $k_2(A, AS)$.

Konstrukce.

K_1: *Sestrojíme kružnici* $k_1(S, 2r)$.
K_2: *Sestrojíme kružnici* $k_2(A, AS)$.
K_3: *Sestrojíme společný bod S' kružnic* k_1, k_2.
K_4: *Sestrojíme střed T souměrnosti* $S(S \rightarrow S')$.

Další fáze řešení můžete provést snadno sami. Všimli jste si, že v rozboru této úlohy se objevil pomocný neznámý bod S'. Doplnili jsme jím určení bodu T. V konstrukci jej sestrojujeme dříve než bod T.

Dosud uvedené úlohy byly celkem jednoduché, ukažme si řešení jedné obtížnější úlohy. Jistě oceníte pomoc, jakou nám k jejímu zvládnutí poskytne středová souměrnost.

Příklad 11. *Je dána kružnice $k(O, r)$ s vyznačeným průměrem PQ a nesečna p kružnice k, na p je dán bod S. Sestrojte bod Z kružnice k, který má tu vlastnost, že průsečíky X, Y přímek PZ, QZ*) s přímkou p jsou souměrně sdruženy podle středu S.*

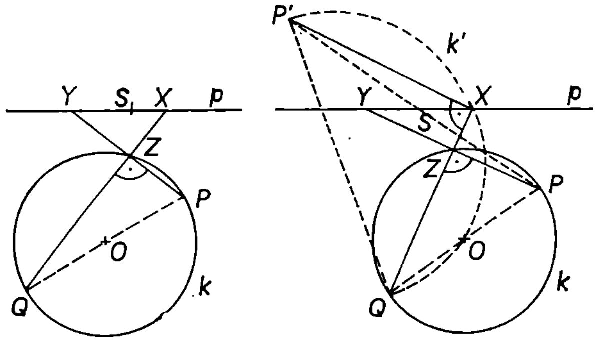
Řešení. Na obr. 21a jsou narýsovány dané útvary a dále průsečíky X, Y přímek QZ, PZ s přímkou p. Bod Z je zvolen libovolně, není řešením úlohy. Zkoušejte si na podobném obrázku další body Z, s body X, Y

---

*) V této úloze a úlohách jí podobných je třeba považovat tečnu kružnice v bodě P za přímku PZ v případě, kdy je $Z = P$. Obdobný význam má přímka QZ v případě, kde je $Z = Q$.

nebudete mít asi úspěch, zato si jistě uvědomíte, že přímky PZ, QZ jsou navzájem kolmé při každém Z.

Rozbor. Na obr. 21b je sestrojen bod Z, který je řešením úlohy. Průsečíky přímek ZQ, ZP s přímkou p jsou označeny písmeny X, Y. Souměrnost se středem S zobrazuje navzájem X a Y, zobrazme v ní „na zkoušku" i bod P a přímku PY, $S(S \to S,\ Y \to X,\ P \to P',\ PY \to P'X)$.



Obr. 21 a, b

Protože je přímka PY rovnoběžná s přímkou $P'X$ a současně kolmá na přímku QX, je také přímka $P'X$ kolmá na přímku QX. Vidíte, že bod X je vrcholem pravého úhlu nad úsečkou $P'Q$. Napišme si shrnutí rozboru:

Je-li bod Z řešením úlohy, náleží kružnici k a přímkám QX, PY.

Bod X leží 1. *na přímce p,*

2. *na kružnici o průměru $P'Q$.*

Bod P' je obrazem bodu P v souměrnosti o středu S.

Konstrukce.

K_1: *Sestrojíme obraz P' bodu P v souměrnosti o středu S.*
K_2: *Sestrojíme kružnici k' o průměru $P'Q$.*
K_3: *Sestrojíme bod X jako společný bod přímky p a kružnice k'.*
K_4: *Sestrojíme přímku QX.*
K_5: *Sestrojíme bod Z jako společný bod kružnice k a přímky QX.*

Zkouška výsledku konstrukce. Z konstrukce K_3 plyne, že je $P'X$ kolmá na QX. Z konstrukcí K_5, K_4 plyne podle Thaletovy věty, že je PZ kolmá na $QZ = QX$. Přímky PZ, $P'X$ jsou kolmé k téže přímce, proto navzájem rovnoběžné. Protože $P'X$ protíná p, protíná ji i přímka PZ; označme průsečík jako bod Y. Souměrnost S se středem S zobrazuje $P \to P'$, $P' \to P$, $p \to p$, přímku $P'X$ v rovnoběžku procházející bodem P. Touto rovnoběžkou je však přímka $PZ = PY$. Průsečík přímek $P'X$, p přejde v průsečík obrazů těchto přímek, tj. bod X přejde v bod Y. V důsledku toho je bod S středem úsečky XY.

Diskuse. Konstrukce K_1, K_2 mají právě jedno řešení, přitom bod P' leží uvnitř opačné poloroviny vyťaté přímkou p než bod Q. Přímka p obsahuje vnitřní bod úsečky $P'Q$, proto i vnitřní bod kružnice k', konstrukce K_3 má právě dvě řešení. Konstrukce K_4, K_5 mají jediné řešení. Celkově má tedy úloha právě dvě řešení.*)

Umělý obrat, kterého jsme užili, lze snad nejlépe charakterizovat takto: v souměrnosti, která převádí jeden neznámý bod v druhý, jsme zobrazili jeden z da-

*) V případě, že je přímka p rovnoběžná s průměrem PQ, lze úlohu snadno řešit pomocí stejnolehlosti.

ných bodů, nikoliv všechny dané body. V dalším textu poznáte, že pro užití zobrazení je v mnoha případech rypické to, že v něm zobrazujeme jen některé dané útvary a hledáme pak jejich vztahy k nezobrazeným bodům.

V kapitole III jsme si ukázali úlohy, v nichž byl středem souměrnosti daný bod (příklady 6, 7, 9, 11), dva dané body (příklad 8) nebo hledaný bod (příklad 10).

11. Jsou dány dvě soustředné kružnice k_1, k_2 a bod S na menší z nich. Sestrojte rovnoběžník se středem S, jehož vrcholy leží na daných kružnicích.

12. Jsou dány čtyři kružnice a bod S. Sestrojte rovnoběžník $XYUV$ se středem S, jehož každý vrchol leží na jedné z daných kružnic.

13. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno:

1. t_a, t_b, t_c,	4. t_a, v_b, v_a,
2. t_a, t_b, γ,	5. t_a, v_c, γ,
3. t_a, v_b, v_c,	6. t_a, β, γ.

[Umístěte těžnici $t_a = AS$ a stanovte množiny bodů, kterým náležejí neznámé vrcholy B, C. Využijte k tomu vlastností těžiště nebo vzdáleností bodu S od stran AB, AC trojúhelníku, dostanete buď kružnice, oblouky kružnic, přímky nebo polopřímky. Dále postupujte podle úlohy 9.]

14. Zobecněte úlohu 11 v tom smyslu, že zvolíte body P, Q *libovolně* na kružnici k, nikoliv jako body diametrálně protilehlé.

[Při řešení využijte vlastností obvodového úhlu PZQ; pamatujte na existenci dvou oblouků dané kružnice s krajními body P, Q].

KAPITOLA IV

OSOVÁ SOUMĚRNOST

Konstrukční využití osové souměrnosti je mnohostranné. Jistě znáte úlohy o odrazu a některé úlohy o nejkratším spojení dvou bodů lomenou čarou. Teoretickým základem řešení těchto úloh je následující věta.

Svírá-li přímka p s osou o osové souměrnosti ostrý úhel α, zobrazuje se v této osové souměrnosti v přímku $p' \neq p$, která protíná osu o v témž bodě jako p a svírá s ní úhel shodný s úhlem α.

Uveďme si ještě dvě věty o určenosti osové souměrnosti.

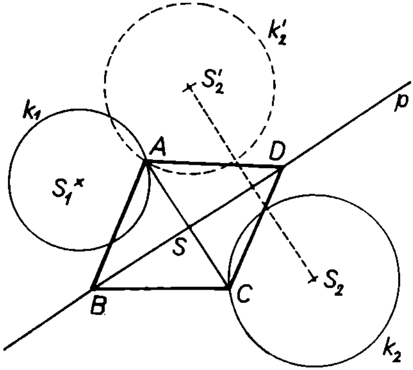
Je-li dána přímka o, existuje právě jedna osová souměrnost v rovině, která má osu o.

Jsou-li dány dva různé body A, B, existuje právě jedna osová souměrnost v rovině, která zobrazuje $A \rightarrow B$, $B \rightarrow A$.

Středová souměrnost umožňovala „vzpříčit" mezi útvary úsečku půlenou daným bodem, osová souměrnost umožňuje sestrojit takovou „příčku" mezi útvary, která je kolmá na danou přímku a přitom je jí půlena.

Příklad 12. *Je dána přímka p, úsečka u a dvě kružnice oddělené přímkou p. Sestrojte kosočtverec $ABCD$, jehož úhlopříčka $BD = u$ leží na dané přímce a každý ze zbývajících vrcholů leží na jedné z daných kružnic.*

Rozbor. Předpokládané řešení je zobrazeno na obr. 22. Všechny čtyři vrcholy kosočtverce jsou neznámé body,



Obr. 22

ale B, D sestrojíme snadno, budeme-li znát bod S. K sestrojení bodu S potřebujeme úsečku AC. Osová souměrnost s osou p zobrazuje $A \to C$, $C \to A$, bod A leží proto na obrazu k_2' (S_2', r_2) kružnice k_2 obsahující bod C. Výsledek rozboru:

Body B, D leží 1. *na přímce p,*

2. *na kružnici* $k\left(S, \frac{1}{2}\, u\right)$.

Bod S leží 1. *na přímce p,*

2. *na přímce AC.*

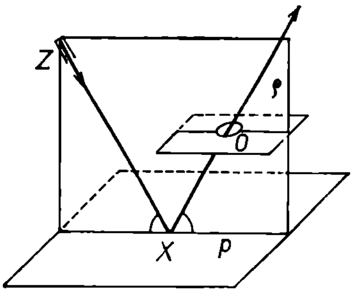
Bod A leží 1. *na kružnici $k_1(S_1, r_1)$,*

2. *na obraze $k_2'(S_2', r_2)$ kružnice $k_2(S_2, r_2)$ v osově souměrnosti s osou o.*

Na základě podrobného rozboru můžete snadno dokončit řešení úlohy. V konstrukci sestrojujte postupně útvary a body uvedené ve shrnutí rozboru, postupujte od útvarů umožňujících konstrukci bodu A ke kružnici k sloužící ke konstrukci bodů B, D.

Vezměme si nyní praktickou úlohu o odrazu.

Příklad 13 (obr. 23a). *Je dána nepohyblivá zrcadlící stěna, nepohyblivá clona s otvorem O a otáčivý světelný zdroj Z, který vysílá úzký svazek paprsků. Máme natočit zdroj Z tak, aby světelný paprsek procházel po odrazu od zrcadlící stěny otvorem O.*



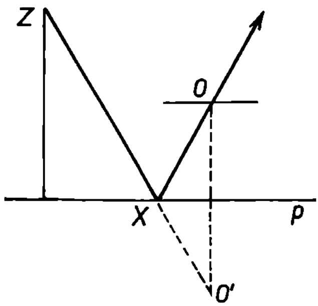
Obr. 23 a

Řešení. Světelný paprsek ze zdroje Z a paprsek odražený leží v jedné rovině kolmé k zrcadlící stěně. Tato rovina je jednoznačně určena body Z, O, její průsečnice se stěnou je označena p (obr. 23b). Tím dostáváme planimetrickou úlohu:

Jsou dány dva různé body Z, O ležící uvnitř téže poloroviny vyťaté přímkou p. Sestrojte bod X přímky p tak, aby přímky ZX, XO svíraly s přímkou p shodné úhly.

Řešení této úlohy znáte. Bod X leží na přímce ZO', kde O' je obrazem bodu O v osové souměrnosti podle přímky p. Napište si podrobné řešení této úlohy.

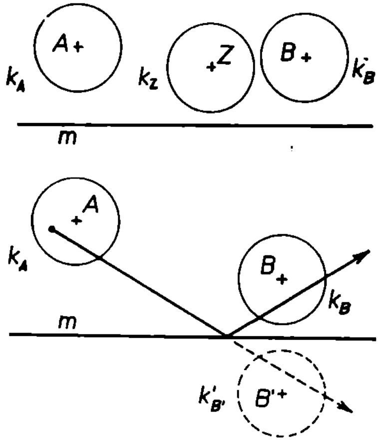
Úlohy o odrazu se vyskytují i ve sportu. Tam se ovšem nezamýšlíme dlouze nad řešením, protože hra vyžaduje rychlé reakce: Teprve po zápase je čas na rekapitulaci hry. *Jak byste objektivně rozhodli, zda při postavení podle obr.* 24a *mohl hráč A přihrát spoluhráči B odrazem od mantinelu? Při zápase se o to sice hráč A pokusil, ale jeho přihrávku zachytil protivník Z.*



Obr. 23 b

Hráč A na touši nestojí, musíme proto počítat s tím, že touš leží uvnitř jistého kruhu $\mathbf{k}_A$ o středu A. Hráči B, Z mohou touš zachytit jen v tom případě, že jeho dráha prochází kruhy $\mathbf{k}_B$, $\mathbf{k}_Z$ o středech B, Z.

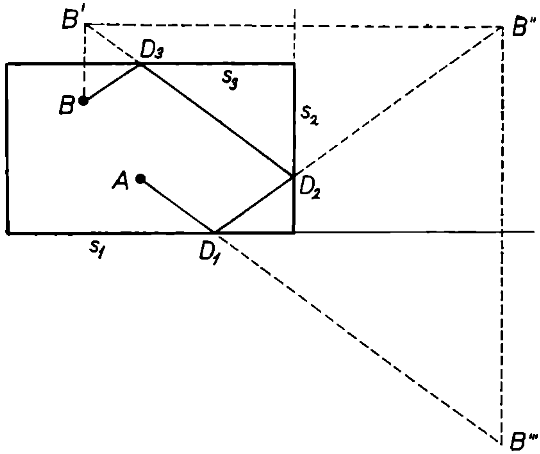
Zobrazme kruh $\mathbf{k}_B$ v souměrnosti podle m (obr. 24b). Touš vystřelený z kruhu $\mathbf{k}_A$ se odrazí od mantinelu do kruhu $\mathbf{k}_B$ právě tehdy, když prodloužení jeho původní dráhy prochází kruhem $\mathbf{k}'_B$. Vyjádřete si obdobně podmínku, kdy se touš odrazí do kruhu $\mathbf{k}_Z$. Danou otázku můžeme zodpovědět kladně jen v tom případě, existuje-li společná sečna kruhů $\mathbf{k}_A$, $\mathbf{k}'_B$, která je současně nesečnou kruhů $\mathbf{k}_Z$, $\mathbf{k}_{Z'}$. Proveďte si řešení úlohy při různých postaveních hráčů A, B, Z.



Obr. 24 a, b

Obdobnou geometrickou problematiku řešíme i při kulečníku. *Nechť body A, B na obr. 25 představují polohu dvou kulečníkových koulí. Máme zakreslit dráhu koule A, která se odráží po řadě od stran s_1, s_2, s_3 kulečníku a nakonec zasáhne kouli B.*

Chceme-li postupovat obdobně jako při řešení předešlých úloh, musíme zobrazit cíl — bod B — nejprve do bodu B' v souměrnosti podle přímky s_3, bod B' do bodu B'' v souměrnosti podle s_2 a konečně bod B'' v souměrnosti podle s_1 do bodu B'''. První část dráhy koule A pak leží na polopřímce AB''', v bodě D_1 se koule odráží a směřuje do bodu B''. Při tomto pohybu se odrazí v bodě D_2 od strany s_2 a směřuje do bodu B'. V bodě D_3 se odrazí do bodu B. Řešte si samostatně podobné úlohy o kulečníkových koulích. Porovnejte délku lomené čáry $AD_1D_2D_3B$ s délkou úsečky AB'''.



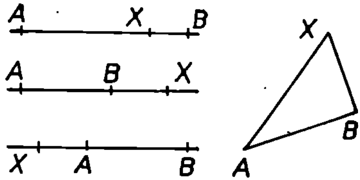
Obr. 25

Osová souměrnost je vhodná i k řešení úloh o nejkratším spojení dvou bodů lomenou čarou, jejíž vrchol leží na dané přímce. Řešení těchto úloh se opírá o následující větu:

Jsou-li A, B, X tři různé body, platí $AX + XB = AB$ právě tehdy, když bod X leží mezi A, B. Vztah $AX - BX = AB$ platí právě tehdy, když B leží mezi A, X. Vždy platí $AX + BX \geqq AB$, $AX - BX \leqq AB$ (pro $AX > BX$).

Větu dokážete snadno sami. Vyjádřete si závislost mezi součtem resp. rozdílem úseček AX, XB ve všech případech zakreslených na obr. 26.

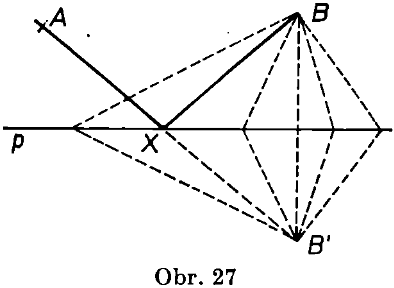
Příklad 14. *Jsou dány dva různé body A, B neležící na dané přímce p. Sestrojte bod X přímky p, pro který je součet $AX + BX$ nejmenší.*



Obr. 26

Rozbor. Je-li bod X řešením úlohy, je $AX + BX$ minimální. Podle výše uvedené věty je vždy $AX + BX \geqq AB$.

Je-li součet $AX + BX = AB$, leží bod X mezi A, B. Je-li součet $AX + BX$ sice minimální možný (pro body X přímky p), ale přesto větší než AB, nemůže ležet mezi A, B žádný bod přímky p, oba body leží v tom případě uvnitř téže poloroviny vyťaté přímkou p. Řešení úlohy provádíme pak tím způsobem, že místo bodu B vezmeme ten bod roviny, který má od každého bodu přímky p stejnou vzdálenost jako bod B. Tímto bodem je bod B' souměrně sdružený s bodem B v osové souměrnosti s osou p (obr. 27). Závěr rozboru musíme formulovat pro dva různé případy:



Obr. 27

Leží-li body A, B uvnitř téže poloroviny vyťaté přímkou p a je-li $AX + XB$ nejmenší, pak leží bod X na úsečce AB', kde B' je obrazem bodu B v souměrnosti podle p.

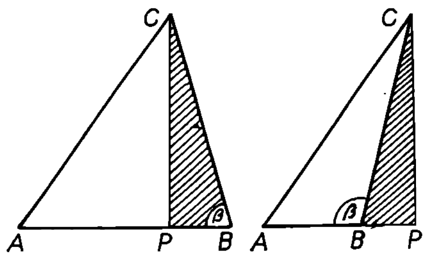
Leží-li body A, B uvnitř různých polorovin vyťatých přímkou p, je hledaný bod X bodem úsečky AB.

Na základě tohoto rozboru snadno napíšete pro každý případ postup konstrukce. Zkouška výsledku konstrukce je pak snadná, v diskusi dojde k jedinému řešení.

Podrobný rozbor minulé úlohy se vám možná zdál příliš mnohomluvný, když dávno znáte konstrukci bodu X. Viděli jste však příklad úlohy, v níž dojdeme k nutnosti rozštěpit rozbor. Kdybychom si v příkladě 14 nakreslili hned na začátku rozboru obr. 27 a provedli rozbor podle něj, došli bychom ke konstrukci pomocí souměrného bodu B'. Taková konstrukce by nám v případě, že body A, B leží uvnitř opačných polorovin, nedala žádné řešení. Mohli bychom tím být svedeni k ukvapenému závěru, že v tomto případě nemá úloha řešení.

Buďte pozorní při provádění rozboru a nenechte se ovlivnit obrázkem. Z obvyklých úloh o trojúhelnících jsou v tomto směru „nebezpečné" zejména úlohy, v jejichž rozboru se pracuje s patou některé výšky. Např. rozbor úlohy: *sestrojit trojúhelník ABC, je-li dáno β, v_c, b* se často provádí na základě obr. 28a. Může nás to svést k závěru, že nejprve sestrojíme pomocný pravoúhlý trojúhelník CPB s úhlem $PBC = \beta$. Protože nelze sestrojit trojúhelník PBC v případě, že úhel β je tupý, mohli bychom prohlásit, že v tom případě úloha nemá řešení. To je však hrubý omyl, protože trojúhelník PBC může obsahovat také úhel $\pi - \beta$ (výplňkový k úhlu β). Je-li úhel β pravý, trojúhelník PBC neexistuje. Při rozboru úlohy uvedené v této poznámce musíte *uvažovat zvlášť o ostroúhlém, pravoúhlém a tupoúhlém trojúhelníku ABC.*

Rozřešte, nejlépe ihned, následující úlohu:



Obr. 28 a, b

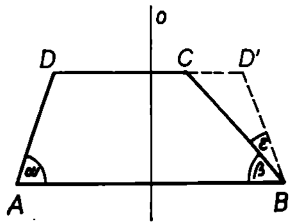
Příklad 15. *Je dána přímka p a body A, B neležící na p, z nichž B je blíže přímky p. Sestrojte bod X přímky p, pro který je rozdíl úseček AX — BX největší.*

Sledujte formulaci rozboru v příkladě 14, zapište si podle ní rozbor úlohy.

Pomocí osové souměrnosti v rovině můžeme řešit i ty úlohy, ve kterých je dán součet nebo rozdíl úhlů některého útvaru.

Příklad 16. *Jsou dány úsečky b, c, d a úhel* ε*. Sestrojte lichoběžník ABCD tak, aby bylo* $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $\sphericalangle DAB - \sphericalangle ABC = \alpha - \beta = \varepsilon$.

Řešení. Podíváte-li se na obr. 29, kde jsou vyznačeny dané úsečky, vidíte, že máme dán rozdíl úhlů přiléhajících k úsečce AB. Musíme si zřejmě v obr. 29 sestrojit úhel $\alpha - \beta = \varepsilon$. Řekli jsme si, že bývá vhodné zobrazit osovou souměrností jeden vrchol v druhý. Použijm osové souměrnosti $O\,(A \to B,\ B \to A)$, v ní přejde $D \to D'$, $\sphericalangle BAD \to \sphericalangle ABD'$. Protože je $\alpha > \beta$, leží D' na přímce CD tak, že C odděluje D, D'. Úhel $\sphericalangle CBD' = \varepsilon = \alpha - \beta$.



Obr. 29

Má-li lichoběžník $ABCD$ žádané vlastnosti, má trojúhelník BCD' stranu $BC = b$, $BD' = d$, $\sphericalangle CBD' = \varepsilon$. Trojúhelník BCD' snadno sestrojíme, známe úhel trojúhelníku a strany ležící na jeho ramenech. V tomto směru už v rozboru pokračovat nemusíme. Ptejme se spíše, zda budeme moci sestrojit body A, D, až budeme mít sestrojen trojúhelník BCD'. Co víme o vztahu těchto bodů k trojúhelníku BCD'?

Bod D leží 1. *na polopřímce $D'C$,*
2. *na kružnici $k(C,c)$.*

Bod A je obrazem bodu B v souměrnosti $O\,(D' \to D)$.

Konstrukce.

K_1: *Sestrojíme trojúhelník BCD' s úhlem $\sphericalangle BCD' = \varepsilon$, $BC = b$, $BD' = d$.*

K_2: *Sestrojíme polopřímku $D'C$.*

K_3: *Sestrojíme kružnici $k = (C, c)$.*

K_4: *Sestrojíme* D *jako společný bod polopřímky* $D'C$ *a kružnice* k.
K_5: *Sestrojíme osu souměrnosti* O $(D' \to D)$.
K_6: *Sestrojíme obraz* A *bodu* B *v souměrnosti* O.
K_7: *Sestrojíme lichoběžník* $ABCD$.

Z konstrukcí K_3, K_4 plyne, že je $CD = c$ a bod C lež mezi D, D'. Použitá osová souměrnost $O\,(D' \to D$, $B \to A$, $A \to B)$ zobrazuje úsečku $BD' = d$ v úsečku $DA = d$ a úhel $D'BA$ v úhel $\sphericalangle BAD = \alpha$, je proto $\sphericalangle D'BA = \alpha$. Protože polopřímka BC leží uvnitř úhlu ABD, je úhel $CBD' = \alpha - \beta$. V K_1 jsme však sestrojili úhel $\sphericalangle CBD' = \varepsilon$, je tedy $\alpha - \beta = \varepsilon$. Tím jsme dokázali, že v sestrojeném čtyřúhelníku $ABCD$ je $AD = d$, $BC = b$, $CD = c$, $\alpha - \beta = \varepsilon$. Nemůžeme však tvrdit, že čtyřúhelník je lichoběžníkem s hlavní základnou AB. Sestrojený čtyřúhelník má rovnoběžné strany AB, CD, může však být rovnoběžníkem (při $b = d$) nebo lichoběžníkem s $AB > CD$ nebo lichoběžníkem s $AB < CD$.

Diskuse. Každý krok konstrukce je jednoznačný, proto i úloha má jediné řešení. Vyšetřování podmínek, kdy vyjde lichoběžník s $AB > CD$, nebudeme provádět.

Řešení úlohy bylo dost pracné, přestože jsme konstrukci trojúhelníku BCD' zapsali jako jeden krok konstrukce. Tohoto obratu se užívá i v jiných případech, můžete ho také použít při řešení úloh Matematické olympiády. Buďte si však vědomi toho, že nesmíte dopustit, aby se vám tím skrylo v řešení nějaké nedopatření. Každou takovou dílčí úlohu si musíte vyřešit samostatně a připojit k řešení celé úlohy. Zvláště nezapomínejte na diskusi počtu řešení dílčí úlohy.

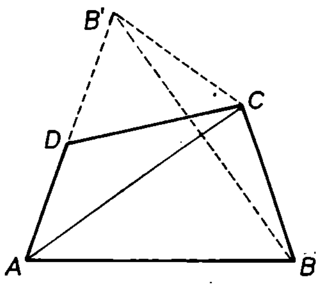
V popisu konstrukce není uveden krok K_0. Je vynechán proto, že konstrukce K_1 je nepolohová a je v ní „skryto" umístění útvarů.

Uveďme si ještě jednu úlohu o čtyřúhelníku, kterou lze výhodně řešit pomocí osové souměrnosti. Už z jejího textu byste jistě usuzovali, že bude vhodné užít osové souměrnosti.

