Posloupnosti a řady

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

POSLOUPNOSTI A ŘADY

43

Vydal ÚV matematické olympiády v nakladatelství Mladá fronta

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

JIŘÍ JARNÍK

Posloupnosti a řady

PRAHA 1979
VYDAL ÚV MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY
V NAKLADATELSTVÍ MLADÁ FRONTA

Recenzovali RNDr. Josef Kubát
a doc. RNDr. Alois Kufner, CSc.

PŘEDMLUVA

Tato knížka vás má seznámit s jedním ze základních pojmů matematické analýzy, s pojmem limity. Témata z matematické analýzy nejsou v knižnici Škola mladých matematiků příliš častá. Také v soutěžích matematické olympiády jsou úlohy z tohoto oboru poměrně vzácné. Snad je to proto, že problémy, jimiž se matematická analýza zabývá, nelze většinou formulovat tak elementárně, jak je tomu v některých jiných oblastech matematiky, a že jejich výklad se často zdá na první pohled příliš technický a suchopárný. Avšak byly to především metody matematické analýzy, které v minulosti umožnily rozvoj fyziky a jiných přírodních věd, a i dnes zůstává matematická analýza důležitým nástrojem aplikací matematiky. Také proto je užitečné se seznámit s jejím jazykem, i když je někdy hanlivě nazýván „epsilonštinou“ podle řeckého písmene ε, které se tradičně objevuje v mnoha definicích. Jestliže vytrváte a přečtete si pozorně celý výklad, poznáte, že nabízí příležitost jak k prohloubení přesného logického myšlení, tak i k procvičení matematického „řemesla“, a to ve směru, kterému není na střední škole věnováno mnoho času.

Knížka obsahuje řadu příkladů. Chcete-li z ní mít co největší užitek, pokuste se příklady řešit samostatně, dříve než si přečtete jejich řešení. Totéž platí i o důkazech vět, i když jejich samostatné nalezení bude pro vás asi obtížné. Ale za pokus to stojí! Úlohy k jednotlivým kapitolám jsou většinou důkazové, ale některé vyžadují také formulaci nových výsledků a hledání příkladů či protipříkladů. Jejich řešení vám může pomoci odhalit „bludné" představy a tím lépe pochopit látku. K úlohám označeným hvězdičkou je na konci knížky uvedeno řešení.

Co se týče doplňující literatury, je její výběr dost obtížný. Prakticky každá učebnice „vyšší matematiky" pro vysoké školy obsahuje pojednání o posloupnostech a řadách, které většinou může číst s porozuměním i pokročilejší student vyšších ročníků gymnázia. Připomeňme aspoň učebnice Vojtěcha Jarníka *Diferenciální počet* I (6. vyd. Academia, Praha 1974) a podstatně obtížnější *Diferenciální počet* II (3. vyd. Academia, Praha 1976). Ze starších publikací se tímto tématem zabývá knížka Jana Vyšína *O nekonečných řadách* (JČSMF, Cesta k vědění sv. 45, Praha 1948).

1. kapitola

POSLOUPNOSTI

1.1. ÚVOD

S pojmy, jimiž se budeme v této knížce zabývat, jste se už určitě setkali. V populárních knížkách o matematice jste se seznámili s historkou o odměně vynálezci šachové hry nebo o Achillovi a želvě či o tom, jak mladý chlapec (a později slavný vědec) Gauss udivil svého učitele rychlým sečtením všech přirozených čísel od jedné do sta. Možná, že mnohem dříve vás nad narozeninovým dortem napadlo, že kdybyste první den snědli polovinu dortu a pak každý den vždy polovinu toho, co den předtím, vydržel by vám dort „navěky“.

Ve škole jste se seznámili nejprve s přirozenými čísly. Brzy jste si snad položili otázku, zda sudých (kladných) čísel je „méně než všech přirozených čísel“ či zda je jich „stejně mnoho“. Možná, že jste došli k závěru, že sudých čísel je „dvakrát méně“, neboť z množiny přirozených čísel musím každé druhé vynechat, abych dostal množinu všech sudých (kladných) čísel. Ale možná, že vás napadlo napsat následující schéma:

$$\begin{gathered} 1, 2, 3, 4, 5, \ldots \\ 2, 4, 6, 8, 10, \ldots . \end{gathered}$$

Z něho jste usoudili, že sudých čísel není méně (a ovšem ani více) než všech přirozených. Tento závěr je správnější (nebo aspoň bližší matematickému pohledu na tento problém), ale o to nám teď nejde. Důležité je, že jste dospěli již jen na krůček od matematické definice posloupnosti: každému přirozenému číslu (označme je třeba n) jste přiřadili jeho dvojnásobek (číslo $2n$). Jinými slovy, sestrojili jste množinu uspořádaných dvojic čísel $[n, 2n]$. To je způsob, kterým se postupuje i na střední škole, když se hovoří o aritmetické a geometrické posloupnosti. Stejně budeme postupovat i my. Předtím však probereme několik příkladů, které nás přesvědčí, že pojmy, které zavedeme, vycházejí z praktických úloh našeho života.

Příklad 1. Pustíme-li z velké výšky kámen, začne padat volným pádem. To znamená, že jeho rychlost v (m/s) rovnoměrně roste: označíme-li okamžik, kdy jsme pustili kámen, znakem t_0, je rychlost kamene v okamžiku t rovna

$$v = g(t - t_0),$$

kde g je gravitační konstanta. Dráha, kterou kámen urazí, je

$$s = \frac{1}{2} g(t - t_0)^2.$$

Ptejme se, jakou dráhu urazí kámen za první, druhou, třetí, ... sekundu. Tato dráha bude*)

$$s_1 = \frac{1}{2} g \qquad \text{za první sekundu,}$$

$$s_2 = \frac{1}{2} g[2^2 - 1^2] = \frac{3}{2} g \quad \text{za druhou sekundu,}$$

$$s_3 = \frac{1}{2} g[3^2 - 2^2] = \frac{5}{2} g \quad \text{za třetí sekundu;}$$

*) V dalším uvažujeme již jen číselné hodnoty bez ohledu na rozměr příslušných fyzikálních veličin.

obecně dráha za n-tou sekundu bude

$$s_n = \frac{1}{2} g[n^2 - (n-1)^2] = \frac{2n-1}{2} g\,.$$

Dostali jsme čísla $\frac{1}{2} g$, $\frac{3}{2} g$, $\frac{5}{2} g$, ..., $\frac{2n-1}{2} g$, ... či správněji dvojice čísel $\left[1, \frac{1}{2} g\right]$, $\left[2, \frac{3}{2} g\right]$, $\left[3, \frac{5}{2} g\right]$, ..., $\left[n, \frac{2n-1}{2} g\right]$, ... To je tzv. *aritmetická posloupnost*, kterou mnozí z vás znají ze školy. Její charakteristickou vlastností je to, že rozdíl kteréhokoliv jejího členu a členu předchozího je stálý, nemění se:

$$s_2 - s_1 = s_3 - s_2 = \ldots = s_n - s_{n-1} = g\,.$$

Příklad 2. Biologové vědí, že včelí samička se rodí z oplodněného vajíčka, tj. má matku i otce, zatímco včelí samec (trubec) se rodí z vajíčka neoplodněného: má tedy jen jednoho rodiče (matku). Otázka zní, kolik má trubec prarodičů, praprarodičů atd. Abychom si problém zjednodušili, budeme předpokládat, že ve zkoumaných generacích se žádný jedinec nevyskytuje dvakrát (což ovšem v přírodě nemusí být splněno). Označme $x_0 = 1$ (jeden trubec v „nulté" generaci), $x_1 = 1$ (jen matka v „první" — měli bychom spíše říkat v minus první — generaci); x_2 bude počet prarodičů, x_3 počet praprarodičů atd. Protože trubcova matka má oba rodiče, je $x_2 = 2$. Z toho je jeden trubec, jedna samička, takže zřejmě $x_3 = 1 + 2 = 3$. Tak bychom mohli postupovat dál. Pokusme se však odhalit obecné pravidlo. Předpokládejme, že známe $x_0, x_1, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}$. Potom každý člen $(n-1)$-ní generace má matku; otce mají jen samičky. Kolik však je samiček v této generaci? Zřejmě přesně tolik, kolik je všech členů $(n - 2)$-hé generace (neboť každý z nich má matku — samičku). Musíme tedy k x_{n-1} matkám přidat ještě x_{n-2} otců. Odtud

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}.$$

Protože známe první dvě čísla ($x_0 = x_1 = 1$), umíme vypočítat postupně i všechna další. Čísla x_n (či dvojice $[n, x_n]$) tvoří tzv. *Fibonacciho posloupnost.*

Příklad 3. Staňme se teď na chvíli zákazníky banky, která zhodnocuje vklady složeným úrokováním s roční úrokovou mírou p procent. Úroky připisuje jednou ročně. Vložíme-li do této banky 1 Kčs, dostaneme za rok částku $v_1 = \left(1 + \frac{p}{100}\right)$ korun. Jiná banka má stejnou roční úrokovou míru, ale úroky připisuje dvakrát ročně. Vložíme-li 1 Kčs, budeme mít po prvním pololetí vklad $\left(1 + \frac{p}{100} \cdot \frac{1}{2}\right)$ korun a po druhém pololetí, tj. po roce, vklad $v_2 = \left(1 + \frac{p}{100} \cdot \frac{1}{2}\right) + \left(1 + \frac{p}{100} \cdot \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{1}{2} =$ $= \left(1 + \frac{p}{100} \cdot \frac{1}{2}\right)^2$ korun. Zvolíte-li si nějakou konkrétní úrokovou míru (třeba $p = 4$), snadno vypočtete, že v druhé bance vzroste vklad o větší částku. Můžete stejný postup zkusit při počtu úrokovacích období za rok rovném třem, čtyřem atd. Dostanete částku $v_3 =$ $= \left(1 + \frac{p}{100} \cdot \frac{1}{3}\right)^3$, $v_4 = \left(1 + \frac{p}{100} \cdot \frac{1}{4}\right)^4$ atd. Přitom platí (při daném kladném p) $v_1 < v_2 < v_3 < v_4$. Obecně, připisuje-li banka úrok n-krát za rok, vzroste vklad 1 Kčs na konci roku na částku $v_n = \left(1 + \frac{p}{100n}\right)^n$ korun. Máme zde opět množinu dvojic čísel

$$\left[1, 1 + \frac{p}{100}\right], \left[2, \left(1 + \frac{p}{200}\right)^2\right], \ldots, \left[n, \left(1 + \frac{p}{100n}\right)^n\right], \ldots .$$

Jsme-li trochu chtiví peněz, určitě nás napadne hledat banku, která by byla ochotna připisovat úrok co nejčastěji. Snad bychom mohli z jedné koruny za rok získat sto, tisíc nebo milión! Ale netěšte se. Brzy ukážeme (viz příkl. 18), že i kdybychom našli banku, v níž by nějaký stroj připisoval úroky prakticky „spojitě", tj. v každém okamžiku, nestoupla by částka na konci roku nad určitou mez. Tato mez závisí ovšem na konkrétní hodnotě úrokové míry p. Kdyby bylo $p = 100$ (tj. 100 % úroková míra), vzrostl by vklad za rok vždy na méně než svůj e-násobek, kde e $= 2{,}718\ldots$ je základ přirozených logaritmů.

Ve všech třech příkladech jsme vytvořili jisté dvojice čísel $[n, s_n]$, $[n, x_n]$, $[n, v_n]$ čili jistá nekonečná seskupení čísel

$$s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots ;$$

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots ;$$

$$v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots !$$

(Používám zde slova seskupení a nikoliv množina, protože množina je dána svými prvky, zatímco zde jednak záleží na pořadí čísel, jednak se některá čísla mohou opakovat — dokonce v celém „nekonečném seskupení" může být jen konečný počet různých čísel.) Takové seskupení čísel budeme nazývat posloupností. Abychom mohli tento pojem přesně definovat, připomeňme si pojem zobrazení, s nímž se většina čtenářů ve škole setkala. Nechť jsou dány dvě množiny M, H. Připomeňme, že *kartézským součinem* $M \times H$ nazýváme množinu všech uspořádaných dvojic (x, y), kde $x \in M$, $y \in H$. Zobrazením z množiny M do množiny H nazýváme podmnožinu F kartézského součinu $M \times H$, splňující tuto podmínku: je-li $x \in M$, $y_1 \in H$, $y_2 \in H$, $(x, y_1) \in F$, $(x, y_2) \in F$, pak $y_1 = y_2$.

Jinými slovy, zobrazení je určitý předpis, který prvku množiny M přiřazuje prvek množiny H. Přitom se může stát, že některým prvkům množiny M není přiřazen žádný prvek množiny H, ale nesmí se stát, že by nějakému prvku množiny M byly přiřazeny dva či více různých prvků množiny H.

Vynecháme-li z množiny M ty prvky, kterým není přiřazen prvek množiny H (tj. ty prvky $x \in M$, že pro žádné $y \in H$ neplatí $(x, y) \in F$), dostaneme množinu D, kterou budeme nazývat *definičním oborem zobrazení* F. Je-li $D = M$, hovoříme o zobrazení množiny M (místo zobrazení z množiny M). Pro každé $x \in D$ existuje tedy právě jedno takové $y \in H$, že $(x, y) \in F$.

1.2. DEFINICE POSLOUPNOSTI

Definice 1. Zobrazení množiny přirozených čísel do množiny reálných čísel nazýváme *posloupností*.

Pojem, který jsme právě definovali, bychom mohli (či měli) nazývat přesněji číselnou (nebo reálnou) posloupností. V matematice se totiž setkáváme i s posloupnostmi jiných objektů, třeba funkcí, množin, rovnic apod. Na závěr naší knížky se o některých takových případech zmíníme. Do té doby však budeme hovořit prostě o posloupnosti.

Podstatným rysem naší definice je požadavek, aby definičním oborem zobrazení byla množina přirozených čísel $\{1, 2, 3, \ldots\}$. (Mluví se v ní o zobrazení množiny přirozených čísel, nikoliv o zobrazení z této množiny.) I zde bychom mohli sice připustit, aby definičním oborem byl tzv. úsek množiny přirozených čísel, tj. konečná množina $\{1, 2, \ldots, N\}$, kde N je přirozené číslo. Museli bychom pak rozlišovat mezi posloupnostmi konečnými a nekonečnými. Avšak vlastnosti a jevy (procesy), se kterými se chceme v naší knížce seznámit, lze studovat jen na nekonečných posloupnostech. Proto budeme posloupnostmi rozumět jen ta zobrazení, jejichž definiční obor je množina všech přirozených čísel.

Jak víte, hodnotu zobrazení F pro prvek $x \in D$, tj. číslo y takové, že $(x, y) \in F$, značíme obyčejně $F(x)$. Známe-li $F(x)$ pro každé $x \in D$, je zobrazení jednoznačně určeno. Např. zápis $F(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$ určuje zobrazení, pro něž D i H je množina reálných čísel; jak víte, nazývá se takové zobrazení *reálná funkce.* Podobného způsobu budeme užívat při zapisování posloupností. Je však zvykem používat pro prvky z definičního oboru (tj. přirozená čísla) jiná písmena než x, y, z (nejčastěji n, k, i, j, m, p aj.) a psát je místo do závorky ve formě indexu: místo $a(n)$, $S(k)$, $t(i)$ píšeme tedy a_n, S_k, t_i apod. Čísla a_n nazýváme obyčejně *členy* nebo *prvky posloupnosti*, nikoliv hodnoty: mluvíme o prvním, druhém, ..., n-tém členu.

Posloupnost, jejímž obecným (n-tým) členem je a_n, zapisujeme nejčastěji ve tvaru $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nebo $\{a_n\}_1^{\infty}$. Obecný index (který hraje úlohu nezávisle proměnné) můžeme ovšem označit i jiným písmenem, takže můžeme psát např. $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{b_r\}_1^{\infty}$. Často píšeme do složených závorek přímo výraz definující obecný člen posloupnosti, např. $\left\{\dfrac{2n}{n^2+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ apod. Obsahuje-li výraz ve složené závorce více obecných čísel (vyjádřených písmeny), je zvlášť důležité udat, které z nich je obecným indexem posloupnosti.

Např. posloupnost $\left\{\dfrac{k^2}{r+1}\right\}_{k=1}^{\infty}$ má členy (při $r \neq -1$)

$$\frac{1}{r+1}, \frac{4}{r+1}, \frac{9}{r+1}, \ldots,$$

zatímco posloupnost $\left\{\dfrac{k^2}{r+1}\right\}_{r=1}^{\infty}$ má členy

$$\frac{k^2}{2}, \frac{k^2}{3}, \frac{k^2}{4}, \ldots.$$

Pro stručnost se při zápisu posloupností používá i jiných licencí či úlev. S jednou z nich jsme se již setkali v příkladu 2: nedodržuje se totiž vždy doslova požadavek definice, že definiční obor posloupnosti je množina přirozených čísel. Z různých důvodů se setkáme s posloupnostmi, jejichž první člen je označen třeba x_0 (srov. příkl. 2) nebo a_{-2} nebo ω_4 apod. Takové posloupnosti můžeme pak zapsat jako

$$\{x_n\}_{n=0}^{\infty}, \quad \{a_k\}_{k=-2}^{\infty}, \quad \{\omega_j\}_{j=4}^{\infty} \quad \text{apod.}$$

Řečeno zcela přesně, jde např. v posledním případě o posloupnost $\{\omega_j^*\}_{j=1}^{\infty}$, kde $\omega_j^* = \omega_{j+3}$, tedy $\omega_1^* = \omega_4$, $\omega_2^* = \omega_5$ atd., takže odchylka od definice je jenom formální.

Druhou nedůslednost, které se dopouštíme při zápisu posloupnosti, ukážeme na příkladu. Napíšeme-li $\left\{\frac{n}{n^2 - 4n + 3}\right\}_{n=1}^{\infty}$, nejde v pravém slova smyslu o posloupnost, neboť výraz ve složené závorce není definován pro $n = 1$ a $n = 3$. Při zkoumání některých důležitých vlastností posloupností však nevadí, nejsou-li určeny všechny členy posloupnosti. Počet neznámých (nedefinovaných) členů však musí být konečný. To znamená, že počínaje od jistého přirozeného čísla (může to být od čtvrtého členu nebo třeba od milióntého) musíme již znát všechny členy. Aby nedošlo k nedorozumění, učiníme tuto úmluvu: řekneme-li např. „posloupnost $\left\{\frac{n}{n^2 - 4n + 3}\right\}_{n=1}^{\infty}$ má vlastnost V“, znamená to: „Vlastnost V má každá posloupnost $\{a_n\}_1^{\infty}$, pro niž platí $a_n = \frac{n}{n^2 - 4n + 3}$ pro všechna přirozená n různá od 1, 3 (a čísla a_1, a_3 jsou libovolná).“

Jistě jste si uvědomili, že každá posloupnost, tak jak jsme ji definovali, je reálná funkce. Můžeme tedy sestrojit její *graf*. Protože však definičním oborem posloupnosti je množina přirozených čísel, je graf posloupnosti množina izolovaných bodů, nikoliv souvislá křivka, jak tomu bylo ve většině případů, s nimiž jste se dosud setkali. Často proto zobrazujeme posloupnosti jen na jedné číselné ose. Za chvíli si to ukážeme na příkladech a zároveň upozorníme na nebezpečí, které se v tomto způsobu skrývá.

Uvedeme nyní několik příkladů posloupností.

Příklad 4. Připomeňme si *aritmetickou posloupnost*, kterou již asi znáte ze školy. Jsou-li a_1, d reálná čísla, nazýváme posloupnost $\{a_n\}_1^\infty$, kde $a_n = a_1 + (n - 1) d$, aritmetickou posloupností. Snadno se přesvědčíte, že pro všechna přirozená n platí $a_{n+1} - a_n = d$. Číslo d se nazývá diference aritmetické posloupnosti. Jednoduchý vzorec platí i pro součet prvních k členů této posloupnosti:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_k =$$

$$= \frac{1}{2} k(a_1 + a_k) = ka_1 + \frac{1}{2} k(k - 1) d.$$

(Zopakujte si jeho důkaz indukcí!)

Příklad 5. Druhou známou posloupností je *geometrická posloupnost*. Jsou-li b_1, q reálná čísla, $b_1 q \neq 0$, nazýváme posloupnost $\{b_n\}_1^\infty$, $b_n = b_1 q^{n-1}$ geometrickou posloupností. Pro všechna přirozená n platí vztah $q = \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$. Číslo q se nazývá kvocient geometrické posloupnosti. Pro součet prvních k členů geometrické posloupnosti platí vzorec

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_k = b_1 \frac{1 - q^k}{1 - q}.$$

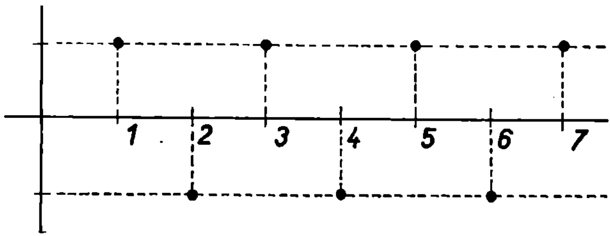
(Důkaz můžete opět provést indukcí.)

Důležitý je případ geometrické posloupnosti s kvocientem -1. Je-li ještě $b_1 = 1$, dostáváme posloupnost $\{(-1)^{n-1}\}_{n=1}^\infty$.

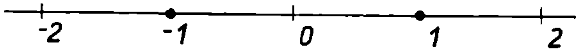
Někdy se setkáte s tím, že z posloupnosti je zapsáno jen několik (konečný počet) prvních členů, např. 1, —1, 1, —1, 1, ... To je jistá nedůslednost, vznikající z pohodlnosti. Jde o posloupnost, jejíž první, třetí a pátý člen je roven 1, druhý a čtvrtý —1. Ovšem pouhá znalost prvních pěti (nebo třeba miliónu) členů posloupnosti mi neumožňuje určit další členy. Mohu sice hádat, že pisatel měl nejspíše na mysli posloupnost, jejíž všechny liché členy jsou 1 a sudé —1, tj. posloupnost $b_n = \{(-1)^{n-1}\}_1^\infty$, ale je to skutečně jen hádání. Právě tak může jít třeba o posloupnost $\{b_n^*\}_1^\infty$, $b_n^* = (-1)^{n-1}$ pro $n = 1, 2, \ldots, 5$, $b_n^* = 0$ pro $n > 5$ nebo třeba $\{b_n^0\}_1^\infty$, $b_n^0 = (-1)^{n-1}$ pro $n = 1, 2, \ldots, 167$, $b_n^0 = \dfrac{n}{n^2+1}$ pro $n > 167$. I námitku, že první možnost je správná, protože k zápisu všech členů posloupnosti byl použit jediný výraz $(-1)^{n-1}$, lze vyvrátit. Např. členy poslední posloupnosti $\{b_n^0\}_1^\infty$ lze zapsat ve tvaru

$$b_n^0 = \frac{1}{2}\left[(-1)^{n-1} + \frac{n}{n^2+1}\right] + \\ + \frac{1}{2}\left[(-1)^{n-1} - \frac{n}{n^2+1}\right]\frac{|167{,}5 - n|}{167{,}5 - n}.$$

Načrtneme-li graf posloupnosti $\{b_n\}_1^\infty$, dostaneme obr. 1; načrtneme-li členy posloupnosti na jediné číselné ose, vznikne zcela odlišný obr. 2. Vidíme, že v druhém případě jsme ve skutečnosti zobrazili množinu členů



Obr. 1



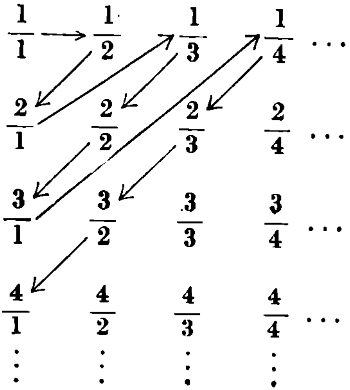
Obr. 2

posloupnosti, tj. množinu čísel, která se (alespoň jednou) vyskytnou jako členy dané posloupnosti. Tato množina ovšem může být konečná. Navíc různé posloupnosti mohou mít stejnou množinu členů. Např. posloupnost $\{b'_n\}_1^\infty$, jejíž n-tý člen je $b'_n = (-1)^n$, má tutéž množinu členů jako $\{b_n\}_1^\infty$. Přesto nám i zobrazení množiny členů posloupnosti často poskytne cennou informaci o chování posloupnosti.

Příklad 6. Položme $c_1 = 1$, $c_n = c_{n-1} + 2n - 1$ pro přirozené $n > 1$. Tím je definována posloupnost $\{c_n\}_1^\infty$: každý její člen můžeme vypočítat, známe-li člen předcházející. To je tzv. *rekurentní definice posloupnosti.* (Rekurentním způsobem byla definována i Fibonacciho posloupnost v příkladu 2.) Často můžeme po vypočtení několika prvních členů odhadnout, jak vypadá obecný vzorec pro c_n, jindy je to však obtížné či nemožné. V našem případě je $c_1 = 1$, $c_2 = 4$, $c_3 = 9$, $c_4 = 16$. Platí $c_n = n^2$? Dokážeme to úplnou indukcí: pro $n = 1$ vztah platí; platí-li $c_n = n^2$, je $c_{n+1} = n^2 + 2(n + 1) - 1 = (n + 1)^2$. Platí tedy skutečně $c_n = n^2$ pro všechna přirozená čísla n.