Příklad 17. *Jsou dány úsečky, a, b, c, d, při čemž je $a > d$. Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, jehož strany AB, BC, CD, DA jsou po řadě shodné s úsečkami a, b, c, d, je-li dále známo, že úhlopříčka AC je osou úhlu α.*

Rozbor. Na obr. 30 je zobrazen čtyřúhelník $ABCD$, který má požadované vlastnosti. Zobrazme v osové souměrnosti s osou AC bod B do bodu B'; tato souměrnost zobrazí zřejmě polopřímku AB na polopřímku AD. Protože je $AD < AB$, leží bod D mezi body A, B'.

Má-li čtyřúhelník $ABCD$ žádané vlastnosti, existuje trojúhelník $B'CD$, který má stranu $B'C = b$, $CD = c$, $B'D = a - d$.



Obr. 30

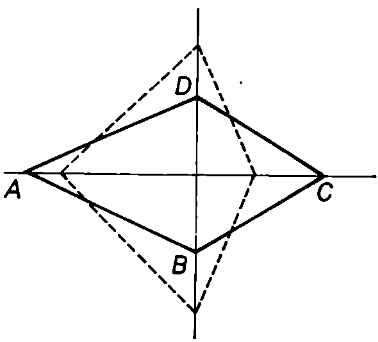
Podobně jako v příkladě 16 nebudeme provádět rozbor úlohy na sestrojení trojúhelníku $B'CD$ na základě uvedených jeho vlastností. Jde o konstrukci trojúhelníku ze tří stran, o té víte, že má právě jedno řešení, vyhovují-li strany trojúhelníka trojúhelníkovým nerovnostem.

Bod A leží 1. *na polopřímce opačné k polopřímce DB',*
2. *na kružnici $k(D, d)$.*

Bod B je obrazem bodu B' v osové souměrnosti s osou AC.

Na základě podrobného rozboru můžete snadno popsat konstrukci čtyřúhelníku. Při zkoušce výsledku konstrukce ani v diskusi nedojdete k žádným potížím.

Úloha v příkladě 17 je ovšem jen částí obecnější úlohy, ve které se nepředpokládá platnost nějakého vztahu mezi úsečkami a, d. Při rozboru této obecnější úlohy docházíme opět k nutnosti štěpení rozboru. V případě, že je $a < d$, neliší se další postup mnoho od řešení úlohy v příkladě 17. Je-li $a = d$, je čtyřúhelník souměrný podle přímky AC, je proto deltoidem (obr. 31). V témž obrázku je zakreslen druhý deltoid, který má ta-



Obr. 31

ké strany a, b, c, d. Někdy existuje nekonečně mnoho deltoidů, které jsou řešením zobecněné úlohy. Jak sestrojíte některý z nich?

15. Je dána přímka p, kružnice k, bod T a směr s. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC s těžištěm T, jehož základna AB náleží směru s, vrchol A leží na přímce p, vrchol B na kružnici k.

[Sestrojte nejprve osu souměrnosti trojúhelníku.]

16. Pozměňte text úlohy v příkladě 10 tak, aby požadovala sestrojení tečny kružnice bez pomoci Thaletovy věty. Tuto úlohu lze řešit pomocí množiny bodů souměrně sdružených se středem kružnice podle tečen. Proveďte si takové řešení úlohy a zamyslete se nad její souvislotí se známými konstrukcemi tečen elipsy pomocí řídící kružnice.

17. Jsou dány dvě kružnice k_1, k_2 a jejich společná vnitřní tečna t. Sestrojte bod X přímky t tak, aby přímka t byla osou dvojice vrcholových úhlů sevřených druhými tečnami z bodu X ke kružnicím k_1, k_2.

18. Je dán ostrý úhel MNP a jeho vnitřní bod A. Sestrojte ten trojúhelník ABC s vrcholy B, C na ramenech úhlu, který má nejmenší obvod.

19. Při stejném zadání jako ve cvičení 18 sestrojte dráhu bodu A představujícího kouli, která se po odrazu od ramen úhlu vrátí na své místo.

20. Postavte kulečníkové koule na úhlopříčku stolu tak, aby jejich vzájemná vzdálenost byla rovna vzdálenosti každé z nich od rohu stolu. Stanovte dráhu jedné koule tak, aby se odrazila postupně od tří stran stolu a zasáhla druhou kouli. Má úloha řešení při libovolně předepsaném pořadí stran, od kterých se má koule postupně odrazit? Lze najít její dráhu v případě, že požadujeme čtyřnásobný odraz?

[Kombinujte skládání souměrností, jejichž osy obsahují strany obdélníka. Pro existenci požadované dráhy je rozhodující, abychom body odrazu dostali uvnitř příslušných stran.]

21. Sestrojte trojúhelník ABC, jsou-li dány velikosti jeho stran a, c a úhlu $\alpha - \beta$.

[Úloha je zjednodušením řešené úlohy z příkladu 16.]

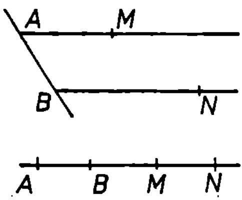
KAPITOLA V

POSUNUTÍ

Dříve než si uvedeme základní věty o posunutí v rovině, zmiňme se stručně o pojmu souhlasně rovnoběžných polopřímek.

Jsou-li AM, BN dvě polopřímky ležící na rovnoběžkách a leží-li obě v této polorovině s hraniční přímkou AB, nazýváme je souhlasně rovnoběžné. Dvě polopřímky ležící na téže přímce považujeme za souhlasně rovnoběžné, je-li jedna z nich částí druhé.

Polopřímky AM, BN na obr. 32a, b zřejmě jsou souhlasně rovnoběžné. Pro nás je důležité, abychom si uvědomili, že při obvyklém značení vrcholů lichoběžníků a rovnoběžníků písmeny $ABCD$ dosáhneme vždy toho, že je polopřímka AB souhlasně rovnoběžná s polopřímkou DC. Navzájem opačné polopřímky nejsou souhlasně rovnoběžné, ani polopřímky AB, BA nejsou souhlasně rovnoběžné.

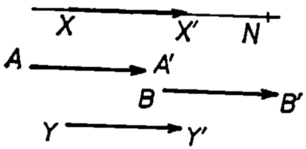


Obr. 32 a, b

Je-li dána polopřímka AB a bod X, existuje právě jedna polopřímka XY souhlasně rovnoběžná s AB.

Pomocí souhlasně rovnoběžných polopřímek můžeme přesně vyjádřit předpis, kterým přiřazujeme každému bodu roviny obraz v některém posunutí.*)

Jsou-li dány dva různé body A, A', přiřazujeme v posunutí $T(A \to A')$ bodu X bod X' tak, že sestrojíme polopřímku XN souhlasně rovnoběžnou s AA' a na ní sestrojíme bod X' tak, aby bylo $AA' = XX'$ (obr. 33).



Obr. 33

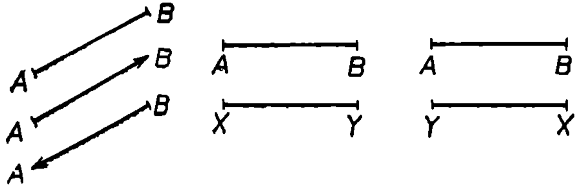
Jsou-li AM, BN dvě různé souhlasně rovnoběžné polopřímky, existuje právě jedno posunutí v rovině, které zobrazí polopřímku AM na polopřímku BN.

Vyznačíme-li v obrázku 33 přiřazení čárkovaných bodů nečárkovaným pomocí šipek, řeknete si jistě, že jsme zakreslili umístění jednoho vektoru.

Ke každému posunutí $T(A \to A')$ existuje inverzní zobrazení T^{-1} $(A' \to A)$, které je vždy různé od T.

Nakreslete si podle obrázku 33 takový obrázek, na kterém bude pomocí vektorů vyznačeno přiřazení bodů v T^{-1}.

*) Posunutí značíme obvykle písmenem T, protože se nazývá též translace. Písmenem P označujeme zpravidla podobná zobrazení.



Obr. 34 a, b, c

Je-li dána úsečka AB, můžeme ji označit jako vektor (orientovat) dvěma různými způsoby (obr. 34a), buď přidáme šipku k bodu B, nebo k bodu A. Víme již, že existuje posunutí $T(A \rightarrow B)$ a druhé, k němu inverzní, T^{-1} $(B \rightarrow A)$. Tato dvojice posunutí vystupuje při řešení úloh nerozlučně spolu. V úlohách se často setkáme s dvojicí shodných a rovnoběžných úseček (obr. 34b, c).

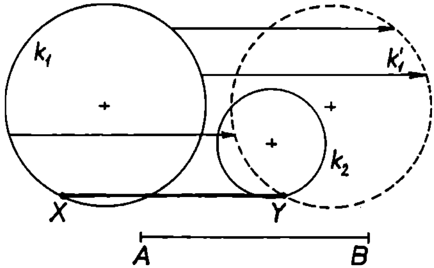
Jsou-li dány dvě rovnoběžné a shodné úsečky AB, XY, existují právě dvě posunutí zobrazující současně jeden krajní bod každé z daných úseček v druhý. Jsou to posunutí T_1 $(A \rightarrow B)$, T_2 $(B \rightarrow A)$.

Na obr. 34b zobrazuje T_1 $(A \rightarrow B,\ X \rightarrow Y)$, kdežto na obr. 34c zobrazuje T_2 $(A \rightarrow B,\ Y \rightarrow X)$.

Podobně jako u středové a osové souměrnosti začněme i zde s úlohami na „vzpříčení" úsečky mezi danými dvěma útvary. Vzhledem k vlastnostem posunutí to však budou příčky rovnoběžné a shodné s danou úsečkou.

Příklad 18. *Jsou dány dvě kružnice k_1, k_2 a dvojice různých bodů A, B. Sestrojte úsečku XY rovnoběžnou s AB tak, aby bod X ležel na k_1, bod Y na k_2 a aby $XY = AB$.*

Rozbor. Na obr. 35 je zobrazena dvojice úseček AB, XY. Body X, Y jsou neznámé, víme však, že bod X



Obr. 35

přejde v Y jednou z translací T_1 $(A \to B)$, T_2 $(B \to A)$. Nevíme, který bod X kružnice k_1 přejde v hledaný bod Y kružnice k_2, můžeme proto opět „zkoušet“ větší počet bodů kružnice k_1. Pozorujeme, že obrazy bodů kružnice k_1 (hroty šipek) vytvářejí kružnici. Protože v posunutí je obrazem každé kružnice kružnice shodná s původní, docházíme k tomuto výsledku:

Bod Y leží 1. *na kružnici $k_2(S_2, r_2)$,*
2. *na kružnici k_1' (S_1', r_1), která je obrazem kružnice k_1 (S_1, r_1) v posunutí T_1 $(A \to B)$ nebo T_2 $(B \to A)$.*

Konstrukce.

K_1: *Sestrojíme kružnici k'_1 (S_1', r_1), která je obrazem kružnice k_1 v posunutí T_1 $(A \to B)$.*
K_2: *Sestrojíme společný bod Y kružnic k_1', k_2.*
K_3: *Sestrojíme bod X jako obraz bodu Y v T_1^{-1} $(B \to A)$.*
K_4: *Sestrojíme úsečku XY.*

Připojte sami ještě obdobný popis konstrukce v případě, že použijeme posunutí T_2 $(B \to A)$.

Zkoušku výsledku konstrukce proveďte sami, je velmi jednoduchá.

Diskuse. Všechny konstrukce kromě K_2 jsou jednoznačné. Počet řešení úlohy závisí jedině na počtu společných bodů kružnice k_2 s obrazy kružnice k_1 v posunutích T_1, T_2. Úloha má proto někdy i nekonečně mnoho řešení. Nejvyšší konečný počet řešení je roven čtyřem, dále může mít úloha tři, dvě, jedno nebo žádné řešení.

Vidíte, že řešení úloh pomocí posunutí je ještě náročnější na formulaci textu než řešení úloh v kapitolách III a IV. Komplikace způsobuje existence dvou posunutí, která mohou úlohu řešit. Připomeňte si znovu obsah poznámky za příkladem 6. Snadno pak vyřešíte další úlohu.

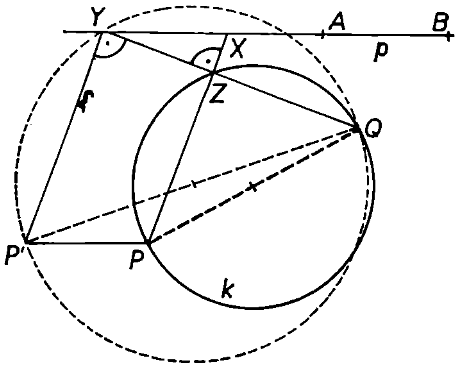
Příklad 19. *Je dána dvojice přímek a, b a úsečka MN. Sestrojte čtverec $XYZU$ o straně $XY = MN$ a rovnoběžné s MN, je-li dána podmínka, aby bod X ležel na přímce a bod Y na b.*

Řešení úlohy předpokládá sestrojení úsečky XY s uvedenými vlastnostmi. Kolik pak existuje čtverců, které mají stranu XY?

Příklad 20. *Je dána kružnice k s vyznačeným průměrem PQ a nesečna p kružnice k s vyznačenou úsečkou AB. Sestrojte bod Z kružnice k, který má tu vlastnost, že přímky PZ, QZ protínají p v bodech X, Y tak, že je $XY = AB$.*

Rozbor. Je-li bod Z na obr. 36 řešením úlohy, je úsečka $XY = AB$. Protože je přímka XY rovnoběžná s AB, máme možnost převést bod X v bod Y jedním z posunutí T_1 $(A \rightarrow B)$, T_2 $(B \rightarrow A)$. Zobrazme v tomto posunutí bod P v bod P'. Na obr. 36 jde o posunutí T_2 $(B \rightarrow A$, $X \rightarrow Y$, $P \rightarrow P')$. Přímka PX je rovnoběžná s přímkou

$P'X' = P'Y$; protože je PX kolmá na QY, je také $P'Y$ kolmá na QY.



Obr. 36

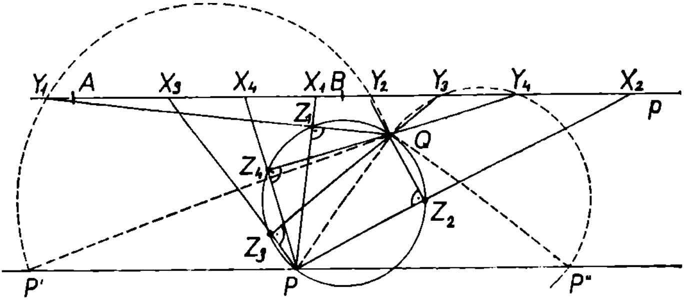
Docházíme tedy k závěru:

Bod Y je obrazem bodu X v T_2 ($B \to A$),
leží 1. *na přímce p,*
2. *na Thaletově kružnici o průměru $P'Q$.*

Stejně tak by ovšem mohl být bod Y obrazem bodu X v posunutí T_1 ($A \to B$). Nakreslete si pro tento případ obrázek.

Ostatní části řešení této úlohy si můžete zpracovat sami, vodítkem vám může být řešení příkladu 11. Dostanete nejvýše čtyři různá řešení (obr. 37).

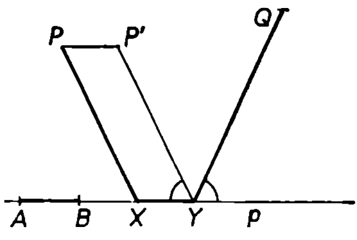
Dosud všechny úlohy této kapitoly byly polohové a vcelku jednoduché, našli jsme okamžitě množinu bodů, které náleží neznámý bod. Častější je případ, kdy po ztotožnění dvou neznámých bodů posunutím dojdeme k úloze o jednom neznámému bodu, kterou musíme řešit některým dalším způsobem.



Obr. 37

Příklad 21. *Na příčném profilu terénu jsou dány body P, Q a přímka p, na níž leží dno výkopu pro železniční trať. Narýsujte profil výkopu, jestliže šířka jeho dna je AB a stěny výkopu mají týž spád.*

Řešení. Na obr. 38 je narýsováno řešení úlohy. Použijeme osvědčeného způsobu a sestrojíme obraz P' bodu P v T_1 ($A \to B$, $X \to Y$). Snadno si dokážete, že je přímka PX rovnoběžná s přímkou $P'Y$. Je také zřejmé, že bod Y je tím bodem přímky p, ve kterém by se paprsek vyslaný z P' odrazil od p do bodu Q. Tím jsme úlohu



Obr. 38

převedli na dříve řešenou úlohu o odrazu (příklad 13). Řešení dokončete sami, nezapomeňte však na posunutí T_2 $(B \to A)$. Příslušná lomená čára $PXYQ$ se protíná, nemá proto význam pro praktickou úlohu, ze které jsme vyšli. Máme příklad, kdy praktická úloha má méně řešení než z ní vyvozená úloha matematická. Podobné příklady znáte z řešení kvadratických rovnic.

Jistě jste již řešili řadu úloh na sestrojení trojúhelníku ABC, jsou-li dány velikosti tří z jeho prvků a, b, c, α, β, γ, t_A, t_B, t_C, v_A, v_B, v_C.*) Trojúhelník ABC lze sestrojit zvláště snadno, je-li dána některá z trojic a, b, c; a, b, γ; a, b, v_A; a, b, t_A; a, v_A, t_A; a, γ, v_A,; a, γ, t_A; a, α, t_A; a, α, v_A; a, v_B, t_A; a, v_B, t_C; a, v_B, v_C; α, v_B, v_C. Jsou-li však dány některé jiné trojice prvků, dostáváme úlohy mnohem obtížnější. Seznámili jste se patrně i s umělými obraty, pomocí kterých se sestrojuje trojúhelník, je-li dáno v_A, v_B, v_C nebo t_A, t_B, t_C.

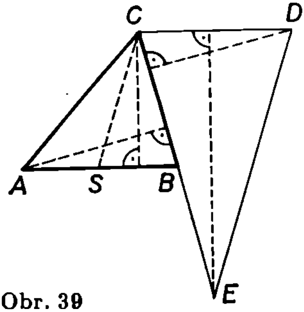
Při řešení následující úlohy použijeme posunutí a středové souměrnosti jiným způsobem než dosud. Pokud tento způsob neznáte, bude vám připadat umělý. Později se však přesvědčíte, že je to velmi užitečný způsob řešení úloh o trojúhelníku.

Příklad 22. *Sestrojte trojúhelník ABC, jsou-li dány úsečky shodné po řadě s prvky t_C, v_A, v_C trojúhelníku.*

Řešení (obr. 39). Zobrazme bod C jednak v T $(A \to B)$ jednak ve středové souměrnosti S o středu B. Obrazy označme po řadě písmeny D, E. Dokažte si sami:

*) V úvaze, která následuje, bude výhodné značit těžnice a výšky indexy vrcholů, ne stran trojúhelníků. (Vrcholy budeme mít v obrázcích označeny, ale strany ne.)

Má-li trojúhelník ABC požadované vlastnosti, má trojúhelník CDE stranu $DE = 2t_C$, *výšku* $v_D = v_A$, *výšku* $v_E = 2v_C$.

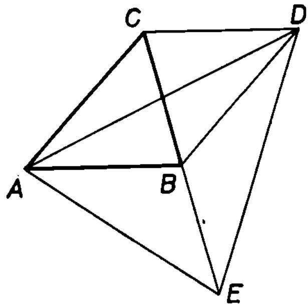


Obr. 39

Známe tedy v trojúhelníku *CDE* stranu *DE* a výšky vycházející z jejích koncových bodů. Z těchto podmínek lze trojúhelník *CDE* sestrojit. Bude však možno setrojit body *A*, *B*, budeme-li znát trojúhelník *CDE*? Zřejmě ano, protože bod *B* je středem souměrnosti $S\ (C \rightarrow E)$ a bod *A* je obrazem bodu *B* v posunutí $T_1^{-1}\ (D \rightarrow C)$. Jistě snadno dokončíte řešení celé úlohy. Dejte pozor při diskusi na to, že konstrukce trojúhelníku *CDE* může mít dvě různá řešení. Každé z nich je východiskem k jedné konstrukci trojúhelníku *ABC*.

Uvedenou úlohu lze řešit i jiným způsobem, např. pomocí podobnosti trojúhelníků. Naše řešení spočívalo v tom, že jsme našli pomocný trojúhelník *CDE*, jehož prvky závisejí jednoduchými vztahy na daných prvcích trojúhelníku *ABC*. Pokusme se nyní aplikovat tento způsob řešení i na jiné případy.

Sestrojme si znovu trojúhelník *ABC* a body *D*, *E* (obr. 40), vyznačme však všechny možné trojúhelníky, které mají za vrcholy tři z bodů A, B, C, D, E. Je jich devět, v každém si stanovíme ty jeho strany, úhly těž-



Obr. 40

nice a výšky, které lze vyjádřit jednoduchou závislostí na prvcích trojúhelníka ABC. Pišme výsledky do tabulky (viz str. 64).

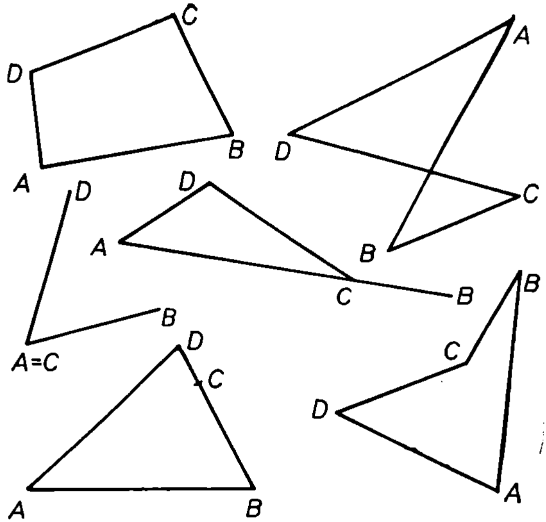
Naučme se nyní pracovat s hotovou tabulkou. Zvolte si libovolnou trojici prvků trojúhelníka ABC, např. v_C, β, t_B. Hledejte, na kterém řádku (od třetího počínaje) jsou tyto prvky napsány současně. Najdete řádek příslušející trojúhelníku ABE. Na náčrtku trojúhelníku ABE uvidíte, že znáte jeho stranu AE, $\measuredangle ABE =$ $= \pi\text{-}\beta$ a výšku $v_E = v_C$. Trojúhelník ABE můžete snadno sestrojit, umístíte-li úhel ABE. Konstrukce hledaného trojúhelníku je pak snadná. Další pokyny a poznámky k práci s tabulkou najdete ve cvičeních.

Podívejme se blíže na *pojem čtyřúhelníku*. Víte ze své zkušenosti, že trojúhelník ABC považujeme za sestrojený, vyznačíme-li jeho obvod, tj. uzavřenou lomenou

Trojúhelník	strany	úhly	těžnice	výšky
ABC	a, b, c	α, β, γ	$t_A, t_B, t_C,$	v_A, v_B, v_C
CBD	b, c, a	β, γ, α	$t_B, t_C, t_A,$	v_B, v_C, v_A
BDE	$2t_C, a, b$	$\pi - \gamma$, -, -	$\frac{1}{2}c$, -, -	-, v_A, v_B
CDE	$2t_C, 2a, c$	β, -, -	-, b, -	-, $v_A, 2v_C$
ACE	$2a, 2t_B, b$	-, γ, -	c, -, -	v_A, -, $2v_B$
ADE	$2t_C, 2t_B, 2t_A$	-, -, -	$\frac{3}{2}c, \frac{3}{2}b, \frac{3}{2}a$	-, -, -
ABE	$a, 2t_B, c$	-, $\pi - \beta$, -	-, $\frac{1}{2}b$, -	v_A, -, v_C
ABD	$b, 2t_A, c$	-, π, - α,-	-, $\frac{1}{2}a$, -	v_B, -, v_C
ACD	$c, 2t_A, b$	-, $\pi - \alpha$, -	-, $\frac{1}{2}a$, -	v_C, -, v_B

čáru $ABCA$, která není částí přímky. Tento návyk nás však může v případě čtyřúhelníku dovést do nečekaných situací. Lomená čára $ABCDA$, která není částí přímky, může mít i jiné tvary, než je ten, který má obvod konvexního čtyřúhelníku. Na obr. 41 jsou znázorněny možné případy.

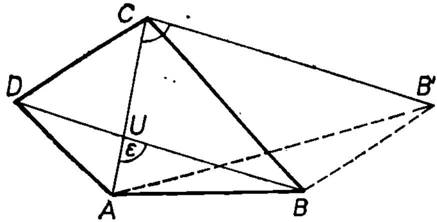
Při řešení úloh požadujících sestrojení čtyřúhelníku sestrojujeme vlastně lomenou čáru $ABCDA$ na základě velikostí jejích úseček, úhlů sevřených jejími úsečkami apod. Nemůžeme se proto divit, že nám vyjdou i podivné čtyřúhelníky jako na obr. 41b, c, d, e, f.



Obr. 41 a—f

Příklad 23. *Jsou dány úsečky a, c, e, f a úhel ε. Sestrojte čtyřúhelník ABCD, v němž je AB = a, CD = c, AC = e, BD = f a úhel ε je shodný s tím úhlem přímek AC, BD, jehož ramena procházejí body A, B.*

Rozbor. Předpokládáme, že úloha má řešení, označme průsečík jeho úhlopříček písmenem U (obr. 42). Je zřejmé, že úhlu ε nemůžeme využít, jestliže neznáme bod U. Napadá tu myšlenka, zda by nebylo možno úhel přemístit tak, aby na jeho ramenech ležely dané úsečky (v příkladě 16 jsme toho úspěšně využili). Zobrazme v posunutí $T(D \to C)$ bod B v bod B', tím přejde úhlopříčka BD v úsečku CB' rovnoběžnou s DB, je proto $\sphericalangle ACB' = \varepsilon$. Dokázali jsme:



Obr. 42

Má-li čtyřúhelník $ABCD$ požadované vlastnosti, má trojúhelník $AB'C$ stranu $AC = e$, $CB' = f$, $\sphericalangle ACB' = \varepsilon$.

Na základě těchto vlastností trojúhelník $AB'C$ snadno sestrojíme. Zabývejme se však vztahem bodů D, B k trojúhelníku $AB'C$. Dokažte si sami, že platí:

Má-li trojúhelník $AB'C$ uvedené vlastnosti,
leží bod B 1. *na kružnici k_1 (B', c),*
2. *na kružnici k_2 (A, a).*

Bod D je obrazem bodu C v posunutí T^{-1} $(B' \to B)$.

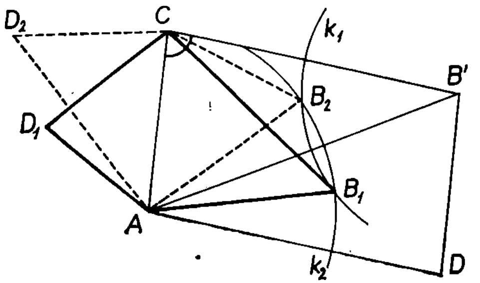
Celý svůj postup stavíme na předpokladu, že vznikne trojúhelník $AB'C$. Vznikne opravdu vždy? Zamyslete se nad tím, v příkladě 17 jste viděli, že to může být rozhodující pro další postup.

Konstrukce.

K_1: *Sestrojíme trojúhelník $AB'C$, který má $\sphericalangle ACB' = \varepsilon$, $AC = e$, $CB' = f$.*
K_2: *Sestrojíme kružnici k_1 (B', c).*
K_3: *Sestrojíme kružnici k_2 (A, a).*
K_4: *Sestrojíme společný bod B kružnic k_1, k_2.*
K_5: *Sestrojíme obraz D bodu C v posunutí T^{-1} $(B' \to B)$.*
K_6: *Sestrojíme lomenou čáru $ABCDA$.*

Zkouška. Z konstrukcí K_3, K_4 plyne, že je $AB = a$, z konstrukce K_1 vyplývá $AC = e$. Obdobně snadno ověříte, že je $BB' = c$, $CD = BB' = c$ a $BD = B'C = f$. Úhel $B'CD = \varepsilon$, jeho rameno CB' přejde v posunutí T^{-1} v polopřímku DB. Je proto úhel ε shodný s tím úhlem přímek AC, BD, jehož ramena procházejí body A, B. Ověřili jsme, že sestrojený útvar se čtyřmi význačnými body A, B, C, D má všechny vlastnosti, které úloha požaduje. Nemůžeme však dokázat, že tento útvar je konvexním čtyřúhelníkem. Popsanou konstrukcí jsme sestrojili uzavřenou lomenou čáru $ABCDA$, která má vlastnosti žádané v textu úlohy.

Diskuse. Počet uzavřených lomených čar $ABCDA$ závisí pouze na počtu společných bodů kružnic k_1, k_2. Zajímá-li nás, kdy je tato čára obvodem konvexního čtyřúhelníka, musíme najít množinu všech bodů B, pro něž platí, že úsečky BD, AC mají společný vnitřní bod. Dokažte si, že takovou množinou bodů B je vnitřek rovnoběžníka $ACB'E$ (obr. 43). Na obr. 43 vidíte, že mohou existovat také dva konvexní čtyřúhelníky $ABCD$,



Obr. 43

které jsou řešením úlohy. Proveďte si sami podrobnou diskusi.

22. Sestrojte příčku dvou rovnoběžek a, b, která je k oběma kolmá a je z daného bodu M vidět pod daným úhlem α.

[Sestrojte nejdříve libovolnou příčku a množinu bodů, z nichž je vidět pod daným úhlem α.]

23. Jsou dány dvě nesoustředné kružnice k_1, k_2 a směr s. Sestrojte přímku směru s, na které vytínají dané kružnice shodné tětivy.

[Přemístěte vhodně střed jedné tětivy do středu druhé tětivy.]

24. Zobecněte úlohu v příkladě 20 v tom smyslu, že body P, Q budou libovolné dva body kružnice. Využijte vlastností obvodového úhlu.

25. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno:

1. t_A, α, v_B,	4. t_B, c, a,
2. t_A, b, α,	5. t_B, γ, c,
3. t_A, t_B, t_C,	6. t_C, v_A, β.

[Najděte vždy v tabulce trojúhelník, jehož prvky obsahují dané prvky trojúhelníku ABC. Zjistěte, které strany, úhly nebo výšky pomocného trojúhelníku znáte a jak jej pomocí nich setrojíte. Zapište si, jak potom sestrojíte vrcholy hledaného trojúhelníku ABC.]

26. Všimněte si, že v tabulce jsou vyjádřeny výšky všech trojúhelníků pomocí výšek výchozího trojúhelníku ABC, kdežto těžnice jsou někdy vyjádřeny pomocí stran a obráceně. To znamená, že pomocí trojúhelníků zapsaných na třetím až devátém řádku můžeme výhodně řešit ty úlohy, ve kterých jsou dány těžnice s dalšími prvky. Každou z nich lze řešit i dalšími způsoby, pokuste se vyřešit jiným způsobem úlohy ze cvičení 25.

27. Sestrojte rovnoběžník $ABCD$, znáte-li velikosti jeho stran a velikost toho úhlu úhlopříček, jehož ramena procházejí vrcholy A, B.

28. Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, je-li známa odchylka ε přímek AB, CD a dále délky všech stran AB, BC, CD, DA čtyřúhelníku.

[Užijte posunutí $T(D \to C)$ a sestrojte úhel, který má velikost ε a vrchol v bodě A.]

KAPITOLA VI

OTOČENÍ

V předcházejících kapitolách jste se seznámili s podrobnými řešeními úloh pomocí zobrazení a některé z nich jste si sami rozřešili. V této kapitole nebudeme proto rozvádět úvahy o řešení úloh; ukážeme si tři typické úlohy, které řešíme pomocí otočení.

Definice otočení (rotace) vyžaduje *znalost pojmu orientovaného úhlu.* V této publikaci nemůžeme opakovat vlastnosti orientovaných úhlů, budeme je proto považovat za známé. Připomeňme si jen, že (neorientovaný) úhel AVB je možno „orientovat" dvěma různými způsoby. Můžeme považovat za počáteční rameno polopřímku VA a dostaneme tak orientovaný úhel $\widehat{AVB}$, nebo považujeme za počáteční rameno polopřímku VB a dostaneme orientovaný úhel $\widehat{BVA}$.

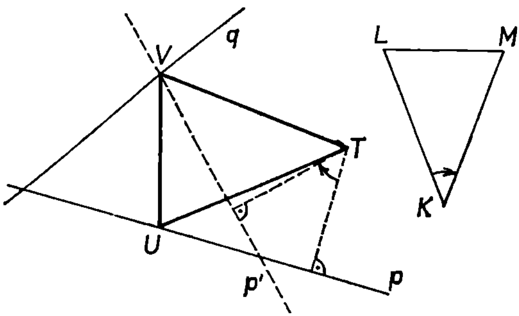
Otočení v rovině je jednoznačně určeno, je-li dán bod S a orientovaný úhel $\hat{\omega}$. Otočení se středem S a úhlem otočení $\hat{\omega}$ budeme značit $R(S, \hat{\omega})$.

Je-li dán (neorientovaný) úhel AVB, existují dvě otočení se středem V, která zobrazují jedno rameno úhlu v druhé rameno. Jsou to otočení $R_1(V, \widehat{AVB})$, $R_2(V, \widehat{BVA})$.

Je vám jistě zřejmé, že uvedené dvě rotace R_1, R_2 jsou zobrazení navzájem inverzní. Zvláštním případem rotace je středová souměrnost, která je, jak víme, totožná se zobrazením k ní inverzním.

Příklad 24. *Jsou dány dvě přímky p, q, bod T a rovnoramenný trojúhelník KLM. Sestrojte trojúhelník TUV podobný trojúhelníku KLM tak, aby vrchol U ležel na přímce d a vrchol V na q.*

Rozbor. Na obr. 44 je zakreslen trojúhelník TUV a dané útvary. Máme opět dva neznámé body U, V, jeden v druhý můžeme zobrazit rotací kolem středu T. Úhel této rotace je buď shodný s orientovaným úhlem $\widehat{LKM}$ nebo s orientovaným úhlem $\widehat{MKL}$.



Obr. 44

Neznámý bod V leží 1. *na přímce q,*
2. *na obrazu p' přímky p v otočení*
$\mathsf{R}_1(T, \widehat{LKM})$ *nebo* $\mathsf{R}_2(T, \widehat{MKL})$.

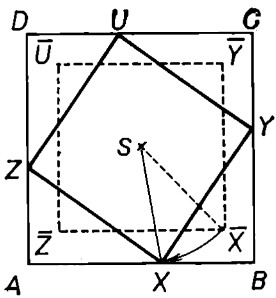
Konstrukce.

K_1: Sestrojíme obraz přímky p v otočení $\mathsf{R}_1(T, \widehat{LKM})$.
K_2: Sestrojíme společný bod V přímek p', q.

K_3: *Sestrojíme obraz U bodu V v otočení* $R_1^{-1}(T, \widehat{MKL}) = R_2$.
K_4: *Sestrojíme trojúhelník TUV.*

Zapište sami konstrukci pomocí $R_2(T, \widehat{MKL})$ a proveďte zkoušku výsledků konstrukce. V diskusi dojdete k závěru, že může existovat také nekonečně mnoho řešení. Při jaké vzájemné poloze přímek p, q nastane takový případ? Narýsujte si jej.

Příklad 25. *Je dán čtverec ABCD a úsečka MN. Sestrojte čtverec XYUV, jehož každý vrchol leží na jedné straně čtverce ABCD a strana XY = MN.*



Obr. 45

Řešení je jednoduché, dokážete-li, že střed čtverce $XYUZ$ je totožný se středem čtverce $ABCD$. Sestrojíme-li libovolný čtverec $\bar{X}\bar{Y}\bar{U}\bar{Z}$ se středem S (obr. 45) shodný se čtvercem $XYUZ$, existuje rotace se středem S, která zobrazí $\bar{X} \to X$, $\bar{Y} \to Y$, $\bar{U} \to U$, $\bar{Z} \to Z$. Úloha je pozoruhodná tím, že neznáme úhel otočení, pouze jeho střed. Musíme proto uvažovat, kde leží obrazy bodu X ve všech otočeních se středem S. Snadno si dokážete, že tímto útvarem je kružnice $k(S, \overline{SX})$. Konstrukce a ostatní části řešení úlohy vycházejí z tohoto závěru rozboru:

Neznámý bod X leží

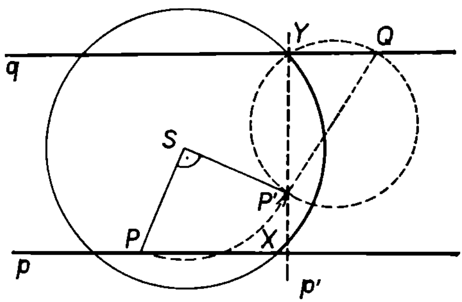
1. *na úsečce* AB,
2. *na kružnici* $k(S, \overline{SX})$.

Poloměr kružnice k můžeme sestrojit i bez pomoci bodu $\overline{X}$, protože je zřejmě $\overline{SX} = \frac{1}{2} MN \,.\, \sqrt{2}$. V diskusi dojdete k nejvýše dvěma různým řešením.

Příklad 26. *Je dána kružnice k(S, r) a dva různé body P, Q. Sestrojte dvě rovnoběžky p, q procházející body P, Q tak, aby protínaly kružnici k v bodech X, Y omezujících čtvrtinu kružnice.*

Řešení. I v tomto případě se nám osvědčí metoda užitá při řešení úloh v příkladech 11 a 20; zobrazíme bod X v bod Y (obr. 46).

Vhodným zobrazením je zřejmě otočení kolem bodu S o pravý úhel v kladném nebo záporném smyslu. Přímka



Obr. 46

p rovnoběžná s přímkou q přejde tímto otočením v přímku p' kolmou ke q. Docházíme k závěru, že

bod Y leží 1. *na dané kružnici k,*
2. *na Thaletově kružnici o průměru $P'Q$.*

Konstrukce.

K_1: *Sestrojíme obraz P' bodu P v rotaci $\mathsf{R}_1(S,\ \hat{\omega} = 90°)$.*
K_2: *Sestrojíme kružnici o průměru $P'Q$.*
K_3: *Sestrojíme společný bod Y kružnic k, k_1.*
K_4: *Sestrojíme bod X jako obraz bodu Y v otočení R_1^{-1}.*
K_5: *Sestrojíme přímky $p = PX$, $q = QY$.*

Popište konstrukci v případě, že použijete rotace $\mathsf{R}_2(S,\ \hat{\omega} = -90°)$. Proveďte si podrobnou zkoušku výsledků konstrukce a diskusi. Kdy bude mít úloha nekonečně mnoho řešení? Jaký je největší možný konečný počet řešení? Narýsujte si jednotlivé případy.

Touto úlohou končí naše společná cesta, během níž jsme poznávali, jak nám mohou shodná zobrazení pomoci při řešení konstrukčních úloh. Pokud jste jen brožuru prolistovali, projděte si ji ještě jednou a zaměřte se na sledování logického postupu řešení a jeho formulování. Poznatky a zkušenosti získané v tomto směru můžete uplatnit při stylizaci řešení soutěžních úloh Matematické olympiády.

29. Je dána kružnice k a bod A. Sestrojte tětivu XY kružnice k, která má danou délku a prochází bodem A.

[Narýsujte si libovolnou tětivu dané délky a použijte vhodného otočení.]

30. Jsou dány dvě soustředné kružnice k_1, k_2 a bod A ležící na k_1. Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC, jehož vrchol B leží na k_1 a vrchol C na k_2.

[Znáte střed i úhel otočení převádějícího bod B v bod C.]

31. Jsou dány dvě různé kružnice k_1, k_2 se společným bodem A. Sestrojte čtverec $ABCD$, jehož vrchol B leží na k_1 a vrchol D na k_2.

32. Je dána kružnice k, bod B a úsečka MN. Sestrojte tětivu $XY = MN$ kružnice k tak, aby byla vidět z bodu B pod úhlem $60°$.

[Postupujte obdobně jako ve cvičení 22.]

Obtížnější úlohy

33. Zobecněte úlohu v příkladě 26 v tom smyslu, aby hledané body X, Y omezovaly oblouk kružnice příslušející středovému úhlu α.

34. Dokažte, že složením středové souměrnosti S a posunutí T vznikne středová souměrnost s jiným středem.

[Zobrazte několik bodů X roviny ve zobrazení ST ($X \to X'$) a sestrojte středy úseček XX'. Používejte vlastností střední příčky trojúhelníka.]

35. Dokažte, že složením lichého počtu středových souměrností vznikne středová souměrnost, kdežto složením sudého počtu středových souměrností vznikne posunutí nebo identita.

[Použijte věty formulované ve cvičení 34 a známé věty, že složením dvou posunutí vznikne posunutí nebo identita.]

36. Narýsujte si čtverec $S_1 S_2 S_3 S_4$. Zdůvodněte pomocí věty vyslovené ve cvičení 35, že každá lomená čára $XYZUV$, jejíž úsečky XY, YZ, ZU, UV mají po řadě středy S_1, S_2, S_3, S_4, je uzavřená, tj. bod $X \equiv V$.

[Zobrazte bod X ve zobrazení, které vznikne složením souměrností S_1, S_2, S_3, S_4 se středy S_1, S_2, S_3, S_4. Porovnejte zobrazení S_1S_2, S_3S_4.]

37. V rovině je dáno pět libovolných bodů S_1, S_2, S_3, S_4, S_5. Sestrojte uzavřenou lomenou čáru $ABCDEA$, která má tu vlastnost, že dané body jsou po řadě středy úseček AB, BC, CD, DE, EA lomené čáry.

[Při rozboru úlohy sestrojte obraz bodu A a libovolného bodu X v zobrazení $S_1S_2S_3S_4S_5$, které dostanete složením středových souměrností podle středů S_1, S_2, S_3, S_4, S_5.]

38. Je dána přímka p s bodem M, kružnice k a úhel α. Sestrojte kružnici, která se dotýká v bodě M přímky p a protíná

danou kružnici tak, že tečny těchto kružnic ve společném bodě svírají úhel o velikosti α.

[V rozboru zvolte osu souměrnosti tak, abyste zobrazili průsečík obou kružnic do bodu M. Obraz kružnice k v této souměrnosti označte k'. Zamyslete se nad tím, zda je možno sestrojit kružnici k' dříve než znáte osu souměrnosti.]

39. Jsou dány tři přímky procházející bodem O a dále je dán bod $A \neq O$. Sestrojte trojúhelník ABC, pro který nastane jedna z možností:

1. jeho výšky leží na daných přímkách,
2. jeho těžnice leží na daných přímkách,
3. osy jeho vnitřních nebo vnějších úhlů leží na daných přímkách.

[První případ je snadný, v dalších užijte vhodné souměrnosti.]

40. Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, jsou-li dány velikosti úseček AC, AD, BC a velikosti úhlů ADB, DBC.

[Jedno z možných řešení začíná konstrukcí jistého trojúhelníku, jehož vnitřní úhel je shodný s rozdílem daných úhlů. Jako část řešení se objevuje úloha obdobná úloze v příkladě 18. Můžete však najít jiné řešení.]

41. Jsou dány přímky a, b procházející po řadě danými body A, B. Dále je dán směr s. Sestrojte přímku daného směru tak, aby protínala přímku a v bodě X, přímku b v bodě Y a aby platilo $AX = BY$.

[Úsečku AX můžete zobrazit na úsečku BY vhodným otočením. Zjistěte velikost některého úhlu s vrcholem X nebo Y, jehož ramena procházejí danými body nebo středem otočení převádějícího přímku a v přímku b.]

ČÁST DRUHÁ

O podobnosti v geometrii

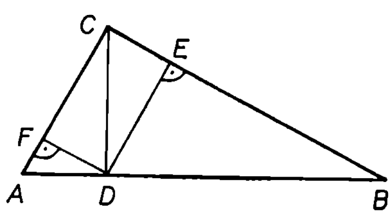
KAPITOLA I

O POMĚRECH

Podobnost trojúhelníků je silnou zbraní euklidovské geometrie. Využívá se jí nejen ke studiu trojúhelníků a mnohoúhelníků, ale i kružnic, kuželoseček a těles. V první kapitole si připomeneme souvislost podobnosti trojúhelníků s trigonometrií, hlavně se však budeme zabývat body a množinami bodů, které mají od daných bodů nebo přímek daný poměr vzdáleností.

1. Malá rozcvička. Na obr. 1 je zobrazen pravoúhlý trojúhelník ABC s několika příčkami kolmými k jeho stranám ($CD \perp AB$, $DE \perp BC$, $DF \perp CA$). Kolik trojúhelníků vidíte na obrázku? Podíváte-li se pozorně, uvidíte jich *sedm*. Dokažte, že jsou všechny navzájem podobné. Co by bylo možno o nich říci, kdyby trojúhelník ABC byl rovnoramenný pravoúhlý?

Víte, že na podobnosti trojúhelníků je založena trigonometrie pravoúhlého trojúhelníku. Zvolte v trojúhel-



Obr. 1

níku ABC na obr. 1 úsečku CD za jednotkovou (tj. $CD = 1$) a vyjádřete velikosti úseček DA, DF, DE, DB, AC, BC jako hodnoty goniometrických funkcí úhlu α. Připíšete-li k úsečkám jejich velikosti, dostanete trigonometrii „na dlani". Pomocí vět Euklidových a věty Pythagorovy můžete pak snadno odvodit známé i méně známé vztahy mezi šesti goniometrickými funkcemi ostrého úhlu α.

1. Vyjádříte-li velikosti úseček na obr. 1 také jako hodnoty goniometrických funkcí úhlu β, můžete odvodit vztahy mezi goniometrickými funkcemi doplňkových úhlů α, β.

2. Dokažte pomocí goniometrického vyjádření velikostí úseček na obr. 1, že v každém pravoúhlém trojúhelníku ABC s úhlem $\gamma = 90°$ je $c + v_c > a + b$.

3. Vepište do pravoúhlého trojúhelníku dva čtverce, z nichž jeden má strany na odvěsnách a druhý má jednu stranu na přeponě (všechny vrcholy těchto čtverců leží na obvodu trojúhelníku). Zjistěte výpočtem, který z těchto čtverců má větší stranu.

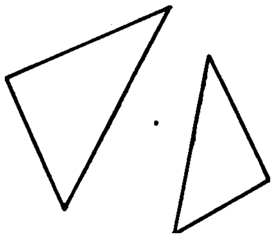
4.* Pokračujte dále v konstrukci pat kolmic mezi rameny úhlů α, β na obr. 1 (z bodů E, F kolmice na AB, z pat těchto kolmic zpět kolmice na AC nebo BC atd.). Určete úhrnnou délku všech úseček, které lze tímto způsobem sestrojit.

5. Dokažte, že obsah ostroúhlého trojúhelníku ABC je číslo $P = \dfrac{abc}{4r}$, kde r je poloměr kružnice opsané. Použijte pravoúhlých trojúhelníků se stranami $\dfrac{1}{2}c$, r a v_b, a. Platí věta i pro pravoúhlé a tupoúhlé trojúhelníky?

2. Zajímavé dvojice trojúhelníků. Víte, že dva trojúhelníky, které mají úměrné strany, jsou podobné.

Zajímavou dvojicí podobných trojúhelníků jsou trojúhelníky, z nichž jeden má strany a, ka, k^2a a druhý ka, k^2a, k^3a (číslo $k \neq 1$ je kladné, $a > 0$). Tyto trojúhelníky se shodují v pěti dvojicích prvků (třech úhlech a dvou stranách), ale nejsou shodné.

Čím to je, že se vymykají větám o shodnosti trojúhelníků? Vyznačíte-li si na obr. 2 shodné strany trojúhelníků, najdete odpověď snadno.



Obr. 2

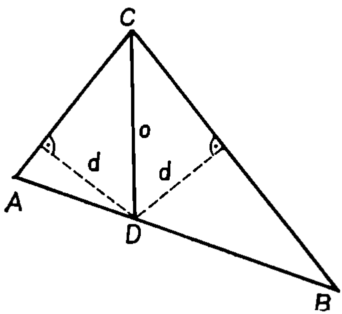
6. Jakých hodnot může nabývat k, má-li být zajištěna existence trojúhelníku se stranami a, ka, k^2a?

7. Pro které hodnoty k je trojúhelník ze cvičení 6 pravoúhlý? Sestrojte jej.

Jinou zajímavou dvojicí trojúhelníků jsou trojúhelníky ADC, BDC na obr. 3. Bod D je průsečíkem osy úhlu γ s přímkou AB, má proto od přímek CA, CB stejné vzdálenosti d. Obsahem trojúhelníku ADC je číslo $P_1 = \frac{1}{2} AD \cdot v_c = \frac{1}{2} AC \cdot d$, obsahem trojúhelníku BDC je číslo $P_2 = \frac{1}{2} BD \cdot v_c = \frac{1}{2} BC \cdot d$. Získáváme tak poměr $P_1 : P_2 = AD : BD = AC : BC$. Poměr vzdáleností bodu D od A, B je roven poměru vzdáleností bodu C od A, B.

Proč nejsou trojúhelníky ADC, BDC podobné, když se shodují v jednom úhlu a mají úměrné dvě dvojice stran?

Zřejmě proto, že shodné úhly nejsou sevřeny úměrnými stranami. Vidíte, jak záleží na každém předpokladu vět o shodnosti nebo podobnosti trojúhelníků. Povrchnost může svést k ukvapeným a nesprávným závěrům.



Obr. 3

8. Je-li $AC \neq BC$, protne přímku AB i osa vnějšího úhlu trojúhelníku u vrcholu C. Dokažte, že pro průsečík D' platí $AD' : BD' = AC : BC$.

9. Vyjádřete délky úseček AD, BD resp. AD', BD' pomocí čísel a, b, c.

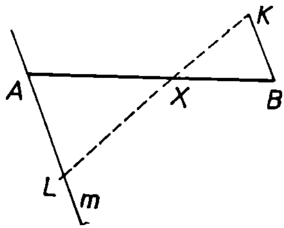
$$\left[AD = \frac{bc}{a + b}\right]$$

3. Dělicí poměr. Podobnosti trojúhelníků využíváme k sestrojení bodu X, který „dělí úsečku v daném poměru". Výrazem v uvozovkách vyjadřujeme skutečnost, že zlomek $\frac{AX}{BX}$ je roven předem danému číslu. Na obr. 4 je sestrojen bod X, který dělí úsečku AB v poměru $\sqrt{2} : 1$. Použili jsme rovnoběžných úseček AL, BK, $AL = \sqrt{2}$, $BK = 1$. Dokažte, že je opravdu $\frac{AX}{BX} = \sqrt{2}$.

Podívejme se nyní na obr. 4 „jinýma očima“, představme si, že body A, B, K a přímka m jsou pevnými útvary, $m \parallel BK$, $BK = 1$. Jestliže se bod X pohybuje po přímce AB, pak přímka KX protíná m v různých bodech L. Každému bodu $X \neq B$ přímky AB můžeme přiřadit souřadnici λ bodu L na číselné ose m (bod A je na číselné ose m počátkem, kladná poloosa leží v téže polorovině jako bod K).

Pro bod X sestrojený na obr. 4 je $\lambda = -\sqrt{2}$, pro všechny body X ležící uvnitř úsečky AB je $\lambda < 0$, pro body X ležící vně úsečky AB je $\lambda > 0$. Pro žádný bod přímky není $\lambda = 1$. Popsanou geometrickou představou jsme vystihli základní vlastnosti pojmu dělicího poměru bodu X přímky AB vzhledem k bodům A, B.*)

*Dělicím poměrem bodu X vzhledem k bodům A, B nazýváme číslo, jehož absolutní hodnota je rovna $AX : BX$ a které je kladné pro body X ležící vně úsečky AB a záporné pro body X ležící uvnitř úsečky AB.**)



Obr. 4

*) Úplný název definovaného pojmu zní takto: dělicí poměr bodu $X \neq A, B$ přímky AB vzhledem k bodům A, B. Používáme však raději stručnějšího označení nebo značky (ABX).

Je zřejmé, že dělicí poměr (ABX) je roven souřadnici λ, o které jsme hovořili. Obrázek 4 ukazuje, jak lze sestrojit bod X, který má vzhledem k bodům A, B daný dělicí poměr. Hledaný bod X je průsečíkem přímky AB s přímkou KL, bod L je tím bodem přímky m, který má souřadnici $\lambda = (ABX)$.

10. Zvolte body A, B, K a přímku m jako na obr. 4 a sestrojte body X, Y, Z tak, aby bylo $(ABX) = \frac{2}{3}$, $(ABY) = -\frac{5}{2}$, $(ABZ) = 4$.

11. Určete podle definice dělicí poměr (ABS), je-li bod S středem úsečky AB. Čemu je roven (C_1CT), je-li T těžištěm trojúhelníku ABC a bod C_1 středem strany AB?