Příklad 7. Seřaďme prvočísla podle velikosti, počínajíc nejmenším, a označme n-té prvočíslo v tomto uspořádání p_n. Je známo, že prvočísel je nekonečně mnoho, takže $\{p_n\}_1^\infty$ je posloupnost. Členy této posloupnosti neumíme vyjádřit ani analyticky (tj. výrazem závisejícím na indexu n), ani rekurentně (tj. pomocí předcházejících členů).

Příklad 8. Uveďme důležitý a zajímavý příklad posloupnosti, jejíž členy jsou všechna kladná racionální čísla. Uvažujme schéma



obsahující zřejmě všechna kladná racionální čísla (každé z nich dokonce nekonečně mnohokrát). Postupujeme-li podle naznačených šipek, seřadí se napsaná čísla do posloupnosti; jejích prvních deset členů je

$$1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 1, 3, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, 4.$$

Pokusme se nyní úvahu zpřesnit. Všimněme si nejprve, že každý šikmý úsek našeho schématu, směřující vlevo dolů, obsahuje všechna kladná racionální čísla s pevně daným součtem čitatele a jmenovatele; vpravo nahoře je číslo s čitatelem rovným jedné. Šikmý úsek začínající číslem $\frac{1}{r}$ obsahuje právě r čísel.

Racionální číslo $\frac{p}{q}$, kde p, q jsou přirozená čísla, leží v našem schématu na p-tém místě v $(p + q - 1)$-vém šikmém úseku (r-tý šikmý úsek začíná číslem $\frac{1}{r}$, takže součet čitatele a jmenovatele každého čísla v tomto úseku je $r + 1$). Seřadíme-li čísla v našem schématu naznačeným způsobem a označíme vzniklou posloupnost $\{r_n\}_1^\infty$, je zřejmě $\frac{p}{q} = r_n$, kde $n = 1 + 2 + \ldots + (p + q - 2) + p$. Součet $1 + 2 + \ldots + (p + q - 2)$ snadno vypočteme podle vzorce pro součet konečného počtu členů aritmetické řady (srov. příkl. 4):

$$1 + 2 + \ldots + k = \frac{1}{2}\, k(k + 1) \tag{1}$$

pro každé přirozené číslo k, takže

$$n = \frac{1}{2}\,(p + q - 2)\,(p + q - 1) + p. \tag{2}$$

Tím jsme dokázali, že každé kladné racionální číslo $\frac{p}{q}$ je členem sestrojené posloupnosti.

Ptejme se nyní naopak, jaké racionální číslo $\frac{p}{q}$ je n-tým členem posloupnosti $\{r_n\}_1^\infty$. Protože $p \geq 1$, $q \geq 1$, je zřejmě

$$1 + 2 + \ldots + (p + q - 2) + 1 \leq n < 1 + 2 + \ldots$$
$$\ldots + (p + q - 2) + (p + q - 1) + 1.$$

Označíme-li pro stručnost $p + q - 1 = s$ a použijeme vzorce (1), dostaneme odtud

$$\frac{1}{2} s(s-1)+1 \leq n < \frac{1}{2} s(s+1)+1$$

čili

$$\left(s-\frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}(8n-7) < \left(s+\frac{1}{2}\right)^2.$$

Protože zde máme nerovnosti mezi kladnými čísly, můžeme místo toho psát

$$s-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}\sqrt{8n-7} < s+\frac{1}{2}$$

nebo

$$s \leq \frac{1}{2}(1+\sqrt{8n-7}) < s+1.$$

Protože s je celé číslo, je těmito nerovnostmi jednoznačně určeno. Obyčejně se píše

$$s = \left[\frac{1}{2}(1+\sqrt{8n-7})\right], \tag{3}$$

kde hranatá závorka označuje tzv. *celou část čísla*, tj. největší celé číslo, které není větší než číslo v závorce. Nyní již snadno vypočteme ze vzorce (2)

$$p = n - \frac{1}{2} s(s-1),$$

$$q = s+1-p = 1-n+\frac{1}{2} s(s+1),$$

odkud

$$r_n = \frac{n-\frac{1}{2}s(s-1)}{1-n+\frac{1}{2}s(s+1)}.$$

Protože číslo s je číslem n jednoznačně určeno (viz vzorec (3)), umíme vypočítat n-tý člen posloupnosti $\{r_n\}_1^\infty$ pro libovolné přirozené n. Je tedy posloupnost $\{r_n\}_1^\infty$ jednoznačně určena, a jak jsme již dokázali, obsahuje všechna kladná racionální čísla.

1.3. ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI POSLOUPNOSTÍ

Zaveďme nyní některé elementární vlastnosti posloupností.

Definice 2. Posloupnost $\{a_n\}_1^\infty$ se nazývá *ohraničená*, jestliže existuje takové číslo K, že platí $|a_n| \leq K$ pro všechna přirozená n.

Posloupnosti z příkladů 1, 2, 4 (pokud $d \neq 0$), 6, 7, 8 nejsou ohraničené; naproti tomu posloupnost z příkladu 3 je ohraničená (srov. příkl. 18). Geometrická posloupnost z příkladu 5 je ohraničená, jestliže $|q| \leq 1$; za číslo K z definice 2 můžeme vzít číslo $|b_1|$ (nebo jakékoliv větší číslo).

Příklad 9. Nechť P, Q jsou nenulové mnohočleny po řadě stupně k, l a nechť $Q(n) \neq 0$ pro všechna přirozená čísla n. Položme $r_n = \dfrac{P(n)}{Q(n)}$. Pak platí: je-li $k \leq l$, je posloupnost $\{r_n\}_1^\infty$ ohraničená. Je-li $k > l$, není posloupnost $\{r_n\}_1^\infty$ ohraničená.

Důkaz. Položme

$$P(x) = a_0x^k + \ldots + a_k, \qquad a_0 \neq 0,$$

$$Q(x) = b_0x^l + \ldots + b_l, \qquad b_0 \neq 0.$$

Potom je

$$|r_n| = \left|\frac{a_0n^k + \ldots + a_k}{b_0n^l + \ldots + b_l}\right| = \frac{\left|a_0 + \dfrac{a_1}{n} + \ldots + \dfrac{a_k}{n^k}\right|}{\left|b_0 + \dfrac{b_1}{n} + \ldots + \dfrac{b_l}{n^l}\right|} n^{k-l} \leq$$

$$\leq \frac{|a_0| + \left|\dfrac{a_1}{n}\right| + \ldots + \left|\dfrac{a_k}{n^k}\right|}{\left||b_0| - \left|\dfrac{b_1}{n}\right| - \ldots - \left|\dfrac{b_l}{n^l}\right|\right|} n^{k-l}$$

podle trojúhelníkové nerovnosti.*) Odtud plyne snadno

$$|r_n| \leq \frac{|a_0| + |a_1| + \ldots + |a_k|}{\left||b_0| - \dfrac{1}{n}(|b_1| + \ldots + |b_l|)\right|} n^{k-l}.$$

Je zřejmé, že pro dostatečně velká n nebude jmenovatel menší např. než $\frac{1}{2}|b_0|$. K tomu stačí, aby platilo

$$|b_0| - \frac{1}{n}(|b_1| + \ldots + |b_l|) \geq \frac{1}{2}|b_0|$$

čili

$$\frac{1}{2}|b_0| \geq \frac{1}{n}(|b_1| + \ldots + |b_l|),$$

$$n \geq \frac{2(|b_1| + \ldots + |b_l|)}{|b_0|} = b.$$

---

*) Trojúhelníkovou nerovnost zde užíváme v méně obvyklém tvaru $|a - b| \geq ||a| - |b||$. Její důkaz je snadný: stačí položit $c = a - b$ a dosadit do „obyčejné“ trojúhelníkové nerovnosti $|c + b| \leq |c| + |b|$. K dokončení důkazu je pak již jen třeba zaměnit a a b a uvědomit si, že pro každé reálné číslo d platí $|d| = |-d|$.

Položíme-li

$$R = \max_{n < b} |r_n|,$$

ověříme snadno, že platí

$$|r_n| \leq \max\left(R, \frac{2}{|b_0|} (|a_0| + \ldots + |a_k|)\, n^{k-l}\right)$$

pro všechna přirozená n. Je-li $k \leq l$, je $n^{k-l} \leq 1$ a posloupnost $\{r_n\}_1^\infty$ je zřejmě ohraničená. Naopak, je-li $k > l$, dostáváme podobně

$$|r_n| \geq n^{k-l} \frac{\left||a_0| - \frac{1}{n} (|a_1| + \ldots + |a_k|)\right|}{|b_0| + |b_1| + \ldots + |b_l|}$$

a pro $n \geq 2 \dfrac{|a_1| + \ldots + |a_k|}{|a_0|}$ platí

$$|r_n| \geq n^{k-l} \frac{|a_0|}{2(|b_0| + \ldots + |b_l|)} > n \frac{|a_0|}{3(|b_0| + \ldots + |b_l|)}.$$

Je-li nyní K reálné číslo, dostáváme snadno, že pro

$$n \geq \max\left[\frac{3(|b_0| + \ldots + |b_l|)\, K}{|a_0|}, \frac{2(|a_1| + \ldots + |a_k|)}{|a_0|}\right]$$

je $|r_n| > K$.
Ke každému reálnému číslu K tedy existuje přirozené n (dokonce nekonečně mnoho takových n), že $|r_n| > K$, a tedy posloupnost $\{r_n\}_1^\infty$ není ohraničená.

Poznámka. Při vyšetřování vlastností posloupností se často užívají také pojmy „*posloupnost ohraničená zdola*" a „*posloupnost ohraničená shora*". Posloupnost $\{a_n\}_1^\infty$ je ohraničená zdola, jestliže existuje číslo K takové, že platí $a_n \geq K$ pro všechna přirozená n. Srovnej úlohu 1 na str. 26.

Definice 3. Posloupnost $\{a_n\}_1^\infty$ se nazývá *rostoucí (klesající, nerostoucí, neklesající)*, jestliže pro všechna přirozená n platí nerovnost $a_n < a_{n+1}$ ($a_n > a_{n+1}$, $a_n \geq a_{n+1}$, $a_n \leq a_{n+1}$). Všechny tyto čtyři druhy posloupností nazýváme posloupnosti *monotónní*; pro ty, které splňují jednu z ostrých nerovností, používáme názvu *ryze monotónní.*

Posloupnosti z příkl. 1, 2, 3, 6, 7 jsou ryze monotónní, a to rostoucí (pro příkl. 3 to dokážeme v příkl. 11); aritmetická posloupnost z příkl. 4 je rostoucí při $d > 0$, klesající při $d < 0$; geometrická posloupnost z příkl. 5 je monotónní při $q > 0$ (rostoucí při $q > 1$, klesající při $q < 1$) a není monotónní při $q < 0$. Posloupnost z příkladu 8 není monotónní (přesvědčte se o tom).

Příklad 10. Posloupnost $\{c_k\}_1^\infty = \left\{\dfrac{k}{k^2 + 1}\right\}_1^\infty$ je klesající.

Důkaz. Ukážeme, že rozdíl $c_{k+1} - c_k$ je záporný. Je

$$c_{k+1} - c_k = \frac{k+1}{(k+1)^2 + 1} - \frac{k}{k^2 + 1} =$$

$$= \frac{(k+1)(k^2+1) - k(k^2 + 2k + 2)}{[(k+1)^2 + 1](k^2 + 1)} =$$

$$= \frac{k^3 + k^2 + k + 1 - k^3 - 2k^2 - 2k}{[(k+1)^2 + 1](k^2 + 1)} =$$

$$= \frac{1 - k - k^2}{[(k+1)^2 + 1](k^2 + 1)}$$

a tento výraz je záporný pro všechna přirozená k.

Další dva příklady jsou velmi důležité.

Příklad 11. Posloupnost $\{e_n\}_1^\infty$, $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, je rostoucí.

Důkaz. Podle binomické věty můžeme psát

$$e_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} n^{-k}, \quad e_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (n+1)^{-k},$$

tedy

$$e_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} n(n-1) \dots (n-k+1)\, n^{-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right),$$

$$e_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} (n+1)\, n \dots (n-k+2)\,(n+1)^{-k} >$$

$$> \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right)$$

(v posledním součtu jsme vynechali kladný sčítanec při $k = n + 1$). Pro každé přirozené j platí však $1 - \frac{j}{n} < 1 - \frac{j}{n+1}$, takže žádný sčítanec součtu pro e_n není větší než odpovídající sčítanec (se stejným k) upraveného součtu pro e_{n+1}. Platí tedy

$$e_n < e_{n+1}$$

a posloupnost $\{e_n\}_1^\infty$ je rostoucí.

Příklad 12. Posloupnost $\{e_n^*\}_1^\infty$, $e_n^* = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ je klesající.

Důkaz. Protože všechny členy posloupnosti jsou kladné (a tedy nenulové), můžeme vyšetřovat podíl e_n^*/e_{n+1}^* pro libovolné přirozené n. Platí

$$\frac{e_n^*}{e_{n+1}^*} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}} = \frac{n}{n+1}\left[\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right]^{n+2} =$$

$$= \frac{n}{n+1}\left[1 + \frac{1}{n(n+2)}\right]^{n+2}.$$

Opět použijeme binomickou větu na člen v hranaté závorce. Všechny sčítance binomického rozvoje jsou kladné. Vynecháním všech až na první dva tedy celý výraz zmenšíme:

$$\frac{e_n^*}{e_{n+1}^*} = \frac{n}{n+1}\left\{1 + \binom{n+2}{1}\frac{1}{n(n+2)} + \ldots + \right.$$

$$\left. + \binom{n+2}{n-1}\left[\frac{1}{n(n+2)}\right]^{n+1} + \left[\frac{1}{n(n+2)}\right]^{n+2}\right\} >$$

$$> \frac{n}{n+1}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1\,.$$

Je tedy skutečně $e_n^* > e_{n+1}^*$ a posloupnost je klesající.

Úlohy

1.* Na základě poznámky na str. 22 vyslovte analogickou definici posloupnosti ohraničené shora.

Dokažte tvrzení 2—5.

2. Posloupnost je ohraničená právě tehdy, je-li současně ohraničená shora a ohraničená zdola.
3. Je-li posloupnost $\{a_n\}_1^\infty$ ohraničená zdola, je posloupnost $\{-a_n\}_1^\infty$ ohraničená shora.
4. Každá nerostoucí posloupnost je ohraničená shora, každá neklesající posloupnost je ohraničená zdola.
5. Existuje-li takové číslo $\alpha > 0$, že pro všechna přirozená n platí $|a_n| \geq \alpha$, je posloupnost $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}_1^\infty$ ohraničená.
6.* Udejte příklad posloupnosti $\{a_n\}_1^\infty$, která není ohraničená, a ani $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}_1^\infty$ není ohraničená, a posloupnosti $\{b_n\}_1^\infty$, která je ohraničená, a také $\left\{\frac{1}{b_n}\right\}_1^\infty$ je ohraničená.

2. kapitola

KONVERGENCE A LIMITA

2.1. DEFINICE LIMITY A ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI

V této kapitole se seznámíme s jedním z nejdůležitějších pojmů matematické analýzy. Jde o pojem limity, který stál u zrodu matematické analýzy a stal se prostředkem, který umožnil popsat matematicky širokou škálu fyzikálních jevů, nemluvě již o jejím významu pro rozvoj samotné matematiky. V naší knížce se budeme zabývat jen limitou posloupnosti, takže se vlastně dotkneme jen okraje této problematiky. Ale na druhé straně nám posloupnosti umožní seznámit se s charakteristickými vlastnostmi tohoto pojmu na poměrně jednoduchých objektech.

Všimněme si nejdříve dobře známé věci, totiž desetinného rozvoje reálného čísla. Víme, že každému reálnému číslu přísluší jeho desetinný rozvoj. S výjimkou těch racionálních čísel, která lze zapsat jako zlomky se jmenovatelem rovným nějaké mocnině deseti, je tento rozvoj nekonečný. Protože s nekonečným desetinným rozvojem se pracuje velmi špatně, používáme místo něho při počítání obvykle desetinný zlomek, který vznikne, napíšeme-li z desetinného rozvoje čísla jen konečný počet číslic. Tak např. místo čísla $\sqrt{2}$ můžeme použít přibližného vyjádření: 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142;

1,41421; 1,414213; 1,4142135 atd. Přitom, použijeme-li prvního vyjádření, neudělali jsme jistě větší chybu než 0,1; použijeme-li čtvrtého napsaného vyjádření, nebude chyba větší než 0,0001 atd. Napíšeme-li více (správných) číslic, chyba se jistě nezvětší. Je-li tedy předem určena požadovaná přesnost, můžeme vždy najít tak velké přirozené číslo p, abychom při napsání p (nebo více) správných číslic desetinného rozvoje čísla $\sqrt{2}$ neudělali chybu větší, než je dovoleno. Snadno se přesvědčíte, že je-li požadovaná přesnost (tj. povolená chyba) dána kladným číslem α, stačí najít takové přirozené číslo p, že $p \geq |\log \alpha|$.

Napsané desetinné zlomky definují jistou posloupnost racionálních čísel r_n, jejíž n-tý člen dostaneme jako desetinný zlomek, příslušný číslu $\sqrt{2}$, o „délce" n. Podle toho, co jsme řekli, má posloupnost $\{r_n\}_1^\infty$ tuto vlastnost: je-li α kladné číslo, pak rozdíl $|\sqrt{2} - r_n|$ je menší než α pro všechna „dostatečně velká" přirozená n. Můžeme tedy říci, že $\sqrt{2}$ je jistá mez či hranice, k níž se členy posloupnosti blíží. Vyslovíme nyní definici, která vystihne to, co je na našem příkladu podstatné.

Definice 4. Číslo a se nazývá *limitou posloupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^\infty$, jestliže platí: ke každému kladnému číslu $\varepsilon > 0$ existuje takové přirozené číslo n_0, že pro všechna přirozená n, $n \geq n_0$, platí

$$|a_n - a| < \varepsilon .$$

Píšeme $a = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$ nebo stručně $a = \lim a_n$, nebo $a_n \to a$.

Jestliže posloupnost $\{a_n\}_1^\infty$ má limitu a, říkáme, že *konverguje k a* nebo že je *konvergentní.*

Je třeba si uvědomit, že číslo n_0 závisí obecně na čísle ε. To můžeme vyjádřit zápisem $n_0 = n_0(\varepsilon)$, který říká, že n_0 je funkcí ε. Nemůžeme tedy (až na zcela jednoduché případy) najít takové pevné n_0, aby pro jakékoliv kladné číslo ε platila nerovnost $|a_n - a| < \varepsilon$ pro všechna přirozená n, $n \geq n_0$. Uvažujeme-li ε velké, stačí často volit n_0 poměrně malé; někdy platí požadovaná nerovnost pro všechna přirozená čísla n, takže můžeme volit $n_0 = 1$. Zmenšíme-li číslo ε, je obvykle nutno číslo n_0 zvětšit, jak to uvidíme v příkladech.

Naše definice skutečně vyjadřuje, že od jistého indexu leží již všechny další členy posloupnosti velmi blízko číslu a; přitom význam rčení „velmi blízko" můžeme konkretizovat volbou čísla ε. Obráceně: jestliže chceme znát číslo a s jistou (danou) přesností, víme, že stačí místo něj zjistit nějaký „dostatečně vzdálený" člen posloupnosti; chyba pak jistě nebude větší, než požadujeme. Samozřejmě význam slov „dostatečně vzdálený" se mění nejen s požadovanou přesností, ale je různý pro různé posloupnosti.

Dohoda o označení. V dalším výkladu se budeme velmi často setkávat s množinou všech přirozených čísel a s jejími podmnožinami určitého typu. Zavedeme proto pro množinu přirozených čísel stálé označení **N** a pro množinu, která obsahuje přirozené číslo n_0 a všechna přirozená čísla větší než n_0, označení $\mathbf{N}[n_0]$. Je tedy $\mathbf{N}[n_0] = \{n \in \mathbf{N} \mid n \geq n_0\}$, $\mathbf{N} = \mathbf{N}[1]$.

Je jasné, že existují posloupnosti, které nemají limitu. Velmi jednoduchým příkladem takové posloupnosti je posloupnost $\{n\}_1^\infty$. Skutečně, kdyby číslo p bylo limitou této posloupnosti, existovalo by takové přirozené číslo n_0, že pro všechna $n \in \mathbf{N}[n_0]$ by platilo

$$|n - p| < \frac{1}{3}$$

$\left(\text{zvolili jsme } \varepsilon = \frac{1}{3}\right)$. Potom však by platilo také

$$|(n + 1) - p| < \frac{1}{3},$$

neboť je-li $n \in \mathrm{N}\ [n_0]$, je také $n + 1 \in \mathrm{N}\ [n_0]$. Na druhé straně však trojúhelníková nerovnost dává (viz pozn. pod čarou na str. 21)

$$|(n+1) - p| \geq \big||(n+1) - n| - |n - p|\big| > \left|1 - \frac{1}{3}\right| = \frac{2}{3},$$

což je spor. Číslo p (které bylo zvoleno libovolně) není tedy limitou posloupnosti $\{n\}_1^\infty$.

Nejjednodušší posloupností, která má limitu, je tzv. *konstantní posloupnost*, tj. posloupnost, jejíž všechny členy se navzájem rovnají: $a_n = a$ pro všechna $n \in \mathrm{N}$. Pak zřejmě $\lim a_n = a$, neboť $|a_n - a| = 0$ a tedy $|a_n - a| < \varepsilon$ pro všechna $n \in \mathrm{N}$ a jakékoliv kladné číslo ε.

Na základě naší úvodní úvahy můžeme očekávat, že posloupnost nemůže mít dvě různé limity: to by znamenalo, že členy posloupnosti vyjadřují s libovolnou předem danou přesností dvě různá čísla: např. daný desetinný rozvoj by neurčoval jednoznačně reálné číslo. Skutečně, platí tato věta:

Věta 1. *Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.*

Důkaz. Buď $\{a_n\}_1^\infty$ posloupnost a předpokládejme, že platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a'$, $a \neq a'$. Potom je

$\frac{1}{2}|a - a'| > 0$ a tedy podle definice limity existuje takové přirozené číslo n_1, že pro všechna $n \in \mathrm{N}\,[n_1]$ platí

$$|a_n - a| < \frac{1}{2}|a - a'| . \tag{4}$$

Podobně existuje přirozené číslo n_2 takové, že pro všechna $n \in \mathrm{N}\,[n_2]$ platí

$$|a_n - a'| < \frac{1}{2}|a - a'| . \tag{5}$$

Pro přirozená čísla $n \geq \max\,(n_1, n_2)$ platí tedy obě nerovnosti (4), (5); z toho snadno odvodíme spor:

$$|a - a'| \leq |a - a_n| +$$

$$+ |a_n - a'| < \frac{1}{2}|a - a'| + \frac{1}{2}|a - a'| = |a - a'| .$$

Příklad 13. Platí $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Důkaz. Je-li dáno $\varepsilon > 0$, zvolíme za n_0 nějaké přirozené číslo větší než $1/\varepsilon$ (např. $n_0 = [1/\varepsilon] + 1$). Pak $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$ a pro $n \in \mathrm{N}\,[n_0]$ platí

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon .$$

Poznámka. V důkazu jsme v podstatě použili jediný fakt: totiž že ke každému reálnému číslu existuje číslo větší. To ostatní byla „jen“ technická záležitost — i když právě ta může být někdy nejobtížnější.

Příklad 14. Platí $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n} = 1$.

Důkaz. Jest

$$\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| = \frac{n+1-n}{n} = \frac{1}{n};$$

je-li $\varepsilon > 0$, zvolme $n_0 = [1/\varepsilon] + 1$ jako v předešlém příkladu 13. Pak zřejmě platí

$$\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| < \varepsilon$$

pro všechna čísla $n \in \mathrm{N}\,[n_0]$.

Příklady 13, 14 nás vedou k formulaci věty, jejíž důkaz přenecháme čtenáři jako cvičení.

Věta 2. *Buď $\{a_n\}_1^\infty$ posloupnost, a reálné číslo, $b_n = |a_n - a|$. Pak platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ právě tehdy, jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.*

V příkladu 13 jsme viděli, že ve volbě čísla n_0 (při daném $\varepsilon > 0$) máme jistou volnost: stačilo vybrat je tak, aby bylo $n_0 > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Kdyby bylo např. $\varepsilon = \dfrac{1}{1000}$, můžeme volit za n_0 číslo 1001 nebo kterékoliv větší přirozené číslo. Kdybychom tedy změnili třeba prvních 10 000 členů posloupnosti (např. je všechny zvětšili na číslo 1), nijak to podstatně neovlivní naši úvahu: stačí vzít $n_0 = 10\,001$. To nás vede k následující větě.