12. Určete $\lambda_1 = (ABD)$, $\lambda_2 = (ACF)$ a $\lambda_3 = (CEB)$ na obr. 1. $[\lambda_1 = -\operatorname{cotg}^2\alpha]$

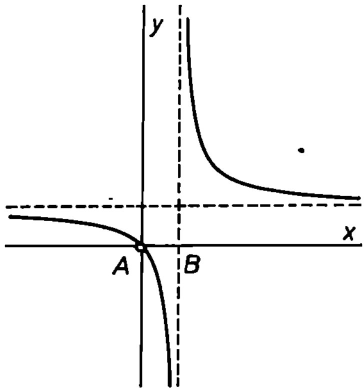
13. Určete (ABD), (ABD') na obr. 3. Užijte výsledku cvičení 9.

14.* Platí-li pro čtyři body A, B, X, Y jedné přímky vztah $(ABX) = -(ABY)$, nazýváme uspořádanou čtveřici $ABXY$ harmonickou čtveřicí bodů. Dokažte, že
a) je-li $ABXY$ harmonická čtveřice, je také $ABYX$ harmonická čtveřice;
b) spojíme-li průsečík U úhlopříček AC, BD lichoběžníku $ABCD$ s průsečíkem V jeho prodloužených ramen, protne tato přímka základny v bodech X, Y tak, že $UVXY$ je harmonickou čtveřicí.

4. Dělicí poměr $\lambda = (ABX)$ můžeme vyjádřit jako funkci proměnné souřadnice x bodu X přímky AB. Zvolíme bod A za počátek a bod B za jednotkový bod číselné osy AB (je tedy $AB = 1$). Pro bod X úsečky AB je $AX = x$, $BX = 1 - x$, $\lambda = (ABX) = -\frac{AX}{BX} = \frac{x}{x-1}$. Má-li bod X souřadnici $x < 0$, je $AX = |x| =$

$= -x, \quad BX = 1 + |x| = 1 - x, \quad (ABX) = \frac{AX}{BX} =$
$= \frac{x}{x-1}$. Je-li $x > 1$, je $AX = x$, $BX = x - 1$, $(ABX) = \frac{x}{x-1}$. Ve všech případech je tedy $\lambda =$
$= \frac{x}{x-1}$.*) Graf této funkce vidíte na obr. 5, je jím rovnoosá hyperbola. Asymptoty hyperboly jsou vytaženy čárkovaně.

15. Co můžete na základě grafu říci o hodnotách (ABX) pro body X ležící na polopřímce opačné k polopřímce AB nebo BA?



Obr. 5

*) Uvedená funkce je definována pro všechna $x \neq 1$, dělicí poměr se nedefinuje pro $X \equiv A$, tj. $x = 0$. Graf funkce můžeme sestrojovat podle obr. 4, hodnoty proměnné x odměřujeme na přímce AB a hodnoty proměnné $y = \lambda$ na přímce m.

16. Ze vztahu $\lambda = \frac{x}{x-1}$ lze výpočtem potvrdit, že každé hodnotě $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq 1$ můžeme přiřadit právě jeden bod přímky AB, pro který je $(ABX) = \lambda$.

17. Dokažte, že na přímce AB existují právě dva body X, pro které $\frac{AX}{BX} = k \neq 1$. Zvolte některé kladné $k \neq 1$ a sestrojte tyto body.
[Podle definice dělicího poměru je $|\lambda| = k$.]

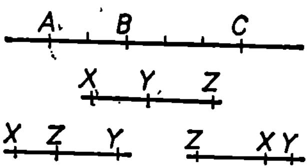
5. Dělicí poměr přiřazujeme *uspořádané* trojici různých bodů téže přímky, nemusí proto být $(ABC) = (CAB)$ nebo (BCA) apod. Vypočítáte-li podle definice všech šest možných dělicích poměrů příslušných bodům A, B, C na obr. 6, dostanete $(ABC) = \frac{5}{3}$, $(BAC) = \frac{3}{5}$, $(BCA) = \frac{2}{5}$, $(CBA) = \frac{5}{2}$, $(CAB) = -\frac{3}{2}$, $(ACB) = -\frac{2}{3}$.

Je nápadné, že vždy součin nebo součet dvou po sobě následujících dělicích poměrů je roven jedné. Nejde zde o náhodu, protože platí tyto věty o uspořádaných trojicích bodů utvořených ze tří daných bodů:

Liší-li se dvě uspořádané trojice bodů jen v pořadí prvního a druhého bodu, je součin jejich dělicích poměrů roven jedné.

Liší-li se dvě uspořádané trojice bodů jen v pořadí druhého a třetího bodu, je součet jejich dělicích poměrů roven jedné.

Při důkazu těchto vět je třeba prodiskutovat trojí možnou polohu bodů X, Y, Z na přímce (obr. 6). Ve všech třech případech leží bod Z buď současně uvnitř úseček XY, YX nebo současně vně těchto úseček. Proto mají dělicí poměry (XYZ), (YXZ) stejná znamení a z rovnosti $(XYZ).(YXZ) = \frac{XZ}{YZ} \cdot \frac{YZ}{XZ} = 1$ plyne



Obr. 6

$X YZ).(YXZ) = 1$. Při poloze a) na obr. 6 je $(XYZ) = \frac{XZ}{YZ}$, $(XZY) = -\frac{XY}{YZ} = -\frac{YX}{ZY}$, $(XYZ) + (XZY) = \frac{XZ - YX}{YZ} = 1$. Dokončete důkaz v obou zbývajících případech.

18. Je-li $(XYZ) = \lambda$, je $(XZY) = 1 - \lambda$, $(YZX) = 1 - \frac{1}{\lambda}$ $(ZYX) = \frac{\lambda}{\lambda - 1}$, $(ZXY) = \frac{1}{1 - \lambda}$. Při důkazu užijte těch výměn bodů, o kterých se hovoří v dokázaných větách.

19. Pro které hodnoty λ jsou si rovny některé dvojice dělicích poměrů uvedených ve cvičení 18? Např. pro které λ je $(XYZ) = (ZYX)$?

20. Dokažte, že koeficient $\varkappa$ stejnolehlosti se středem S, která zobrazuje bod X do bodu X', lze vyjádřit jako dělicí poměr $(X'XS)$.*)

---

*) Koeficient stejnolehlosti budeme značit řeckým písmenem $\varkappa$ (kappa), protože písmene k jsme již použili a i nadále budeme používat k označení poměru podobnosti, tj. kladného čísla.

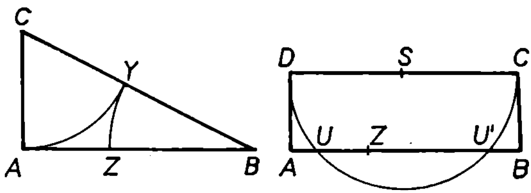
21. Stejnolehlost s koeficientem $\varkappa = -\frac{3}{4}$ a středem P zobrazuje bod M do bodu N. Jaký koeficient má stejnolehlost se středem M, která zobrazí bod N do bodu P?

22.* Je-li čtveřice $XYZU$ harmonická, jsou harmonické i čtveřice $XYUZ$, $ZUXY$, $UZYX$ a ještě čtyři další. Určete tyto čtveřice.

6. Zlatý řez. Zlatým řezem úsečky rozumíme její rozdělení na dvě úsečky, z nichž menší je ku větší v témž poměru jako větší k celé úsečce.

Dělí-li bod Z jednotkovou úsečku AB v poměru zlatého řezu a označíme-li velikost menší úsečky AZ písmenem z, je zřejmě $0 < z < 1$, $AB = 1$, $ZB = 1 - z$. Platí proto $z : (1 - z) = (1 - z) : 1$, $z^3 - 3z + 1 = 0$. Podmínkám vyhovuje jeden kořen této rovnice, a to $z = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$.

Bod Z úsečky AB získáme, provedeme-li konstrukci algebraického výrazu $z = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$. Jednu z možných konstrukcí vidíte na obr. 7a, kde má pravoúhlý trojúhelník ABC odvěsnu $AC = \frac{1}{2} AB$. Bod A je otočen kolem C do bodu Y úsečky BC, otočením bodu Y kolem



Obr. 7 a, b

B získáme bod Z úsečky AB. Dokažte správnost konstrukce. V poměru zlatého řezu dělí úsečku AB také bod Z' souměrný s bodem Z podle středu úsečky AB, pro něj je však úsečka AZ' větší úsečkou řezu.

23. Vypočítejte hodnotu dělicího poměru (ABZ) v případě, kdy Z dělí úsečku AB zlatým řezem. Sestrojte bod Z podle cvičení 10.

24. Zvolte úsečku AZ a sestrojte bod B tak, aby bod Z dělil AB v poměru zlatého řezu.
[Využijte vztahu mezi (ABZ) a (AZB)].

25. Dokažte, že úsečku AB lze rozdělit zlatým řezem pomocí obdélníku $ABCD$ na obr. 7b, kde je $AD = \frac{1}{3} AB$. Bod S je středem úsečky CD, kružnice o průmeru CD protíná AB v bodech U, U', $AZ = 3 . AU$.

26. Sestrojte obdélník, který má strany shodné s úsečkami AZ, BZ na obr. 7. Oddělte od obdélníku čtverec o straně shodné s AZ. Jaký je poměr stran zbývajícího obdélníku?

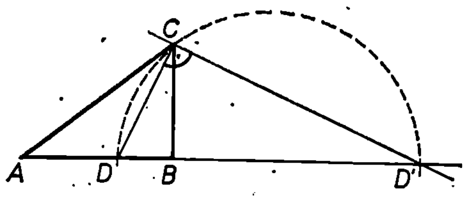
27. Sestrojte k bodu Z na obr. 7 bod T souměrný s ním podle středu B. Dokažte, že bod B dělí úsečku AT v poměru zlatého řezu.

28.* Sestrojte body $Z_0, Z_1, Z_2, \ldots$ tak, aby bod Z_n dělil úsečku $Z_{n-1} Z_{n+1}$ v poměru zlatého řezu a úsečka $Z_{n-1} Z_n$ byla větší úsečkou tohoto řezu. Stanovte délku nejkratší úsečky, která obsahuje všechny body Z_n.

7. Důležitá množina bodů. Představme si tenké gumové vlákno, které je upevněno v bodech A, B na obr. 8. Uchopíme-li je v bodě D, můžeme je protáhnout tak, že bod D přejde do bodu C. Původní úsečky AD, BD se protáhnou na úměrné úsečky AC, CB.*) *Po jaké dráze by se pohyboval bod D z původní polohy na přímce AB*

*) Na obr. 8 je stejně jako na obr. 3 přímka CD osou úhlu γ trojúhelníku ABC. Je proto $AD : BD = AC : BC$.

do bodu C v případě, že by se i během pohybu protahovaly úsečky AD, BD v témž poměru?



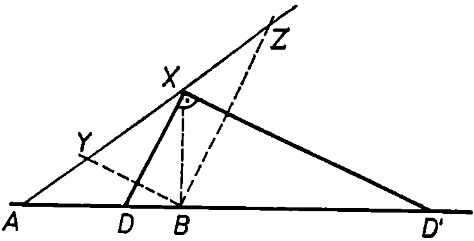
Obr. 8

Otázku zodpovíme, použijeme-li geometrických vlastností napínaného vlákna. Označíme-li libovolnou polohu bodu D písmenem X, jde nám o *určení množiny všech bodů X, pro které je $AX = k.BX$* (k je kladná konstanta). Je-li $k = 1$, je množinou bodů X zřejmě osa úsečky AB.

Je-li $k \neq 1$, mají podle cvičení 17 požadovanou vlastnost právě dva body D, D' přímky AB, pro které platí $(ABD) = -k$, $(ABD') = k$. Každý bod X neležící na AB, pro který platí $AX = k.BX$, je vrcholem pravého úhlu nad úsečkou DD' (osy vedlejších úhlů jsou navzájem kolmé). Dospíváme k závěru, že každý bod X, pro který platí $AX = k.BX$, leží na kružnici o průměru DD'.

Dokažme ještě, že pro každý bod X, který leží na kružnici s průměrem DD', platí $AX = k.BX$. Je-li $X \neq D$, D' je $XD \perp XD'$ (obr. 9). Veďme bodem B rovnoběžky s XD, XD' a sestrojme jejich průsečíky Z, Y s přímkou AX. Protože platí $AD = k.BD$, je též $AX = k.XZ$, obdobně plyne z rovnosti $AD' = k.BD'$ vztah $AX = k.XY$. Je tedy $XY = XZ$ a pro bod B jako vrchol pravého úhlu nad ZY platí $BX = XZ = XY$. Dosazením do některé rovnosti pro AX dostaneme $AX = k.BX$.

Dokázali jsme tak důležitou větu:
Jsou-li dány dva různé body A, B a číslo $k > 0$, $k \neq 1$,



Obr. 9

je množinou bodů X, pro které platí $AX = k.BX$, jistá kružnice se středem na přímce AB. Tuto kružnici nazýváme Apolloniovou kružnicí.

Abychom si ušetřili psaní, budeme označovat Apolloniovu kružnici příslušnou dvojici A, B a koeficientu k značkou $\mu(A, B, k)$. Množinu bodů, ze kterých je vidět úsečku AB pod úhlem α, budeme označovat $\mu\,(A, B, \alpha)$, záměna s Apolloniovou kružnicí je však vyloučena. Průměr DD' kružnice $\mu(A, B, k)$ sestrojujeme na základě dělicích poměrů $(ABD) = -k$ a $(ABD') = k$ (obr. 10).

29. Sestrojte $\mu_1\left(A, B, \frac{2}{3}\right)$, $\mu_2\,(A, B, 3)$ a $\mu_3\,(A, B, \sqrt{2})$.

30. Jaký je vztah mezi $\mu_1\,(A, B, k)$ a $\mu_2\left(A, B, \frac{1}{k}\right)$?

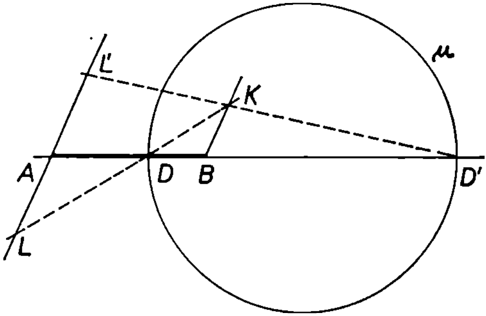
31. Je dán trojúhelník ABC, sestrojte $\mu_1(A, B, k_1)$, $\mu_2(B, C, k_2)$ a $\mu_3(A, C, k_1k_2)$. Jakou vzájemnou polohu mají kružnice μ_1, μ_2, μ_3?

32. Dokažte, že množinou bodů, z nichž jsou dvě nesoustředné kružnice s různými poloměry vidět pod shodnými úhly, je jistá část nebo celá Apolloniova kružnice $\mu(S_1, S_2, ?)$.

33. Využijte ke konstrukci průměru DD' kružnice $\mu(A, B, k)$ vztahů rovnoběžnosti na obr. 9. Zvolte $AX = k$, $XY = XZ =$

$= 1$, BX libovolně (bod X pak nebude ležet na μ). Popište konstrukci a dokažte její správnost.

34.* Vyšetřete analyticky množinu bodů X, pro které je $AX = k . BX$.



Obr. 10

8. Konstrukční využití Apolloniovy kružnice. Pomocí Apolloniovy kružnice se řeší úlohy, ve kterých lze využít poměru vzdáleností neznámého bodu od bodů známých.

Příklad 1. *Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno c, t_c, $v_a : v_b = 3 : 2$.*

Rozbor. Má-li trojúhelník ABC na obr. 11 požadované vlastnosti, je $AC : BC = v_a : v_b = 3 : 2$. Bod C tedy náleží Apolloniově kružnici $\mu\left(A, B, \frac{3}{2}\right)$ a kružnici $k_1(S, t_c)$.

Konstrukce.

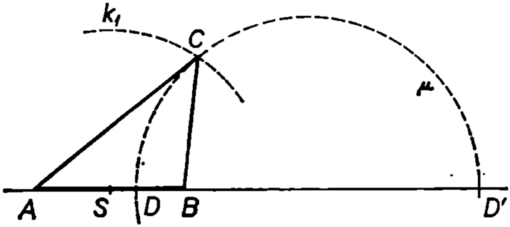
K_0: *Umístíme úsečku $AB = c$.*

K_1: *Sestrojíme střed S úsečky AB a kružnici $k_1(S, t_c)$.*

K_2: *Sestrojíme* $\mu\left(A, B, \frac{3}{2}\right)$.

K_3: *Sestrojíme společný bod* C *kružnic* μ, k_1.

K_4: *Sestrojíme trojúhelník* ABC.



Obr. 11

Zkouška. Sestrojený trojúhelník ABC má zřejmě stranu $AB = c$ a těžnici $CS = t_c$. Je $AC = \frac{3}{2} \,.\, BC, CA : CB = 3 : 2$, $v_a : v_b = 3 : 2$.

Diskuse. Konstrukce K_1, K_2 mají jediné řešení. Konstrukcí K_3 získáme dva, jeden nebo žádný bod C. Je-li bod C jediný, leží na přímce AB a není vrcholem trojúhelníku ABC. Sestrojíme-li dva různé body C, jsou souměrné podle přímky AB a sestrojené trojúhelníky jsou shodné.

35. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno

a) c, γ, $b : a = 2 : 1$,

b) c, $a : b$, $t_c : a$,

c) a, $v_b : v_c$, v_a,

d) b, t_b, $t_a : t_c$.

36. Jsou dány body A, B ležící uvnitř téhož průměru kružnice $k\,(S, r)$. Sestrojte dvě shodné tětivy kružnice, které mají společný jeden krajní bod a každá z nich prochází jedním z bodů A, B

[Určete osu úhlu sevřeného tětivami ve společném bodě.]

37. Sestrojte bod, z něhož jsou vidět pod shodnými úhly tři úsečky AB, BC, CD ležící na téže přímce (bod B leží mezi A, D a bod C mezi B, D).

[Využijte os úhlů.]

38. Sestrojte bod, z něhož jsou vidět tři dané kružnice pod shodnými úhly.

[Využijte výsledku cvičení 32.]

39.* Jsou dány body A, B, C, D ležící v tomto pořadí na přímce, je $AB = 2.BC = 3.CD$. Sestrojte bod X roviny, pro který je $\sphericalangle AXC = \sphericalangle BXD$.

[Porovnejte obsahy trojúhelníků, které mají u vrcholu X shodné úhly a vypočítejte tak poměry $AX : DX$, $BX : CX$.]

9.* Doplněk pro náročné čtenáře, kteří se cítí „ošizeni" tím, že jsem při diskusi v příkladě 1 nestanovili, při jakém vztahu mezi c, t_c úloha má nebo nemá řešení. Při podrobné diskusi musíme umět stanovit střed a poloměr Apolloniovy kružnice $\mu(A, B, k)$.

Zvolme na přímce AB souřadnicový systém tak, aby bod A byl jeho počátkem a bod B měl souřadnici $c > 0$ Souřadnici x bodu D ležícího mezi A, B vypočítáme z podmínky $x = k(c - x)$, $x = \dfrac{kc}{k+1}$. Souřadnici x' bodu D' zjistíme obdobně, $x' = \dfrac{kc}{k-1}$. Střed Q kružnice μ má souřadnici $q = \dfrac{x + x'}{2} = \dfrac{k^2c}{k^2 - 1}$. Poloměrem kružnice μ je číslo $r = |q - x| = \left|\dfrac{kc}{k^2 - 1}\right|$.

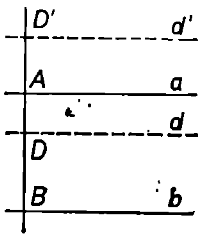
Apolloniova kružnice použitá v příkladě 1 má střed Q o souřadnici $q = \dfrac{9}{5}c$, středná QS kružnic μ, k_1 má délku $s = \dfrac{13}{10}c$. Poloměr kružnice μ je $r = \dfrac{6}{5}c$. Výpočtem zjistíme, že se kružnice μ, k_1 protínají právě tehdy, když platí $12c - 10t_c < 13\,c < 12\,c + 10\,t_c$ neboli $c < 10\,t_c$.

40.* Sestrojte si větší počet Apolloniových kružnic při pevných bodech A, B a různých hodnotách k. Dokažte, že každá kružnice μ (A, B, k) je kolmá na kružnici o průměru AB.

[Vyjádřete podmínku kolmosti pomocí vztahu mezi poloměry a střednou kružnic.]

10.* Několik dalších množin bodů. Doplňme si ještě další množiny bodů charakterizované konstantním poměrem vzdáleností od daných útvarů.

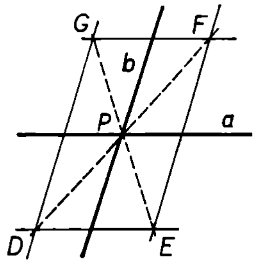
a) Zvolme dvě rovnoběžky a, b (obr. 12). Označme vzdálenosti libovolného bodu X roviny od přímek a, b písmeny x_a a x_b. *Hledejme množinu všech bodů X, pro které je $x_a = kx_b$, $(k > 0)$.*



Obr. 12

Je-li $k = 1$, je hledanou množinou nepochybně osa o pásu (a, b). Je-li $k \neq 1$, můžeme vyhledat body množiny na libovolné přímce p kolmé k a, b. Jde zřejmě o body D, D' přímky p, pro které je $(ABD) = -k$, $(ABD') = k$. Dokažte, že hledanou množinou je dvojice přímek d, d' rovnoběžných s a, b a procházejících body D, D'.

b) Nechť jsou dány dvě různoběžky a, b (obr. 13) s průsečíkem P. Sestrojíme-li pomocí rovnoběžek ve vzdálenosti $x_b = 1$, $x_a = k$ body D, E, F, G, náležejí tyto body množině všech bodů X, pro které platí $x_a = kx_b$, *Dokažte, že množinou všech bodů X, pro které je $x_a = kx_b$, je dvojice přímek PD, PE.* Při důkazu použijete podobnosti trojúhelníků. Nezapomeňte na důkaz toho, že každý bod X, pro který je $x_a = kx_b$, leží na jedné z přímek PD, PE.



Obr. 13

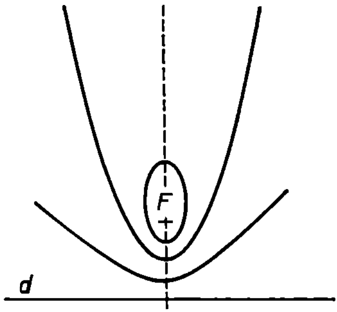
c) *Zvolíme-li číslo $k > 0$, bod F a přímku d, která jím neprochází, je množinou všech bodů X, pro které je $FX = kx_d$ kuželosečka* (obr. 14).

Při $k = 1$ jde samozřejmě o parabolu. Pata D kolmice z bodu F na přímku d je průsečíkem tečen paraboly v těch jejích bodech T, U, které leží na kolmici vedené ohniskem k její ose.

Při $k < 1$ je množinou všech bodů X elipsa s jedním ohniskem v bodě F a osou kolmou k d. Tato elipsa má za vrcholovou kružnici (tj. kružnici, jejímž průměrem je hlavní osa elipsy) Apolloniovu kružnici $\mu(F, D, k)$. Bod D je opět průsečíkem tečen elipsy v bodech T, U. ležících na kolmici vedené ohniskem F k hlavní ose

Při $k > 1$ je množinou všech bodů X hyperbola s týmiž vlastnostmi jako elipsa.

Důkaz věty o elipse a hyperbole je snadný, užijeme-li řezů rotační kuželové plochy rovinou. Ovládáte-li základ analytické geometrie kuželoseček, můžete provést důkaz vět analyticky. Zvolte přímku d za osu x kartézského souřadnicového systému a bod $F \equiv (0;\ p)$ na ose y.



Obr. 14

Z analytického vyjádření podmínky $FX = kx_d$ získáte po úpravě rovnici hledané množiny ve tvaru

$$x^2 + y^2(1 - k^2) - 2py + p^2 = 0.$$

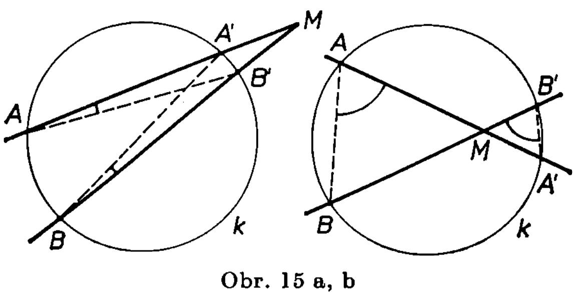
Diskusí rovnice pro $k < 1$, $k = 1$, $k > 1$ dokážete vyslovená tvrzení.

KAPITOLA II

O TROJÚHELNÍKU A KRUŽNICI

Ve druhé kapitole si připomeneme úzkou souvislost mocnosti bodu ke kružnici s podobností trojúhelníků. Využijeme jí k odvození jedné nutné a postačující podmínky pro to, aby čtyři body roviny ležely na jedné kružnici. V dalších odstavcích se budeme zabývat význačnými body, přímkami a kružnicemi trojúhelníků.

11. Mocnost bodu ke kružnici. Nechť je dána kružnice $k(S, r)$ a bod M neležící na této kružnici (obr. 15a, b). V bodě M se protínají (případně po prodloužení) tětivy AA', BB' kružnice k. Pomocí obvodových úhlů snadno dokážeme, že je $\triangle AMB' \sim \triangle BMA'$, platí proto $MA : MB' = MB : MA'$ a $MA . MA' = MB . MB'$. Tento součin je konstantní při jakékoliv poloze sečen AA', BB' procházejících bodem M.



Obr. 15 a, b

Leží-li bod M ve vnější oblasti kružnice a vedeme-li sečnu AA' středem S kružnice (načrtněte si obrázek), je $MA.MA' = (MS + r)(MS - r) = MS^2 - r^2$. Leží-li M ve vnitřní oblasti kružnice k, získáme stejným postupem vztah $MA.MA' = r^2 - MS^2$.

Číslo $MS^2 - r^2$ nazýváme mocností bodu M ke kružnici $k(S, r)$.

Je tedy mocnost bodu vnější oblasti ke kružnici kladná a rovna přímo součinu úseků $MA.MA'$ na libovolné sečně AA' kružnice k. Mocnost bodů vnitřní oblasti ke kružnici je záporná a rovna opačnému číslu k součinu $MA.MA'$. Mocnost bodů kružnice k této kružnici je zřejmě nulová.

41. Je-li M bodem vnější oblasti kružnice $k(S, r)$ a bod T bodem dotyku tečny z M ke k, je mocnost bodu M ke k rovna MT^2.

42. Který bod roviny má ke kružnici nejmenší mocnost?

43. Vyšetřete množinu bodů, které mají k dané kružnici stejnou mocnost.

44. Jakou mocnost má střed S_1 kružnice $k_1(S_1, r_1)$ ke kružnici $k_2(S_2, r_2)$, která k_1 kolmo protíná?

45. Sestrojte na sečně AA' kružnice k bod M ležící vně k tak, aby bod A dělil úsečku MA' v poměru zlatého řezu. (Určete mocnost M ke k.)