Věta 3. *Jsou-li* $\{a_n\}_1^\infty$, $\{b_n\}_1^\infty$ *posloupnosti a existuje-li takové přirozené číslo* k, *že platí* $a_n = b_n$ *pro všechna* $n \in \mathrm{N}\,[k]$, *pak platí*

$$\lim_{n\to\infty} b_n = a \tag{6}$$

právě tehdy, když

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a\,. \tag{7}$$

Důkaz. Nechť platí (7). Buď $\varepsilon > 0$ a nechť n_0 je přirozené číslo takové, že pro všechna $n \in \mathrm{N}\,[n_0]$ platí

$$|a_n - a| < \varepsilon\,. \tag{8}$$

Zvolme $n_1 = \max\,(n_0, k)$. Pak pro $n \in \mathrm{N}\,[n_1]$ platí současně nerovnost (8) a rovnost $b_n = a_n$, tedy

$$|b_n - a| < \varepsilon\,.$$

Tím je dokázáno (6) a tedy i věta 3, neboť obrácené tvrzení plyne ihned záměnou a_n, b_n.

Podobného typu je následující věta, jejíž důkaz přenecháváme čtenáři:

Věta 4. *Buďte* $\{a_n\}_1^\infty$, $\{b_n\}_1^\infty$ *posloupnosti a nechť existuje takové celé číslo* k, *že* $b_n = a_{n+k}$ *pro všechna přirozená* n, *pro něž je* $n + k > 0$. *Pak* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$, *právě když* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Poznámka. Všimněte si, že k může být i záporné, tedy můžeme členy posloupnosti „posunout dopředu" i „dozadu".

Následující věta vyjadřuje souvislost mezi pojmem ohraničenosti posloupnosti a její konvergencí.

Věta 5. *Každá konvergentní posloupnost je ohraničená.*

Důkaz. Nechť $\{a_n\}_1^\infty$ je konvergentní posloupnost, tj. existuje

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a .$$

Podle definice existuje číslo n_1 takové, že pro všechna $n \in \mathrm{N}\,[n_1]$ platí

$$|a_n - a| < 1 .$$

(Zvolili jsme $\varepsilon = 1$.) Avšak potom zřejmě platí pro všechna $n \in \mathrm{N}$

$$|a_n| \leq K ,$$

kde $K = \max\,(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, |a| + 1)$, a tedy posloupnost $\{a_n\}_1^\infty$ je ohraničená.

Ohraničenost je tedy podle věty 5 nutnou podmínkou k tomu, aby posloupnost konvergovala. Není však podmínkou postačující, neboť existují ohraničené posloupnosti, které nemají limitu. Ukážeme si takovou posloupnost.

Příklad 15. Položme $a_n = \dfrac{(-1)^n\, n}{n+1}$. Pak platí $|a_n| \leq 1$ pro všechna přirozená n, takže posloupnost $\{a_n\}_1^\infty$ je ohraničená. Protože $\dfrac{n}{n+1} = 1 - \dfrac{1}{n+1}$, je posloupnost absolutních hodnot $\{|a_n|\}_1^\infty$ zřejmě rostoucí. Protože členy původní posloupnosti střídají znaménka (liché členy jsou záporné, sudé jsou kladné), odvodíte odtud snadno nerovnosti $a_{2k} < a_{2(k+1)}$, $a_{2k-1} > a_{2k+1}$ pro všechna přirozená k a tedy také

$$a_{2k} \geq a_2 = \frac{2}{3}, \quad a_{2k+1} \leq a_1 = -\frac{1}{2},$$

$$a_{2k} - a_{2k+1} \geq \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{7}{6}.$$

Předpokládejme nyní, že lim a_n existuje a označme ji a. Pak existuje takové $n_0 \in \mathbf{N}$, že pro všechna $n \in \mathbf{N}\,[n_0]$ platí

$$|a_n - a| < \frac{1}{2}$$

$\left(\text{zvolili jsme } \varepsilon = \frac{1}{2}\right)$. Zvolme takové sudé číslo $n = 2k$, že $2k \in \mathbf{N}\,[n_0]$. Potom i $2k + 1 \in \mathbf{N}\,[n_0]$. Platí tedy

$$|a_{2k} - a| < \frac{1}{2}, \quad |a_{2k+1} - a| < \frac{1}{2}$$

a z trojúhelníkové nerovnosti plyne

$$|a_{2k} - a_{2k+1}| \leq |a_{2k} - a| + |a_{2k+1} - a| < 1.$$

To však je spor, neboť jsme již odvodili, že platí

$$a_{2k} - a_{2k+1} \geq \frac{7}{6}.$$

Posloupnost $\{a_n\}_1^\infty$ tedy nemá limitu.

Příklad 9 ukazuje, že posloupnost $P(n)/Q(n)$, kde P, Q jsou polynomy, může mít limitu jen tehdy, je-li stupeň polynomu P menší či roven stupni polynomu Q. Dá se dokázat, že v tom případě skutečně limita existuje. Ale jak vypočítat její hodnotu? K tomu nám poslouží následující věta (jejíž dosah je ovšem mnohem širší).

Věta 6. *Je-li* $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$, *pak platí*

$$\lim (a_n + b_n) = a + b, \tag{9}$$

$$\lim a_n b_n = ab. \tag{10}$$

Je-li navíc $b \neq 0$, *je také*

$$\lim \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}. \tag{11}$$

Poznámka. Z věty ovšem plyne (za stejných předpokladů)

$$\lim (a_n - b_n) = \lim [a_n + (-b_n)] =$$

$$= \lim a_n + \lim (-b_n) = \lim a_n + \lim (-1) \lim b_n =$$

$$= \lim a_n - \lim b_n = a - b$$

(neboť $\lim (-1) = -1$, jak snadno ověříte),

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim a_n \frac{1}{b_n} = \lim a_n \lim \frac{1}{b_n} = \frac{a}{b} \text{ při } b \neq 0.$$

Ve formulaci věty jsme nepředpokládali, že všechna b_n jsou různá od nuly, takže $\frac{1}{b_n}$ nemusí být pro některé n definováno. Dokážeme však pomocnou větu, která zaručí, že od jistého indexu jsou již všechny členy posloupnosti, jejíž limita je různá od nuly, rovněž nenulové, takže „neurčitých" je nejvýše konečný počet členů, který podle věty 3 nemá na existenci a hodnotu limity vliv. (Srov. upozornění v 1.2 na str. 13.)

Pomocná věta. *Jestliže existuje* $\lim b_n$ *a je různá od nuly, pak existuje takové číslo* $\beta > 0$ *a takové přirozené číslo* n_1*, že pro všechna* $n \in \mathrm{N}\,[n_1]$ je $|b_n| > \beta$ *(a tedy jistě* $b_n \neq 0$*) a znaménko* b_n *je stejné jako znaménko* $\lim b_n$.

Důkaz. Označme $\lim b_n = b$. Pak existuje takové n_1, že pro všechna $n \in \mathrm{N}\,[n_1]$ platí $|b_n - b| < \frac{1}{2}|b|$.

Ukážeme, že $\beta = \frac{1}{2}|b|$ splňuje požadavky pomocné věty. Skutečně, z trojúhelníkové nerovnosti dostáváme snadno

$$|b_n| \geq ||b| - |b_n - b|| > |b| - \frac{1}{2}|b| = \frac{1}{2}|b| = \beta.$$

Kdyby znaménko b_n pro $n \in \mathrm{N}\,[n_1]$ bylo opačné než znaménko b, bylo by $|b_n - b| = |b| + |b_n| \geq |b| > 0$, což je ve sporu s nerovností $|b_n - b| < \frac{1}{2}|b|$.

Vraťme se nyní k důkazu věty 6.

Důkaz. Buď $\varepsilon > 0$, položme $\varepsilon' = \varepsilon'' = \frac{1}{2}\varepsilon > 0$. Pak existují taková přirozená čísla n_1, n_2, že pro všechna $n \in \mathrm{N}\,[n_1]$ platí

$$|a_n - a| < \varepsilon' \tag{12}$$

a pro všechna $n \in \mathrm{N}\,[n_2]$ platí

$$|b_n - b| < \varepsilon''. \tag{13}$$

Položme $n_0 = \max(n_1, n_2)$. Z nerovností (12), (13) plyne pomocí trojúhelníkové nerovnosti:

$$|a_n + b_n - (a + b)| \leq |a_n - a| + \\ + |b_n - b| < \varepsilon' + \varepsilon'' = \varepsilon$$

pro všechna $n \in \mathrm{N}\,[n_0]$. Platí tedy (9).

Protože posloupnost $\{b_n\}_1^\infty$ je konvergentní, je podle věty 5 ohraničená. Existuje tedy takové číslo $K > 0$, že platí $|b_n| \leq K$ pro všechna přirozená n. Předpokládejme nyní, že $a \neq 0$. Buď $\varepsilon > 0$ a položme $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2K}$, $\varepsilon'' = \dfrac{\varepsilon}{2|a|}$. Najdeme opět taková n_1, n_2, že platí (12) pro všechna $n \in \mathrm{N}\,[n_1]$ a (13) pro všechna $n \in \mathrm{N}\,[n_2]$. Pak pro všechna $n \in \mathrm{N}\,[n_0]$, $n_0 = \max\,(n_1, n_2)$, platí $|a_nb_n - ab| \leq |a_nb_n - ab_n| + |ab_n - ab| = |b_n| \,.\, |a_n - a| + |a| \,.\, |b_n - b| < K\varepsilon' + |a|\varepsilon'' = \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Platí tedy (10). Je-li $a = 0$, je $ab = 0$, $|a_nb_n| \leq K|a_n|$. (Číslo K bylo zvoleno v předchozí části důkazu.) Buď $\varepsilon > 0$ a položme $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{K}$. Existuje takové n_1, že platí $|a_n| < \varepsilon'$ pro všechna $n \in \mathrm{N}\,[n_1]$ a tedy

$$|a_nb_n - 0| = |a_nb_n| \leq K|a_n| < K\varepsilon' = \varepsilon\,.$$

Vzorec (10) je dokázán.

V důkazu vztahu (11) budeme postupovat trochu jinak než v prvních dvou částech důkazu. Tam volba čísel ε', ε'' zdánlivě „spadla z nebe". Ve skutečnosti byla však důsledkem jisté předběžné úvahy, kterou v tomto případě naznačíme. Výraz, o který nám jde, je $\left|\dfrac{1}{b_n} - \dfrac{1}{b}\right|$. Potřebujeme jej odhadnout pomocí výrazu $|b_n - b|$, který umíme „udělat libovolně malý". Platí

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b_n - b}{b_nb}\right| < \frac{|b_n - b|}{\frac{1}{2}\,|b| \,.\, |b|}\,,$$

pokud $n \in N[n_1]$, kde n_1 má význam z předchozí pomocné věty. Aby výraz na pravé straně nerovnosti byl menší než dané ε, musí být $|b_n - b| < \frac{b^2\varepsilon}{2}$. Toto číslo zvolíme za ε', najdeme k němu n_0 z definice limity atd. Čtenář si nyní již snadno provede postup přísně deduktivním způsobem jako v předchozích částech důkazu.

Příklad 16. Jaká je limita posloupnosti $\left\{\frac{3n^2 - 5n + 1}{7n^2 + 8}\right\}_1^\infty$?

Pro libovolné $n \in N$ můžeme psát

$$\frac{3n^2 - 5n + 1}{7n^2 + 8} = \frac{3 - \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}}{7 + \frac{8}{n^2}}.$$

Protože podle příkladu 13 a podle věty 6 je $\lim \frac{1}{n} = 0$, $\lim \frac{1}{n^2} = \lim \frac{1}{n} \lim \frac{1}{n} = 0$ atd., existují limity všech sčítanců na pravé straně rovnosti (jak v čitateli tak i ve jmenovateli). Podle věty 6 tedy existuje limita dané posloupnosti a platí

$$\lim \frac{3n^2 - 5n + 1}{7n^2 + 8} = \frac{3 - 5 \lim \frac{1}{n} + \lim \frac{1}{n^2}}{7 + 8 \lim \frac{1}{n^2}} = \frac{3}{7},$$

Z tohoto příkladu snadno odvodíme obecné pravidlo pro výpočet limity posloupností typu $\frac{P(n)}{Q(n)}$: dělíme čitatele a jmenovatele nejvyšší mocninou n, která je ve jmenovateli, a škrtneme všechny členy tvaru c/n^p, kde p je přirozené číslo. Zbude nám zlomek, udávající hodnotu limity. V čitateli mohou ovšem „zmizet“ všechny členy (je-li stupeň mnohočlenu P menší než stupeň mnohočlenu Q); pak je limita rovna nule. Je-li stupeň čitatele větší než stupeň jmenovatele, nemůžeme ovšem této metody použít, neboť v čitateli by se objevily členy tvaru cn^p, kde p je přirozené číslo. Víme však již z věty 5 a z příkl. 9, že v tomto případě limita neexistuje.

2.2. BOLZANOVA-CAUCHYOVA PODMÍNKA A KONVERGENCE MONOTÓNNÍ POSLOUPNOSTI

I při řešení zcela elementárních matematických úloh musíme často uvažovat o tzv. existenčních otázkách. Příkaz „řešte danou soustavu rovnic“ obsahuje ve skutečnosti dvě úlohy: především zjistit, zda řešení existuje, a pak (pokud odpověď na první otázku je kladná) najít jeho hodnotu. Zanedbání prvního kroku může vést k hrubým chybám a zcela nesprávnému výsledku.

Podobně je tomu i tehdy, zabýváme-li se posloupnostmi. Otázka „které číslo je limitou dané posloupnosti?“ není vlastně zcela přesně formulována a je třeba jí rozumět takto: Má daná posloupnost limitu? Jestliže ano, jaká je její hodnota? Otázka existence limity je tím závažnější, že často nějaké číslo přímo definujeme jako limitu nějaké posloupnosti. Takovým číslem je např. základ přirozených logaritmů e, který definujeme jako limitu posloupnosti $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_1^\infty$ (viz příkl. 3). (O tom, že tato limita existuje, se přesvědčíme v příkl. 18.)

Uvedeme si nyní bez důkazu jednu důležitou větu, která udává nutnou a postačující podmínku pro to, aby posloupnost měla limitu.

Věta 7. (Bolzanova-Cauchyova podmínka). *Posloupnost $\{a_n\}_1^\infty$ je konvergentní právě tehdy, jestliže je splněna Bolzanova-Cauchyova podmínka:*

Ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje takové přirozené číslo n_0, že pro všechna čísla $m \in N[n_0]$, $n \in N[n_0]$ platí

$$|a_m - a_n| < \varepsilon .$$

Tato věta má velkou důležitost pro teoretické úvahy o existenci limity. Její výhodou je, že není třeba předem znát hodnotu limity: Bolzanova-Cauchyova podmínka se týká jen členů posloupnosti.

Poznámka. Důkaz nutnosti Bolzanovy-Cauchyovy podmínky pro konvergenci posloupnosti je snadný: platí totiž $|a_m - a_n| \leq |a_m - a| + |a_n - a|$. Je-li $a = \lim a_n$, jsou oba členy na pravé straně nerovnosti malé (pro dostatečně velká m, n), takže i levá strana je malá. Důkaz postačitelnosti této podmínky však podstatně závisí na charakteru množiny reálných čísel, totiž, lidově řečeno, na skutečnosti, že množina reálných čísel nemá žádné „díry“. Kdybychom znali jen racionální čísla, věta by neplatila.

Následující tvrzení, týkající se monotónní posloupnosti, je s větou 7 ekvivalentní.

Věta 8. *Každá monotónní ohraničená posloupnost má limitu.*

Protože víme, že každá konvergentní posloupnost je ohraničená, můžeme tuto větu formulovat i jako nutnou a postačující podmínku konvergence monotónní posloupnosti.

Věta 8'. *Monotónní posloupnost má limitu, právě když je ohraničená.*

Větu 8 nebudeme dokazovat. Její tvrzení zní však velmi přijatelně. Představme si, že máme např. neklesající ohraničenou posloupnost $\{a_n\}_1^\infty$. Nechť číslo K je takové, že platí $a_n \leq K$ pro všechna přirozená n. Tuto nerovnost splňují ovšem různá čísla K (dokonce nekonečně mnoho). Není-li zvolené číslo nejmenší možné, pro něž ještě nerovnost $a_n \leq K$ platí, zmenšíme je „jak jen je možno" (to je ovšem velmi neurčité vyjádření, které si dovolíme jen v této názorné úvaze). To znamená, že ke každému $\varepsilon > 0$ existuje a_p takové, že $a_p > K - \varepsilon$ a tedy $0 \leq K - a_p < \varepsilon$ (jinak bychom mohli číslo K ještě dále zmenšit o číslo ε). Z monotonie posloupnosti plyne, že $a_n \geq a_p$ pro všechna $n \in \mathrm{N}$ $[p]$, a odtud dostáváme, že také

$$0 \leq K - a_n < \varepsilon$$

pro všechna taková n. A to znamená, že číslo K je limitou posloupnosti $\{a_n\}_1^\infty$. Řečeno velmi názorně (a nepřesně), členy posloupnosti jsou svými „předchůdci" tlačeny stále blíže k číslu K, jež je jakousi „bariérou", přes kterou se nemohou dostat. A protože nemohou ani „couvnout" (to by bylo ve sporu s monotonií), hromadí se stále blíže a stále hustěji u oné „bariéry".

Příklad 17. Dokažte, že posloupnost $\{a_n\}_1^\infty$, $a_n = \sqrt[n]{n}$ má limitu.

Dokažme nejprve, že platí

$$\sqrt[n+1]{n+1} \leq \sqrt[n]{n} \tag{14}$$

pro všechna přirozená $n \geq 3$. Tvar členů posloupnosti naznačuje, že bude asi výhodnější zkoumat podíl dvou následujících členů než jejich rozdíl. Protože všechny členy posloupnosti jsou kladné, můžeme nerovnost (14) napsat ekvivalentně ve tvaru

$$\sqrt[n+1]{n+1}/\sqrt[n]{n} \leq 1 .$$

Levá strana této nerovnosti je

$$\frac{(n+1)^{\frac{1}{n+1}}}{n^{\frac{1}{n}}} = \left[\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}\right]^{\frac{1}{n(n+1)}} = \left[\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{\frac{1}{n(n+1)}}.$$

Nyní použijeme binomickou větu. Abychom dostali žádanou nerovnost, budeme potřebovat vhodný odhad kombinačního čísla $\binom{n}{k}$ pro $k \geq 2$:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k(k-1)\ldots 1} \leq \frac{n^k}{2^{k-1}}.$$

Teď už je vše snadné. Platí

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \ldots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n} \leq$$

$$\leq 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3 .$$

Poslední nerovnost plyne ihned ze vzorce pro součet konečného počtu členů geometrické posloupnosti (viz příkl. 5)

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}} .$$

Můžeme tedy psát

$$\frac{(n+1)^{\frac{1}{n+1}}}{n^{\frac{1}{n}}} < \left(\frac{3}{n}\right)^{\frac{1}{n(n+1)}} \leq 1 ,$$

pokud $n \in \mathrm{N}$ [3].

Uvažme nyní posloupnost $\{b_n\}_1^\infty$, $b_n = \sqrt[n+2]{n+2}$. Pro ni platí $b_n = a_{n+2}$ pro všechna přirozená n. Podle toho, co jsme právě dokázali, je posloupnost $\{b_n\}_1^\infty$ monotónní (klesající). Je ovšem také ohraničená, neboť platí $1 \leq$ $\leq b_n \leq b_1 = \sqrt[3]{3}$. Má tedy limitu a podle věty 4 má limitu také posloupnost $\{a_n\}_1^\infty$, přičemž

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n .$$

Poznámka. V posledním odstavci jsme podrobně provedli úvahu, kterou v podobných případech většinou odbudeme mnohem stručněji. Ve větě 8 totiž není nutné předpokládat, že vyšetřovaná posloupnost je monotónní. Stačí, je-li monotónní „až na konečný počet členů“, tj. stane-li se monotónní, změníme-li vhodným způsobem konečný počet jejích členů. Jak víme z věty 3, nezáleží existence ani hodnota limity na konečném počtu členů.

Příklad 18. Dokážeme, že posloupnosti $e_n = \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$, $e_n^* = \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$ z příkladů 11, 12 mají obě tutéž limitu. Z příkl. 11, 12 víme, že první posloupnost je rostoucí, druhá klesající. Protože zřejmě $e_n < e_n^*$ pro všechna přirozená n, platí

$$1 < e_n < e_n^* < e_1^* = 4$$

a tedy obě posloupnosti jsou ohraničené. Existují tedy limity

$$\lim_{n\to\infty} e_n, \lim_{n\to\infty} e_n^* .$$

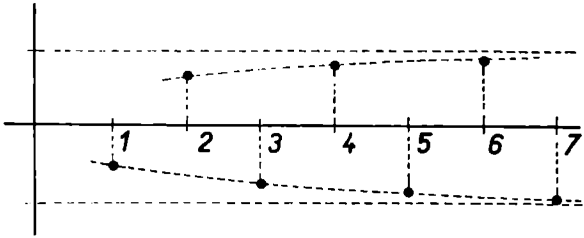
Dále je $e_n^* = e_n\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, $\lim\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$ a podle věty 6

$$\lim e_n^* = \lim e_n . \lim\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim e_n .$$

2.3. HROMADNÉ BODY A VYBRANÉ POSLOUPNOSTI

V příkladu 15 jsme vyšetřovali posloupnost $\left\{\frac{(-1)^n n}{n+1}\right\}_1^\infty$ a ukázali jsme, že nemá limitu. Její členy se totiž „hromadí" v blízkosti dvou různých bodů, -1 a 1, resp. se blíží oběma rovnoběžkám s osou x ve vzdálenosti 1 (viz obr. 3). To nás vede k definici hromadného bodu posloupnosti:

Definice 5. Číslo a se nazývá *hromadným bodem posloupnosti* $\{a_n\}_1^\infty$, jestliže platí: ke každému číslu $\varepsilon > 0$



Obr. 3

existuje nekonečně mnoho přirozených čísel p takových, že

$$|a_p - a| < \varepsilon\,. \tag{15}$$

Rozdíl mezi limitou a hromadným bodem posloupnosti (ale současně i příbuznost těchto pojmů) vynikne nejlépe, vyslovíme-li definici limity takto:

Číslo a se nazývá limitou posloupnosti $\{a_n\}_1^\infty$, jestliže platí: ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje jen konečný počet přirozených čísel q takových, že neplatí nerovnost $|a_q - a| < \varepsilon$. Odtud ihned plyne toto tvrzení:

Důsledek. *Limita posloupnosti (existuje-li) je jejím hromadným bodem.*

Obrácené tvrzení ovšem neplatí, neboť je-li a hromadný bod posloupnosti $\{a_n\}_1^\infty$, může se stát, že pro nějaké $\varepsilon > 0$ platí pro nekonečně mnoho členů posloupnosti nerovnost $|a_n - a| \geq \varepsilon$.

Příklad 19. Posloupnost $\{s_n\}$, $s_n = \sin \dfrac{n\pi}{2}$ má tři hromadné body: -1, 0, 1. Skutečně, pro n sudé je $s_n = 0$, pro $n = 4k + 1$ (k přirozené) je $s_n = 1$, pro $n =$

$= 4k - 1$ je $s_n = -1$. Ve všech třech případech existuje tedy nekonečně mnoho členů posloupnosti, které se dokonce přímo rovnají hromadnému bodu a tedy splňují nerovnost (15) s jakýmkoliv kladným číslem ε.

Příklad 20. Pro posloupnost $\{a_n\}_1^\infty$ z příkladu 15 je číslo 1 hromadný bod. Skutečně, víme již, že $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$; pro každé $\varepsilon > 0$ existuje tedy takové přirozené číslo n_0, že pro $n \in \mathrm{N}\,[n_0]$ platí $\left|\dfrac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$. Avšak pro n sudé je $\dfrac{(-1)^n\, n}{n+1} = \dfrac{n}{n+1}$; všechny sudé členy posloupnosti $\{a_n\}$ splňují tedy při $n \in \mathrm{N}\,[n_0]$ nerovnost $|a_n - 1| < \varepsilon$. Podobně můžeme použít zřejmého vztahu $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-n}{n+1} = -1$ k důkazu, že také -1 je hromadný bod posloupnosti $\{a_n\}_1^\infty$ z příkl. 15.

Snadno se dokáže, že vyšetřovaná posloupnost nemá žádný jiný hromadný bod. Předpokládejme, že a je její hromadný bod, $-1 \neq a \neq 1$, tedy $|a| \neq 1$.

Budiž $\varepsilon = \dfrac{1}{2}\,|1 - |a|| > 0$. Protože platí $|a_n| = \dfrac{n}{n+1}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$, existuje takové přirozené číslo n_0, že pro $n \in \mathrm{N}\,[n_0]$ je $|1 - |a_n|| < \varepsilon$. Tedy pro $n \in \mathrm{N}\,[n_0]$ je $|a_n - a| \geq ||a_n| - |a|| = ||a_n| - 1 - (|a| - 1)| \geq$ $\geq |1 - |a|| - |1 - |a_n|| > 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon$. Nerovnost $|a_n - a| < \varepsilon$ může tedy platit nejvýše pro konečný počet indexů $1, 2, \ldots, n_0 - 1$, což je spor s předpokladem, že a je hromadný bod posloupnosti $\{a_n\}$.