46. Je dána tětiva AB kružnice k a bod C kružnice k různý od bodů A, B. Sestrojte patu D kolmice z C na AB a paty E, F kolmic z bodů A, B na tečnu kružnice k v bodě C. Dokažte, že je $CD^2 = AE.BF$.

[Existuje-li průsečík M tečny a přímky AB, využijte pravoúhlých trojúhelníků s vrcholem M.]

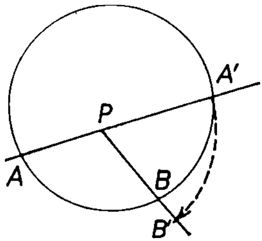
47.* Ukažte, že rovnice kružnice ve středovém tvaru charakterizuje body kružnice jako ty body roviny, které mají k dané kružnici nulovou mocnost.

48. Jsou-li dány úsečky a, b, sestrojte pomocí vhodně zvolené kružnice úsečku $x = \sqrt{ab}$.

49. Jsou-li dány úsečky a, b, c, sestrojte úsečku x, pro kterou platí $ab = cx$. Využijte vhodně mocnosti bodu ke kružnici.

12. Pět bodů na jedné kružnici. Na základě mocnosti bodu ke kružnici můžeme udat postačující podmínku pro to, aby čtyři různé body ležely na jedné kružnici.

Protínají-li se přímky AA', BB' v bodě P tak, že je $PA.PA' = PB.PB'$ a bod P leží současně uvnitř úseček AA', BB' nebo současně vně těchto úseček, leží body A, B, A', B' na jedné kružnici.



Obr. 16

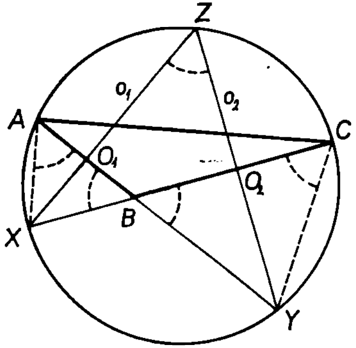
Větu snadno dokážete, sestrojíte-li kružnici, která prochází body A, A', B. Její společný bod B'' s přímkou BB' leží na polopřímce PB' a platí pro něj $PB' = PB''$, je proto $B' \equiv B''$. Na obr. 16 vidíte, že podmínka o poloze bodu P vzhledem k úsečkám AA', BB' nemůže být vynechána (na obrázku je $PA = PB$, $PA' = PB'$, $PA.PA' = PB.PB'$, ale body A, B, A', B' neleží na jedné kružnici).

Hravě dokážeme větu o pěti bodech ležících na kružnici.

Nechť je dán trojúhelník ABC, jehož úhel β není pravý. Sestrojme osu o_1 úsečky AB a osu o_2 úsečky BC. Průsečíky

$X \equiv o_1.BC$, $Y \equiv o_2.AB$, $Z \equiv o_1.o_2$ leží na jedné kružnici s body A, C.

Na obr. 17 je úhel β tupý. Podle věty *uu* o podobnosti trojúhelníků je $\triangle BO_1X \sim \triangle BO_2Y$, platí proto $BO_1 : BX = BO_2 : BY$, $2.BO_1.BY = 2.BO_2.BX$ a tedy také



Obr. 17

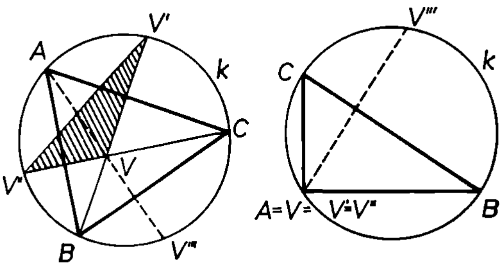
$BA.BY = BC.BX$. Protože je bod B vrcholem tupého úhlu, leží body X, Y na prodlouženích stran AB, BC za bod B a bod B je vnitřním bodem obou úseček AY, CX. Podle dříve dokázané věty leží body A, C, X, Y na jedné kružnici. Ze shodnosti obloučkem vyznačených úhlů na obr. 17 vyplývá, že i bod Z leží na jedné kružnici s body A, C, X, Y.

50. Dokažte, že body A, C, X, Y, Z leží na jedné kružnici i v případě, kdy je úhel β trojúhelníku ABC ostrý. Jak je tomu při $\beta = 90°$?

51. Dokažte pomocí podobnosti trojúhelníků, že každé dvě výšky trojúhelníku jsou tětivami jedné kružnice.

52. Je dána kružnice k a její nesečna PA. Bodem P prochází sečna XX' kružnice k. Dokažte, že kružnice procházející body X, X', A protnou přímku PA v témž bodě B, ať vedeme bodem P sečnu XX' jakkoliv.

13. Čím vyniká průsečík výšek. Pomocí podobnosti trojúhelníků můžeme dokázat zajímavé vlastnosti výšek trojúhelníku, jejich pat a průsečíku. Ještě „čerstvé" věty o pěti bodech na kružnici použijeme k důkazu věty, že *body souměrné s průsečíkem výšek podle stran trojúhelníku leží na kružnici trojúhelníku opsané.*



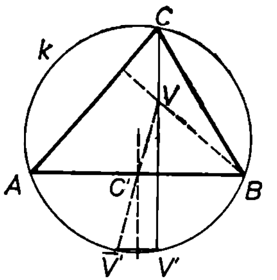
Obr. 18 a, b

Není-li trojúhelník ABC pravoúhlý (obr. 18a), jsou body V', V'', V''' souměrné s V podle stran trojúhelníku navzájem různé. Na trojúhelník $V'V''V$ můžeme aplikovat větu o pěti bodech. Zjistíme, že body V', V'', A, B, C leží na jedné kružnici. Obdobnou úvahou o trojúhelníku $VV'V'''$ dokážeme, že i zbývající bod V''' leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC.

Je-li trojúhelník ABC pravoúhlý s úhlem $\alpha = 90°$ (obr. 18b), je $V = A$ a také $V' = V'' = V$. Bod V''' souměrný s V podle přepony BC leží na kružnici o průměru BC, která obsahuje i body $V' = V'' = A$.

Snadno lze dokázat, že *body souměrné s průsečíkem výšek podle středů stran trojúhelníku leží na kružnici trojúhelníku opsané.*

Zobrazíme-li bod V v osové souměrnosti podle přímky AB (obr. 19), dostaneme bod V' ležící na kružnici k. Souměrností podle osy strany AB přiřadíme bodu V' bod $\overline{V}'$ kružnice k. Je zřejmé, že body V, $\overline{V}'$ jsou souměrné podle průsečíku os použitých souměrností, tj. podle středu strany AB.



Obr. 19

53. Sestrojíte-li průsečík výšek V trojúhelníku ABC, který není pravoúhlý, získáte čtveřici bodů A, B, C, V. Každý z těchto bodů je průsečíkem výšek trojúhelníku určeného ostatními třemi.

54. Je-li trojúhelník ABC vepsán do kružnice k, dělí body A, B, C kružnici na tři oblouky. Překlopíme-li každý z nich podle jeho tětivy (strany trojúhelníku), získáme tři oblouky procházející jedním bodem. Který je to bod?

55. Jsou-li body A_1, B_1, C_1 patami výšek trojúhelníku ABC a bod V průsečíkem těchto výšek, je $AV \, . \, VA_1 = BV \, . \, VB_1 =$ $= CV \, . \, VC_1$.

[Využijte mocnosti bodu V ke kružnici trojúhelníku opsané.]

56. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dán střed kružnice opsané průsečík výšek a vrchol A.

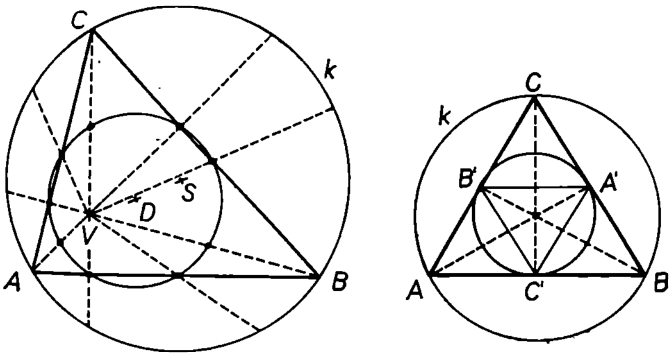
57. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dán jeho vrchol C, těžiště T a průsečík výšek V.

[Využijte středu strany AB.]

14. Kružnice devíti bodů. V minulém odstavci jsme dokázali, že na kružnici trojúhelníku opsané leží kromě vrcholů trojúhelníku ještě body souměrné s průsečíkem výšek podle stran trojúhelníku a podle středů těchto stran. Získáváme tak devět bodů (nikoliv nutně různých), které leží na kružnici k (obr. 20a). Název kružnice devíti bodů však nedáváme této kružnici, ale kružnici s ní stejnolehlé, je-li středem stejnolehlosti bod V a koeficientem číslo $\varkappa = \dfrac{1}{2}$.

Zobrazíme-li v této stejnolehlosti všech devět bodů kružnice opsané, zjistíme, že

1. *paty výšek trojúhelníku,*
2. *středy stran trojúhelníku,*



Obr. 20 a, b

3. *středy úseček spojujících průsečík výšek s vrcholy trojúhelníku, leží na jedné kružnici.*

Na obr. 20a jsou jmenované body vyznačeny jen plným kroužkem. Ze stejnolehlosti kružnic okamžitě vyplývá, že *střed D kružnice devíti bodů je středem úsečky spojující průsečík výšek se středem kružnice trojúhelníku opsané.*

Poloměr kružnice devíti bodů je roven $\frac{1}{2} r$.

58. Jaká je vzájemná poloha kružnice devíti bodů a kružnice trojúhelníku opsané? Kdy jsou soustředné?
[Proberte jednotlivé typy trojúhelníků.]

59. Dokažte, že trojúhelníky ABC, BCV, CVA, VAB mají společnou kružnici devíti bodů. Co z toho plyne pro poloměry kružnic opsaných těmto trojúhelníkům?

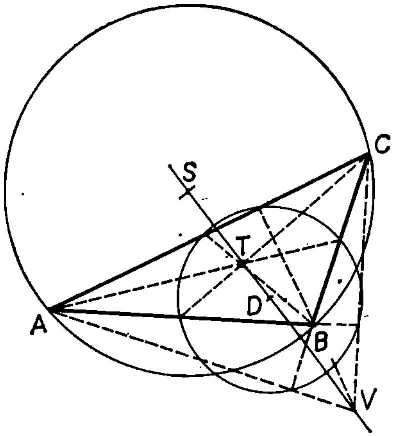
60. Sestrojte trojúhelník $O_aO_bO_c$, jehož vrcholy jsou středy kružnic vně vepsaných trojúhelníku ABC. Určete kružnici devíti bodů trojúhelníku $O_a O_b O_c$.

15. Eulerova přímka. Víme, že na kružnici devíti bodů trojúhelníku ABC leží středy stran — body A', B', C'. Trojúhelník $A'B'C'$ je stejnolehlý s trojúhelníkem ABC podle těžiště T, koeficient stejnolehlosti zobrazující trojúhelník ABC na trojúhelník $A'B'C'$ je $\varkappa' = -\frac{1}{2}$. V této stejnolehlosti se zobrazí kružnice opsaná trojúhelníku ABC jako kružnice opsaná trojúhelníku $A'B'C'$, tj. jako kružnice devíti bodů trojúhelníku ABC (obr. 20b).

Těžiště trojúhelníku ABC je vnitřním středem stejnolehlosti kružnice devíti bodů a kružnice trojúhelníku opsané.

Střed stejnolehlosti dvou kružnic leží na jejich středné nebo splývá s jejich společným středem (jsou-li soustředné). Není-li trojúhelník ABC rovnostranný, není těžiště trojúhelníku středem kružnice opsané a leží proto na spojnici středu kružnice opsané a kružnice devíti bodů. Na této přímce leží i průsečík výšek, jak víme z odstavce 14.

Těžiště, průsečík výšek, střed kružnice trojúhelníku opsané a střed jeho kružnice devíti bodů leží na jedné přímce (tzv. Eulerově přímce trojúhelníku) *nebo splývají v jeden bod.*



Obr. 21

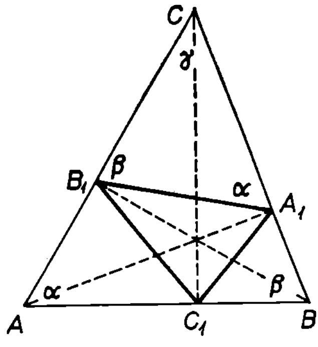
Zajímavá je i poloha jmenovaných bodů na Eulerově přímce. Na obr. 21 je sestrojena Eulerova přímka tupoúhlého trojúhelníku ABC. Bod D (střed kružnice devíti bodů) je středem úsečky SV, bod T leží uvnitř úsečky SD a dělí ji v poměru 2 : 1 jako každou těžnici, je $ST = 2 . TD$.

61. Vyjádřete polohu bodu T vzhledem k bodům S, V dělicím poměrem.

62.* Dokažte, že body S, D, T, V tvoří harmonickou čtveřici bodů na Eulerově přímce.

63. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno:
a) těžiště T, střed kružnice opsané a poloměr kružnice devíti bodů,
b) těžiště T, střed kružnice devíti bodů a střed strany AC,
c) těžiště T, průsečík výšek V a pata jedné výšky.

[Při rozboru stanovte dělicí poměry vhodných trojic bodů na Eulerově přímce. Z údajů ve cvičení a) lze sestrojit čtyři význačné body trojúhelníku ABC, které leží na Eulerově přímce, i kružnici trojúhelníku opsanou. Zamyslete se nad tím, zda může být libovolný bod této kružnice zvolen za vrchol A trojúhelníku.]



Obr. 22

16. Trojúhelník pat výšek.

Sestrojíme-li v ostroúhlém trojúhelníku ABC paty výšek — body A_1, B_1, C_1, rozdělíme úsečkami C_1A_1, B_1A_1, C_1B_1 daný trojúhelník na čtyři trojúhelníky (obr. 22).

Každý z trojúhelníků AB_1C_1, BA_1C_1, CB_1A_1 je podobný trojúhelníku ABC.

Důkaz tohoto tvrzení můžeme založit na známé vlastnosti konvexních čtyřúhelníků vepsaných do kružnice (součet jejich protilehlých úhlů je úhel přímý). V ostroúhlém trojúhelníku leží body A_1, B_1 uvnitř stran BC, AC na kružnici o průměru AB. Je proto $\sphericalangle BAB_1 + \sphericalangle BA_1B_1 = 180°$ a také $\sphericalangle ABA_1 + \sphericalangle AB_1A_1 = 180°$. Snadno vypočítáte, že je $\sphericalangle A_1B_1C = \beta$ a $\sphericalangle B_1A_1C = \alpha$. Podle věty *uu* je $\triangle A_1B_1C \sim \triangle ABC$. Obdobně můžete dokázat podobnost zbývajících dvou trojúhelníků s trojúhelníkem ABC.

64. Využijte věty o obvodovém úhlu v kružnici k důkazu věty pro tupoúhlý trojúhelník.

65. Dokažte, že výšky ostroúhlého trojúhelníku ABC jsou osami úhlů trojúhelníku $A_1B_1C_1$ (tzv. *ortického trojúhelníku*).
[Označte si na obr. 22 všechny známé úhly písmeny α, β, γ.]

66. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dán jeho ortický trojúhelník $A_1B_1C_1$.
[Využijte poznatků ze cvičení 65 a 63.]

67. Dokažte, že střed kružnice opsané trojúhelníku $O_aO_bO_c$ ze cvičení 60 je souměrný se středem kružnice vepsané trojúhelníku ABC podle středu kružnice opsané trojúhelníku ABC.

17.* Kružnice šesti bodů. Sestrojíme-li ortický trojúhelník $A_1B_1C_1$ nepravoúhlého trojúhelníku ABC, můžeme sestrojit tzv. *druhotné paty výšek*, tj. paty kolmic vedených body A_1, B_1, C_1 ke stranám trojúhelníku ABC. Na obr. 23 je zobrazeno šest druhotných pat A_2, A_2', B_2, B_2', C_2, C_2'. Lze dokázat, že šest druhotných pat výšek leží na jedné kružnici.

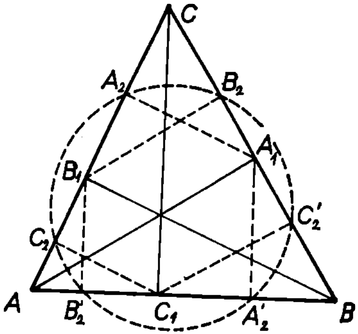
Důkaz této věty pro ostroúhlý trojúhelník ABC (obr. 23) proveďte postupně takto:

a) dokažte na základě podobnosti trojúhelníků ABC a A_2B_2C, že je $A_2B_2 \parallel AB$,

b) dokažte pomocí čtyřúhelníku vepsaného do kružnice, že je $C_2C_2' \parallel A_1B_1$,

c) dokažte, že čtyřúhelník $A_2B_2C_2C_2'$ lze vepsat do kružnice,

d) dokažte, že každý ze zbývajících bodů A_2', B_2' leží na jedné kružnici s body B_2, C_2, C_2' nebo C_2, A_2, A_2'.



Obr. 23

68. *Dokažte platnost vyslovené věty pro tupoúhlý trojúhelník.

69. Které body na obr. 1 jsou druhotnými patami výšek pravoúhlého trojúhelníku ABC? Leží na jedné kružnici?

70.* Pokračujte dále v sestrojování pat kolmic (z druhotných pat výšek znovu kolmice na strany trojúhelníku). Získáte 12 bodů, které neleží na jedné kružnici. Neleží však tyto body na dvou kružnicích?

KAPITOLA III

STEJNOLEHLÁ ZOBRAZENÍ

V prvních dvou kapitolách jsme hovořili o shodných, stejnolehlých a podobných útvarech. Jen na několika místech jsme se zmínili o souměrnostech a stejnolehlostech. V další kapitolách se budeme zabývat stejnolehlými a podobnými zobrazeními, především jejich konstrukčním využitím.

18. Zobrazení v rovině. Víte, že shodnost útvarů ověřujeme pomocí přemístění. Sledujeme-li při přemístění útvaru, jak se přemisťují jeho jednotlivé body, můžeme rozlišovat různá přemístění jednoho útvaru na druhý.

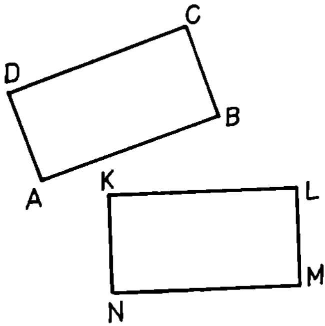
Dvě přemístění útvaru U_1 *na útvar* U_2 *považujeme za různá, přiřazují-li (aspoň) jednomu bodu útvaru* U_1 *různé body útvaru* U_2.

⊦ Obdélník $ABCD$ na obr. 24 lze přemístit na obdélník $KLMN$ tak, že přejde $A \to K, B \to L, C \to M, D \to N$.*) Při jiném možném přemístění přiřadíme např. $A \to M$, $B \to N$, $C \to K$, $D \to L$. Která jsou další možná přemístění obdélníka $ABCD$ na obdélník $KLMN$? Který bod obdélníka $ABCD$ přejde ve všech těchto přemístěních v týž bod obdélníka $KLMN$?

*) Šipkou nahrazujeme slova „do bodu", která bychom museli stále opakovat. Při zápisu přiřazování bodů budeme užívat šipek.

71. Kolika různými přemístěními lze dosáhnout toho, že se kryjí dvě shodné desky mající tvar pravidelných šestiúhelníků? Označte si jejich vrcholy písmeny a zapište přiřazení bodů pomocí šipek.

[Je dvanáct možností.]



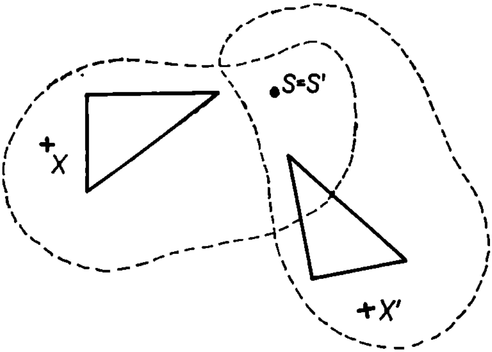
Obr. 24

Přemisťujeme-li jeden rovinný útvar, např. trojúhelník ABC, můžeme s ním současně přemístit i libovolně velkou část roviny (obr. 25). Každému bodu X této části roviny přiřadíme při přemístění $A \to A'$, $B \to B'$, $C \to C'$, bod X' roviny. Může se stát, že se některý bod roviny „vrátí na své místo“, takový bod nazveme samodružným v daném přemístění (na obr. 25 je $S = S'$).

Představíme-li si, že při přemístění trojúhelníku ABC na trojúhelník $A'B'C'$ přemisťujeme celou rovinu, kryje se přemístěná rovina s původní rovinou.*) Každému bodu roviny přiřazujeme tímto přemístěním právě jeden bod roviny.

*) Na tom není nic divného, vždyť i kruh můžeme přemístit nekonečně mnoha způsoby tak, že se kryje se svou původní polohou.

Předpis, kterým přiřadíme každému bodu X roviny právě jeden bod X' této roviny (je lhostejno, zda je $X = X'$ nebo $X \neq X'$), nazýváme zobrazením v rovině. Bod X nazýváme vzorem a bod X' jeho obrazem v daném zobrazení.



Obr. 25

Předpis, kterým přiřadíme každému bodu X roviny bod $X' = S$, je jistým zobrazením v rovině, ovšem málo zajímavým. Předpis, kterým přiřadíme každému bodu X roviny bod $X' = X$, určuje zobrazení v rovině, které nazýváme *identitou*. Předpis pro středovou souměrnost se středem S může znít např. takto: bodu S přiřadíme bod S, každému bodu $X \neq S$ přiřadíme bod X' polopřímky opačné k polopřímce SX, pro který platí $SX' = SX$.

72. Formulujte předpis pro osovou souměrnost a otočení. Předpis pro posunutí je uveden na str. 55.

[Popište geometrickými termíny konstrukci obrazu bodu ve jmenovaných zobrazeních.]

Budeme se zabývat výhradně těmi zobrazeními, která

1. *přiřazují každým dvěma různým bodům roviny opět dva různé body,*
2. *vyplní obrazy bodů roviny celou rovinu.*

V takových zobrazeních je každý bod roviny vzorem jednoho bodu a současně obrazem jednoho bodu roviny. Shodná zobrazení v rovině mají obě uvedené vlastnosti. *Zobrazení, která mají vlastnosti* 1. *a* 2. *nazveme prostá zobrazení roviny na rovinu.*

73. Ověřte, že všechna známá shodná zobrazení a stejnolehlost jsou prostá zobrazení roviny na rovinu.

19. Symbolika. Chceme-li pracovat se zobrazeními, je užitečné, abychom si je označili písmeny. Užíváme písmen velké latinské abecedy, např. **Z**, **O**, **S**, **H**, **P**, **R**, **T**, **K**. V tisku je odlišujeme od písmen označujících body polotučným typem písma, v rukopise obvykle tím, že použijeme velkých psacích písmen.

Zápis **Z** $(X \to X')$ čteme jako „zobrazení **Z** přiřazuje bodu X bod X'“. Zápis **Z**$(\triangle ABC \to \triangle A'B'C')$ čteme slovy „zobrazení **Z** zobrazuje trojúhelník ABC na trojúhelník $A'B'C'$“.

74. Přečtěte slovy tyto zápisy: **H**$(S \to S)$, **T**$(AB \to CD)$, **R**$(\sphericalangle SMD \to \sphericalangle RUV)$.

75. Zapište značkami tyto věty:

a) Otočení **R** přiřazuje bodu U bod H' a bodu T bod N,

b) kružnice k je zobrazena posunutím **T** na kružnici k_1,

c) čtyřúhelník $ABCD$ přechází souměrností **S** na čtyřúhelník $DLKV$.

Označíme-li při řešení úloh některé prosté zobrazení roviny na rovinu symbolem **H**, použijeme zpravidla v téže úloze i symbolu $\mathbf{H}^{-1}$, Jestliže **H**$(X \to X')$, pak $\mathbf{H}^{-1}(X' \to X)$, jde tedy o „opačná“ zobrazení, mají stejné dvojice vzoru a obrazu, ale bod, který je v jednom vzorem, je ve druhém obrazem a obráceně. O takových dvou zobrazeních říkáme, že jsou *navzájem inverzní.*

K otočení R kolem středu S o úhel α v kladném smyslu je inverzním zobrazením R^{-1} opět otočení kolem S o úhel α, ale v záporném smyslu. Ke stejnolehlosti H se středem S a koeficientem $\varkappa$ je inverzním zobrazením stejnolehlost H^{-1} s koeficientem $\frac{1}{\varkappa}$.

76. Jakými vektory jsou určena navzájem opačná posunutí?

77. Dokažte, že pro osovou souměrnost O a středovou souměrnost S platí $O = O^{-1}$, $S = S^{-1}$.

20. Stejnolehlá zobrazení. Význačnou vlastností stejnolehlosti je to, že zobrazuje každou přímku p na přímku p' rovnoběžnou s p. Tuto vlastnost nemají jen stejnolehlosti, ale také posunutí a samozřejmě identita (v identitě je $p = p'$, tedy také $p \parallel p'$).

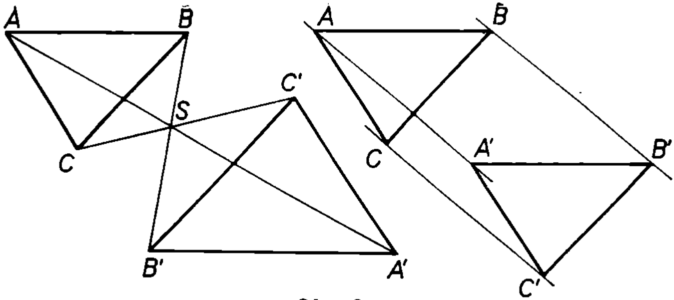
Prostá zobrazení roviny na rovinu, která zobrazují každou přímku na přímku s ní rovnoběžnou, nazveme stejnolehlými zobrazeními v rovině.

Zobrazíme-li trojúhelník ABC v některém stejnolehlém zobrazení, získáme trojúhelník $A'B'C'$, pro který platí $A'B' \parallel AB$, $B'C' \parallel BC$, $C'A' \parallel CA$ (obr. 26). Trojúhelníky s touto vlastností nazveme stejnolehlými trojúhelníky. Platí tato věta:

Jsou-li dány dva stejnolehlé trojúhelníky, existuje stejnolehlé zobrazení, které zobrazí jeden trojúhelník na druhý.

Spojíme-li odpovídající si vrcholy obou trojúhelníků, protnou se tyto přímky buď v jednom bodě, nebo jsou navzájem rovnoběžné.*) V prvním případě je možno zo-

*) Předpokládáme, že trojúhelníky jsou různé; jsou-li totožné, není třeba žádných konstrukcí, protože můžeme zobrazit jeden na druhý identitou.



Obr. 26

brazit jeden trojúhelník na druhý stejnolehlostí se středem S (obr. 26), ve druhém případě posunutím.

78. Zvolte stejnolehlé trojúhelníky ABC, $A'B'C'$ tak, že je $A = B'$, $B = A'$. Sestrojte jejich střed stejnolehlosti.

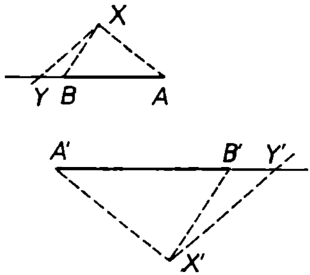
79. Prodlužte strany AB, CD, EF pravidelného šestiúhelníka $ABCDEF$ tak, aby vznikl trojúhelník KLM. Určete středy stejnolehlostí, kterými lze zobrazit trojúhelník KLM na rovnostranné trojúhelníky, z nichž se skládá šestiúhelník.

80.* Zobrazte v rovině trojúhelníkovou síť a zvolte pevně jeden trojúhelník sítě. Určete množinu středů stejnolehlostí, kterými lze zvolený trojúhelník zobrazit na „větší" trojúhelníky (sestavené ze čtyř, devíti atd. trojúhelníků sítě).

Jsou-li dány dvě rovnoběžné úsečky AB, $A'B'$ (obr. 27), *existuje právě jedno stejnolehlé zobrazení, které zobrazí* $A \to A'$, $B \to B'$.

Libovolnému bodu X roviny, který neleží na AB, přiřazuje toto zobrazení průsečík X' přímek vedených body A', B' rovnoběžně s přímkami AX, BX. Bodu Y přímky AB můžeme přiřadit obraz Y' pomocí bodů X, X' (obr. 27).

81. Sestrojte střed stejnolehlosti úseček AB, $A'B'$ na obr. 27.



Obr. 27

82. Dokažte, že pro obrazy A', B', C' bodů A, B, C v libovolném stejnolehlém zobrazení platí buď $(A'B'C') = (ABC)$ nebo $\Delta\, A'B'C' \sim \Delta\, ABC$.

83. Vepište do dané kružnice trojúhelník stejnolehlý s daným pravoúhlým trojúhelníkem ABC.

[Zvolte v kružnici průměr rovnoběžný s přeponou trojúhelníka. Jsou dvě řešení!]

84.* Dokažte, že každé dvě paraboly s rovnoběžnými osami jsou stejnolehlé. Použijte stejnolehlosti úseček F_1V_1, F_2V_2 určených ohnisky a vrcholy parabol. Ukažte, že touto stejnolehlostí lze zobrazit jednu parabolu na druhou.

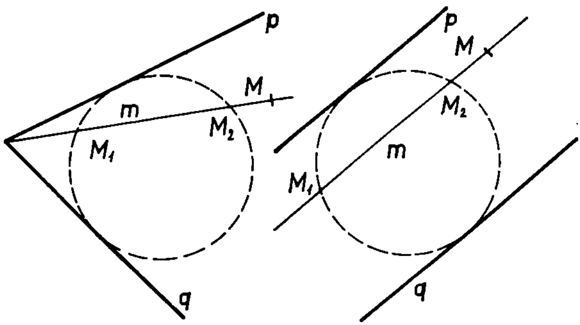
21. Pomocí pojmu stejnolehlých zobrazení můžeme odstranit některé potíže při formulaci vět o stejnolehlosti útvarů a konstrukcích útvarů pomocí stejnolehlosti.

Tak např. při formulaci věty o stejnolehlosti kružnic říkáme, že dvě neshodné kružnice jsou stejnolehlé dvěma způsoby a shodné kružnice jedním způsobem (neexistuje vnější střed stejnolehlosti shodných kružnic). Pomocí pojmu stejnolehlých zobrazení můžeme vyslovit jednotnou větu pro oba případy:

Jsou-li dány dvě libovolné kružnice k_1, k_2 v rovině, existují právě dvě stejnolehlá zobrazení, která zobrazí k_1 na k_2.

Dokažte větu diskusí všech tří možností (k_1, k_2 neshodné, shodné různé a totožné). V posledním případě je jedním ze stejnolehlých zobrazení identita.

Úlohy, ve kterých se využívá stejnolehlosti se středem v průsečíku různoběžek, lze řešit v případě rovnoběžek tak, že „zastoupíme" stejnolehlost posunutím. Uveďme jako příklad známou úlohu *sestrojit kružnici, která se dotýká dvou přímek p, q a prochází daným bodem M* (obr. 28).



Obr. 28

Její řešení dobře znáte v případě, kdy jsou p, q různoběžky. Tehdy sestrojíme libovolnou kružnici k, která se dotýká přímek p, q a zobrazíme ji ve stejnolehlosti se středem S tak, aby jeden bod kružnice k přešel do bodu M. Jsou-li přímky p, q rovnoběžné (text úlohy to nevylučuje), můžeme řešit úlohu zcela obdobně, kružnici k však nezobrazujeme ve stejnolehlosti, ale v posunutí.

V *obou* případech zobrazujeme body M_1, M_2 kružnice *k* do bodu *M stejnolehlým zobrazením.* Body M_1, M_2 leží na přímce *m* spojující bod *M* s průsečíkem *S* přímek *p*, *q* nebo rovnoběžné s *p*, *q*.

Úlohy tohoto typu budeme řešit v následující kapitole, pokuste se vyřešit jednu takovou „dvojitou“ úlohu již teď.

85. Jsou dány dvě přímky *p*, *q*, bod *M* a směr *s* různoběžný s *p*, *q*. Sestrojte úsečku $PQ // s$, jejíž krajní body leží na *p*, *q* a která je vidět z bodu *M* pod úhlem 60°.

[V obou případech sestrojte libovolnou úsečku $P_1Q_1 // s$ a množinu μ (P_1, Q_1, 60°). Použijte přímky *m* jako na obr. 28 a vhodných stejnolehlých zobrazení.]

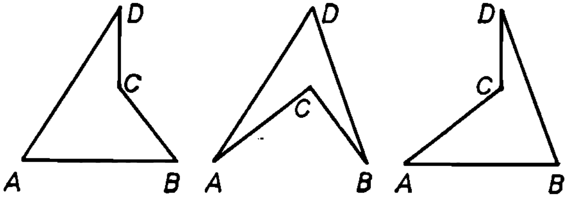
22. Konstrukce čtyřúhelníků. Již v první části tohoto svazku je stručná zmínka o sestrojování čtyřúhelníků pomocí posunutí. Ve zbývajících odstavcích této kapitoly se seznámíme důkladněji s konstrukcemi čtyřúhelníků pomocí posunutí, jednoho ze stejnolehlých zobrazení. Konstrukčnímu využití stejnolehlosti budeme věnovat samostatnou kapitolu.

Zjistíme-li o třech bodech roviny, že jsou vrcholy trojúhelníka, můžeme trojúhelník jednoznačně sestrojit. U čtyřúhelníků tomu tak není, protože *čtyřúhelník**) *není svými vrcholy jednoznačně určen.* Může proto dojít k paradoxní situaci, kterou vidíte na obr. 29. Jsou na něm zobrazeny tři *čtyřúhelníky, které nelze přemístěním ztotožnit, ačkoliv jejich vrcholy lze přemístěním ztotožnit.*

Čtyřúhelník považujeme za sestrojený, je-li sestrojena lomená čára jeho hranice. V zápisu čtyřúhelníku uvádíme

---

*) Čtyřúhelníkem rozumíme útvar, který je sjednocením dvou trojúhelníků se společnou stranou, které leží v různých polorovinách vzhledem ke společné straně a nemají žádné další strany na jedné přímce. Může tedy jít o čtyřúhelníky konvexní i nekonvexní.

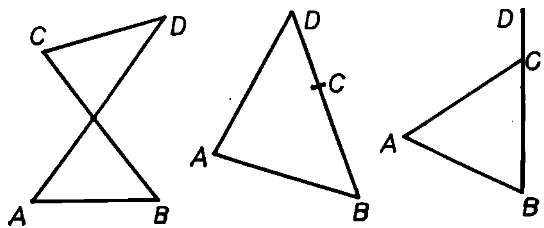


Obr. 29

vrcholy v tom pořadí, jak jimi procházíme při vyznačování hranice jedním tahem. Na obr. 29 jde o čtyřúhelníky $ABCD$, $ACBD$, $ABDC$.

Každá lomená čára ABCDA nemusí být hranicí čtyřúhelníku. Na obr. 30 jsou zakresleny tři typy lomených čar, které nejsou hranicemi čtyřúhelníků. Přesto se první z nich nazývá někdy zkříženým čtyřúhelníkem. Často nám při konstrukcích vyjdou jako výsledek konstrukce i lomené čáry z obr. 30. Je to přirozený důsledek úmluvy o sestrojování čtyřúhelníků (sestrojujeme lomenou čáru, která má jisté vlastnosti).

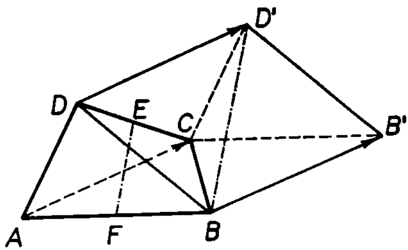
86. Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, pro který platí:
a) $AB = 3, BC = 4, AC = 5, CD = 6, DA = 7$,
b) $AB = 5, AC = 4, CD = 5$, $\sphericalangle ABC = 45°$, $\sphericalangle BAD = 90°$,



Obr. 30

c) $AB = 4$, $AC = 6$, $\sphericalangle\, ABC = 60°$, $\sphericalangle\, ADB = 60°$, $\sphericalangle$ ADC $= 30°$.
Kolik bodů C, D můžete sestrojit, umístíte-li úsečku AB? Sestrojte všechny lomené čáry $ABCDA$. Které z nich jsou hranicemi čtyřúhelníků?

23. Kouzelný rovnoběžník. Každé lomené čáře AB CDA můžeme přiřadit význačné rovnoběžníky. Sledujte konstrukci jednoho z nich na obr. 31. Vyznačíme si úhlo-



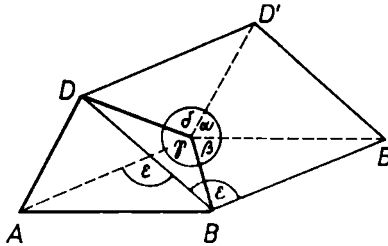
Obr. 31

příčku BD lomené čáry a v posunutí $T(A \to C)$ zobrazíme B, D do poloh B', D'. *Rovnoběžník* $DBB'D'$ v sobě „*koncentruje*" vlastnosti lomené čáry; *nazveme* jej *význačným rovnoběžníkem lomené čáry* $ABCDA$.

Strany rovnoběžníka $DBB'D'$ jsou shodné s úhlopříčkami BD, AC lomené čáry. Úsečky CB', CB, CD, CD' jsou po řadě shodné s úsečkami AB, BC, CD, DA lomené čáry. Střed strany CD je středem rovnoběžníku $ACD'D$, střední příčka EF lomené čáry je rovnoběžná s úhlopříčkou BD' význačného rovnoběžníku, platí zřejmě $BD' = 2 . EF$.

Je-li lomená čára $ABCD$ hranicí konvexního čtyřúhelníku, leží bod C uvnitř význačného rovnoběžníku DBB' D'. Je společným vrcholem úhlů α', β', γ', δ' shodných s vnitřními úhly čtyřúhelníku (obr. 32). Úhel $\varepsilon = \sphericalangle AUB$ je shodný s jedním vnitřním úhlem význačného rovnoběžníku.

Každé uzavřené lomené čáře $ABCDA$ umíme přiřadit její význačný rovnoběžník $DBB'D'$. Zvolíme-li naopak libovolný rovnoběžník $DBB'D'$ a *bod C různý od jeho vrcholů*, můžeme sestrojit lomenou čáru $ABCDA$, pro kterou je daný rovnoběžník význačným rovnoběžní-



Obr. 32

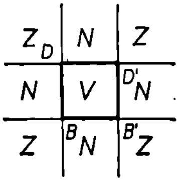
kem. Postačí, posuneme-li bod C do bodu A v posunutí $B' \rightarrow B$. Proveďte si konstrukci na vlastním obrázku.

Umístíme-li pevně rovnoběžník $DBB'D'$, vyjde nám podle volby bodu C lomená čára $ABCDA$ jako hranice konvexního, nekonvexního nebo zkříženého čtyřúhelníku. Zvolíme-li bod C na některé z přímek DB, BB', $B'D'$, $D'D$, dostaneme lomené čáry těch typů, které jsme zobrazili na obr. 30. Na obr. 33 jsou označeny písmeny V, N, Z ty oblasti roviny, pro jejíchž *vnitřní body C* dostaneme konvexní, nekonvexní nebo zkřížený čtyřúhelník.

87. Jaké význačné rovnoběžníky příslušejí čtvercům? Které čtyřúhelníky mají význačné obdélníky?

88. Jak můžete charakterizovat význačné rovnoběžníky rovnoběžníků a lichoběžníků?

89. Dokažte, že význačný rovnoběžník konvexního čtyřúhelníku má dvojnásobný obsah než čtyřúhelník.



Obr. 33

24. Vlastností význačného rovnoběžníku lze výhodně využít ke konstrukcím čtyřúhelníků. Jsou-li dány takové prvky čtyřúhelníku, že z nich snadno sestrojíme jeho význačný rovnoběžník, a jeden vrchol čtyřúhelníku, snadno sestrojíme hledaný čtyřúhelník.

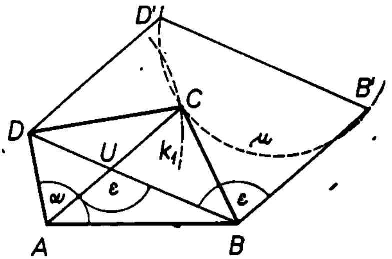
Příklad 2. *Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, jsou-li dány jeho úhlopříčky AC, BD, úhel $\varepsilon = \sphericalangle AUB$ jimi sevřený, úhel α a strana CD.*

Rozbor. Má-li čtyřúhelník $ABCD$ požadované vlastnosti (obr. 34), má jeho význačný rovnoběžník stranu $BB' = AC$ a $\sphericalangle DBB' = \varepsilon$. Na základě těchto údajů můžeme rovnoběžník $DBB'D'$ sestrojit. Vrchol C hledaného čtyřúhelníku leží pak na kružnici $k_1(D, CD)$ a náleží množině bodů $\mu(B', D', \alpha)$. Bod A je obrazem bodu C v posunutí $T(B' \rightarrow B)$.

Konstrukce.

K_1: *Sestrojíme jeden rovnoběžník $DBB'D'$.*
K_2: *Sestrojíme kružnici $k_1(D, CD)$.*
K_3: *Sestrojíme $\mu(B', D', \alpha)$.*
K_4: *Sestrojíme bod C jako společný bod kružnice k_1 a množiny μ.*

K_5: *Sestrojíme bod A jako obraz bodu C v posunutí $T(B' \rightarrow B)$.*
K_6: *Sestrojíme lomenou čáru $ABCDA$.*



Obr. 34

Zkouška. Správnost konstrukce plyne z dříve uvedených vlastností význačného čtyřúhelníku.

Diskuse. Počet řešení*) je roven počtu bodů C, protože všechny konstrukce kromě K_4 jsou jednoznačné. Můžeme získat nejvýše čtyři řešení.

90. Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, je-li kromě AC, BD, ε dáno a) AB, CD b) AD, β c) α, β d) $AD : BC = 1 : 3, \gamma$.

91. Sestrojte lichoběžník $ABCD$, je-li dáno a) AC, BD, AB, CD, b) AC, BD, ε, BC.

92. Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, je-li dáno AC, BD, α, γ a střední příčka EF (úsečka spojující středy stran AB, CD).

93. Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, je-li dáno AC, BD, EF a poměry $AB : CD$, $BC : DA$.
[Využijte Apolloniovy kružnice.]

*) Řešením rozumíme uzavřenou lomenou čáru $ABCDA$. Není snadné rozhodnout, kolik z těchto čar je hranicí konvexního čtyřúhelníku.

KAPITOLA IV

STEJNOLEHLOST V POLOHOVÝCH ÚLOHÁCH

Stejnolehlost je jednoznačně určena, je-li udán její střed a koeficient. Můžeme jí však použít i tehdy, když nejsou známy oba údaje. Uvedeme ukázky řešení polohových konstrukčních úloh, při nichž použijeme stejnolehlosti v případě, kdy

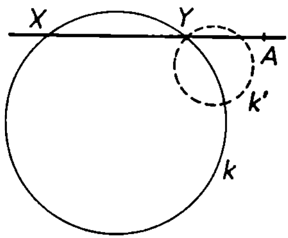
A) *známe střed stejnolehlosti i její koeficient,*
B) *známe střed stejnolehlosti, ale neznáme její koeficient,*
C) *neznáme střed stejnolehlosti, ale známe její koeficient,*
D) *neznáme střed stejnolehlosti ani její koeficient.*

25. Úlohy typu A. Do první skupiny úloh patří téměř všechny úlohy řešené pomocí středové souměrnosti (stejnolehlosti s koeficientem $\varkappa = -1$) v první části tohoto svazku. Uveďme proto nejdříve úlohy, které jsou průhledným zobecněním úloh řešených středovou souměrností. Mezi nejjednodušší patří úlohy o příčkách, které řešíte i ve škole.

Příklad 3. *Je dána kružnice $k(S, r)$ a bod A, který leží ve vnější oblasti kružnice k. Sestrojte sečnu XY kružnice k tak, aby procházela bodem A, protínala k v bodech X, Y a aby platilo $AX = 3 . AY$.*

Rozbor. Neznámými body jsou zřejmě body X, Y. Je-li přímka XY řešením úlohy (obr. 35), je bod Y obrazem bodu X ve stejnolehlosti H se středem A

a koeficientem $\varkappa = \frac{1}{3}$. Protože bod X leží na k, leží bod Y na obrazu k' kružnice k ve stejnolehlosti H. Docházíme k závěru: bod Y leží na kružnici $k(S, r)$ a na kružnici k', která je obrazem k ve stejnolehlosti H. Bod X je o brazem bodu Y ve stejnolehlosti H^{-1}.



Obr. 35

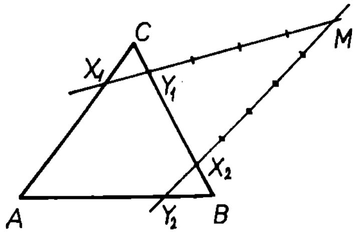
Konstrukce.
K_1: *Sestrojíme k' jako obraz k ve stejnolehlosti H.*
K_2: *Sestrojíme Y jako společný bod kružnic k, k'.*
K_3: *Sestrojíme X jako obraz Y ve stejnolehlosti H^{-1}.*
K_4: *Sestrojíme přímku XY.*

Zkouška. Z konstrukce K_3 vyplývá, že je $AX = 3 . AY$ a že body A, X, Y leží na jedné přímce. Stejnolehlost $H^{-1}(k' \rightarrow k)$ přiřazuje bodu Y kružnice k' bod X kružnice k. Bod Y leží na k podle konstrukce K_2, je tedy XY tětivou kružnice k.

Diskuse. Počet bodů Y závisí na vzájemné poloze kružnic k, k'. Jsou proto buď dvě, jedno nebo žádné řešení.

O něco obtížnější jsou úlohy o příčkách, ve kterých je třeba koeficient stejnolehlosti nejprve spočítat. Použijeme-li vztahů pro dělicí poměry tří bodů (odst. 5), stanovíme snadno koeficient stejnolehlosti.

Příklad 4. *Je dán trojúhelník ABC a bod M ležící vně trojúhelníku. Sestrojte přímku procházející bodem M tak, aby protala hranici trojúhelníku v bodech X, Y a aby platilo* $MX = 5 . XY$.



Obr. 36

Rozbor. Má-li přímka XY požadované vlastnosti, leží buď X mezi M, Y nebo Y mezi M, X (obr. 36). V prvním případě je $(MY_1X_1) = 5$ a koeficient $\varkappa_1$ stejnolehlosti H_1 $(X_1 \to Y_1)$ je $\varkappa_1 = (Y_1X_1M) = \frac{4}{5}$. Ve druhém případě je $(MY_2X_2) = -5$ a $\varkappa_2 = (Y_2X_2M) = \frac{6}{5}$. Stejnou úvahou jako v příkladě 3 dospějeme k závěru, že bod Y leží na hranici trojúhelníku ABC a na hranici trojúhelníku $A_1B_1C_1$ nebo $A_2B_2C_2$, které jsou obrazy hranice trojúhelníku ABC v $H_1\left(M, \frac{4}{5}\right)$*) a $H_2\left(M, \frac{5}{6}\right)$.

*) Stejnolehlost se středem S a koeficientem $\varkappa$ budeme značit symbolem $H(S, \varkappa)$.

Konstrukce.

K_1: *Sestrojíme obraz trojúhelníku ABC v* $H_1\left(M, \frac{4}{5}\right)$ *a* $H_2\left(M, \frac{6}{5}\right)$.

K_2: *Sestrojíme bod Y jako společný bod hranice trojúhelníku ABC s jeho obrazy v H_1 nebo H_2.*

K_3: *Sestrojíme přímku MY a její druhý průsečík X s hranicí trojúhelníku ABC.*

Zkouška se provede obdobně jako v předešlém příkladě.

Diskuse. Úloha má nejvýše čtyři řešení, může jich míti méně, záleží na poloze trojúhelníku ABC a trojúhelníků $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$. Počet řešení se zmenší, leží-li M na prodloužení některé strany trojúhelníku ABC.

Proč jsme použili při řešení příkladu 4 dvou stejnolehlostí, zatímco v příkladě 3 jen jediné? Požadovaným vztahem $AX = 3 . AY$ je v příkladě 3 stanoveno, že bod X je vzdálenější od A než bod Y. V příkladě 4 však není dán vztah mezi MX, MY, proto nemůžeme říci, která z těchto úseček je menší. Musíme počítat s možností, že je $MX < MY$ i $MY < MX$. Pamatujte na to při řešení úloh ve cvičeních.

94. Je dána kružnice k a její body A, B, C. Sestrojte tětivu AX kružnice k tak, aby z ní její průsečík Y s tětivou BC oddělil čtvrtinu.

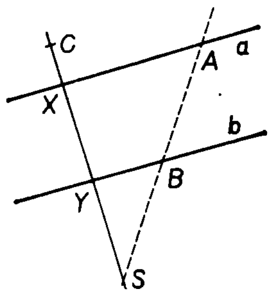
95. Je dán trojúhelník a jeho vnitřní bod P. Sestrojte příčku trojúhelníku procházející bodem P tak, že ji bod P dělí v poměru 1 : 2. Vyznačte v trojúhelníku množinu všech bodů P, pro které má úloha řešení.

96. Dvě kružnice k_1, k_2 se protínají v bodě A. Veďte jím přímku, na které vytíná kružnice k_1 dvakrát delší tětivu než kružnice k_2.

26. Úlohy typu C. Uveďme nyní úlohu typu C, ve které střed stejnolehlosti není dán, ale lze jej snadno sestrojit a převést tak úlohu na typ A.

Příklad 5. *Jsou dány body A, B, C a různé rovnoběžky a, b, které procházejí A, B. Sestrojte přímku procházející bodem C tak, aby protala přímku a v bodě X, přímku b v bodě Y a aby platilo $AX = 2 . BY$.*

Rozbor. Neunáhleme se, volba bodu C za střed stejnolehlosti by nebyla šťastná! Uvědomme si, že úsečky AX, BY jsou stejnolehlé a že tedy existuje stejnolehlost, která zobrazí úsečku BY na úsečku AX, $H(B \rightarrow A, Y \rightarrow X)$. Její střed S je průsečíkem přímek AB, XY (obr. 37).



Obr. 37

Pro koeficient této stejnolehlosti platí: $|\varkappa| = \dfrac{AX}{BY} = 2$, je tedy $|\varkappa| = |(ABS)| = 2$. Střed S stejnolehlosti $H(B \rightarrow A, Y \rightarrow X)$ leží na AB a platí pro něj vztah $|(ABS)| = 2$. Přímka XY prochází bodem C a bodem S.

Konstrukce.

K_1: *Sestrojíme bod* S, *pro který platí* $|(ABS)| = 2$.
K_2: *Sestrojíme přímku* SC, *která protne přímku* a *v bodě* X *a přímku* b *v bodě* Y.

Zkouška. Stejnolehlost H se středem S a $|\varkappa| = 2$ zobrazuje úsečku BY ležící na b na úsečku AX ležící na $a \parallel b$. Je $AX = |\varkappa| . BY = 2 . BY$ a přímka XY prochází bodem C.

Diskuse. Při konstrukci K_1 sestrojíme dva body S, $(ABS_1) = 2$, $(ABS_2) = -2$. Je-li $S \neq C$, existuje jediná přímka SC, je-li $S = C$, existuje nekonečně mnoho přímek procházejících body S, C. Body X, Y existují, pokud není $SC \parallel a$. Úloha může mít nekonečně mnoho, dvě nebo jedno řešení.

97. Řešte úlohu v příkladě 5, je-li místo bodu C dán směr hledané přímky XY.

98. Jsou dány různoběžky a, b, bod A ležící na a, bod B ležící na b a směr s různoběžný s a, b. Sestrojte přímku směru s, která protne přímku a v bodě X a přímku b v bodě Y tak, že je $AX = 2 . BY$.
[Veďte bodem A přímku $a' \parallel b$, sestrojte její průsečík X' s XY a určete vztah úseček AX', BY.]

27. Úlohy typu B. Uvedeme ty úlohy tohoto typu, které požadují sestrojení útvaru (lomené čáry nebo kružnice), jehož význačné body leží na dvou přímkách. Stejnolehlosti používáme v případě, kdy jsou přímky různoběžné.