Příklad 21. Víme již z příkladu 8, že všechna racionální čísla lze uspořádat v posloupnost. Označme ji $\{r_n\}_1^\infty$. Je-li ϱ jakékoliv reálné číslo, je ϱ hromadný bod posloupnosti $\{r_n\}_1^\infty$.

Důkaz. Je-li $\varepsilon > 0$, existuje nekonečně mnoho racionálních čísel r takových, že $|r - \varrho| < \varepsilon$. (Rozmyslete si toto tvrzení! Častěji se používá slabší tvrzení, totiž že existuje nějaké (nejméně jedno) racionální číslo takové, že nerovnost platí.) Ale všechna tato čísla r jsou členy posloupnosti $\{r_n\}_1^\infty$, což dokazuje, že ϱ je její hromadný bod.

Příklady 19—21 naznačují cestu k odlišné charakterizaci hromadného bodu posloupnosti: Vybereme-li vhodným způsobem jen některé členy původní posloupnosti (musí jich být ovšem nekonečně mnoho) a seřadíme je podle rostoucích indexů, bude hromadný bod limitou této „vybrané posloupnosti". Abychom mohli uvozovky vynechat, budeme pojem vybrané posloupnosti přesně definovat.

Definice 6. Budiž $\{k_n\}_1^\infty$ rostoucí posloupnost přirozených čísel, $\{a_n\}_1^\infty$ posloupnost. Posloupnost $\{b_n\}_1^\infty$, kde $b_n = a_{k_n}$, nazýváme *vybranou posloupností* nebo *podposloupností posloupnosti* $\{a_n\}_1^\infty$.

Vybranou posloupnost z definice 6 zapisujeme často přímo ve tvaru $\{a_{k_n}\}_{n=1}^\infty$. Známe-li obecný vzorec pro k_n, např. $k_n = 5n - 2$, můžeme psát také $\{a_{5n-2}\}_1^\infty$ apod. Jiný příklad: je-li $a_n = \dfrac{1}{n}$, $k_n = 2^n$, má vybraná posloupnost členy $a_{k_n} = a_{2^n} = \dfrac{1}{2^n}$.

Nyní můžeme vyslovit důležitou větu:

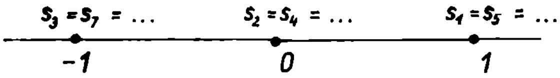
Věta 9. *Číslo* a *je hromadným bodem posloupnosti* $\{a_n\}_1^\infty$, *právě když existuje taková vybraná posloupnost* $\{a_{k_n}\}_{n=1}^\infty$, *že* $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = a$.

Důkaz. Je-li a hromadný bod posloupnosti $\{a_n\}_1^\infty$, definujeme posloupnost $\{k_n\}_1^\infty$ takto: zvolíme takové k_1, aby $|a_{k_1} - a| < 1$; je-li zvoleno $k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}$, zvolíme takové $k_n > k_{n-1}$, aby $|a_{k_n} - a| < \frac{1}{n}$. Takové k_n vždy existuje, neboť nerovnost $|a_p - a| < \frac{1}{n}$ platí pro nekonečně mnoho indexů a tedy jistě pro nějaký index větší než k_{n-1}. Posloupnost $\{k_n\}_1^\infty$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Dokážeme, že vybraná posloupnost $\{a_{k_n}\}_{n=1}^\infty$ konverguje k a.

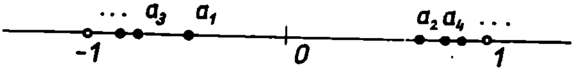
Buď $\varepsilon > 0$. Pak existuje přirozené číslo p takové, že $\frac{1}{p} < \varepsilon$. Z konstrukce čísel a_{k_n} je zřejmé, že pro $n \in \mathrm{N}\,[p]$ platí $|a_{k_n} - a| < \frac{1}{p} < \varepsilon$. Tedy $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = a$.

Nechť obráceně existuje taková vybraná posloupnost $\{a_{k_n}\}_{n=1}^\infty$, že $\lim a_{k_n} = a$. Potom ke každému $\varepsilon > 0$ existuje takové přirozené číslo n_0, že je $|a_n - a| < \varepsilon$ pro nekonečně mnoho indexů n, totiž pro všechny indexy n, splňující podmínku $n = k_m$, $m \geq n_0$. Tím je důkaz ukončen.

Poznámka. Všimněme si rozdílu v chování posloupností z příkladů 19 a 20. Načrtneme-li členy posloupností na

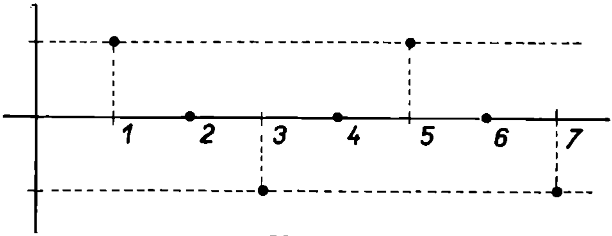


Obr. 4a

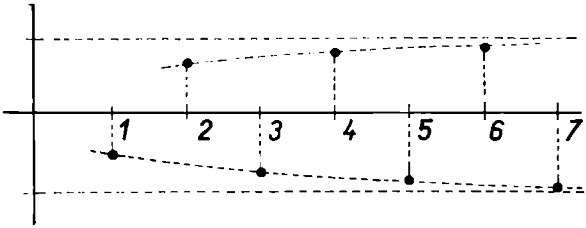


Obr. 4b

číselné ose (obr. 4 a,b), vidíme, že druhý obrázek skutečně odpovídá názorné představě „hromadného bodu", zatímco v prvním případě máme na číselné ose vyznačeny jen tři „izolované" (osamělé) body. To je způsobeno tím, že jsme nakreslili jen členy posloupnosti a nikoliv graf posloupnosti jako zobrazení. Srov. obr. 5 a,b.



Obr. 5a



Obr. 5b

Příklad 22. Zjistěme, zda posloupnost $\{x_n\}_1^\infty$, $x_n = \frac{n^2 - 1}{n}$ má hromadný bod. Tato posloupnost zřejmě není ohraničená. Napíšeme-li $x_n = \frac{(n+1)(n-1)}{n}$, dostaneme ihned nerovnost

$$n - 1 < x_n < n + 1 .$$

Předpokládejme, že číslo a je hromadným bodem naší posloupnosti. Existuje takové přirozené číslo p, že $p \geq a + 1$. Pro všechna přirozená $n \in \mathrm{N}[p + 1]$ pak platí

$$x_n > n - 1 \geq p \geq a + 1 . \tag{16}$$

Zvolme $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Pak podle definice hromadného bodu musí existovat nekonečně mnoho takových přirozených čísel n, že

$$|x_n - a| < \frac{1}{2} .$$

Speciálně musí tedy existovat přirozené číslo $m \geq p + 1$ takové, že

$$|x_m - a| < \frac{1}{2} .$$

Avšak to je ve sporu s nerovností (16), v níž místo n píšeme m (to smíme, neboť $m \geq p + 1$). Nemůže tedy posloupnost $\{x_n\}$ mít hromadný bod.

Posloupnosti z příkladů 19—21, které měly hromadné body, byly vesměs ohraničené; posloupnost bez hromadného bodu z příkladu 22 nebyla ohraničená. Zdá se tedy, že mezi existencí hromadného bodu a ohraničeností posloupnosti je nějaký vztah. Tento vztah však není ekvivalencí, jak ukazuje další příklad:

Příklad 23. Posloupnost $\{z_n\}_1^\infty$, $z_n = \dfrac{n^2+1}{n} + (-1)^n n$ není ohraničená, ale má hromadný bod.

Při zkoumání této posloupnosti je rozumné vyšetřit zvlášť liché a zvlášť sudé členy. Jest (pro všechna $k \in \mathrm{N}$)

$$z_{2k-1} = \frac{(2k-1)^2+1}{2k-1} - (2k-1) = \frac{1}{2k-1},$$

$$z_{2k} = \frac{(2k)^2+1}{2k} + 2k = \frac{8k^2+1}{2k}.$$

Platí tedy

$$\lim_{k\to\infty} z_{2k-1} = 0,$$

$$z_{2k} \geq 4k$$

pro všechna přirozená k. Posloupnost $\{z_n\}_1^\infty$ není ohraničená a má hromadný bod 0 (podle věty 9).

Platí však následující důležitá věta:

Věta 10. *Ohraničená posloupnost má aspoň jeden hromadný bod.*

Tato věta je jedním z několika důležitých tvrzení, která jsou navzájem ekvivalentní. Patří k nim věta 7, věta 8 a také tzv. věta o suprému, o níž jsme se zde nezmínili.

Ukažme, že věta 10 je důsledkem věty 7. K tomu dokážeme pomocnou větu.

Pomocná věta. *Z ohraničené posloupnosti lze vybrat posloupnost, splňující Bolzanovu-Cauchyovu podmínku.*

Důkaz. Nechť posloupnost $\{a_n\}_1^\infty$ je ohraničená a K je takové číslo, že platí $|a_n| \leq K$ čili $-K \leq a_n \leq K$ pro všechna přirozená n. Vybereme jeden z intervalů $\langle -K, 0\rangle$, $\langle 0, K\rangle$, v němž leží nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{a_n\}_1^\infty$, označíme jej J_1 a vyberme $b_1 = a_{k_1} \in J_1$. (Je především zřejmé, že takový interval J_1 existuje; leží-li nekonečně mnoho členů posloupnosti v obou intervalech, zvolme pro určitost třeba ten „vpravo". Dále je vidět, že index k_1 můžeme zvolit nejmenší takový, že platí $a_{k_1} \in J_1$. Tím je naše konstrukce již jednoznačně určena.) Délka intervalu J_1 je $d(J_1) = K$. Nyní rozpůlíme interval J_1 a z obou intervalů délky $\frac{1}{2}K$, které tak vzniknou, vybereme opět ten, v němž leží nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{a_n\}_1^\infty$. (Platí-li to pro oba, vezměme opět ten „vpravo".) Označme jej J_2, takže $J_2 \subset J_1$, $d(J_2) = \frac{1}{2}K$, a vyberme $a_{k_2} \in J_2$ s nejmenším možným indexem k_2 takovým, že současně platí $k_2 > k_1$. Položme $b_2 = a_{k_2}$. Máme-li takto sestrojena čísla $b_1, b_2, \ldots, b_n$ a intervaly $J_1 \supset J_2 \supset \ldots \supset J_n$, sestrojíme obdobným způsobem interval $J_{n+1} \subset J_n$ délky $\frac{1}{2^n}K$ a číslo b_{n+1}. (Proveďte si tento krok podrobně!)

Tím je definována posloupnost $\{b_n\}_1^\infty$, která, jak plyne z konstrukce, je vybranou posloupností z posloupnosti $\{a_n\}_1^\infty$. Dokážeme, že $\{b_n\}_1^\infty$ splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku. Je-li dáno $\varepsilon > 0$, najdeme takové přirozené číslo p, že $\frac{K}{2^{p-1}} < \varepsilon$. Pak pro $n \in \mathbf{N}\,[p]$ všechny členy b_n leží v intervalu J_p délky $\frac{1}{2^{p-1}} K$; jejich vzdálenost (tj. absolutní hodnota jejich rozdílu) nemůže být větší než $d(J_p)$, takže pro $n \in \mathbf{N}\,[p]$ platí

$$|b_m - b_n| \leq \frac{1}{2^{p-1}} K < \varepsilon\,.$$

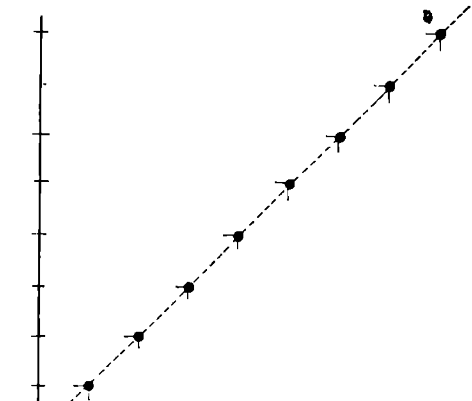
Tím je pomocná věta dokázána.

Vraťme se nyní k důkazu věty 10, který je již snadný. Z ohraničené posloupnosti vybereme podle pomocné věty posloupnost splňující Bolzanovu-Cauchyovu podmínku. Ta má limitu podle věty 7, a podle věty 9 je tato limita hromadným bodem původní posloupnosti. Věta 10 je dokázána.

2.4. NEVLASTNÍ LIMITA

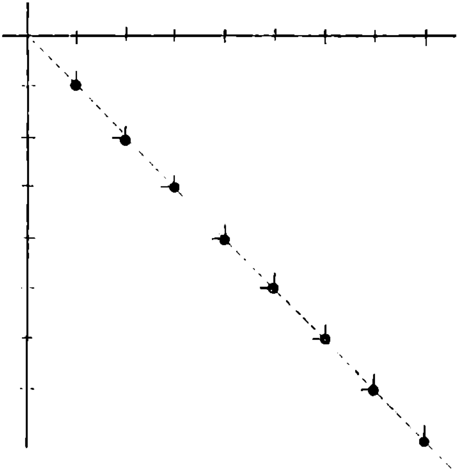
V předešlých dvou kapitolách jsme se zabývali hlavně ohraničenými posloupnostmi. To byl důsledek věty 5. Zavedením pojmu konvergentní posloupnosti jsme rozlišili — jak ukazuje věta 10 a úloha 5 v kap. 2 — ohraničené posloupnosti s jediným hromadným bodem a ohraničené posloupnosti s více hromadnými body. Ty druhé bychom mohli nazvat oscilujícími, neboť jejich členy se jakoby „nemohou rozhodnout“ a kmitají (oscilují) z blízkosti jednoho hromadného bodu do blízkosti jiného. (Přitom není podstatné, zda přímo nabývají hodnoty svého hromadného bodu: srovnej posloupnosti $\{(-1)^n\}_1^\infty$, $\left\{(-1)^n \frac{n}{n+1}\right\}_1^\infty$.)

Podobné rozlišení je výhodné provést i pro neohraničené posloupnosti. Porovnejme k tomu cíli posloupnosti $\{n\}_1^\infty, \{-n\}_1^\infty, \left\{\frac{1}{2}(n+(-1)^{n-1}n)\right\}_1^\infty, \{(-1)^{n-1}n\}_1^\infty$ a načrtněme jejich grafy (obr. 6 až 9). Budete asi souhlasit s tím, že třetí a čtvrtá posloupnost má opět charakter „oscilující" posloupnosti, zatímco první a druhé bychom mohli „při dobré vůli" přiznat jisté „cílevědomé" chování, připomínající trochu konvergenci. Neexistuje ovšem reálné číslo, jemuž by se členy posloupnosti — ať první či druhé — v rozumném smyslu blížily. Spíše bychom mohli říci, že se nekonečně vzdalují. Proto k zápisu jejich chování použijeme symbolu ∞.

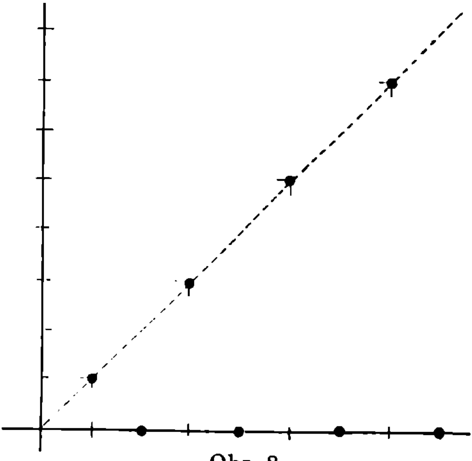


Obr. 6

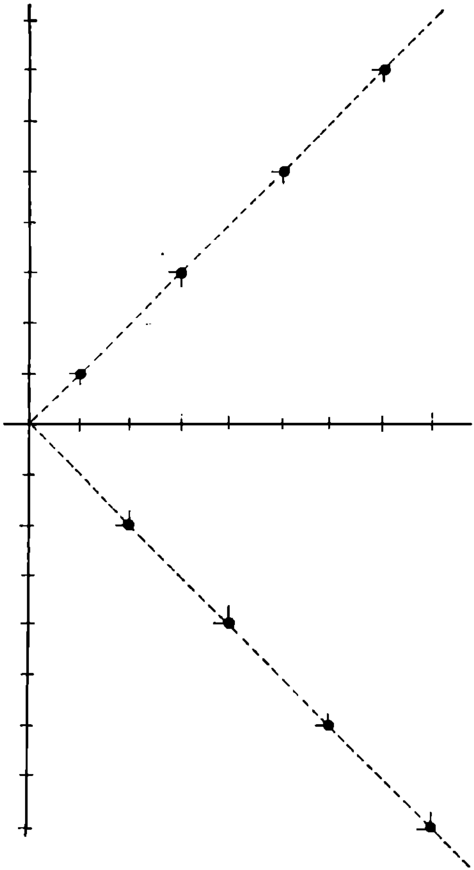
Definice 7. Říkáme, že posloupnost $\{a_n\}_1^\infty$ má *nevlastní limitu* $+\infty$ (plus nekonečno), jestliže platí: ke každému



Obr. 7



Obr. 8



Obr. 9

číslu K existuje takové přirozené číslo n_0, že pro všechna $n \in \mathrm{N}\,[n_0]$ platí $a_n > K$. Píšeme pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, $\lim a_n = +\infty$ nebo $a_n \to +\infty$. Znaménko plus v symbolu $+\infty$ se často vynechává.

Podobně říkáme, že posloupnost $\{a_n\}_1^\infty$ má *nevlastní limitu* $-\infty$ (minus nekonečno), jestliže platí: ke každému číslu K existuje takové přirozené číslo n_0, že pro všechna $n \in \mathrm{N}\,[n_0]$ platí $a_n < K$. Píšeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, $\lim a_n = -\infty$ nebo $a_n \to -\infty$.

Poznámka. Uvědomte si především, že nevlastní limita není limita. To je poněkud neobvyklé: pravoúhlý rovnoběžník určitě je rovnoběžník. Ale připomeňme již okřídlené přirovnání, že nevlastní matka není ve skutečnosti matka.

Dále si všimněte, že členy posloupnosti vystupují v nerovnostech v definici bez absolutních hodnot; proč tomu tak je, pochopíte jistě sami (porovnejte ještě jednou posloupnosti $\{n\}_1^\infty$ a $\{(-1)^{n-1}n\}_1^\infty$.

Obdobně jako v definici 4, i v definici nevlastní limity závisí číslo n_0 na čísle K, tedy $n_0 = n_0(K)$.

A nakonec poznamenejme, že označení „konvergentní" zůstává vyhrazeno pro ty posloupnosti, které mají limitu (někdy říkáme důrazněji vlastní limitu). Posloupnosti, které mají nevlastní limitu ($+\infty$ nebo $-\infty$), se někdy nazývají *divergentní*, jindy *určitě divergentní* (na rozdíl od *neurčitě divergentních*, tj. *oscilujících*). My těchto názvů používat nebudeme.

Mnohé věty z kapitoly 2 se dají přenést na pojem nevlastní limity pouhou záměnou slova „limita" slovem „nevlastní limita". Je to především věta 1, která platí dokonce v silnějším znění, spojujícím pojem limity a nevlastní limity:

Věta 11. *Posloupnost má buď právě jednu limitu, nebo právě jednu nevlastní limitu, nebo nemá limitu, ani nevlastní limitu.*

Také věty 3 a 4 platí, zaměníme-li slovo limita slovem nevlastní limita.

Abychom mohli vyslovit větu o limitě součtu, rozdílu, součinu a podílu ve formálně stejném tvaru jako větu 6 i pro případ, kdy jedna či obě limity na pravé straně jsou nevlastní, museli bychom definovat algebraické operace se symboly $+\infty$, $-\infty$. To v některých případech nečiní potíže (např. $\infty + \infty = \infty$, $a - \infty = -\infty$, je-li a reálné číslo apod.), ale v jiných je nalezení vyhovující definice prakticky nemožné (např. $\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$ apod. — tzv. *neurčité výrazy*).

Spokojíme se proto s tím, že vyslovíme několik vět podobných větě 6, i když většinou slabších.

Věta 12. *Má-li posloupnost $\{a_n\}_1^\infty$ nevlastní limitu ($+\infty$ nebo $-\infty$) a posloupnost $\{b_n\}_1^\infty$ buď je ohraničená, nebo má tutéž nevlastní limitu jako $\{a_n\}_1^\infty$, pak i posloupnost $\{a_n + b_n\}_1^\infty$ má tutéž nevlastní limitu.*

Důkaz. Mají-li obě posloupnosti $\{a_n\}_1^\infty$, $\{b_n\}_1^\infty$ tutéž nevlastní limitu, např. $-\infty$, pak ke každému K existují taková přirozená čísla n_1, n_2, že pro všechna $n \in \mathrm{N}\,[n_1]$ platí $a_n < \min(0, K)$ a pro všechna $n \in \mathrm{N}\,[n_2]$ platí $b_n < \min(0, K)$. Pro všechna $n \in \mathrm{N}\,[\max(n_1, n_2)]$ tedy platí $a_n + b_n < 0 \leq K$, je-li $K \geq 0$, $a_n + b_n < 2K < K$, je-li

$K < 0$. Tedy $a_n + b_n \to -\infty$. Pro nevlastní limitu $+\infty$ je důkaz zcela obdobný.

Je-li např. $\lim a_n = +\infty$, $|b_n| \leq c$ pro všechna $n \in \mathrm{N}$, pak ke každému K existuje takové n_0, že pro všechna $n \in \mathrm{N}$ $[n_0]$ je $a_n > K + c$. Pro všechna $n \in \mathrm{N}$ $[n_0]$ tedy platí

$$a_n + b_n \geq a_n - |b_n| > K + c - c = K\,.$$

Ostatní případy se dokáží obdobně.

Podobnou větu lze dokázat pro limitu součinu, je však třeba rozeznávat případy nevlastních limit $+\infty$ a $-\infty$ a pozměnit předpoklady na posloupnost $\{b_n\}_1^\infty$. (Srov. úlohu 11 na str. 67.)

Dokážeme nyní jednu větu o limitě podílu, která je v jistém smyslu obecnější.

Věta 13. *Má-li $\{b_n\}_1^\infty$ nevlastní limitu a posloupnost $\{a_n\}_1^\infty$ je ohraničená, je* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$.

Důkaz. Nechť $|a_n| \leq K$ pro všechna $n \in \mathrm{N}$. Nechť $b_n \to +\infty$. Buď $\varepsilon > 0$. Existuje takové n_0, že $b_n > \dfrac{K}{\varepsilon}$ (můžeme ovšem předpokládat, že $K > 0$) pro všechna $n \in \mathrm{N}$ $[n_0]$. Pro tato n platí tedy také $\left|\dfrac{a_n}{b_n}\right| < \dfrac{K}{K/\varepsilon} = \varepsilon$. Tím je věta dokázána pro $b_n \to +\infty$. Jestliže $b_n \to -\infty$, najdeme n_1 takové, že $b_n < -\dfrac{K}{\varepsilon} < 0$ a tedy $|b_n| = -b_n > \dfrac{K}{\varepsilon}$. Další postup je stejný.

Ve větě 6 jsme odvodili mj. „vzorec pro limitu podílu"

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n},$$

který platí, existují-li obě limity na pravé straně rovnosti a platí $\lim b_n \neq 0$. Limita vlevo však může existovat i tehdy, když některá (nebo žádná) z limit vpravo neexistuje. (Např. je-li $a_n = b_n \neq 0$ a neexistuje $\lim a_n$.) Zvlášť zajímavý a důležitý je případ, kdy obě posloupnosti jsou neohraničené. Tento případ zahrnuje věta, s jejíž obdobou se setkáte, budete-li dále studovat matematickou analýzu, v teorii funkcí pod názvem *L'Hospitalovo pravidlo*. Její podstata je v tom, že místo členů obou posloupností zkoumáme diference, tj. rozdíly dvou za sebou následujících členů.

Věta 14. *Nechť $\{b_n\}_1^\infty$ je neohraničená rostoucí posloupnost. Nechť existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}$. Pak existuje i $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ a obě limity se rovnají.*

Důkaz. Buď $\varepsilon > 0$. Pak existuje takové přirozené číslo n_0, že pro všechna $n \in \mathrm{N}\,[n_0]$ platí

$$L - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} < L + \frac{\varepsilon}{2}, \tag{17}$$

kde $L = \lim [(a_n - a_{n-1})/(b_n - b_{n-1})]$.

Použijeme tohoto tvrzení:

Pomocná věta. *Jsou-li $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ reálná čísla, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ kladná čísla a platí-li*

$$K_1 < \frac{\alpha_i}{\beta_i} < K_2 \text{ pro } i = 1, 2, \ldots, k, \tag{18}$$

platí také

$$K_1 < \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k}{\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_k} < K_2 \,. \tag{19}$$

Důkaz. Nerovnost dokážeme indukcí. Pro $k = 1$ je její platnost zřejmá. Je-li $k > 1$, označme $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{k-1} = A$, $\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_{k-1} = B$. Je-li $\frac{A}{B} = \frac{\alpha_k}{\beta_k}$, je $\frac{A + \alpha_k}{B + \beta_k} = \frac{2\alpha_k}{2\beta_k} = \frac{\alpha_k}{\beta_k}$ a nerovnost (19) není nic jiného než jedna z nerovností (18), která platí podle předpokladu.

Buď nyní např. $\frac{\alpha_k}{\beta_k} < \frac{A}{B}$ a předpokládejme, že platí $K_1 < \frac{A}{B} < K_2$, ale $\frac{A + \alpha_k}{B + \beta_k} \geq K_2$. Podle indukčního předpokladu platí tím spíše $\frac{A + \alpha_k}{B + \beta_k} > \frac{A}{B}$, což je totéž jako $(A + \alpha_k)\,B > A(B + \beta_k)$, neboť ve jmenovatelích zlomků jsou kladná čísla. Odtud snadno dostaneme $\frac{A}{B} < \frac{\alpha_k}{\beta_k}$, což je spor. Platí tedy $\frac{A + \alpha_k}{B + \beta_k} < K_2$. Podobně dokážeme tuto nerovnost za předpokladu, že $\frac{\alpha_k}{\beta_k} > \frac{A}{B}$. Předpokládáme-li, že platí $\frac{A + \alpha_k}{B + \beta_k} \geq K_2$, platí tím spíše $\frac{A + \alpha_k}{B + \beta_k} > \frac{\alpha_k}{\beta_k}$, odtud dostaneme jako v prvním případě nerovnost $\frac{\alpha_k}{\beta_k} < \frac{A}{B}$, která je ve sporu s předpokladem. Obdobně se dokáže i druhá část nerovnosti (19).

Pomocné věty můžeme nyní použít na vzorec (17). Položíme-li $a_{n_0+1} - a_{n_0} = \alpha_1, \ldots, a_n - a_{n-1} = \alpha_k$, $b_{n_0+1} - b_{n_0} = \beta_1, \ldots, b_n - b_{n-1} = \beta_k$ (tedy $k = n - n_0$) a $K_1 = L - \frac{\varepsilon}{2}$, $K_2 = L + \frac{\varepsilon}{2}$, dostaneme (pro $n \in \mathbf{N}[n_0 + 1]$)

$$L - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{a_n - a_{n_0}}{b_n - b_{n_0}} < L + \frac{\varepsilon}{2}$$

čili

$$\left| \frac{a_n - a_{n_0}}{b_n - b_{n_0}} - L \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nám však jde o rozdíl $\left| \frac{a_n}{b_n} - L \right|$. Můžeme psát

$$\frac{a_n}{b_n} - L = \frac{a_n - a_{n_0}}{b_n} + \frac{a_{n_0}}{b_n} - L = \frac{a_n - a_{n_0}}{b_n - b_{n_0}} \frac{b_n - b_{n_0}}{b_n} +$$

$$+ \frac{a_{n_0}}{b_n} - L = \left(\frac{a_n - a_{n_0}}{b_n - b_{n_0}} - L \right) \frac{b_n - b_{n_0}}{b_n} + \frac{a_{n_0}}{b_n} +$$

$$+ L \left(\frac{b_n - b_{n_0}}{b_n} - 1 \right) =$$

$$= \left(\frac{a_n - a_{n_0}}{b_n - b_{n_0}} - L \right) \left(1 - \frac{b_{n_0}}{b_n} \right) + \frac{a_{n_0} - b_{n_0} L}{b_n}.$$

Zvolíme-li nyní $n_1 \in \mathbf{N}$ tak velké, aby bylo

(I) $n_1 \geq n_0$,

(II) $0 \leq 1 - \frac{b_{n_0}}{b_n} \leq 1$ pro všechna $n \in \mathbf{N}[n_1]$,

(III) $\left| \frac{a_{n_0} - b_{n_0} L}{b_n} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$ pro všechna $n \in \mathbf{N}[n_1]$

(rozmyslete si, že podmínkám (II), (III) lze skutečně vyhovět), pak pro všechna $n \in \mathrm{N}\,[n_1]$ bude platit

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - L\right| \leq \left|\frac{a_n - a_{n_0}}{b_n - b_{n_0}} - L\right| \cdot \left|1 - \frac{b_{n_0}}{b_n}\right| + \\ + \left|\frac{a_{n_0} - b_{n_0}L}{b_n}\right| < 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

Platí tedy $\lim (a_n/b_n) = L$.

Příklad 24. Posloupnost $\{b_n\}_1^\infty$, $b_n = n$ jistě splňuje předpoklady věty 14. Odtud dostáváme zajímavou větu o konvergenci aritmetických průměrů: *Jestliže posloupnost $\{X_n\}_1^\infty$ konverguje, pak konverguje i posloupnost $\left\{\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}\right\}_1^\infty$ a platí*

$$\lim \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} = \lim X_n\,.$$

Důkaz. Položíme-li $a_n = X_1 + \ldots + X_n$, je $a_n - a_{n-1} = X_n$, $b_n - b_{n-1} = n - (n-1) = 1$, tedy $\lim \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \lim X_n$ a použijeme naší věty.

Konverguje-li posloupnost aritmetických průměrů, nemusí konvergovat původní posloupnost. Ověřte si to na posloupnosti $\{(-1)^n\}_1^\infty$!

Poznámka. Není-li posloupnost $\{b_n\}_1^\infty$ monotónní (rostoucí), nemusí věta 14 platit. Položme např. $a_n = n^2$ pro všechna přirozená n, $b_n = n^2$ pro n sudé, $b_n = n$ pro n liché. Potom postoupnost $\{a_n/b_n\}_1^\infty$ nemá limitu, neboť pro lichá n platí $a_n/b_n = n$. Avšak označíme-li

$$(a_n - a_{n-1})/(b_n - b_{n-1}) = \Delta_n,$$

platí $\Delta_{2k} = \dfrac{(2k)^2 - (2k-1)^2}{(2k)^2 - (2k-1)} = \dfrac{4k-1}{4k^2 - 2k + 1} \to 0,$

$$\Delta_{2k+1} = \frac{(2k+1)^2 - (2k)^2}{2k+1-(2k)^2} = \frac{4k+1}{-4k^2+2k+1} \to 0.$$

Odtud snadno odvodíme, že $\lim \Delta_n = 0$. Všechy ostatní předpoklady věty 14 jsou splněny, její tvrzení však neplatí.

Věty 14 můžeme užít i na součin dvou posloupností, z nichž jedna konverguje k nule a druhá má nevlastní limitu. Například je-li $\lim c_n = +\infty$, $\lim d_n = 0$ a $\{d_n\}_1^\infty$ je klesající, stačí položit $a_n = c_n$, $b_n = \dfrac{1}{d_n}$. Není-li $\{d_n\}_1^\infty$ klesající, nemusí věta platit. Položte např. $c_n = n^2$, $d_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2}$. Pak $c_n d_n = (-1)^n$, takže posloupnost $\{c_n d_n\}_1^\infty$ nemá limitu. Ale při označení zavedeném výše je

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \frac{c_{n+1} - c_n}{d_{n+1}^{-1} - d_n^{-1}} = \frac{(n+1)^2 - n^2}{(-1)^{n+1}(n+1)^2 - (-1)^n n^2} =$$

$$= (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{2n^2+2n+1} \to 0\,.$$

Poznámka. Předpoklady věty 14 mohou být splněny i tehdy, má-li posloupnost $\{a_n\}_1^\infty$ nevlastní limitu. (Je-li $\{a_n\}_1^\infty$ ohraničená, máme „lepší" větu 13.) Prozkoumali jsme tedy jeden z „neurčitých výrazů", totiž $\dfrac{\infty}{\infty}$ $\left(\text{čili, což je vlastně totéž, } \dfrac{0}{0}\right)$.

Úlohy

Ve všech úlohách jsou $\{a_n\}_1^\infty$, $\{b_n\}_1^\infty$, $\{c_n\}_1^\infty$ posloupnosti.

1. Dokažte: Je-li $a_n \leq b_n$ pro všechna přirozená n a existují-li limity $a = \lim a_n$. $b = \lim b_n$, platí $a \leq b$. Ukažte na příkladu, že ze vztahu $a_n < b_n$ pro všechna přirozená n neplyne obecně $a < b$, ale jen $a \leq b$.
2. Dokažte: Je-li $a_n \leq b_n \leq c_n$ pro všechna přirozená n a existují-li limity $\lim a_n$, $\lim c_n$ a jsou-li si rovny, pak existuje také $\lim b_n$ a platí $\lim a_n = \lim b_n = \lim c_n$. (Platí i pro nevlastní limity.)
3. Dokažte, že $\lim a_n = 0$ platí právě tehdy, když $\lim |a_n| = = 0$.
4. Dokažte, že pro každé číslo $a > 1$ a každé celé číslo k platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

(Návod: Zkoumejte podíl dvou následujících členů posloupnosti a použijte úlohu 2, v níž položíte $a_n = 0$ a za $\{c_n\}_1^\infty$ vezmete vhodnou geometrickou posloupnost s kladným kvocientem menším než jedna.)

5. Dokažte: Hromadný bod ohraničené posloupnosti je její limitou právě tehdy, když je jejím jediným hromadným bodem.
6. Dokažte (bez použití věty 7), že každá posloupnost splňující Bolzanovu-Cauchyovu podmínku je ohraničená.
7. Dokažte (bez použití věty 7), že posloupnost, která má dva (nebo více) hromadné body, nesplňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku.
8. Dokažte: Monotónní neohraničená posloupnost má nevlastní limitu.
9. Dokažte: Platí $\lim |a_n| = +\infty$ právě když $\lim \dfrac{1}{a_n} = 0$. (Použijte úlohu 3.)

10. Dokažte: Nechť $P_r(x) = p_0x^r + p_1x^{r-1} + \ldots + p_{r-1}x + p_r$, $Q_s(x) = q_0x^s + q_1x^{s-1} + \ldots + q_{s-1}x + q_s$, $p_0q_0 \neq 0$, $r > s$. Pak platí: Je-li $p_0q_0 > 0$, je

$$\lim_{n \to \infty} [P_r(n)/Q_s(n)] = +\infty;$$

je-li $p_0q_0 < 0$, je

$$\lim_{n \to \infty} [P_r(n)/Q_s(n)] = -\infty.$$

11.* Je-li $\lim a_n = +\infty$ a existuje-li kladné číslo b a přirozené číslo k takové, že pro všechna $n \in \mathrm{N}\,[k]$ platí $b_n \geq b$, pak

$$\lim a_nb_n = +\infty.$$

Jak musíme změnit předpoklady na posloupnost $\{b_n\}_1^\infty$, aby tvrzení zůstalo správné, platí-li pro posloupnost $\{a_n\}_1^\infty$

$$\lim a_n = -\infty?$$

Vyslovte a dokažte obdobné věty, jejichž tvrzení bude

$$\lim a_nb_n = -\infty.$$

12.* Udejte příklady posloupností $\{a_n\}_1^\infty$, $\{b_n\}_1^\infty$, pro něž platí $\lim a_n = \lim b_n = +\infty$ a přitom $\lim (a_n - b_n)$ $\left(\text{resp. } \lim \dfrac{a_n}{b_n}\right)$ a) existuje, b) neexistuje, c) je nevlastní.

3. kapitola

ŘADY

3.1. ÚVOD

Pojmu posloupnosti předcházel v historii matematiky pojem řady. Tento pojem se vztahuje ke sčítání čísel, tedy k velmi elementární operaci. S jedinou výhradou: jde o problém sčítání „nekonečně mnoha" čísel.

Již dávno si matematici, filozofové či „obyčejní lidé" všimli, že sčítáme-li postupně zlomky $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ atd., nepřekročí součet nikdy číslo 1. Přitom sečteme-li tato čísla až do $\frac{1}{2^k}$, bude součet roven právě $1 - \frac{1}{2^k}$. Odtud byl již jen krok k závěru, že součet $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$ (všech čísel tvaru $\frac{1}{2^n}$, kde n je přirozené číslo) je právě roven jedné.

Vše se zdálo být v pořádku. Nikdo se zpočátku nepozastavil nad tím, co to vůbec znamená „sečíst nekonečně mnoho čísel". Zmíněný výsledek byl zobecňován; došlo se k závěru, že v případě $-1 < x < 1$ platí

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \ldots = \frac{1}{x-1}\,.$$

Potíže nečinil ani případ $x = 1$: Vcelku ve shodě se „zdravým selským rozumem" se usoudilo, že čísla na levé straně rovnosti (tj. samé jedničky) nelze sečíst, neboť pravá strana uvedeného vzorce nemá smysl.

Avšak když začali matematici uvažovat o případu $x = -1$, narazili na překážky: výraz vpravo má smysl, takže bychom mohli psát

$$-1 + 1 - 1 + \ldots = -\frac{1}{2}.$$

Díváme-li se však na výraz na levé straně jako na zápis obyčejné aritmetické operace sčítání čísel, měl by platit asociativní zákon. Podle něho bychom však mohli psát

$$-1 + 1 - 1 + \ldots = (-1 + 1) +$$
$$+ (-1 + 1) + \ldots = 0 + 0 + \ldots = 0,$$

ale také

$$-1 + 1 - 1 + \ldots = -1 + (1 - 1) +$$
$$+ (1 - 1) + \ldots = 1 + 0 + 0 + \ldots = 1,$$

což dává zřejmě nesprávné rovnosti

$$-\frac{1}{2} = 0 = 1!$$

Stejně i použitím komutativního a distributivního zákona dojdeme k rozporuplným výsledkům:

$$-\frac{1}{2} = -1 + 1 - 1 + \ldots = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots,$$

ale také

$$1-1+1-1+\ldots=-(-1+1-1+\ldots)=$$
$$=-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\,.$$

Trvalo dlouhá léta — či spíše staletí — než se podařilo uspokojivě rozřešit tyto a podobné otázky. Hluboké úvahy, vyvolané uvedenými paradoxy, vedly nakonec k vytvoření základních pojmů klasické matematické analýzy. Ohromující vývoj, kterým teorie řad prošla od prvních fundamentálních prací Cauchyových, z ní vytvořil i důležitý prostředek aplikací matematiky.

3.2. DEFINICE

Budeme nyní definovat pojem řady, respektive součtu řady, pomocí pojmu limity posloupnosti.

Definice 8. Buď $\{a_n\}_1^\infty$ posloupnost. Pak symbol $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ nazýváme *řadou*. Čísla a_n jsou *členy řady*, čísla $s_k = \sum\limits_{n=1}^{k} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ nazýváme jejími *částečnými součty*. Existuje-li limita posloupnosti $\{s_k\}_{k=1}^\infty$, $s = \lim\limits_{k\to\infty} s_k$, říkáme, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ má *součet* (a to i v případě, kdy limita s je nevlastní, tj. $s = +\infty$ nebo $s = -\infty$) a píšeme $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = s$. Je-li limita s vlastní (tj. konečné číslo), říkáme také, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje k číslu s* (je konvergentní).

Neexistuje-li $\lim_{k \to \infty} s_k$ (ani nevlastní), říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nemá součet.

Definice byla dost dlouhá a vyskytlo se v ní několik nových názvů. Všimněte si především toho, že symbol $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ má vlastně dva významy: jednak je vyjádřením příkazu „utvoř částečné součty $a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ a zkoumej jejich limitu", jednak je přímo označením pro hodnotu této limity (pokud existuje). Dále si uvědomte rozdíl mezi výrokem „řada má součet" a „řada konverguje". Konvergentní řada má ovšem součet, a ten je (konečné) číslo. Řada, která má součet, nemusí však konvergovat: to nastane právě tehdy, je-li její součet nekonečný, tj. $+\infty$ nebo $-\infty$. Rozmyslete si také význam negací uvedených výroků a pečlivě je rozlišujte!

K označení zavedenému definicí 8 je třeba ještě poznamenat, že podobně jako v pojmu posloupnosti nemusí řada začínat od indexu 1. Vedle uvedeného zápisu se setkáme nejčastěji s řadami tvaru $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, ale také $\sum_{n=3}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=-2}^{\infty} a_n$ apod. Je samozřejmé, že „sčítací index" může být označen jinak než n, např. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ apod. Zápis $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$, který se dost často objevuje v literatuře, nebudeme v této knížce používat.

Příklad 25. Ve škole jste se seznámili se součtem *geometrické řady* (srov. příklad 5). Je-li $a_n = aq^{n-1}$ pro všechna přirozená čísla n, $a \neq 0$, můžeme hovořit o řadě

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}. \tag{20}$$

V příkladu 5 jsme ukázali, že platí

$$s_n = a + aq + \ldots + aq^{n-1} = a\,\frac{1-q^n}{1-q}\,. \tag{21}$$

Podle věty 6 snadno odvodíme, že posloupnost $\{s_n\}_1^\infty$, má (vlastní) limitu, právě když $|q| < 1$, a platí

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1-q}\,.$$

Geometrická řada tedy konverguje právě tehdy, když $|q| < 1$, a platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \frac{a}{1-q}\,.$$

(Případ $q = 0$ jsme na rozdíl od příkladu 5 nevyloučili.)

Je-li $q \geq 1$, je posloupnost částečných součtů $\{s_n\}_1^\infty$ monotónní a neohraničená podle vzorce (21) a platí zřejmě (srov. úlohu 8, kap. 2)

$$\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty \quad \text{nebo} \quad \lim_{n\to\infty} s_n = -\infty$$

podle toho, zda $a > 0$, nebo $a < 0$. Platí tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = +\infty \quad \text{při} \quad a > 0, q \geq 1\,,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = -\infty \quad \text{při} \quad a < 0, q \geq 1\,.$$

Je-li $q < -1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ nemá součet, neboť ze vzorce (21) plyne, že posloupnost částečných součtů je neohraničená a přitom obsahuje jak kladné, tak i záporné členy s libovolně velkou absolutní hodnotou. Celkem tedy docházíme k závěru, že geometrická řada má součet při $q > -1$, konverguje při $-1 < q < 1$. (Případ $q = -1$ uvažte sami — srov. příkl. 28.)

Příklad 26. Nalezněte součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \,. \tag{22}$$

Jde ovšem jednak o to, zda součet řady existuje, jednak o jeho hodnotu. V daném případě lze však obě otázky vyřešit současně. Z rovnosti

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

plyne ihned

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{2} + $$
$$+ \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

a tedy

$$\lim_{n\to\infty} s_n = 1 \,.$$

Podle definice 8 tedy řada (22) konverguje a má součet rovný jedné, tj.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 \,.$$

Příklad 27. Vyšetříme tzv. *harmonickou řadu*, tj. řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} . \tag{23}$$

Protože $\frac{1}{n} > 0$ pro všechna přirozená čísla n, je posloupnost částečných součtů $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ monotónní (rostoucí) posloupnost. Jestliže je ohraničená, má podle věty 8 limitu; jestliže je neohraničená, má nevlastní limitu $+\infty$. Řada (23) má tedy jistě součet; otázkou zůstává, zda je dokonce konvergentní. K rozřešení této otázky nám pomůže, omezíme-li se na jistou vybranou posloupnost z posloupnosti částečných součtů, totiž na posloupnost $\{s_{2^n}\}_{n=1}^{\infty}$. Protože $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$, $\frac{1}{5} > \frac{1}{8}$, $\frac{1}{6} > \frac{1}{8}$, $\frac{1}{7} > \frac{1}{8}$ atd., platí

$$s_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2^n} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} +$$

$$+ \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \ldots + \underbrace{\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} + \ldots + \frac{1}{2^n}}_{2^{n-1}\text{-krát}} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \ldots + \frac{2^{n-1}}{2^n} = 1 + \frac{n}{2} .$$

Odtud plyne, že posloupnost $\{s_{2^n}\}_{n=1}^{\infty}$ a tím spíše posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neohraničená, takže podle předchozí úvahy řada (23) nekonverguje, ale platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty .$$

Příklad 28. V odst. 3.1 jsme ukázali, jaké obtíže nastanou, snažíme-li se sečíst řadu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$. Nyní je ihned vidět, že definice se těmto obtížím vyhnula jednoduše tím, že „zakázala“ takové řady sčítat, tj. nepřiřadila jim žádný součet. Skutečně, částečné součty této řady jsou $-1, 0, -1, 0$ atd., takže jejich posloupnost má dva hromadné body $-1, 0$ a nemá tedy limitu (ovšem ani nevlastní). Řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ nemá proto součet.

Pokud by čtenář považoval takové řešení za příliš „laciné“, můžeme jej uklidnit tím, že matematici neztratili zavedením definice 8 zájem o ty řady, které nemají součet. Avšak studium takových řad daleko přesahuje rámec naší knížky.

3.3. NĚKTERÉ ZÁKLADNÍ POZNATKY O ŘADÁCH

Podobně jako je tomu u posloupností, ani u řad nezávisí jejich konvergence na změně konečného počtu členů řady. Avšak na rozdíl od posloupností, kde i hodnota limity je na takové změně nezávislá, změní řada obecně svůj součet. To je přirozené, neboť změnou třeba jediného členu řady se změní všechny částečné součty, které tento člen již obsahují, a tedy se změní i hodnota limity posloupnosti částečných součtů. Dokážeme nejprve tuto větu:

Věta 15. *Budiž p přirozené číslo. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje (má součet) právě tehdy, jestliže konverguje (má součet) řada $\sum_{n=p+1}^{\infty} a_n$.*

Poznamenejme, že druhou řadu můžeme psát také ve tvaru $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+p}$.

Důkaz. Označíme-li $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ částečné součty první řady, $t_n = a_{p+1} + \ldots + a_{p+n}$ částečné součty druhé řady, pak zřejmě platí

$$t_n = s_{p+n} - s_p \,. \tag{24}$$

Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, platí podle věty 4

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} s_{p+n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \,.$$

Protože p je pevné přirozené číslo, platí podle věty 6

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} s_{p+n} - s_p \,; \tag{25}$$

existuje tedy limita částečných součtů řady $\sum_{n=p+1}^{\infty} a_n$ a tedy tato řada konverguje; navíc je jasné, že platí

$$\sum_{n=p+1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - s_p = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - (a_1 + a_2 + \ldots + a_p) \,. \tag{26}$$

Jestliže konverguje řada $\sum_{n=p+1}^{\infty} a_n$, stačí převést v rovnici (25) člen s_p na levou stranu a opět podle věty 6 dostáváme, že konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a platí (26).

Pokud jedna z řad má součet $+\infty$ nebo $-\infty$, platí ovšem opět (24), neboť zde jde o částečné (tedy konečné) součty. Podle věty 12 pro nevlastní limity pak platí

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} s_{p+n} = \lim_{n\to\infty} s_n\,,$$

kde všechny tři limity jsou nevlastní, a to buď všechny $+\infty$, nebo všechny $-\infty$. Věta je dokázána.

Tvrzení z počátku tohoto odstavce je nyní důsledkem této věty:

Věta 16. *Jestliže řady* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *splňují rovnosti* $a_n = b_n$ *pro všechna přirozená* n *nejvýše s výjimkou konečného počtu, pak buď obě řady mají součet, nebo jej nemá žádná. Konverguje-li jedna z obou řad, konverguje i druhá.*

Důkaz. Platí-li $a_n = b_n$ pro všechna přirozená n až na konečný počet, existuje takové přirozené číslo p, že pro všechna $n \in \mathrm{N}\,[p]$ platí $a_n = b_n$. Potom však platí

$$\sum_{n=p+1}^{\infty} a_n = \sum_{n=p+1}^{\infty} b_n \tag{27}$$

a tvrzení věty 16 plynou z věty 15: má-li např. řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ součet, má součet i řada $\sum\limits_{n=p+1}^{\infty} a_n$, tedy i $\sum\limits_{n=p+1}^{\infty} b_n$ podle (27) a znovu podle věty 15 má součet i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. Ostatní případy se odvodí zcela obdobně.

Základní informaci o tom, zda daná řada může konvergovat, nám často dá tato věta:

Věta 17. *Jestliže řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, pak platí*

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0 . \tag{28}$$

Důkaz. Označíme-li jako obvykle $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, pak pro všechna $n \in \mathrm{N}$ [2] platí

$$a_n = s_n - s_{n-1} .$$

Protože řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, existuje $\lim_{n \to \infty} s_n$ a podle věty 4 platí $\lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} s_{n-1}$. Podle věty 6 existuje tedy $\lim_{n \to \infty} a_n$ a platí

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} s_n - \lim_{n \to \infty} s_{n-1} = 0 .$$

Věta je dokázána.

Z příkladu 27 vidíme, že platnost vztahu (28) není postačující k tomu, aby řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergovala. Ukážeme však, že existuje poměrně důležitý typ řad, pro něž je (28) i postačující podmínkou konvergence. (Viz větu 27, kde členy řady píšeme sice ve tvaru $(-1)^n a_n$, ale to není podstatné vzhledem k tvrzení úlohy 3 kap. 2.)

Všimněte si ještě, že věta 17 nehovoří o součtu řady, ale o její konvergenci. Skutečně, geometrická řada z příkladu 25 s kvocientem $q > 1$ ukazuje, že řada může mít součet (ovšem jedině nekonečný), i když neplatí (28).

Při výpočtu součtu řad nám často pomůže následující věta, jež je slabší, ale přesto důležitou obdobou věty 6:

Věta 18. *Jestliže řady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konvergují a* c *je libovolné číslo, platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \tag{29}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c a_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n . \tag{30}$$

(To znamená, že řady vlevo konvergují a platí napsané vztahy.)