Při řešení těchto úloh pracujeme s množinou všech stejnolehlostí, které mají společný střed. Není to nic těžkého, potřebujeme jen následující věty:

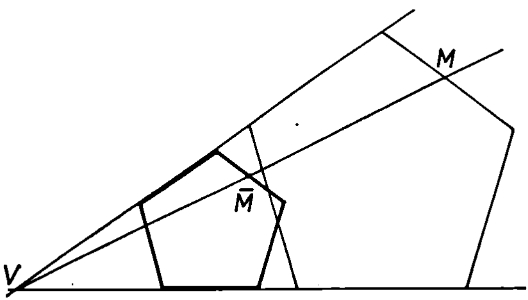
Je-li dán bod S *a bod* $A \neq S$, *je množinou obrazů bodu*

A ve všech stejnolehlostech se středem S přímka AS bez bodů A, S. Správnost věty je zřejmá. Z definice stejnolehlosti víme, že obraz bodu A v libovolné stejnolehlosti se středem S leží na přímce AS a je $A \neq S$. Je-li obráceně bod $A' \neq A$, S libovolným bodem přímky AS, existuje právě jedna stejnolehlost $H(S, A \to A')$.

Je samozřejmé, že *množinou všech bodů roviny, které mohou být zobrazeny do bodu A některou stejnolehlostí se středem S, je opět přímka AS bez bodů A, S.*

Začněme snadnou úlohou o pětiúhelníku.

Příklad 6. *Dvě nesousedící strany pravidelného pětiúhelníku byly prodlouženy tak, až vznikl vrchol V úhlu, na jehož ramenech leží strany pětiúhelníku. Uvnitř tohoto úhlu je dán bod M. Sestrojte pravidelný pětiúhelník, jehož dvě strany leží na ramenech úhlu a třetí prochází bodem M.*



Obr. 38

Řešení. Hledaný pětiúhelník a narýsovaný pětiúhelník jsou stejnolehlé podle středu V. Existuje tedy stejnolehlost se středem V, která zobrazuje narýsovaný pětiúhelník v hledaný. Podle věty vyslovené před textem úlohy leží každý bod $\overline{M}$, který lze zobrazit do bodu M stejnolehlostí se středem V, na přímce VM. Současně leží $\overline{M}$ na některé straně daného pětiúhelníku.

Konstrukce.

K_1: *Sestrojíme bod $\overline{M}$ ležící na obvodu daného pětiúhelníku a na přímce VM.*

K_2: *Zobrazíme daný pětiúhelník ve stejnolehlosti $H(V, \overline{M} \to M)$.*

Zkouška je snadná.

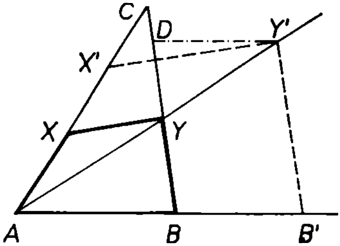
Diskuse spočívá v určení počtu bodů M, protože konstrukce K_2 je jednoznačná. Existují zřejmě právě dva body $\overline{M}$ a tedy i právě dva pětiúhelníky požadovaných vlastností.

Řešení úlohy v příkladě 6 bylo usnadněno tím, že útvar stejnolehlý s hledaným byl již sestrojen. Zpravidla tomu tak nebývá, někdy je dokonce konstrukce takového útvaru „tvrdým oříškem“, někdy není jednoznačná.

Příklad 7. *Je dán trojúhelník ABC. Sestrojte úsečku XY tak, aby bylo $AX = XY = YB$ a aby bod X ležel na přímce AC, bod Y na přímce BC.*

Rozbor. Představme si, že je dán úhel BAC a přímka BC. Lomená čára $AXYB$ (obr. 39) je řešením úlohy. Zobrazíme-li ji ve stejnolehlosti se středem A, přejde $X \to X'$, $Y \to Y'$, $B \to B'$ a bude platit $AX' = X'Y' = Y'B'$, $Y'B' \parallel CB$.

Předpokládejme, že máme sestrojenou lomenou čáru $AX'Y'B'$, která má výše uvedené vlastnosti. Potom je hledaná lomená čára obrazem této čáry ve stejnolehlosti $H(A \to A,\ X' \to X,\ Y' \to Y,\ B' \to B)$. Bod Y je společným bodem přímek BC a AY'.



Obr. 39

Konstrukce.

K_1: *Sestrojíme lomenou čáru $AX'Y'B'$ s vlastnostmi uvedenými v rozboru úlohy.**)

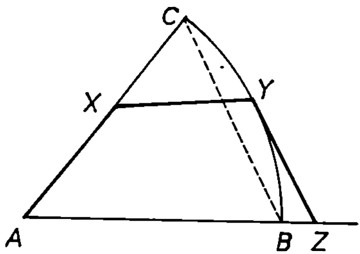
K_2: *Sestrojíme bod Y jako společný bod přímky AY' s přímkou BC.*

K_3: *Sestrojíme lomenou čáru $AXYB$ jako obraz lomené čáry $AX'Y'B'$ v $H(A \to A,\ Y' \to Y)$.*

Zkouška vyžaduje, abychom ověřili nejdříve správnost konstrukce K_1 popsané v poznámce. Správnost celé konstrukce je pak zřejmá z přiřazení, které provádí stejnolehlost H.

*) Abychom netříštili postup řešení dané úlohy, popišme konstrukci lomené čáry $AX'Y'B'$ zde. Při volbě bodu X' přímky AC leží bod Y na $k\ (X', AX')$ a na rovnoběžce vedené bodem D s AB. Bod D leží na BC a platí $BD = AX'$.

Diskuse. Konstrukce K_3 je jednoznačná, K_2 má jediné nebo žádné řešení. Konstrukce K_1 může mít až čtyři různá řešení. Daná úloha má tedy nejvýše čtyři řešení. Při kolika z nich leží body X, Y uvnitř stran AC, BC trojúhelníku ABC?



Obr. 40

Všimněte si, že přímka BC udává jednak směr úsečky YB hledané lomené čáry, jednak se uplatňuje jako jedna základní křivka, která obsahuje bod Y. Udáme-li pro úsečku YB samostatnou podmínku směru, může být přímka BC nahrazena kterýmkoliv útvarem (kružnicí, obloukem kružnice, obvodem trojúhelníka atd.).

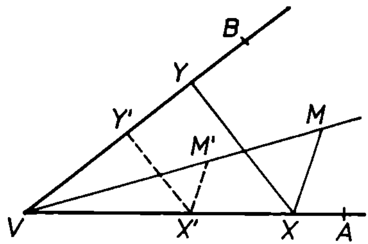
99. Je dána kruhová výseč ABC (obr. 40). Sestrojte lomenou čáru $AXYZ$ tak, aby bod X ležel na přímce AC, bod Y na oblouku BC, bod Z na AB a aby platilo $AX = XY = YZ$, $YZ \parallel BC$.

100. Jsou dány dvě kružnice k_1, k_2 a na každé z nich jeden bod. Sestrojte dvě shodné kružnice, které se dotýkají navzájem a každá z nich ještě jedné dané kružnice v daném bodě.

28.* Uvedeme nyní úlohy, na základě kterých lze sestrojovat *průsečíky přímky s kuželosečkou*. Přečtěte si znovu odst. **10** v kapitole I.

Příklad 8. *Je dán úhel AVB a jeho vnitřní bod M. Sestrojte bod X přímky AV, jehož vzdálenost od VB je dvojnásobkem úsečky XM.*

Rozbor. Označíme-li písmenem Y patu kolmice z X na VB (obr. 41), je hledaný bod X vrcholem lomené čáry YXM, pro kterou platí $XY \perp VB$, Y leží na VB, X



Obr. 41

leží na VA, $XY : XM = 2 : 1$. Zobrazíme-li hledanou lomenou čáru v některé stejnolehlosti se středem V, $H(V \to V,\ Y \to Y',\ X \to X',\ M \to M')$, dostaneme lomenou čáru $Y'X'M'$; bod Y' leží na VB, X' na VA, M' na VM. Je také $X'Y' \perp VB$ a $X'Y' : X'M' = 2 : 1$.

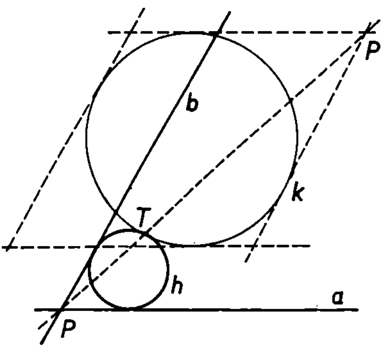
Sestrojíme-li lomenou čáru $Y'X'M'$ tak, aby měla právě uvedené vlastnosti, získáme jejím zobrazením ve stejnolehlosti $H^{-1}(V \to V,\ M' \to M)$ hledanou lomenou čáru YXM a tím i bod X. Konstrukci lomené čáry $Y'X'M'$ můžeme provést tak, že zvolíme libovolně bod X' na VA, sestrojíme Y' jako patu kolmice z X' na VB a přímku VM přetneme kružnicí $k\left(X', \frac{1}{2} X'Y'\right)$ v bodě M'. Dokončete sami řešení této úlohy; získáte nejvýše dvě řešení.

101.* Je dáno ohnisko F a řídící přímka d paraboly a další přímka p. Sestrojte pomocí stejnolehlosti nebo posunutí průsečíky přímky p s parabolou.

102.* Jsou dána ohniska elipsy a její hlavní vrcholy. Dále je dána přímka p, která protíná hlavní osu. Sestrojte průsečíky elipsy s přímkou p, využijete-li řídící přímky elipsy (odst. 10 v kap. I).

29. Úlohy typu D. Čtvrtý způsob konstrukčního využití stejnolehlosti je vhodný při některých úlohách o kružnicích. V rozboru takové úlohy *zvolíme za střed stejnolehlosti neznámý bod*. Sestrojíme jej pak na základě vlastností, které vyplývají z toho, že je středem stejnolehlosti zobrazující daný útvar v hledaný.

Příklad 9. *Jsou dány dvě různoběžky a, b a kružnice k, která se nedotýká žádné z nich. Sestrojte kružnici, která se dotýká přímek a, b i kružnice k.*



Obr. 42

Rozbor. Hledaná kružnice h a daná kružnice k jsou stejnolehlé podle bodu dotyku T (obr. 42). Tato stejnolehlost H (s neznámým koeficientem) zobrazí tečny a, b kružnice h v tečny $a' \parallel a$, $b' \parallel b$ kružnice k. Ve stejnolehlosti $H\,(a \to a', b \to b')$ přejde průsečík P přímek a, b do bodu P' (průsečíku přímek a', b'). Aniž známe T, můžeme sestrojit přímky a', b' a jejich průsečík P'. Bod T pak leží na přímce PP' a na kružnici k. Hledaná kružnice h je obrazem dané kružnice ve stejnolehlosti $H^{-1}(T \to T, P' \to P)$.

Konstrukce.

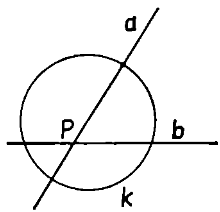
K_1: *Sestrojíme tečny a', b' kružnice k tak, aby byla $a' \parallel a$, $b' \parallel b$.*

K_2: *Sestrojíme průsečík P' přímek a', b'.*

K_3: *Sestrojíme společný bod T kružnice k a přímky PP'.*

K_4: *Sestrojíme h jako obraz k v $H^{-1}(T \to T, P' \to P)$.*

Zkouška. Z konstrukce K_1 plyne, že kružnice k se dotýká přímek a', b'. Stejnolehlostí H^{-1} zobrazíme $a' \to a$, $b' \to b$, $k \to h$. Dotýká se proto kružnice h přímek a, b. Protože střed stejnolehlosti leží na k, je bodem dotyku kružnice k a jejího obrazu, tj. kružnice h. Sestrojená kružnice má všechny požadované vlastnosti.



Obr. 43

Diskuse. Konstrukcí K_1 získáme dvě tečny a' a dvě tečny b' kružnice k, vesměs různé od přímek a, b.

Konstrukcí K_2 získáme čtyři body $P' \neq P$ jako vrcholy rovnoběžníka opsaného kružnici k. Každá přímka PP' protne k ve dvou bodech T_1, T_2 nebo nemá s k společný bod. Vznikne tedy nejvýše osm bodů T. Jaké jsou další možnosti pro počet bodů T? Na obr. 43 vidíte polohu přímek a, b a kružnice k, při které vznikne osm bodů T.

103. Narýsujte si osm kružnic, které jsou řešením úlohy z příkladu 9 pro útvary zobrazené na obr. 43.

104. Zvolte polohu přímek a, b a kružnice k tak, aby body P' byly vrcholy čtverce se středem P. Body T pak po dvou splývají, ale osm stejnolehlostí zůstává; odlište si je navzájem.

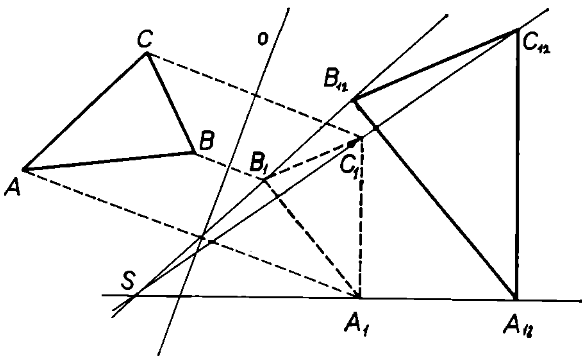
105. Jak probíhá řešení úlohy, dotýká-li se daná kružnice k jedné z přímek a, b nebo obou?

KAPITOLA V

PODOBNÁ ZOBRAZENÍ

V poslední kapitole budeme definovat pojem *podobné zobrazení v rovině* a ukážeme si několik způsobů jeho využití při řešení konstrukčních úloh. Podrobnější studium podobných zobrazení přesahuje již podstatně středoškolskou látku, nebudeme se jím proto zabývat.

30. Složení zobrazení. Uveďme si příklad na složení osové souměrnosti a stejnolehlosti. Na obr. 44 je zobrazen trojúhelník ABC nejprve v osové souměrnosti O s osou o na trojúhelník $A_1B_1C_1$. Tento trojúhelník je pak zobrazen ve stejnolehlosti H se středem S a koeficientem



Obr. 44

$\varkappa = 2$ na trojúhelník $A_{12}B_{12}C_{12}$. Dvojí index píšeme místo správnějšího, ale složitějšího zápisu $(A_1)_2$, $(B_1)_2$ $(C_1)_2$, který vyjadřuje, že ve druhém zobrazení zobrazujeme body A_1, B_1, C_1.

Jak víte, je podstatou skládání dvou zobrazení to, že je provedeme „za sebou". Na obr. 44 jsme získali jako výsledek zobrazení trojúhelníku ABC na trojúhelník $A_{12}B_{12}C_{12}$.

Pořadí, v jakém zobrazení Z_1, Z_2 skládáme, je podstatné, nemusí být $Z_1Z_2 = Z_2Z_1$. Přesvědčte se, že na obr. 44 je $OH \neq HO$ (postačí, zobrazíte-li bod A nejprve ve stejnolehlosti na bod A_2 a tento bod pak v osové souměrnosti na bod A_{21}).

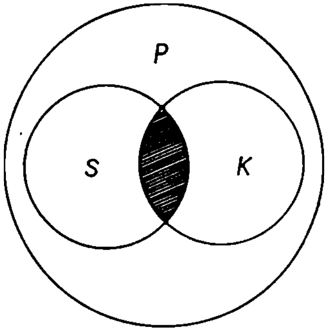
106. Složte osovou souměrnost a stejnolehlost v případě, kdy leží střed stejnolehlosti na ose souměrnosti. Jaký je pak vztah mezi OH a HO?

107. Složte otočení R o pravý úhel kolem středu S se stejnolehlostí $H(S, \varkappa = -2)$. Je $RH = HR$?

31. Podobná zobrazení. Na obr. 44 jsme zobrazili trojúhelník ABC ve zobrazení Z, které bylo složením shodného zobrazení (osové souměrnosti) a stejnolehlého zobrazení (stejnolehlosti). Protože je $A_{12}B_{12} = 2.AB$, $B_{12}C_{12} = 2.BC$, $C_{12}A_{12} = 2.CA$, je trojúhelník $A_{12}B_{12}C_{12}$ podobný trojúhelníku ABC. Charakteristikou vlastností zobrazení Z je právě to, že zobrazuje každou úsečku XY na úsečku $X'Y' = k.XY$, kde k je konstantou. Stejnou vlastnost má každé zobrazení, které vznikne složením shodného a stejnolehlého zobrazení v rovině.

Zobrazení, které je složením shodného a stejnolehlého zobrazení v rovině, nazýváme podobným zobrazením v rovině. Označujeme je zpravidla písmenem P, číslo k nazýváme poměrem podobnosti.

Snadno lze dokázat, že také podobné zobrazení v rovině je prostým zobrazením roviny na rovinu. Každé shodné i stejnolehlé zobrazení v rovině, včetně identity, je podobným zobrazením v rovině.*) Na obr. 45 je schematicky znázorněn vztah množiny P podobných zobrazení, množiny S stejnolehlých zobrazení a množiny K



Obr. 45

shodných (kongruentních) zobrazení. Vyšrafovaný průnik představuje ta stejnolehlá zobrazení, která jsou současně shodnými zobrazeními (identitu, posunutí a středovou souměrnost).

S podobnými zobrazeními, která nejsou shodnými zobrazeními ani stejnolehlostmi (s tzv. *vlastními podobnostmi*) pracujeme obvykle tak, že je vyjádříme jako

*) Shodné zobrazení v rovině je podobným zobrazením s poměrem podobnosti $k = 1$. Ze stejnolehlých zobrazení je posunutí a identita shodným, tedy i podobným zobrazením. Stejnolehlost s koeficientem $\varkappa$ zobrazuje každou úsečku XY na úsečku $X'Y' = |\varkappa| . XY$, je proto podobným zobrazením s koeficientem $k = |\varkappa|$.

složení stejnolehlosti a shodného zobrazení v rovině (v tomto pořadí).

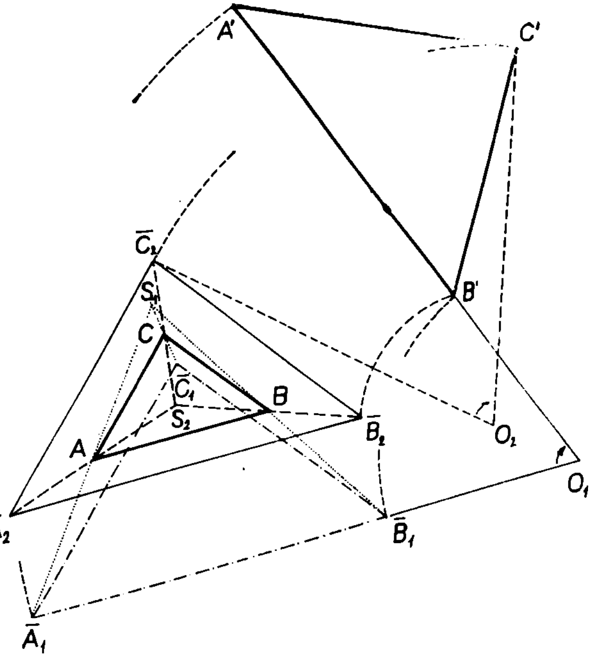
Využíváme při tom věty obdobné větě o stejnolehlých zobrazeních (odst. 20 tohoto svazku) a větě o shodných zobrazeních.

Jsou-li dány dva podobné trojúhelníky ABC, $A'B'C'$, existuje právě jedno podobné zobrazení v rovině, které zobrazuje $A \to A'$, $B \to B'$, $C \to C'$.

Této větě je třeba rozumět tak, že každá dvě podobná zobrazení $P_1(A \to A', B \to B', C \to C')$, $P_2(A \to A', B \to B', C \to C')$ přiřazují každému bodu X roviny týž bod $X' = X'_1 = X'_2$. Přitom však může být podobné zobrazení P_1 složením jiné stejnolehlosti a jiné shodnosti než podobné zobrazení P_2. Na obr. 46 je zobrazen trojúhelník ABC na trojúhelník $A'B'C'$ podobným zobrazením P_1, které je složením stejnolehlosti $H_1\left(S_1, \varkappa_1 = \frac{A'B'}{AB}\right)$ a otočení R_1 se středem O_1. Současně je možno zobrazit trojúhelník ABC na trojúhelník $A'B'C'$ podobným zobrazením P_2, které je složením stejnolehlosti $H_2\left(S_2, \varkappa_2 = \varkappa_1 = \frac{A'B'}{AB}\right)$ a otočení R_2 se středem O_2.

Rozklad podobného zobrazení na stejnolehlost a shodné zobrazení není tedy jednoznačný. Střed stejnolehlosti je možno volit libovolně, její koeficient $\varkappa$ však musí vyhovovat vztahu $|\varkappa| = k$, kde k je koeficientem podobnosti trojúhelníků ABC, $A'B'C'$ a současně koeficientem podobného zobrazení.

108. Zobrazte si libovolný šestiúhelník $ABCDEF$ a trojúhelník $A'B'C'$ podobný trojúhelníku ABC. Sestrojte obrazy bodů D, E, F v podobném zobrazení $P(A' \to A, B \to B', C \to C')$.



Obr. 46

Lze dokázat, že *každá vlastní podobnost v rovině má právě jeden samodružný bod*. Označíme-li jej písmenem S, *platí při* P ($S \rightarrow S' = S$, $A \rightarrow A'$, $B \rightarrow B'$, $C \rightarrow C'$) vztahy $SA' = k . SA$, $SB' = k . SB$, $SC' = k . SC$, (k je koeficient podobnosti). Bod S náleží tedy Apolloniovým kružnicím $\mu_1(A', A, k)$, $\mu_2(B', B, k)$ a $\mu_3(C', C, k)$. *Samodružný bod podobnosti nazýváme středem podobnosti* a sestrojujeme jej jako průsečík Apolloniových kružnic.

109. Sestrojte střed podobnosti zobrazující libovolný trojúhelník ABC na podobný trojúhelník $A'B'C'$. Zvolte bod S

za střed stejnolehlosti zobrazující trojúhelník ABC na trojúhelník shodný s trojúhelníkem $A'B'C'$. Jakou vlastnost má pak shodné zobrazení, kterým lze přemístit sestrojený trojúhelník na trojúhelník $A'B'C'$?

110. Je dán čtverec $KLMN$ a bod A, který neleží na jeho hranici. Určete množiny vrcholů B, C, D těch čtverců $ABCD$, jejichž střed leží na hranici čtverce $KLMN$. Použijte podobných zobrazení se středem A, kterými lze zobrazit střed čtverec $ABCD$ do jeho vrcholů B, C, D.

32. Podobné útvary. Podobnosti trojúhelníků jsme již využili mnohokrát, i v minulém odstavci, k vyslovení věty o určenosti podobného zobrazení v rovině. Pomocí podobných zobrazení můžeme definovat podobnost libovolných dvou útvarů.

Útvar U_1 *je podobný útvaru* U_2, *existuje-li podobné zobrazení v rovině, které zobrazuje* U_1 *na* U_2.

Vyslovená definice vystihuje pomocí termínu „podobné zobrazení" to, co říká školská definice (dva útvary jsou podobné, lze-li je přemístěním uvést do polohy stejnolehlé). Svou formou je definice zcela obdobná definici shodnosti nebo stejnolehlosti útvarů.

Připouštíme, že může existovat několik podobných zobrazení útvaru U_1 na útvar U_2. Tak např. půlkruh o průměru AB lze zobrazit na libovolný půlkruh o průměru KL dvěma podobnými zobrazeními, $P_1(A \to K, B \to L)$ a $P_2(A \to L, B \to K)$. Narýsujte si takové dva půlkruhy a přiřaďte ještě $C \to M$ (body C, M jsou koncové body poloměrů kolmých k AB, KL). Sestrojte středy podobností P_1, P_2.

V definici podobnosti útvarů jsme nepožadovali, aby útvary U_1, U_2 byly omezené.*) Můžeme proto na základě

---

*) Útvar považujeme za omezený, existuje-li kruh, který obsahuje všechny body útvaru.

definice prohlásit, že každé dvě přímky jsou podobné nebo každé dva pásy jsou podobné.

Existuje více množin útvarů téhož druhu, jejichž prvky jsou navzájem podobné. Dokázali jsme již, že každé dva půlkruhy jsou podobné. Z tohoto důkazu je zřejmé, že každé dvě úsečky AB, KL jsou podobné. Určete všechna podobná zobrazení v rovině, kterými lze zobrazit úsečku AB na úsečku KL.

111. Dokažte, že jsou podobné každé dva čtverce a obecně každé dva pravidelné n-úhelníky (při témž n).

[Využijte některých podobností, kterými lze zobrazit stranu jednoho n-úhelníku na stranu druhého n-úhelníku.]

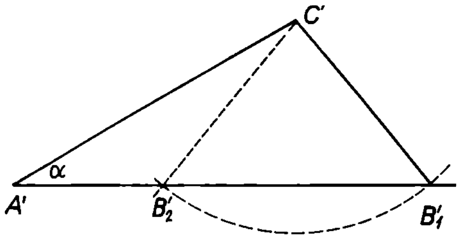
112.* Dokažte, že jsou podobné každé dvě kružnice, každé dvě paraboly a každé dvě rovnoosé hyperboly.

113.* Dokažte, že jsou podobné každé dvě Archimedovy spirály.

33. Konstrukce trojúhelníku podobného danému trojúhelníku. Při dalších konstrukcích využijeme často toho, že *sestrojíme trojúhelník podobný hledanému trojúhelníku dříve než hledaný trojúhelník.* Je-li jeden trojúhelník narýsován, sestrojíme velmi snadno trojúhelník jemu podobný (sestrojíme např. trojúhelník stejnolehlý). Nám však jde právě o ten případ, kdy máme udány jen některé prvky jednoho trojúhelníku a chceme sestrojit trojúhelník jemu podobný.

Příklad 10. *Víme, že trojúhelník ABC má úhel $\alpha = 30°$, těžnici $t_a = 4$ a strany a, b v poměru $a : b = 2 : 3$. Sestrojte aspoň jeden trojúhelník $A'B'C'$ podobný trojúhelníku ABC.*

Řešení. Existuje nekonečně mnoho trojúhelníků $A'B'C'$ podobných trojúhelníku ABC, budeme však spokojeni, sestrojíme-li jediný z nich. Některé údaje o trojúhelníku ABC se vztahují i na trojúhelník $A'B'C'$) a to úhly a poměry stran. Trojúhelník $A'B'C'$ (obr. 47. má úhel $B'A'C' = \alpha$, poměr stran $B'C' : A'C' = 2 : 3$, Tyto údaje nestačí ke konstrukci trojúhelníku $A'B'C'$, musíme si zvolit ještě jeden délkový prvek trojúhelníku $A'B'C'$ (stranu, výšku, těžnici nebo osu úhlu).