Důkaz plyne bezprostředně z věty 6 a přenecháme jej proto čtenáři. Čtenář si také může rozmyslet, jaká tvrzení lze vyslovit, předpokládáme-li místo konvergence jen existenci součtu (třeba nekonečného).

Poznamenejme ještě, že vzorec (29) představuje jistou formu asociativního zákona pro (konvergentní) řady: místo abychom nejprve sečetli odpovídající členy obou řad vpravo a pak utvořili „nekonečný součet“ (tj. součet řady), můžeme nejdříve najít oba „nekonečné součty“ a ty pak sečíst. Čtenář se snadno přesvědčí, že vzorec (29) neplatí obecně pro nekonvergentní řady, dosadí-li třeba $a_n = 1$, $b_n = -1$ pro všechna přirozená čísla n.

Podobně vzorec (30) je jistou formou distributivního zákona: buď nejprve vynásobíme každý „sčítanec“ (člen řady) číslem c a pak sečteme, nebo nejdříve sečteme a pak celý součet vynásobíme číslem c.

8.4. KONVERGENCE ŘAD S NEZÁPORNÝMI ČLENY

Významné místo mezi řadami zaujímají ty, jejichž všechny členy mají totéž znaménko (přitom některé členy mohou být rovny nule). To znamená, že platí buď $a_n \geq 0$ pro všechna $n \in \mathrm{N}$, nebo $a_n \leq 0$ pro všechna $n \in \mathrm{N}$. Protože podle věty 18 platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-a_n) = -\sum_{n=1}^{\infty} a_n \,,$$

jakmile jedna z napsaných řad konverguje (stačí dokonce, má-li součet — třeba i $+\infty$ nebo $-\infty$), stačí si zvolit jednu z obou nerovností, např. $a_n \geq 0$. Dosažené výsledky se snadno přenesou na případ řad, jejichž členy splňují nerovnost $a_n \leq 0$. Řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, jejíž členy splňují nerovnost $a_n \geq 0$ pro všechna $n \in \mathrm{N}$, budeme přirozeně nazývat řada s nezápornými členy.

Důvody, proč se těmito řadami budeme zvláště zabývat, jsou v podstatě dva. První z nich je ten, že posloupnost částečných součtů takové řady je monotónní (neklesající). Mohou tedy nastat dva případy: buď je tato posloupnost ohraničená a tedy má podle věty 8 (vlastní) limitu, takže řada konverguje, nebo je neohraničená a pak podle úlohy 8, kap. 2, má nevlastní limitu $+\infty$, takže řada má součet $+\infty$. Tento výsledek můžeme vyslovit jako větu:

Věta 19. *Řada s nezápornými členy má vždy součet; konverguje právě tehdy, když posloupnost jejích částečných součtů je ohraničená.*

Druhý důvod je ten, že každé řadě $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (jejíž členy mohou mít různá znaménka) můžeme přiřadit „řadu absolutních hodnot“ $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, což je řada s nezápornými členy. Z jejího chování můžeme často soudit na chování původní řady (srov. odst. 4.1).

Téměř samozřejmým důsledkem věty 19 je tzv. srovnávací kritérium, které nám umožňuje rozhodnout o konvergenci dané řady na základě znalosti chování jiné řady (které se často říká majorantní řada):

Věta 20. (Srovnávací kritérium.) *Nechť platí* $0 \leq a_n \leq \leq b_n$ *pro všechna* $n \in \mathrm{N}$. *Jestliže řada* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konverguje, konverguje i řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n . \tag{31}$$

Důkaz. Za předpokladů věty platí pro každé přirozené číslo n nerovnost

$$0 \leq a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leq b_1 + b_2 + \ldots + b_n .$$

Protože podle věty 19 je posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ohraničená, existuje číslo K takové, že $|b_1 + + b_2 + \ldots + b_n| \leq K$ pro všechna $n \in \mathrm{N}$ a tedy zřejmě platí také $|a_1 + a_2 + \ldots + a_n| \leq K$ pro všechna $n \in \mathrm{N}$. Opět podle věty 19 dostáváme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní. Nerovnost (31) plyne z úlohy 1, kap. 2.

Příklad 29. Harmonická řada (23) je zvláštním případem řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^c}, \tag{32}$$

kde c je reálné číslo. Zřejmě je $n^c \geq 0$ pro každé $n \in \mathrm{N}$, takže jde o řadu s nezápornými členy. Důležitý je případ $c = 2$, tj. řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Dokážeme, že tato řada je konvergentní, použitím srovnávacího kritéria, v němž položíme $b_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$. Platí $0 \leq \dfrac{1}{(n+1)^2} \leq \dfrac{1}{n(n+1)}$ pro všechna přirozená n. Protože řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$ konverguje podle příkladu 26, konverguje podle věty 20 i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)^2}$. Zřejmě však platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

(snadno se přesvědčíte, že obě řady mají tytéž částečné součty) a podle věty 15 konverguje také řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$. (Přesnou hodnotu jejího součtu není tak snadné najít: ukazuje se, že je rovna $\dfrac{1}{4}\pi$.)

Je-li nyní $c > 2$, můžeme na řadu (32) použít srovnávací kritérium, v němž položíme $b_n = \frac{1}{n^2}$, neboť jistě platí $n^c \geq n^2$ a tedy $0 \leq \frac{1}{n^c} \leq \frac{1}{n^2}$ pro všechna $n \in \mathrm{N}$. Je tedy řada (32) konvergentní, jakmile $c \geq 2$.

Srovnávací kritérium nám umožňuje obdržet i negativní výsledky. Nechť je $c < 1$. Pak platí $0 \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^c}$. Kdyby řada (32) (při $c < 1$!) konvergovala, plynulo by ze srovnávacího kritéria, že harmonická řada (23) rovněž konverguje. To je však ve sporu s výsledkem příkladu 27. Tedy řada (32) při $c \leq 1$ diverguje. K úplné diskusi řady (32) nám chybí případ $1 < c < 2$. Ten vyšetříme později (viz příklad 37).

Ze srovnávacího kritéria můžeme odvozovat speciálnější věty tím, že místo řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ vezmeme nějakou konkrétní řadu, jejíž chování je nám známé. Nejčastěji užívaným výsledkem je tzv. Cauchyovo kritérium, v němž použijeme geometrické řady.

Věta 21. (Cauchyovo kritérium.) *Buď dána posloupnost $\{a_n\}_1^\infty$. Nechť existuje číslo q takové, že $q < 1$, a přirozené číslo k takové, že pro všechna $n \in \mathrm{N}\ [k]$ platí $a_n \geq 0$, $\sqrt[n]{a_n} \leq q$. Pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní.*

Důkaz. Položíme-li $q^n = b_n$, plyne ihned z věty 20, že řada $\sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n$ je konvergentní. Z věty 15 pak dostáváme, že také řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní.

Příklad 30. Dokážeme, že je-li x jakékoliv nezáporné číslo, je řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$ konvergentní. Je totiž

$$\sqrt[n]{\left(\frac{x}{n}\right)^n} = \frac{x}{n} \leq \frac{1}{2}$$

pro všechna přirozená čísla $n \geq 2x$. Položíme-li $q = \frac{1}{2}$, je konvergence řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$ důsledkem věty 21, a kde při daném x položíme $k = [2x] + 1$.

Příklad 31. Pro harmonickou řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ platí $\sqrt[n]{\frac{1}{n}} < 1$ pro všechna přirozená čísla n. Jak víme (srov. příklad 27), harmonická řada není konvergentní. Ve větě 21 tedy nemůžeme obecně položit $q = 1$, dokonce ani tehdy, kdybychom neostrou nerovnost $\sqrt[n]{a_n} \leq q$ nahradili ostrou nerovností $\sqrt[n]{a_n} < 1$.

Ze srovnávacího kritéria dostaneme snadno také tzv. podílové kritérium.

Věta 22. (Podílové kritérium.) *Nechť* $0 < a_n$, $0 < b_n$,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

pro všechna přirozená čísla n *a nechť řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *konverguje. Pak konverguje i řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Důkaz. Uvědomme si, že všechny členy obou řad jsou kladná čísla, takže všechny zlomky, které budeme psát, mají smysl (a jsou to kladná čísla). Je-li n přirozené číslo, platí

$$\frac{a_n}{a_1} = \frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_2}{a_1} \leq \frac{b_n}{b_{n-1}} \frac{b_{n-1}}{b_{n-2}} \cdots \frac{b_2}{b_1} = \frac{b_n}{b_1}$$

a tedy

$$a_n \leq \frac{a_1}{b_1} b_n \, .$$

Konverguje-li řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, konverguje podle věty 18 i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_1}{b_1} b_n$ a podle srovnávacího kritéria (věta 20) konverguje i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

I v této větě můžeme položit $b_n = q^n$, tj. použít ke srovnání geometrickou řadu. Dostaneme tzv. d'Alembertovo kritérium:

Věta 23. (D'Alembertovo kritérium.) *Buď dána posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Nechť existuje číslo $q < 1$ a přirozené číslo k takové, že pro všechna $n \in \mathrm{N}[k]$ platí $a_n > 0$, $0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$. Pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní.*

Důkaz. Protože q je podíl dvou po sobě jdoucích členů geometrické posloupnosti (s kvocientem q, $0 < q < 1$), plyne z věty 22 konvergence řady $\sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n$ a z věty 15 konvergence řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Příklad 32. Použijeme větu 23 na řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, kde x je libovolné kladné číslo. Položíme-li $\frac{x^n}{n!} = a_n$, je

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} = \frac{x}{n+1}.$$

Pro všechna $n \geq x$ je $\frac{x}{n+1} \leq \frac{x}{x+1}$, můžeme tedy položit ve větě 23 $q = \frac{x}{x+1} < 1$ a dostáváme, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ konverguje pro všechna kladná x.

Příklad 33. Konvergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n$, kde x je dané kladné číslo, bychom mohli opět vyšetřit pomocí d'Alembertova kritéria. Vhodnější je však odvodit tzv. limitní d'Alembertovo kritérium, které je užitečné i v jiných případech.

Věta 24. (D'Alembertovo limitní kritérium.) *Buď* $a_n > 0$ *pro všechna* n *a nechť platí*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1.$$

Pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje.*

Důkaz. Položme $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a < 1$. Pak je $\frac{1}{2}(1 - a) > 0$ a tedy existuje takové přirozené číslo n_0, že pro všechna $n \in \mathrm{N}[n_0]$ platí

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq a + \frac{1}{2}(1 - a) = \frac{1}{2}(a + 1) < 1 .$$

Podle d'Alembertova kritéria (věta 23) tedy řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

Vrátíme-li se k příkl. 33, vidíme, že

$$\frac{(n+1)x^{n+1}}{nx^n} = \frac{n+1}{n} x \to x .$$

Je-li $x < 1$, řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n$ konverguje. Pro $x \geq 1$ ovšem nekonverguje (např. podle věty 17).

Zkuste pro srovnání řešit příklad 33 přímo pomocí d'Alembertova kritéria (věta 23). Uvidíte, že postup je složitější, protože číslo q musíte volit v závislosti na čísle x.

Podobně jako limitní d'Alembertovo kritérium můžeme vyslovit i tzv. limitní Cauchyovo kritérium:

Věta 25. (Cauchyovo limitní kritérium.) *Buď $a_n \geq 0$ pro všechna přirozená n. Nechť platí*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 .$$

Pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

Důkaz je obdobný jako pro větu 24. Položíme-li $a = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$, pak je $\frac{1}{2}(1 - a) > 0$ a tedy existuje takové n_0, že pro všechna $n \in N\,[n_0]$ platí $|\sqrt[n]{a_n} - a| \leq \leq \frac{1}{2}(1 - a)$, tj. $0 \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \frac{1}{2}(1 + a) = q < 1$. Z Cauchyova kritéria (věta 21) plyne konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Úlohy

Píšeme všude stručně Σa_n místo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ apod. Abychom mohli v některých úlohách hovořit i o nekonvergentních řadách, definujme $c \leq +\infty$, $-\infty \leq c$ pro libovolné reálné číslo c i pro $c = +\infty$, $c = -\infty$.

1. Dokažte: Je-li $a_n \leq b_n$ pro všechna $n \in N$ a mají-li obě řady Σa_n, Σb_n součet, platí $\Sigma a_n \leq \Sigma b_n$.

2.* Dokažte: Je-li $a_n \leq b_n \leq c_n$ pro všechna $n \in N$ a řady Σa_n, Σc_n konvergují, konverguje i řada Σb_n a platí $\Sigma a_n \leq \Sigma b_n \leq \leq \Sigma c_n$.
Ukažte na příkladu, že tvrzení neplatí, nahradíme-li slovo „konverguje" v obou případech slovy „má součet". Přesto je možné vyslovit a dokázat podobnou větu pro nekonvergentní řady, které mají součet. Pokuste se o to!

3. Dokažte: Nechť platí $0 \leq a_n \leq b_n$ pro všechna $n \in N$. Jestliže řada Σa_n nekonverguje, pak nekonverguje ani řada Σb_n.

4. Dokažte: Nechť $0 < a_n$, $0 < b_n$, $a_{n+1}/a_n \leq b_{n+1}/b_n$ pro

všechna $n \in N$. Jestliže řada Σa_n nekonverguje, pak nekonverguje ani řada Σb_n.

5. Dokažte: Nechť $\{a_n\}_1^\infty$ je posloupnost nezáporných čísel a nechť pro nekonečně mnoho čísel $n \in N$ platí $a_{n+1}/a_n \geq 1$. Pak řada Σa_n nekonverguje.

6. Dokažte: Nechť $\{a_n\}_1^\infty$ je posloupnost kladných čísel a nechť pro nekonečně mnoho čísel $n \in N$ platí $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$. Pak řada Σa_n nekonverguje.

7.* Formulujte a dokažte srovnávací kritérium (obdobné větě 20) pro řady s nekladnými členy.

8. Dokažte (s použitím věty 7): Řada Σa_n konverguje právě tehdy, jestliže ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje takové přirozené číslo n_0, že pro všechna čísla $p \in N\ [n_0]$, $q \in N\ [n_0]$ splňující $p < q$ platí $\left| \sum_{n=p+1}^{q} a_n \right| < \varepsilon$. (Bolzanova-Cauchyova podmínka pro řady.)

4. kapitola

ABSOLUTNÍ A NEABSOLUTNÍ KONVERGENCE

4.1. ÚVOD A DEFINICE

V minulé kapitole jsme odvodili několik kritérií (postačujících podmínek) konvergence řad. Přitom šlo ve všech případech o řady s nezápornými členy. V podstatě stejných kritérií můžeme použít na řady s nekladnými či zápornými členy (srov. úlohu 7, kap. 3). Jak však postupovat tehdy, jestliže se znaménka členů řady střídají, ať již pravidelně nebo nepravidelně?

Je-li jen konečný počet členů řady záporný, můžeme opět použít výsledků předešlé kapitoly, neboť změnou konečného počtu členů se vlastnosti řady, týkající se konvergence, nezmění. (Srov. větu 15. Hodnota součtu konvergentní řady se ovšem v takovém případě změnit může.) Některé věty (srov. věty 21, 23) jsme již formulovali tak, že jejich předpoklady požadovaly splnění nerovnosti $a_n \geq 0$ či $a_n > 0$ teprve od nějakého přirozeného čísla k. Podobně můžeme postupovat, je-li jen konečný počet členů řady kladný.

Má-li však daná řada nekonečně mnoho členů kladných i nekonečně mnoho členů záporných, pak nám dosavadní rady nejsou nic platné. Ale co kdybychom prostě všechny záporné členy nahradili jejich absolutními hodnotami? Dostali bychom řadu s nezápornými členy, jejíž vlastnosti by snad mohly nějak souviset s vlastnostmi původní řady. Ukážeme, že často tomu tak skutečně je.

Abychom zpřesnili naši úvahu, zavedeme nový pojem:

Definice 9. Říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje absolutně*, jestliže konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, ale řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ nekonverguje, říkáme také, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje neabsolutně.**)

Především je jasné, že každá konvergentní řada s nezápornými členy konverguje absolutně. Dále definice přímo říká, že neabsolutně konvergentní řada je konvergentní. Obdobné tvrzení pro *absolutně* konvergentní řadu však již vyžaduje jistou pozornost, neboť definice je výslovně neobsahuje. Vše je však v pořádku, neboť platí následující věta:

Věta 26. *Absolutně konvergentní řada je konvergentní.*

Důkaz. Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konverguje, tj. řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje. Položme

$$b_n = \begin{cases} a_n & \text{je-li } a_n \geq 0, \\ 0 & \text{je-li } a_n < 0, \end{cases}$$

$$c_n = \begin{cases} 0 & \text{je-li } a_n \geq 0, \\ -a_n & \text{je-li } a_n < 0. \end{cases}$$

*) Používáme ovšem i názvů *(ne)absolutní konvergence*, *(ne)absolutně konvergentní řada* apod. ve zřejmém významu.

Pak platí $0 \leq b_n \leq |a_n|$, $0 \leq c_n \leq |a_n|$ pro všechna přirozená čísla n a podle věty 20 obě řady $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergují. Podle věty 18 konverguje tedy i řada $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - c_n)$, ale to není nic jiného než řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, neboť pro všechna přirozená čísla n platí $a_n = b_n - c_n$ (přesvědčte se!). Tím jsme dokázali větu 26 a navíc rovnost

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n - \sum_{n=1}^{\infty} c_n ,$$

která rovněž plyne z věty 18.

Poznámka. Větu 26 jsme mohli dokázat snad ještě stručněji pomocí Bolzanovy-Cauchyovy podmínky (věta 7) a trojúhelníkové nerovnosti. Srov. úlohu 8, kap. 3.

Věta 26 ukazuje, že při vyšetřování dané řady můžeme místo ní zkoumat „řadu absolutních hodnot", což je jistě řada s nezápornými členy. Zjistíme-li její konvergenci (pomocí některého z kritérií odst. 3.4), máme zaručenu i konvergenci původní řady.

Nyní je načase ukázat, že definice 9 není zbytečná. Jinými slovy, ukážeme, že existují neabsolutně konvergentní řady.

Příklad 34. Ukážeme, že řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \tag{33}$$

konverguje. Vyjádříme zvlášť sudé a zvlášť liché částečné součty s_n této řady:

$$s_{2n} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k(2k-1)},$$

$$s_{2n-1} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right) + \frac{1}{2n} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k(2k-1)} + \frac{1}{2n}.$$

Protože zřejmě platí $0 \leq \frac{1}{2k(2k-1)} \leq \frac{1}{k^2}$ pro všechna přirozená čísla k, je řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k(2k-1)}$ konvergentní podle věty 20. Označíme-li její součet s, platí

$$s = \lim_{n\to\infty} s_{2n} = \lim_{n\to\infty} s_{2n-1} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = \lim_{n\to\infty} s_{2n-1} \qquad (34)$$

podle věty 6. (Od tohoto místa již důkaz nezávisí na konkrétním tvaru řady (33), ale jen na tom, že platí (34). To použijeme za chvíli v důkazu věty 27.)

Buď nyní $\varepsilon > 0$. Vzhledem ke (34) existují taková přirozená čísla n_1, n_2, že platí

$$|s_{2n} - s| < \varepsilon$$

pro všechna n taková, že $2n \in \mathrm{N}\,[n_1]$,

$$|s_{2n-1} - s| < \varepsilon$$

pro všechna n taková, že $2n - 1 \in \mathrm{N}\,[n_2]$.

Označme $n_0 = \max(n_1, n_2)$ a zvolme přirozené číslo m takové, že $m \in \mathrm{N}\,[n_0]$. Pak je buď m sudé, tedy $m = 2n \in \mathrm{N}\,[n_0] \subset \mathrm{N}\,[n_1]$, nebo je m liché, tedy $m = 2n - 1 \in \mathrm{N}\,[n_0] \subset \mathrm{N}\,[n_2]$. V obou případech dostáváme

$$|s_m - s| < \varepsilon .$$

Dokázali jsme, že řada (33) konverguje. Protože řada absolutních hodnot, příslušná k řadě (33), je harmonická řada, která nekonverguje (srov. příkl. 27), je řada (33) příkladem neabsolutně konvergentní řady.

4.2. ŘADY, JEJICHŽ ČLENY NEBO ABSOLUTNÍ HODNOTY JEJICH ČLENŮ KONVERGUJÍ MONOTÓNNĚ K NULE

Řady podobného typu, jaký jsme právě zkoumali v příkladu 34, jsou nejčastějším případem řad, jejichž členy mají různá znaménka. Jsou to řady tvaru $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ nebo $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$, kde $a_n \geq 0$ (příp. $a_n > 0$) pro všechna přirozená čísla n. Říkáme jim *alternující řady*. Jestliže posloupnost $\{a_n\}_1^{\infty}$ je navíc monotónní (což v příkl. 34 bylo), platí velmi jednoduché kritérium konvergence, které je dokonce i nutnou podmínkou:

Věta 27. *Je-li* $a_n \geq a_{n+1} \geq 0$ *pro všechna přirozená čísla* n, *pak řada*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n \tag{35}$$

konverguje právě tehdy, je-li

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0 . \tag{36}$$

Důkaz. Jestliže řada (35) konverguje, musí ovšem platit (36) podle věty 17 a úlohy 3. ke kap 2.

Nechť tedy platí (36). Obdobně jako v příkladu 34 dostaneme pro částečné součty s_n řady (35) rovnost

$$s_{2n} = s_{2n-1} + a_{2n} \tag{37}$$

pro všechna přirozená čísla n. Protože můžeme psát

$$s_{2n} = s_{2n+2} - (a_{2n+1} - a_{2n+2}) \leq s_{2n+2} =$$
$$= a_1 - (a_2 - a_3) - \ldots - (a_{2n} - a_{2n+1}) - a_{2n+2} \leq a_1 ,$$

je posloupnost $\{s_{2n}\}_1^\infty$ monotónní ohraničená posloupnost a tedy má podle věty 8 limitu, kterou označíme s. Podle (36), (37) a věty 6 platí tedy rovnost obdobná rovnosti (34) z příkladu 34:

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n} = \lim_{n\to\infty} s_{2n-1} = s .$$

Odtud již úplně stejně jako v příkladu 34 odvodíme, že řada (35) konverguje.

Ukážeme na příkladu, že předpoklad monotonie ve větě 27 je podstatný.

Příklad 35. Pro všechna přirozená čísla n položme

$$a_{2n-1} = \frac{1}{2n-1}, \quad a_{2n} = \frac{1}{(2n)^2} . \tag{38}$$

Pak platí

$$a_{2n-1} - a_{2n} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n^2} = \frac{4n^2 - 2n + 1}{4n^2(2n-1)} >$$
$$> \frac{4n^2 - 4n + 1}{4n^2(2n-1)} = \frac{(2n-1)^2}{4n^2(2n-1)} =$$
$$= \frac{2n-1}{4n^2} \geq \frac{n}{4n^2} = \frac{1}{4n}$$

pro všechna přirozená n, takže pro sudé částečné součty s_{2n} alternující řady (35) máme odhad

$$s_{2n} = \sum_{k=1}^{n} (a_{2k-1} - a_{2k}) > \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\,.$$

Protože podle příkladu 27 harmonická řada nekonverguje, je posloupnost jejích částečných součtů neohraničená, tedy je neohraničená i posloupnost $\{s_{2n}\}$ a řada (35), jejíž členy jsou dány vzorci (38), nekonverguje.

Výsledek příkladu 35 není ovšem ve sporu s větou 27. Snadno se přesvědčíte, že sice platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, ale $\{a_n\}_1^\infty$ není monotónní posloupnost. Podstatné bylo to, že záporné (tj. sudé) členy řady byly v absolutní hodnotě příliš malé proti kladným členům.

Příklad 36. Je-li $c > 0$, pak řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^c} \tag{39}$$

konverguje podle věty 27, neboť potom je $n^c < (n+1)^c$ čili $n^{-c} > (n+1)^{-c}$. Výsledky příkl. 27 a 29 nám umožňují vyslovit podrobnější výsledek: pro $0 < c \leq 1$ konverguje řada (39) neabsolutně, pro $c \geq 2$ konverguje absolutně.

Studium řad typu (39) a (32) uzavřeme v příkladu 37. K tomu cíli odvodíme ještě jedno užitečné kritérium konvergence, nazývané Raabeovo. I když se týká řad s nezápornými členy, má s předchozí větou společný předpoklad, že členy řady konvergují k nule monotónně.

Věta 28. (**Raabeovo kritérium.**) *Platí-li*

$$a_n \geq a_{n+1} \geq 0 \tag{40}$$

pro všechna přirozená čísla n, pak řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

konverguje právě tehdy, když konverguje řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} . \tag{41}$$

Důkaz. Označme částečné součty řad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, (41) po řadě s_n, t_n. Pak z nerovnosti (40) snadno dostaneme

$$\varepsilon_{2^n} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{2^n} \geq a_1 + a_2 + a_4 + a_4 + \\ + \ldots + \underbrace{a_{2^n} + \ldots + a_{2^n}}_{2^{n-1}\text{-krát}} = a_1 + a_2 + 2a_4 + \\ + \ldots + 2^{n-1} a_{2^n} = a_1 + \frac{1}{2} t_n ,$$

$$s_{2^n} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{2^n} \leq a_1 + a_2 + a_2 + \\ + \ldots + \underbrace{a_{2^{n-1}} + \ldots + a_{2^{n-1}}}_{2^{n-1}\text{-krát}} = a_1 + 2a_2 + \\ + \ldots + 2^{n-1} a_{2^{n-1}} = a_1 + t_{n-1} .$$

Odtud plyne, že posloupnost částečných součtů $\{s_{2^n}\}_1^{\infty}$ je ohraničená právě tehdy, když je ohraničená posloupnost $\{t_n\}_1^{\infty}$. Protože obě tyto posloupnosti jsou monotónní (neklesající, protože $a_n \geq 0$), znamená to, že buď obě konvergují, nebo žádná z nich nekonverguje (srov. větu 8). To už je téměř tvrzení věty 28, až na to, že místo $\lim_{n\to\infty} s_{2^n}$ bychom potřebovali mít $\lim_{n\to\infty} s_n$. Avšak tyto limity se rovnají (ať již jsou vlastní nebo obě $+\infty$), neboť jde o monotónní posloupnosti (srov. větu 8′, 9). Tím je věta 28 úplně dokázána.

Příklad 37. Dokončíme rozbor řad (32) a (39), tj. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^c}$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^c}$, vyšetřením případu, kdy $1 < c < 2$. V tomto případě splňuje řada (32) předpoklady věty 28. Přitom je $2^n a_{2^n} = 2^n/2^{nc} = 2^{n(1-c)} = 2^{n\gamma}$, kde $\gamma < 0$, takže $2^\gamma < 1$. Řada (41) je tedy v tomto případě geometrická řada s kvocientem $q = 2^\gamma$, $0 < q < 1$, tedy řada konvergentní.

Závěr. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^c}$ konverguje pro $c > 1$, nekonverguje (ale má součet $+\infty$) pro $c \leq 1$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^c}$ konverguje absolutně pro $c > 1$, neabsolutně pro $0 < c \leq 1$, nemá součet pro $c \leq 0$.

4.3. ŘADY TYPU $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$

Dost často se vyskytují řady, u nichž se přímo nabízí možnost rozložit jejich členy na součin dvou či více jednodušších činitelů. Otázkou je, kdy je takový rozklad výhodný a jaký je vztah mezi chováním původní řady, např.

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \,,$$

kde $c_n = a_n b_n$ pro všechna přirozená n, a řad

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \ \sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$

popřípadě posloupností $\{a_n\}_1^\infty$, $\{b_n\}_1^\infty$. Ke zkoumání této otázky použijeme metody tzv. *Abelovy parciální sumace.* Označím-li částečné součty řad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ po řadě s_n, u_n, v_n, platí $a_n = u_n - u_{n-1}$, $b_n = v_n - v_{n-1}$. (Aby tyto vzorce platily pro všechna přirozená n, položme pro pohodlí $u_0 = v_0 = s_0 = 0$.) Můžeme tedy psát

$$\begin{aligned} s_n &= u_1 b_1 + (u_2 - u_1) b_2 + \ldots + (u_n - u_{n-1}) b_n = \\ &= u_1(b_1 - b_2) + u_2(b_2 - b_3) + \\ &+ \ldots + u_{n-1}(b_{n-1} - b_n) + u_n b_n . \end{aligned} \tag{42}$$

Odtud odvodíme pomocnou větu.

Pomocná věta. *Jestliže existuje takové číslo K, že platí $|u_n| \leq K$ pro všechna $n \in \mathrm{N}$ a jestliže posloupnost $\{b_n\}_1^\infty$ je monotónní, pak platí*

$$|s_n| \leq K(|b_1| + 2|b_n|) .$$

Důkaz. Protože posloupnost $\{b_n\}_1^\infty$ je monotónní, mají ve vzorci (42) všechny rozdíly $b_i - b_{i+1}$ stejné znaménko (buď jsou všechny nezáporné, nebo všechny nekladné). Proto platí

$$\begin{aligned} |s_n| &\leq \sum_{i=1}^{n-1} |u_i(b_i - b_{i+1})| + |u_n| . |b_n| \leq K \sum_{i=1}^{n-1} |b_i - b_{i+1}| + \\ &+ K|b_n| = K \left| \sum_{i=1}^{n-1} (b_i - b_{i+1}) \right| + K|b_n| = \\ &= K(|b_1 - b_n| + |b_n|) \leq K(|b_1| + 2|b_n|) . \end{aligned}$$

Důkaz je hotov.

Odvodíme nyní dvě kritéria konvergence pro řady, které lze psát ve tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n . \tag{43}$$

První z nich pramení z jednoduché úvahy:

Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} c a_n$, kde c je reálné číslo. Na první pohled se zdá, že kdybychom uvažovali místo čísla c nějaká čísla b_n taková, že $|b_n| \leq c$ (tj. ohraničenou posloupnost), platil by obdobný závěr i pro řadu (43). Není tomu přesně tak, neboť položíme-li $b_n = (-1)^n$, $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, řada (43) nekonverguje. Přidáme-li však předpoklad, že posloupnost $\{b_n\}_1^{\infty}$ je monotónní, můžeme vyslovit a dokázat první větu:

Věta 29. (Abelovo kritérium.) *Nechť řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje a nechť* $\{b_n\}_1^{\infty}$ *je monotónní ohraničená posloupnost. Pak konverguje i řada* (43).

Důkaz. Stačí dokázat, že posloupnost částečných součtů s_n řady (43) splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku (srov. větu 7 a úlohu 8 kap. 3).

Buď dáno číslo $\eta > 0$. Protože řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, splňuje posloupnost jejích částečných součtů u_n Bolzanovu-Cauchyovu podmínku. Existuje tedy takové přirozené číslo n_0, že pro všechna $k \in \mathrm{N}\,[n_0 + 1]$ platí

$$|u_k - u_{n_0}| = \left| \sum_{n=n_0+1}^{k} a_n \right| < \eta .$$

Označíme-li $a'_n = a_{n_0+n}$, $b'_n = b_{n_0+n}$, můžeme tuto nerovnost napsat ve tvaru

$$|a'_1 + a'_2 + \ldots + a'_n| < \eta \; ; \tag{44}$$

přitom tato nerovnost platí pro libovolné přirozené číslo n. Pro $p \in \mathrm{N}\,[n_0 + 1]$, $q \in \mathrm{N}\,[n_0 + 1]$ platí

$$|s_p - s_q| = \left|\sum_{n=n_0+1}^{p} a_n b_n - \sum_{n=n_0+1}^{q} a_n b_n\right| \leq \left|\sum_{n=n_0+1}^{p} a_n b_n\right| + \\ + \left|\sum_{n=n_0+1}^{q} a_n b_n\right| = \left|\sum_{n=1}^{p-n_0} a'_n b'_n\right| + \left|\sum_{n=1}^{q-n_0} a'_n b'_n\right| . \tag{45}$$

Použijeme nyní pomocnou větu (str. 99) na řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a'_n b'_n$. Označíme-li její částečné součty s'_n a částečné součty řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a'_n$ označíme u'_n, pak nerovnost (44) lze zapsat ve tvaru $|u'_n| < \eta$ a z předpokladu monotonie posloupnosti $\{b_n\}_1^\infty$ plyne monotonie posloupnosti $\{b'_n\}_1^\infty$. Platí tedy (viz (45))

$$|s_p - s_q| \leq \eta(|b'_1| + 2|b'_{p-n_0}| + |b'_1| + 2|b'_{q-n_0}|) = \\ = \eta(2|b_{n_0+1}| + 2|b_p| + 2|b_q|) .$$

Protože posloupnost $\{b_n\}_1^\infty$ je ohraničená, existuje číslo L takové, že $|b_n| \leq L$ pro všechna $n \in \mathrm{N}$. Proto platí

$$|s_p - s_q| \leq 6L\eta .$$

Budiž nyní dáno $\varepsilon > 0$. Položíme-li $\eta = \dfrac{\varepsilon}{7L}$ a $n_1 = n_0 + 1$, kde n_0 bylo zvoleno na začátku důkazu, pak pro $p \in \mathrm{N}\,[n_1]$, $q \in \mathrm{N}\,[n_1]$ platí

$$|s_p - s_q| \leq \frac{6}{7}\,\varepsilon < \varepsilon .$$

(Je-li $L = 0$, je $b_n = 0$ pro $n \in \mathrm{N}$ a vše je triviální.)

Posloupnost částečných součtů s_n řady (43) splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku a tedy konverguje. Důkaz věty 29 je skončen.

Následující věta je opět důsledkem pomocné věty (str. 99).

Věta 30. (Dirichletovo kritérium.) *Nechť posloupnost částečných součtů u_n řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je ohraničená a nechť posloupnost $\{b_n\}_1^{\infty}$ je monotónní, $\lim_{n \to \infty} b_n = 0$. Pak řada* (43) *konverguje.*

Důkaz. Dokážeme opět, že posloupnost částečných součtů s_n řady (43) splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku. Nechť platí podle předpokladu $|u_n| \leq K$ pro všechna $n \in \mathrm{N}$. Definujme a'_n, b'_n, s'_n, u'_n jako v důkazu předešlé věty. Potom pro každé $n \in \mathrm{N}$ a každé $n_0 \in \mathrm{N}$ platí

$$|u'_n| = \left|\sum_{k=1}^{n} a'_k\right| = \left|\sum_{k=n_0+1}^{n+n_0} a_k\right| = |u_{n+n_0} - u_{n_0}| \leq 2K$$

a podle pomocné věty, použité na řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n b'_n$, platí

$$s'_n \leq 2K(|b'_1| + 2|b'_n|) = 2K(|b_{n_0+1}| + 2|b_{n+n_0}|)\,.$$

Současně však platí

$$|s_p - s_q| \leq |s_p - s_{n_0}| + |s_q - s_{n_0}| =$$
$$= \left|\sum_{n=n_0+1}^{p} a_n b_n\right| + \left|\sum_{n=n_0+1}^{q} a_n b_n\right| = |s'_{p-n_0}| +$$
$$+ |s'_{q-n_0}| \leq 2K(2|b_{n_0+1}| + 2|b_p| + 2|b_q|)\,,$$

pokud $p \in \mathrm{N}\,[n_0 + 1]$, $q \in \mathrm{N}\,[n_0 + 1]$.

Budiž dáno $\varepsilon > 0$. Podle předpokladů věty je $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, takže existuje $n_0 \in N$ takové, že pro $n \in N[n_0]$ je $|b_n| < \frac{\varepsilon}{13K}$ (případ $K = 0$ je stejně triviální jako v předešlé větě). Potom však platí

$$|s_p - s_q| \leq \frac{12K\varepsilon}{13K} < \varepsilon$$

pro všechna $p \in N[n_0 + 1]$, $q \in N[n_0 + 1]$. Posloupnost $\{s_n\}_1^\infty$ tedy konverguje, čímž je věta 30 dokázána.

Jestliže ve větách 29, 30 předpokládáme absolutní konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (popřípadě ohraničenost posloupnosti částečných součtů absolutních hodnot, což je ovšem totéž), jsou oba důkazy mnohem snazší a vedou k důkazu absolutní konvergence řady (43). Ale hlavní význam obou vět je právě v jejich použití na neabsolutně konvergentní řady. Např. v Dirichletově kritériu můžeme položit $a_n = (-1)^n$ a dostaneme kritérium konvergence alternující řady (srov. větu 27).

Všimněte si konečně, že jsou-li splněny předpoklady Abelova kritéria, má posloupnost $\{b_n\}_1^\infty$ limitu: $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ (srov. větu 8). Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, takže posloupnost jejích částečných součtů je nutně ohraničená. Jestliže místo posloupnosti $\{b_n\}_1^\infty$ uvažujeme posloupnost $\{b_n - b\}_1^\infty$, můžeme použít Dirichletova kritéria, z kterého plyne, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(b_n - b)$ konverguje.

Protože $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje podle předpokladů Abelova kritéria, platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(b_n - b) + b \sum_{n=1}^{\infty} a_n .$$

Abelovo kritérium je tedy bezprostředním důsledkem Dirichletova kritéria.

Příklad 38. Úplnou indukcí snadno odvodíte vzorec

$$\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{1}{2}\left[\cos \frac{1}{2} x - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) x\right] \Big/ \sin \frac{1}{2} x ,$$

který platí pro všechna $x \neq 2c\pi$ (c celé číslo). Je tedy $\left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| \leq \dfrac{1}{\left|\sin \frac{1}{2} x\right|}$ pro všechna $n \in \mathrm{N}$ a $x \neq 2c\pi$ (c celé číslo). Podle věty 30 konverguje např. řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nx$$

pro $x \neq 2c\pi$; pro $x = 2c\pi$ ovšem konverguje také, takže konverguje pro libovolné číslo x.

Příklad 39. Řady tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n}{n^c} , \tag{46}$$

kde c je reálné číslo, se nazývají Dirichletovy. Věta 29 dává tento výsledek:

Konverguje-li řada (46) pro $c = \gamma$, pak konverguje pro každou hodnotu $c > \gamma$.

Mohu totiž psát

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n}{n^c} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n}{n^\gamma} n^{\gamma-c}$$

a položit v Dirichletově nebo v Abelově kritériu $a_n = \frac{h_n}{n^\gamma}$, $b_n = n^{\gamma-c}$. Tento výsledek není tak samozřejmý, jak se zdá na první pohled: konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} (h_n/g_n), g_n > 0$ pro všechna $n \in \mathrm{N}$ a platí-li $g_n' \geq g_n$ pro všechna $n \in \mathrm{N}$, nemusí konvergovat řada $\sum_{n=1}^{\infty} (h_n/g_n')$. Položte např. $h_n = (-1)^{n+1}$, $g_n = n$, $g_n' = n$ pro n liché, $g_n' = n^2$ pro n sudé. Proč v tomto případě nemůžeme použít ani Dirichletova, ani Abelova kritéria?

4.4. ASOCIATIVNÍ A KOMUTATIVNÍ ZÁKON PRO ŘADY

V úvodu třetí kapitoly jsme upozornili na to, že vlastnosti základní početní operace sčítání nelze bezprostředně přenášet na „sčítání nekonečně mnoha čísel". Vzpomeňte si, že pokusy definovat součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ byly neúspěšné právě proto, že „uzávorkování" nebo „přerovnání" sčítanců vedlo k paradoxním výsledkům. Definice součtu řady, jak jsme ji podali v odst. 3.2, odstranila jednu z uvedených obtíží: Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ má součet (buď konečný, nebo $+\infty$, nebo $-\infty$), pak mohu její členy libovolně „uzávorkovat". Přesné tvrzení vyslovíme v následující větě, kterou můžeme nazvat asociativním zákonem pro řady.

Věta 31. *Nechť řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *má součet a nechť* $\{k_n\}_1^{\infty}$ *je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Položme* $k_0 = 0$. *Potom řada* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, *kde* $b_n = a_{k_{n-1}+1} + a_{k_{n-1}+2} + \ldots + a_{k_n}$, *má součet a platí* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Důkaz je snadný. Posloupnost částečných součtů $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ podle předpokladu věty buď konverguje nebo má nevlastní limitu ($+\infty$ nebo $-\infty$). Avšak posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je zřejmě vybranou posloupností z posloupnosti $\{s_n\}_1^{\infty}$ a tedy má tutéž limitu, vlastní nebo nevlastní.

Druhou nepříjemnost se nám však naší definicí součtu řady nepodařilo odstranit. A nepomohlo by ani omezit se na konvergentní řady, tj. vyloučit z našich úvah řady s nekonečným součtem. Abychom se o tom přesvědčili, všimněme si ještě jednou řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, která konverguje (srov. příkl. 34), a řady

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{6} + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{2 \cdot 2^{n-1} - 1} + \ldots + \frac{1}{2(2^n - 1) - 1} - \frac{1}{2n} + \ldots,$$

která vznikne z původní řady tak, že napíšeme vždy několik kladných členů (postupně jeden, dva, čtyři, osm atd.) a jeden záporný. Z našeho zápisu je vidět že částečný součet této „přerovnané" řady, zakončený některým (řekněme p-tým) záporným členem, můžeme napsat ve tvaru

$$\sum_{n=1}^{p} \left(\sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2n} \right).$$

Označíme-li tento částečný součet $\sigma(p)$, odvodíme pro $p \in \mathrm{N}$ [3] snadno následující vztahy:

$$\sigma(p) > \sum_{n=3}^{p} \left(\frac{2^{n-1}}{2(2^n-1)-1} - \frac{1}{2n} \right) =$$

$$= \sum_{n=3}^{p} \frac{2^n(n-2)+3}{(2^{n+1}-3)\,2n} > \sum_{n=3}^{p} \frac{2^n(n-2)}{2^{n+2}n} =$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{n=3}^{p} \left(1 - \frac{2}{n}\right) \geq \frac{1}{12}(p-2).$$

Odtud plyne, že posloupnost částečných součtů „přerovnané" řady není ohraničená a tedy tato řada nekonverguje. (Není těžké se přesvědčit, že má součet $+\infty$.)

Přerovnáním členů řady se nám tedy podařilo z konvergentní řady udělat nekonvergentní. Mohli jsme také dosáhnout toho, aby vzniklá řada konvergovala, ale její součet byl různý od součtu původní řady. Obecně tuto skutečnost vyjádříme následující větou.

Věta 32. *Součet neabsolutně konvergentní řady lze přerovnáním libovolně změnit. To znamená:*

Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *neabsolutně konvergentní řada,* α *reálné číslo nebo* $+\infty$ *nebo* $-\infty$, *pak existuje taková posloup-*

nost přirozených čísel $\{k_n\}_1^\infty$, *obsahující každé přirozené číslo právě jednou, že platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n} = \alpha .$$

Posloupnost $\{k_n\}_1^\infty$ je tedy jakousi „permutací" množiny přirozených čísel.

Postup z předběžné úvahy by nebyl možný, kdyby řada měla jen konečný počet kladných členů nebo jen konečný počet záporných členů. V tom případě by ovšem nemohla konvergovat neabsolutně. Předpoklad neabsolutní konvergence je tedy ve větě přirozený.

Důkaz věty 32 jen naznačíme. (Přesně je proveden např. v knize V. Jarníka, Diferenciální počet II.) Rozdělme členy neabsolutně konvergentní řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jako v důkazu věty 26 na posloupnost členů

$$b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$$

a posloupnost členů

$$c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots .$$

(Jak kladných, tak i záporných členů je nekonečně mnoho, neboť jinak by řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergovala absolutně; srov. úlohu 4 na str. 113.) Přitom

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = -\sum_{n=1}^{\infty} c_n = +\infty , \tag{47}$$

takže částečné součty obou těchto řad tvoří neohraničené (a ovšem monotónní) posloupnosti. Platnost rovnosti (47) plyne bezprostředně z věty 18 a z předpokladu neabsolutní konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Kdyby totiž jedna z řad v rovnosti (47) měla nekonečný součet a druhá konvergovala, nemohla by řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergovat, neboť by platilo buď

$$\left|\sum_{n=1}^{k} a_n\right| \geq \sum_{n=1}^{k} b_n - \left|\sum_{n=1}^{\infty} c_n\right|$$

nebo analogicky

$$\left|\sum_{n=1}^{k} a_n\right| \geq \left|\sum_{n=1}^{k} c_n\right| - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

(odečítáme součet té řady, která je konvergentní) a částečné součty řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ by nebyly ohraničené. Kdyby obě řady v rovnosti konvergovaly, platilo by podle věty 18 zřejmě

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} b_n + \sum_{n=1}^{\infty} (-c_n)$$

a řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ by konvergovala absolutně.

Je-li α reálné číslo, přerovnáme řadu takto: Nejprve píšeme nezáporné členy $b_1, b_2, \ldots$ tak dlouho, až je $b_1 + b_2 + \ldots + b_{k_1} > \alpha$. Pak píšeme záporné členy $c_1, c_2, \ldots$ tak dlouho, až je $b_1 + b_2 + \ldots + b_{k_1} + c_1 + \ldots + c_{l_1} < \alpha$. Tento postup stále opakujeme. (To je umožněno právě platností rovnosti (47).) n-tý částečný součet této „přerovnané“ řady se liší od čísla α nejvýše o absolutní hodnotu svého posledního sčítance; to může být nějaký člen b_k nebo c_l, ale jistě je to člen původní řady, řekněme a_r. Zvětšujeme-li neomezeně index n, zvětšuje se neomezeně i r (i když může být obecně $r < n$). Protože však členy původní řady konvergují k nule, konverguje k nule i rozdíl mezi číslem α a n-tým částečným součtem „přerovnané" řady. Tak se dokáže, že „přerovnaná" řada má součet α.

Je-li $\alpha = +\infty$, postupujeme podobně jako v přípravné úvaze před větou 32. Nejprve napíšeme tolik nezáporných členů $b_1, b_2, \ldots, b_{n_1}$, že platí

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_{n_1} > 1 + |c_1| = 1 - c_1$$

(c_1 je záporné číslo!). Pak napíšeme záporný člen c_1. Dále napíšeme opět tolik nezáporných členů $b_{n_1+1}, \ldots, b_{n_2}$, aby platilo

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_{n_1} + c_1 + b_{n_1+1} + \ldots + b_{n_2} >$$
$$> 2 + |c_2| = 2 - c_2 .$$

Pak napíšeme záporný člen c_2. Stejně pokračujeme dále, takže při k-tém kroku vytvoříme skupinu členů řady, skládající se z nezáporných členů $b_{n_{k-1}+1}, \ldots, b_{n_k}$ a ze záporného členu c_k, při čemž platí

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_{n_k} > k + |c_k| = k - c_k .$$

(Součet na levé straně obsahuje ovšem kromě členů $b_1, \ldots, b_{n_k}$ také členy $c_1, \ldots, c_{k-1}$.)

Posloupnost částečných součtů takto vytvořené řady není sice monotónní, ale má nevlastní limitu $+\infty$. Snadno se totiž přesvědčíme, že všechny částečné součty této řady, které obsahují k skupin, vytvořených popsaným způsobem, jsou větší než k.

Je-li $\alpha = -\infty$, postupujeme obdobně, ale zaměníme roli kladných a záporných členů původní řady.

Ve větě 32 byl podstatný předpoklad, že původní řada neabsolutně konverguje. Pro nekonvergentní řady věta neplatí: někdy lze dosáhnout toho, že po přerovnání řada konverguje, ale její součet nelze předem zvolit. Jindy nelze vůbec dosáhnout toho, aby nekonvergentní řada se přerovnáním změnila na konvergentní. (Tento případ nastane jistě tehdy, když členy řady nekonvergují k nule.)

Na druhé straně absolutně konvergentní řady mají vlastnost právě opačnou, než je tvrzení věty 32. Vyjadřuje ji následující věta.

Věta 33. *Součet absolutně konvergentní řady se nezmění přerovnáním. To znamená:*

Jestliže řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolutně konverguje a* $\{r_n\}_1^{\infty}$ *je posloupnost přirozených čísel, obsahující každé přirozené číslo právě jednou, konverguje absolutně i řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{r_n}$ *a platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{r_n}.$$

Důkaz opět jen naznačíme. Přesný důkaz najde čtenář např. v knize V. Jarníka, Diferenciální počet II. Označme součet původní řady s, její částečné součty s_n, částečné součty „přerovnané“ řady t_n, součet řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ nechť je σ, její částečné součty σ_n. Buď $\varepsilon > 0$. Pak existuje takové přirozené číslo n_0, že pro všechna $n \in \mathrm{N}\,[n_0]$ platí

$$|s_n - s| < \frac{1}{2}\varepsilon \tag{48}$$

a také

$$|\sigma_n - \sigma| < \frac{1}{2}\,\varepsilon\,. \tag{49}$$

Vezmeme nyní tak „dlouhý“ částečný součet přerovnané řady, aby v něm byly obsaženy všechny členy a_n s indexy od jedné do n_0. Přesně řečeno, najdeme takové přirozené číslo n_1, že ke každému přirozenému číslu $p \leq n_0$ existuje takové přirozené číslo $q < n_1$, že $p = r_q$. (Uvědomte si, že je nutno požadovat $p = r_q$ a nikoliv jen $a_p = a_{r_q}$, neboť členy původní — a tedy i přerovnané — řady se mohou opakovat.) Protože přerovnaná řada obsahuje všechny členy řady původní, určitě takové n_1 existuje a platí $n_1 \geq n_0$. Je-li $n \in \mathrm{N}\,[n_1]$, platí tedy

$$\begin{aligned}|s_n - t_n| &= |a_1 + a_2 + \ldots + a_{n_0} + a_{n_0+1} + \ldots + \\ &\quad + a_n - (a_{r_1} + a_{r_2} + \ldots + a_{r_{n_1}} + a_{r_{n_1}+1} + \\ &\quad + \ldots + a_{r_n}| = \left|\sum_{k=n_0+1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n}{}^{*}\, a_{r_k}\right|.\end{aligned}$$

Přitom hvězdička u druhého součtu znamená, že se sčítá přes ty indexy k, pro něž je $r_k > n_0$. Může se ovšem stát, že se některý člen prvního součtu zruší s některým členem druhého součtu. V každém případě však platí odhad (srov. (49))

$$|t_n - s_n| \leq \sum_{k=n_0+1}^{m} |a_k| \leq |\sigma - \sigma_{n_0}| < \frac{1}{2}\,\varepsilon\,,$$

kde $m = \max\limits_{l \leq n} r_l$ a tedy jistě $m \geq n$. Odtud a ze (48) dostáváme

$$|t_n - s| \leq |t_n - s_n| + |s_n - s| < \frac{1}{2}\,\varepsilon + \frac{1}{2}\,\varepsilon = \varepsilon\,.$$

Dokázali jsme, že přerovnaná řada konverguje a její součet je roven součtu řady původní. Důkaz absolutní konvergence přerovnané řady se provede podobně.