Obr. 47

Vtip řešení spočívá v tom, že nemusíme volit délku těžnice t'_a, ale můžeme zvolit délku strany $A'C'$. Z daného poměru zjistíme délku strany $B'C' = \frac{2}{3} A'C'$, o úhlu $B'A'C'$ víme, že je shodný s úhlem α.

Umístíme-li úsečku $A'C' = 3$, sestrojíme pomocí strany $B'C' = 2$ a úhlu $B'A'C' = \alpha$ velmi snadno trojúhelník $A'B'C'$ podobný trojúhelníku ABC. Jak je patrno z obrázku 47, sestrojíme dva body B'; trojúhelník $A'B'_1C'$ není podobný trojúhelníku $A'B'_2C'$. Musíme proto konstatovat, že existují dvě množiny trojúhelníků podobných trojúhelníkům ABC*) s $\alpha = 30°$, $t_a = 4$,

*) Každé dva trojúhelníky téže množiny jsou podobné, ale žádný trojúhelník jedné množiny není podobný trojúhelníku druhé množiny.

$a : b = 2 : 3$. To ovšem znamená, že z daných prvků lze sestrojit neshodné trojúhelníky ABC. Přesvědčte se o tom.

Kdybychom zvolili při konstrukci trojúhelníku $A'B'C'$ stranu $B'C'$, byl by postup obdobný. Při volbě strany $A'B'$ za doplňující údaj bychom ke konstrukci trojúhelníku $A'B'C'$ použili Apolloniovy kružnice.

114. Sestrojte aspoň jeden trojúhelník $A'B'C'$ podobný trojúhelníku ABC, znáte-li tyto údaje o trojúhelníku ABC:

a) β, γ, $a + r$
b) α, β, $v_a + v_b + v_c$
c) $a : c$, $b : a$, ϱ
d) $t_a : t_b$, $t_c : v_c$, $a + b$.

34. Nepolohové úlohy na sestrojení trojúhelníku a čtyřúhelníku. Máme-li *sestrojit trojúhelník ABC, když je dáno* α, β, $v_a + v_b + v_c$, povzdychneme si nad třetí podmínkou. Kdyby šlo o sestrojení trojúhelníku s úhly α, β, věděli bychom si rady hned. Začněme tady tím, že si místo hledaného trojúhelníku ABC sestrojíme trojúhelník $A'B'C'$ s úhly α, β. Je zřejmé, že trojúhelník ABC je podobný trojúhelníku $A'B'C'$, existuje proto podobné zobrazení $P(A \to A', B \to B', C \to C')$.

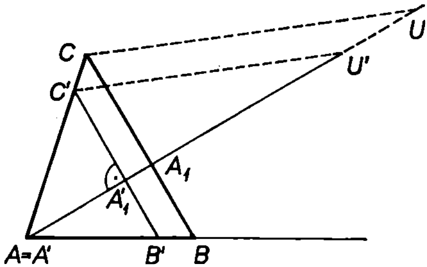
V úloze nejsou vysloveny žádné podmínky pro polohu trojúhelníku ABC (jde o úlohu nepolohovou), můžeme jej proto sestrojit kdekoliv. Nejvýhodnější je sestrojit trojúhelník ABC v poloze stejnolehlé s trojúhelníkem $A'B'C'$. Vyřešíme nyní úlohu podrobněji.

Rozbor. Má-li trojúhelník ABC (obr. 48) požadované vlastnosti, můžeme sestrojit úsečku $AU = v_a + v_b + v_c$. na polopřímce AA_1.*) Obraz trojúhelníku ABC v libo-

---

*) Bod A_1 je patou výšky v_a' v trojúhelníku ABC, bod $A'A'_1$ je patou výšky v_a' v trojúhelníku $A'B'C'$.

volné stejnolehlosti se středem A označme jako trojúhelník $A'B'C'$, $H(A \to A' \equiv A,\ B \to B',\ C \to C',\ U \to U')$. Trojúhelník $A'B'C'$ má úhel $\sphericalangle B'A'C' = \alpha$, $\sphericalangle A'B'C' = \beta$, úsečka $AU' = v_a' + v_b' + v_c'$. (sou-



Obr. 48

čtu výšek trojúhelníku $A'B'C'$). Sestrojíme-li trojúhelník $A'B'C'$ a body U', U, můžeme zobrazit trojúhelník $A'B'C'$ na trojúhelník ABC stejnolehlostí $H^{-1}(A \to A,\ U' \to U)$.

Konstrukce.

K_1: *Sestrojíme trojúhelník* $A'B'C'$ *s úhly* α, β.
K_2: *Na polopřímce* $A'A_1'$ *sestrojíme součet výšek* $v_a' + v_b' + v_c' = A'U'$.
K_3: *Na polopřímku* $A'U'$ *přeneseme úsečku* $AU = v_a + v_b + v_c$.
K_4: *Sestrojíme trojúhelník* ABC *jako obraz trojúhelníku* $A'B'C'$ *ve stejnolehlosti* $H^{-1}(A' \to A',\ U' \to U)$.

Zkouška. Z konstrukce K_4 plyne, že $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, je proto $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle CBA = \beta$. Zřejmě je i $v_a + v_b + v_c = AU$.

Diskuse. Všechny kroky konstrukce jsou jednoznačné, pokud je $\alpha + \beta < 180°$. Úloha má pak právě jedno řešení.

115. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno:

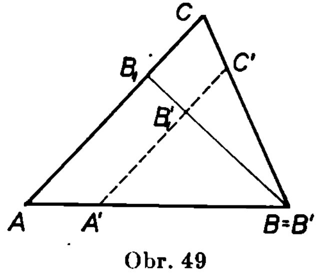
a) $\alpha, \beta, c + r$
b) $\beta, \gamma, a + b + c$
c) $\alpha, \gamma, r + 2\,t_b$
d) $\gamma, \alpha - \beta, v_a + t_c$.

Příklad 11. *Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno α, v_b a poměr $a : b = 3 : 2$.*

Rozbor. Má-li trojúhelník ABC požadované vlastnosti, je jeho obrazem v každé stejnolehlosti se středem B trojúhelník $A'B'C'$, který má úhel $B'A'C' = \alpha$ a poměr stran $B'C' : A'C' = 3 : 2$ (obr. 49). Pata B_1 výšky $v_b = BB_1$ se zobrazí v patu B_1' výšky v_b' trojúhelníku $A'B'C'$.

Konstrukce trojúhelníku $A'B'C'$ je popsána v příkl. 10 při obráceném poměru stran.

K_1: *Sestrojíme trojúhelník $A'B'C'$ s vlastnostmi popsanými v rozboru.*



Obr. 49

K_2: *Sestrojíme patu B'_1 výšky v'_b a na polopřímce $B'B'_1$ sestrojíme bod B_1 tak, aby $B'B_1 = v_b$.*

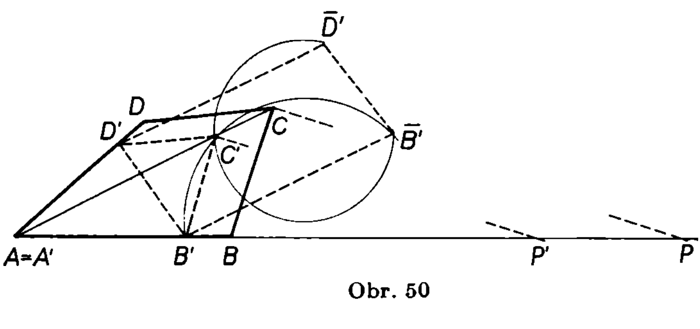
K_3: *Sestrojíme trojúhelník ABC jako obraz trojúhelníku $A'B'C'$ ve stejnolehlosti $H(B \to B' \equiv B,\ B'_1 \to B_1)$.*

Zbývající fáze řešení proveďte sami, diskusi konstrukce K_1 můžete provést podle diskuse příkladu 10.

Při řešení úloh tohoto typu je důležité využít při rozboru úsečky, která charakterizuje hledaný trojúhelník ($v_a + v_b + v_c$ v první úloze, v_b v příkladě 11). Uvedeme ještě jednu úlohu na sestrojení čtyřúhelníku.

Příklad 12. *Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, je-li dán jeho obvod, poměr úhlopříček $AC = 2 . BD$, úhel ε sevřený úhlopříčkami a vnitřní úhly α, β.*

Rozbor. Má-li čtyřúhelník $ABCD$ (obr. 50) požadované vlastnosti, sestrojme si na polopřímce AB úsečku $AP = AB + BC + CD + DA$. Obrazem čtyřúhelníku $ABCD$ v libovolné stejnolehlosti se středem A je čtyřúhelník $A'B'C'D'$ podobný čtyřúhelníku $ABCD$. V této stejnolehlosti přejde bod P do bodu P', pro který platí $A'P' = A'B' + B'C' + C'D' + D'A'$.



Obr. 50

Jeden čtyřúhelník $A'B'C'D'$ podobný čtyřúhelníku $ABCD$ snadno sestrojíme, zvolíme-li úsečku $B'D'$. Je pak $A'C' = 2 . B'D'$ a při znalosti úhlu ε můžeme sestrojit význačný rovnoběžník $DB\overline{B}'\overline{D}'$ čtyřúhelníku $A'B'C'D'$ (obr. 50). Proveďte konstrukci čtyřúhelníku $A'B'C'D'$ podle postupu popsaného v odst. 24.

Konstrukce.

K_1: *Sestrojíme jeden čtyřúhelník $A'B'C'D'$ podobný čtyřúhelníku $ABCD$.*

K_2: *Na polopřímce $A'B'$ sestrojíme bod P' tak, že je $A'P' = A'B' + B'C' + C'D' + D'A'$.*

K_3: *Na polopřímce $A'P'$ sestrojíme bod P, $AP = AB + BC + CD + DA$.*

K_4: *Čtyřúhelník $ABCD$ sestrojíme jako obraz čtyřúhelníku $A'B'C'D'$ v $H(A' \to A' = A, P' \to P)$.*

Zkoušku a *diskusi* proveďte sami.

116. Sestrojte trojúhelník, je-li dáno:
a) $a : b$, $b : c$, $t_a + t_b + t_c$ b) β, $a : c$, $3r + b$

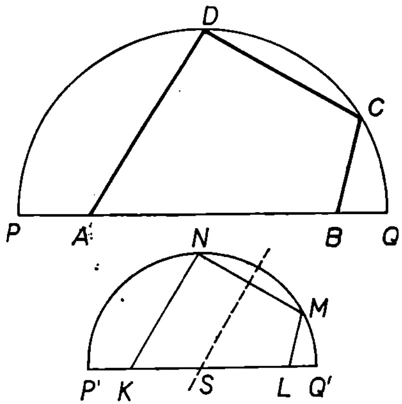
117. Sestrojte kosočtverec, je-li dán poměr jeho úhlopříček a součet strany a jedné úhlopříčky.

35. Řešení polohových úloh pomocí podobnosti. Princip řešení těchto úloh zůstává stejný jako v předešlém odstavci. Sestrojujeme *kdekoliv v rovině* útvar podobný hledanému. Navíc však musíme zobrazit pomocný útvar na hledaný útvar tak, aby měl požadovanou polohu, nevystačíme proto všude se stejnolehlostí, ale musíme užít i přemístění.

Příklad 13. *Je dán půlkruh nad průměrem PQ a konvexní čtyřúhelník $KLMN$. Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$*

podobný čtyřúhelníku KLMN tak, aby jeho vrcholy A, B ležely na průměru a vrcholy C, D na kružnici ohraničující půlkruh.

Rozbor. Je-li čtyřúhelník $ABCD$ (obr. 51) řešením úlohy, je podobný čtyřúhelníku $KLMN$, existuje tedy podobné zobrazení $P(A \to K,\ B \to L,\ C \to M,\ D \to N)$.



Obr. 51

Zobrazíme-li v této podobnosti i body P, Q v body P', Q', získáme půlkruh o průměru $P'Q'$ opsaný čtyřúhelníku $KLMN$. Střed tohoto půlkruhu leží na přímce KL a na ose úsečky MN.

Konstrukce.

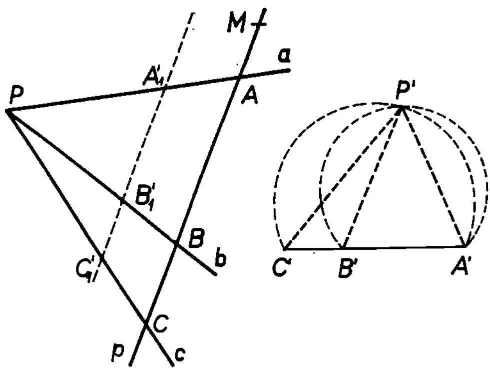
K_1: *Sestrojíme bod S jako společný bod přímky KL a osy úsečky MN.*

K_2: *Sestrojíme půlkruh $k(S, SM)$ omezený průměrem $P'Q'$ ležícím na přímce KL.*

K_3: *Sestrojíme čtyřúhelník $ABCD$ jako obraz čtyřúhelníku $KLMN$ v podobnosti, která zobrazí půlkruh o průměru $P'Q'$ na půlkruh o průměru PQ.*

Úloha má dvě řešení souměrná podle osy úsečky PQ.

Příklad 14. *Jsou dány tři přímky a, b, c procházející bodem P a bod $M \neq P$. Sestrojte přímku, která prochází bodem M a protíná přímky a, b, c v bodech A, B, C tak, že je B mezi A, C a $AB = 2 . BC$.*



Obr. 52

Rozbor. Má-li přímka p požadované vlastnosti, vzniká trojúhelník ACP. Každý trojúhelník $A'C'P'$ podobný trojúhelníku ACP má úhel $\sphericalangle A'P'C' = \sphericalangle APC$, $\sphericalangle A'P'B' = \sphericalangle APB$, B' leží mezi A', C' tak, že je $A'B' = 2 . B'C'$. Sestrojíme-li kdekoliv v rovině trojúhelník $A'C'P'$, který má uvedené vlastnosti, lze jej přemístit tak, že se stane stejnolehlým s hledaným trojúhelníkem (obr. 52).

Při sestrojování trojúhelníku $A'C'P'$ umístíme úsečku $A'C' = 3$ a vyznačíme bod B' úsečky tak, aby bylo $A'B' = 2$. Bod P' náleží množinám bodů $\mu(A', C', \sphericalangle APC)$, $\mu_2(A', B', \sphericalangle APB)$.

Konstrukce.

K_1: *Sestrojíme trojúhelník $A'C'P'$ s vlastnostmi uvedenými v rozboru.*

K_2: *Přemístíme trojúhelník $A'C'P'$ tak, aby $P' \to P$ a body A_1', C_1' ležely na přímkách a, c.*

K_3: *Bodem M vedeme přímku $p \parallel A_1'C_1'$; její průsečíky s přímkami a, b, c jsou hledané body A, B, C.*

Zkoušku a *diskusi* proveďte sami. Úloha má jedno nebo žádné řešení.

118. Jsou dány přímky a, b, c procházející bodem P a další přímka q, která bodem P neprochází. Sestrojte přímku p, která protíná dané přímky v bodech A, B, C, Q tak, že bod B leží mezi A, Q, bod C mezi B, Q a $AB = 2 . BC = 3 . CQ$.

119. V kružnici k (S, r) jsou zobrazeny dva poloměry SA, SB. Sestrojte tětivu XY kružnice k, která je dělena průsečíky s poloměry SA, SB na tři shodné části.

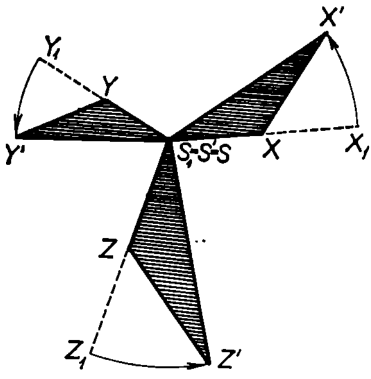
120.* Je dán úhel α s vrcholem V a dva body A, B. Sestrojte kružnici procházející body A, B tak, aby proťala ramena úhlu α v bodech X, Y, jejichž spojnice XY prochází bodem B.

36. Konstrukce pomocí středu podobnosti. Je-li podobnost složením stejnolehlosti a otočení, která mají společný střed, je tento bod samodružný v podobném zobrazení a nazývá se střed podobnosti. Téměř každou úlohu, kterou lze řešit pomocí středu stejnolehlosti nebo otočením, můžeme zobecnit na úlohu, při jejímž řešení se uplatní střed podobnosti.

Středu podobnosti můžeme využít při řešení konstrukč-

ních úloh v případech, kdy je jím některý z daných bodů, i v případech, kdy je neznámým bodem. Seznámíme se s řešením jedné úlohy prvního typu a jedné úlohy druhého typu. Omezíme se přitom na podobná zobrazení, která jsou složením stejnolehlosti a otočení, $P = HR$, tzv. *přímé vlastní podobnosti.*

Známe-li střed S přímé vlastní podobnosti, můžeme ji výhodně vyjádřit jako složení stejnolehlosti a otočení se společným středem. Na obr. 53 je zvolen střed S_1 stejnolehlosti H s koeficientem $\varkappa = 2$ a střed S' otočení R o úhel 30° v kladném smyslu. Složíme-li tato dvě



Obr. 53

zobrazení v pořadí H, R, dostaneme přímou vlastní podobnost $P = HR$ se středem S, která zobrazuje $X \to X_1 \to X'$, $Y \to Y_1 \to Y'$, $Z \to Z_1 \to Z'$, $S \to S_1 \to S' = S$.

Z obrázku 53 je zřejmé, že šrafované *trojúhelníky XSX', YSY', ZSZ' jsou navzájem podobné.* Této vlastnosti přímých vlastních podobností velmi často využíváme při konstrukčních úlohách. Obvykle také potřebujeme inverzní zobrazení k přímé vlastní podobnosti $P = HR$, je jím zřejmě zobrazení $P^{-1} = R^{-1}H^{-1}$ (pozor na záměnu pořadí!).

Příklad 15. *Jsou dány dvě kružnice k_1, k_2, které se protínají v bodě A. Sestrojte obdélník $ABCD$, jehož vrchol B leží na k_1, vrchol D na k_2 a pro jehož strany platí $AB = 2 . AD$.**)

Rozbor. Má-li obdélník $ABCD$ žádané vlastnosti, je bod A středem podobnosti, která zobrazuje $D \to B$. Toto podobné zobrazení získáme složením stejnolehlosti H se středem A a koeficientem $\varkappa = 2$, která zobrazí $A \to A$, $D \to \overline{D}$, a otočení R kolem středu A o pravý úhel, kterým přejde bod $\overline{D}$ do bodu B. Zobrazíme-li současně s bodem D i kružnici k_2, získáme kružnici k_2', která prochází bodem B. Bod B leží tedy na k_1 a na k_2' (obrazu kružnice k_2 v podobnosti $P = HR$).

Konstrukce.

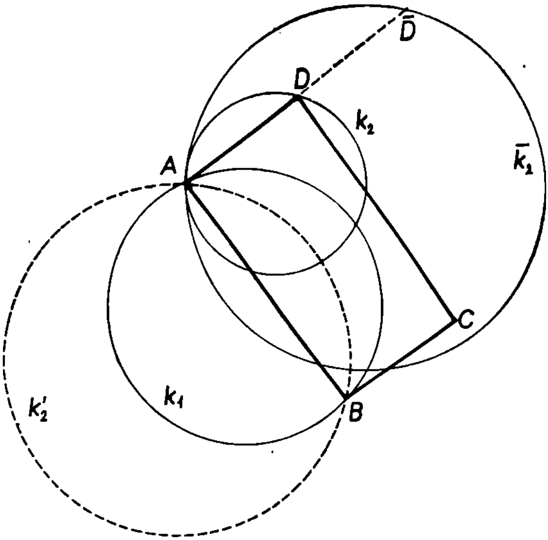
K_1: *Sestrojíme obraz k_2' kružnice k_2 v podobnosti $P = HR$.*
K_2: *Sestrojíme bod $B \neq A$ jako společný bod kružnic k_1, k_2'.*
K_3: *Sestrojíme bod D, který je obrazem bodu B v P^{-1}.*
K_4: *Sestrojíme obdélník $ABCD$.*

Zkouška. Jak je zřejmé, bod B leží na k_1, bod D leží na obrazu kružnice k_2' v P^{-1}, tj. na kružnici k_2. Je přitom $AB \perp AD . AB = 2 . AD$.

---

*) Tato úloha je zobecněním cvičení 31 z první části této knížky, ve kterém se požaduje sestrojení čtverce $ABCD$ se stejnými polohovými vlastnostmi.

Diskuse. Při konstrukci K_1 můžeme zvolit otočení o pravý úhel v kladném nebo záporném smyslu, existují proto dvě podobnosti P a dvě kružnice k_2' (obr. 54). Je-li $k_2' = k_2$, má úloha nekonečně mnoho řešení, v ostatních případech jsou právě dvě řešení nebo žádné.



Obr. 54

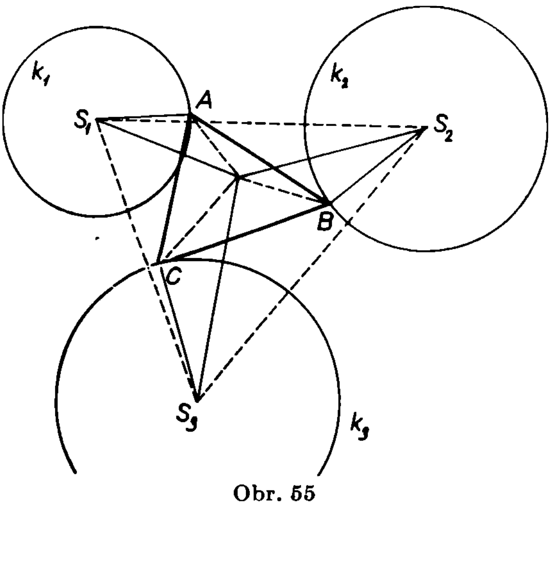
121. Je dána kružnice k, přímka p a bod A, který leží na k. Sestrojte rovnoběžník $ABCD$ s úhlem $\alpha = 60°$, jehož vrchol B leží na k, vrchol D na p tak, že je $AB = 2 . CD$.

122. Na kružnici k je dán bod A. Sestrojte trojúhelník ABC vepsaný do kružnice k, je-li dán jeho úhel $\alpha = 30°$ a poměr $AC : AB = \sqrt{3} : \sqrt{2}$.

123. Jsou dány dvě přímky p, q, bod A a trojúhelník KLM. Sestrojte trojúhelník ABC podobný trojúhelníku KLM tak, aby bod B ležel na p a bod C na q. (Tato úloha je zobecněním úlohy 24.)

Příklad 16.* *Jsou dány tři kružnice k_1, k_2, k_3 se středy S_1, S_2, S_3 neležícími na jedné přímce, na kružnici k_1 je dán bod A. Sestrojte trojúhelník ABC přímo podobný trojúhelníku $S_1S_2S_3$ tak, aby jeho vrchol T ležel na kružnici k_2 a vrchol C na kružnici k_3.*

Rozbor. Má-li trojúhelník ABC požadované vlastnosti, existuje přímé podobné zobrazení $P(S_1 \to A,\ S_2 \to B,\ S_3 \to C)$. Je-li bod S středem podobnosti P, je $\triangle S_1SA \sim \sim \triangle S_2SB \sim \triangle S_3SC$ a platí proto $S_1S : S_2S : S_3S = = S_1A : S_2B : S_3C = r_1 : r_2 : r_3$ (obr. 55). Neznámý bod



Obr. 55

S leží tedy na Apolloniových kružnicích $\mu_1\left(S_1, S_2, \frac{r_1}{r_2}\right)$, $\mu_2\left(S_2, S_3, \frac{r_2}{r_3}\right)$, $\mu_3\left(S_1, S_3, \frac{r_3}{r_1}\right)$.

Sestrojíme-li bod S, máme určen jeden ze tří podobných trojúhelníků uvedených v rozboru. Podobné zobrazení P určíme potom jako zobrazení složené ze stejnolehlosti $H\left(S, \varkappa = \frac{SS_1}{SA}\right)$ a otočení R kolem středu S o orientovaný úhel $\widehat{S_1SA}$. Neznámé body B, C jsou po řadě obrazy bodů S_2, S_3 v zobrazení $P = HR$.

Popište sami konstrukci a proveďte ji graficky, nevynechte žádné řešení úlohy. Zkouška správnosti konstrukce je snadná, diskuse spočívá v úvaze o počtu společných bodů tří Apolloniových kružnic (viz též cvičení 31).

124.* Jsou dány tři kružnice k_1, k_2, k_3, jejichž středy neleží na jedné přímce. Sestrojte trojúhelník ABC shodný s trojúhelníkem $S_1S_2S_3$ tak, aby jeho vrchol A ležel na k_1, vrchol B na kružnici k_2 a vrchol C na kružnici k_3.

125.* Jsou dány dvě nesoustředné kružnice k_1, k_2, bod A ležící na k_1 a bod B ležící na k_2. Sestrojte bod X na kružnici k_1 a bod Y na kružnici k_2 tak, aby byla úsečka $XY = S_1S_2$ a aby obloukům AX, BY příslušely shodné středové úhly v k_1, resp. k_2.

[Využijte přímo podobných kruhových výsečí s „rameny" S_1A, resp. S_2B. Jedné dvojice takových výsečí, např. čtvrtkruhů, lze využít ke konstrukci středu S potřebné přímé podobnosti.]

Seznámili jsme se jen s několika způsoby konstrukčního využití podobných zobrazení v rovině. Je samozřejmé, že hlubší studium podobných zobrazení dává větší možnosti pro řešení obtížnějších konstrukčních úloh.

OBSAH

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

JAROSLAV ŠEDIVÝ

Shodnost a podobnost v konstrukčních úlohách

Pro účastníky matematické olympiády
vydává ÚV matematické olympiády
v nakladatelství Mladá fronta
Řídí akademik Josef Novák
K tisku připravil Vladimír Doležal
Obálku navrhl Jaroslav Příbramský
Odpovědná redaktorka Libuše Rousková
Technický redaktor Vladimír Vácha
Publikace číslo 4201
Edice Škola mladých matematiků, svazek 46
Vytiskl MÍR, novinářské závody, n. p.
závod 1, Praha 1, Václavské nám. 15
5,21 AA, 6,77 VA. 160 stran
Náklad 5500 výtisků, 1. vydání
Praha 1980. 508/21/82.5

23-065-80 03/2 Cena brož. výt. Kčs 9,—

23-065-80
03/2
Cena brož.
Kčs 9,—