Úlohy

Píšeme všude stručně $\Sigma\, a_n$ místo $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ apod.

1. Dokažte: Jestli řada Σa_n absolutně konverguje a $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel, pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ absolutně konverguje.

2. Buď dána řada Σa_n a definujme b_n, c_n pro $n \in \mathrm{N}$ jako v důkazu věty 26. Dokažte: Jestliže obě řady Σb_n, Σc_n konvergují, pak konverguje i řada Σa_n a to absolutně a platí $\Sigma a_n = \Sigma b_n - \Sigma c_n$, $\Sigma |a_n| = \Sigma b_n + \Sigma c_n$.

3.* Při označení a_n, b_n, c_n jako v předešlé úloze dokažte, že nastane právě jedna z možností:
Σb_n, Σc_n konvergují a Σa_n konverguje absolutně;
$\Sigma b_n = +\infty$, Σc_n konverguje a $\Sigma a_n = +\infty$;
Σb_n konverguje, $\Sigma c_n = +\infty$ a $\Sigma a_n = -\infty$;
$\Sigma b_n = \Sigma c_n = +\infty$ a řada Σa_n buď konverguje neabsolutně, nebo nemá součet.
Udejte příklady na všechny možnosti.

4. Dokažte: Jestliže řada neabsolutně konverguje, pak má nekonečně mnoho kladných členů i nekonečně mnoho záporných členů.

5. kapitola

POSLOUPNOSTI A ŘADY FUNKCÍ

5.1. POSLOUPNOST FUNKCÍ

Již v úvodu jsme poznamenali, že matematici nezkoumají jen posloupnosti čísel, ale i jiných objektů, jako množin, funkcí apod. Všimněme si nyní aspoň stručně pojmu „posloupnost funkcí".

Vraťme se k naší dobře známé geometrické posloupnosti: Její obecný (n-tý) člen je q^n (popř. aq^n, kde a je číslo; zůstaneme však u jednoduššího případu). Kvocient q je pevné číslo. Různou volbou kvocientu dostáváme různé geometrické posloupnosti. Jestliže naopak budeme na okamžik považovat n za pevné přirozené číslo, pak každé zvolené hodnotě kvocientu q je přiřazeno číslo q^n. Můžeme tedy považovat q za (nezávisle) proměnnou. Označíme-li ji x, jak je obvyklé, máme pro každé přirozené n funkci nabývající v čísle x hodnoty x^n. Označme tuto funkci f_n, abychom zdůraznili přítomnost parametru n. Pak $f_n(x) = x^n$. Protože každému přirozenému číslu n je přiřazena právě jedna funkce, jde o zobrazení množiny přirozených čísel do množiny všech funkcí reálné proměnné. Je tedy přirozené vyslovit definici:

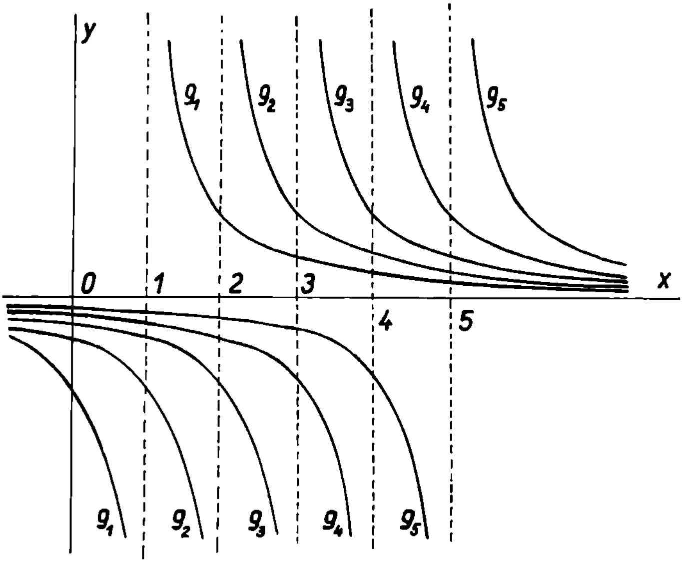
Definice 10. Zobrazení množiny přirozených čísel do množiny všech (reálných) funkcí reálné proměnné se nazývá *posloupnost funkcí*.

Posloupnosti funkcí budeme zapisovat podobně jako posloupnosti čísel, např. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $f_n(x) = x^n$; často budeme psát stručně (a ne zcela přesně) $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ apod. Je vhodné učinit jistou dohodu o definičním oboru funkcí f_n. Protože nechceme zkoumat vlastnosti jednotlivých funkcí (při pevném n), ale posloupnosti funkcí jako celku, je rozumné se omezit na ten případ, kdy všechny funkce f_n, $n = 1, 2, \ldots$, mají tentýž definiční obor.

Příklad 40. Nechť funkce g_n, $n \in \mathbf{N}$, přiřazuje reálnému číslu x, $x \neq n$, číslo $g_n(x) = \dfrac{1}{x - n}$. Pak jejím definičním oborem je množina $\mathbf{R} - \{n\}$, tj. množina všech reálných čísel s výjimkou čísla n. Je-li $x \in \mathbf{R} - \mathbf{N}$, tj. x je reálné číslo, ale není přirozené číslo, je $g_n(x)$ definováno pro všechna $n \in \mathbf{N}$. Můžeme tedy hovořit o posloupnosti funkcí $\{g_n\}_1^{\infty}$, jejichž definičním oborem je množina $\mathbf{R} - \mathbf{N}$. Na obr. 10 jsou načrtnuty grafy několika prvních členů této posloupnosti.

Příklad 41. Definujme funkci h_n pro $n \in \mathbf{N}$ vztahem $h_n(x) = \sqrt{x - n}$. Funkce h_n je definována pro $x \geq n$ čili pro $x \in I_n = \langle n, +\infty)$. Avšak průnik těchto intervalů je prázdný: $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n = \emptyset$. Nemůžeme tedy ve smyslu naší úmluvy hovořit o posloupnosti funkcí h_n.

Příklad 42. Podobná situace nastane, definujeme-li funkci k_n vztahem $k_n(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{1 - n^2x^2}}$. Zde je definičním



Obr. 10

oborem funkce k_n $(n \in \mathrm{N})$ množina reálných čísel x splňujících nerovnost $0 < |x| < \frac{1}{n}$. Neexistuje tedy neprázdná množina, na níž by byly definovány všechny funkce k_n, $n \in \mathrm{N}$. Nemá tedy smysl hovořit o posloupnosti funkcí k_n.

Budeme tedy v dalším hovořit o posloupnosti $\{f_n\}_1^\infty$ jen tehdy, je-li průnik definičních oborů všech funkcí f_n $(n \in \mathrm{N})$ neprázdný. Tento průnik budeme považovat za definiční obor posloupnosti.

5.2. KONVERGENCE POSLOUPNOSTI FUNKCÍ

Budiž $\{f_n\}_1^\infty$ posloupnost funkcí, jejíž definiční obor je množina $D \subset \mathbf{R}$. Je-li pevně dáno číslo $x_0 \in D$, tvoří hodnoty $f_n(x_0)$ číselnou posloupnost. Na tuto posloupnost se vztahují všechny úvahy z prvních dvou kapitol této knížky. Můžeme tedy hovořit také o konvergenci a limitě této posloupnosti. Jestliže pro nějaké $x_0 \in D$ posloupnost $\{f_n(x_0)\}_1^\infty$ konverguje, znamená to, že číslu x_0 odpovídá číslo y_0, dané vztahem

$$y_0 = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0)\,.$$

Hodnota limity, tj. číslo y_0, závisí ovšem na zvoleném čísle x_0. Zvolíme-li jiné číslo $x \in D$, dostaneme obecně jiné číslo y, pro něž platí $y = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Může se ovšem stát, že limita vpravo neexistuje — a to buď pro vůbec žádné $x \in D$, nebo pro některá $x \in D$. Nás samozřejmě zajímá hlavně ten případ, kdy číslo $y = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ existuje aspoň pro některá $x \in D$, řekněme pro všechna $x \in D_0$, kde $\varnothing \neq D_0 \subset D$. Pak totiž můžeme definovat funkci f s definičním oborem D_0 vztahem

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \tag{50}$$

pro $x \in D_0$. Je přirozené nazvat tuto funkci f limitou posloupnosti funkcí f_n na množině D_0.

Vyslovme nyní přesnou definici.

Definice 11. Nechť funkce f_n, $n \in \mathbf{N}$, jsou definovány na množině D. Buď $x \in D$ a nechť existuje limita (číselné) posloupnosti $\{f_n(x)\}_1^\infty$, kterou označíme $f(x)$, takže platí

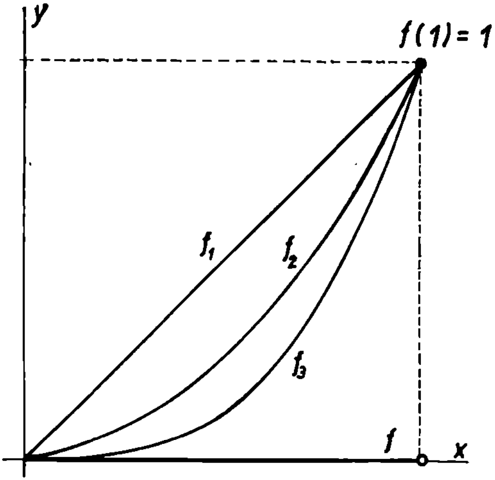
(50). Pak říkáme, že posloupnost funkcí $\{f_n\}_1^\infty$ *konverguje v bodě x k číslu* $f(x)$ (*má v bodě x limitu* $f(x)$). Buď dále $\emptyset \neq D_0 \subset D$ a nechť pro každé $x \in D_0$ posloupnost funkcí $\{f_n\}_1^\infty$ konverguje v bodě x k číslu $f(x)$. Definujme funkci f na množině D_0 vztahem (50). Pak říkáme, že posloupnost funkcí $\{f_n\}_1^\infty$ konverguje na množině D_0 k funkci f. Funkci f nazýváme *limitou posloupnosti* $\{f_n\}_1^\infty$ nebo její *limitní funkcí* a píšeme $\lim_{n\to\infty} f_n = f$.

Příklad 43. Všimněme si ještě jednou posloupnosti funkcí f_n definovaných vztahem $f_n(x) = x^n$ pro všechna reálná x. Z vlastností geometrické posloupnosti plyne, že pro x splňující nerovnosti $-1 < x < 1$ platí $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$, pro $x = 1$ platí $\lim_{n\to\infty} x^n = 1$; pro $x \leq -1$ nebo $x > 1$ limita $\lim_{n\to\infty} x^n$ neexistuje. (Pro $x > 1$ existuje ovšem nevlastní limita. V definici 11 jsme však případ nevlastní limity nezahrnuli, neboť bychom museli za hodnoty limitní funkce připustit nejen reálná čísla, ale také $+\infty$ a $-\infty$). Je tedy $D_0 = (-1,1\rangle$ a podle definice 11 dostáváme tento výsledek: Posloupnost funkcí $\{f_n\}_1^\infty$, $f_n(x) = x^n$, konverguje na intervalu $(-1,1\rangle$ k funkci f,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in (-1,1)\,, \\ 1 & \text{pro } x = 1\,. \end{cases}$$

(Viz obr. 11. Doplňte si sami grafy funkcí f_n, f na intervalu $(-1,0)$.

Příklad 44. Zkoumejme posloupnost funkcí $\{g_n\}_1^\infty$ z příkladu 40. Buď x pevně zvolené reálné číslo, $x \notin \mathrm{N}$. Pak pro velká přirozená čísla n bude jmenovatel zlomku



Obr. 11

$g_n(x) = \dfrac{1}{x - n}$ v absolutní hodnotě velmi velký; dá se očekávat, že platí

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = 0 . \qquad (51)$$

Dokažme to! Nechť ε je kladné číslo. Pak platí (při pevném x)

$$\left|\frac{1}{x - n}\right| < \varepsilon \qquad (52)$$

právě tehdy, je-li $n < x - \dfrac{1}{\varepsilon}$ nebo $n > x + \dfrac{1}{\varepsilon}$. Stačí tedy najít takové přirozené číslo n_0, že $n_0 > x + \dfrac{1}{\varepsilon}$.

Potom pro každé $n \in \mathbf{N}\,[n_0]$ platí nerovnost (52) a vztah (51) je dokázán. Limitou posloupnosti funkcí g_n na množině $D = \mathbf{R} - \mathbf{N}$ je tedy konstantní funkce, identicky rovná nule. To zapisujeme takto:

$$\lim_{n \to \infty} g_n = 0 .$$

V příkladu 44 bychom mohli považovat vztah (51) za platný pro všechna reálná čísla (včetně přirozených čísel, která jsme zatím vyloučili). Stačí si připomenout úmluvu z kap. 1, str. 13. Je-li totiž p přirozené číslo, je hodnota $g_n(p)$ definována pro všechna $n \in \mathbf{N}$ s výjimkou $n = p$. Můžeme tedy ve smyslu citované úmluvy hovořit o limitě číselné posloupnosti $g_n(p)$, i když p-tý člen této posloupnosti není určen. Důkaz vztahu (51) platí i pro $x = p$, pokud pro n_0 přidáme dodatečnou (a snadno splnitelnou) podmínku $n_0 > p$.

Na našem příkladu je zajímavé — a snad pro čtenáře i trochu překvapující — že limitou posloupnosti funkcí g_n je nula (přesněji funkce identicky rovná nule), ačkoliv každá funkce g_n nabývá libovolně velkých hodnot (není ohraničená).

Příklad 45. Funkce f_n je pro $x \geq -1$ definována vztahem $f_n(x) = \sqrt[n]{1 + x^n}$. Vyšetříme konvergenci posloupnosti $\{f_n\}_1^\infty$. Především je $f_n(-1) = 0$ pro n liché, $f_n(-1) = \sqrt[n]{2}$ pro n sudé. Protože $\sqrt[n]{2} > 1$ pro všechna přirozená n, je zřejmé, že posloupnost $\{f_n(-1)\}_1^\infty$ nemá limitu. Je-li $|x| < 1$, pak ovšem $\lim\limits_{n \to \infty} x^n = 0$, tedy podle věty 6 $\lim\limits_{n \to \infty} (1 + x^n) = 1$. Protože pro každé kladné číslo a platí $|1 - \sqrt[n]{a}| \leq |1 - a|$, je zřejmě také

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + x^n} = 1 . \tag{53}$$

Vztah (53) platí zřejmě i pro $x = 1$. Pro $x > 1$ platí $x^n \to +\infty$, takže se dá očekávat, že hlavní roli bude hrát právě sčítanec obsahující x, zatímco jednička bude „zanedbatelná". Skutečně, platí (pro $x > 1$)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + x^n} = x . \tag{54}$$

Dokažme vztah (54). Zřejmě je $x = \sqrt[n]{x^n} < \sqrt[n]{1 + x^n}$. Předpokládejme, že (54) neplatí. Pak existuje takové kladné číslo α, že pro nekonečně mnoho přirozených čísel n platí

$$\sqrt[n]{1 + x^n} \geq x + \alpha$$

čili

$$1 + x^n \geq (x + \alpha)^n ,$$

což je totéž jako

$$1 \geq n\alpha x^{n-1} + \binom{n}{2} \alpha^2 x^{n-2} + \ldots + \alpha^n .$$

Avšak platí-li tato nerovnost, platí tím spíše

$$1 \geq n\alpha x^{n-1}$$

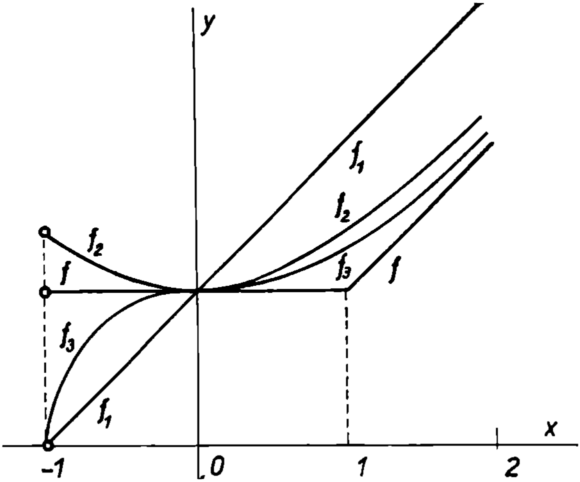
pro nekonečně mnoho přirozených čísel n. To je však zřejmý spor, neboť při $\alpha > 0$, $x > 1$ platí

$$\lim_{n\to\infty} n\alpha x^{n-1} = +\infty .$$

Posloupnost funkcí $\{f_n\}_1^\infty$ konverguje na množině $D_0 = (-1, +\infty)$ k funkci f, definované vztahem

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } -1 < x \leq 1\,, \\ x & \text{pro } x > 1\,. \end{cases}$$

Na obr. 12 jsou znázorněny graficky funkce f_1, f_2, f_3 a f.



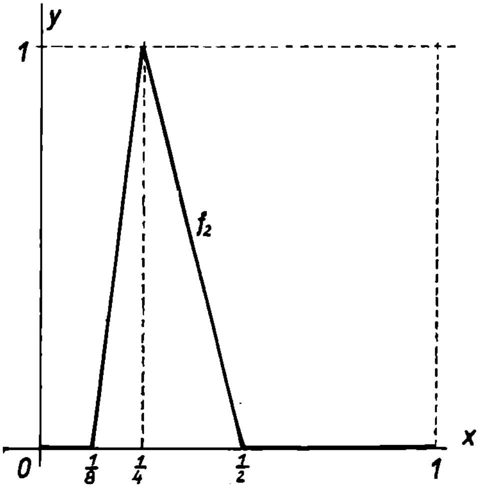
Obr. 12

Příklad 46. Pro $n \in \mathrm{N}$ a $x \in \langle 0,1 \rangle$ definujme funkci f_n vztahy

$$f_n(x) = \begin{cases} 2^{n+1}x - 1 \text{ pro } \dfrac{1}{2^{n+1}} \leq x \leq \dfrac{1}{2^n}\,, \\[2ex] -2^n x + 2 \text{ pro } \dfrac{1}{2^n} < x \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}\,, \\[2ex] 0 \qquad\qquad \text{pro } x < \dfrac{1}{2^{n+1}} \text{ nebo } x > \dfrac{1}{2^{n-1}}\,. \end{cases}$$

Na obr. 13 je graf funkce f_2. Posloupnost takto definovaných funkcí konverguje k nule (tj. k funkci f, $f(x) = 0$) na množině $\langle 0,1 \rangle$. Důkaz tohoto tvrzení je velmi jednoduchý. Pro $x = 0$ tento vztah jistě platí, neboť $f_n(0) = 0$ pro všechna $n \in \mathrm{N}$. Budiž tedy $0 < x \leq 1$ a zvolme $\varepsilon > 0$. Pak jistě existuje $n_0 \in \mathrm{N}$ takové, že platí

$$\frac{1}{2^{n_0-1}} < x .$$



Obr. 13

(Najděte takové n_0 třeba pro $x = 0{,}3$!) To však podle definice funkcí f_n znamená

$$f_{n_0}(x) = 0$$

a ovšem také $f_n(x) = 0$ pro $n \in \mathrm{N}\,[n_0]$. Platí tedy pro $n \in \mathrm{N}\,[n_0]$

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x)| = 0 < \varepsilon\,.$$

Protože kladné číslo ε můžeme zvolit libovolně, platí

$$\lim_{n\to\infty} f_n = 0 \tag{55}$$

na množině $\langle 0,1\rangle$.

V tomto příkladu je zajímavé to, že platí (55), ačkoliv kterákoliv funkce f_n nabývá v jistém bodě intervalu $\langle 0,1\rangle$ hodnoty rovné jedné. Přesně řečeno, platí $f_n\left(\frac{1}{2^n}\right) = 1$. Tedy ačkoliv platí $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ a současně je $f(0) = 0$, kde f je limitní funkce posloupnosti f_n, neplatí

$$\lim_{n\to\infty} f_n\left(\frac{1}{2^n}\right) = 0\,. \tag{56}$$

Tato skutečnost je paradoxní jen na první pohled. Uvědomte si, že v naší definici zkoumáme limitu posloupnosti čísel $f_n(x)$ při pevném x, zatímco argument $\frac{1}{2^n}$ ve vztahu (56) závisí na n.

Příklad 47. Zjistěme, zda konverguje posloupnost funkcí

$$\{g_n\}_1^\infty,\ g_n(x) = \frac{x^n}{1 + x^n}\,.$$

Za definiční obor této posloupnosti můžeme vzít množinu reálných čísel x splňujících nerovnost $x \neq -1$. Je-li $|x| < 1$, je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^n}{1 + x^n} = 0$ podle věty 6, neboť v tom případě $x^n \to 0$. Dále je $g_n(1) = \frac{1}{2}$ pro všechna

$n \in \mathrm{N}$ a tedy $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(1) = \frac{1}{2}$. Napíšeme-li konečně pro $|x| > 1$ funkci g_n ve tvaru $g_n(x) = \dfrac{1}{\frac{1}{x^n} + 1}$, dostáváme snadno $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = 1$. Daná posloupnost konverguje tedy k funkci g,

$$g(x) = \begin{cases} 0 & |x| < 1\,, \\ \frac{1}{2} & x = 1\,, \\ 1 & |x| > 1 \end{cases}$$

a to v celém definičním oboru, tj. pro $x \neq -1$.

5.3. ŘADY FUNKCÍ

Definice 8 a 11 nám umožňují zavést také pojem řady funkcí a jejího součtu.

Definice 12. Nechť $\{f_n\}_1^\infty$ je posloupnost funkcí, jejichž definiční obor je množina D. Pak symbol $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ nazýváme *řadou funkcí*, f_n jsou její *členy*, funkce $S_k = \sum\limits_{n=1}^{k} f_n$ jsou její *částečné součty*. (Hodnota funkce S_k pro $x \in D$ je ovšem $S_k(x) = \sum\limits_{n=1}^{k} f_n(x)$.) Jestliže posloupnost funkcí $\{S_k\}_{k=1}^\infty$ konverguje na množině $D_0 \subset D$ k funkci S, tj.

$$S = \lim_{k \to \infty} S_k \tag{57}$$

na množině D_0, říkáme, že *funkce S je na množině D_0 součtem řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$* nebo že *řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje na množině D_0 k funkci S.*

Poznámka. V definici 8 jsme rozeznávali případ, kdy řada má součet, a případ konvergentní řady. V této kapitole hovoříme jen o konvergenci řady funkcí, protože jinak by součtem řady funkcí nemusela být reálná funkce, ale funkce, nabývající také hodnot $+\infty$ a $-\infty$ a jejich zavedení by naše úvahy zkomplikovalo. To ovšem neznamená, že by se matematici takovými funkcemi vůbec nezabývali.

Příklad 48. Vyjdeme opět z geometrické posloupnosti. Členy geometrické posloupnosti $\{x^n\}_1^{\infty}$, kde x je kvocient, jsou členy geometrické řady $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$. O této řadě víme, že konverguje k číslu $\frac{x}{1-x}$, pokud $|x| < 1$. Považujeme-li opět x za proměnnou, dostáváme řadu funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$, kde $g_n(x) = x^n$, která na intervalu $(-1,1)$ konverguje k funkci G, $G(x) = \frac{x}{1-x}$. Použijeme-li úmluvy z odst. 3.2 (str. 71), dostaneme obdobně, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} g_n$, kde opět platí $g_n(x) = x^n$, konverguje na intervalu $(-1,1)$ k funkci G_0, $G_0(x) = \frac{1}{1-x}$. Můžeme tedy psát

$$\frac{x}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} x^n, \tag{58}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n. \tag{59}$$

Příklad 49. Položme $f_n(x) = n^{-x}$. Pak příklad 37 nám umožňuje vyslovit toto tvrzení: Řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje na intervalu $(1, +\infty)$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{f}_n$, kde $\tilde{f}_n(x) = (-1)^n f_n(x)$, konverguje na intervalu $(0, +\infty)$.

Řada funkcí z příkl. 48 je nejjednodušším příkladem tzv. *mocninné řady*. Nechť $\{a_n\}_1^{\infty}$ je číselná posloupnost. Pak řadu funkcí

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \tag{60}$$

nazýváme mocninnou řadou s koeficienty a_n. Při daných koeficientech a_n závisí konvergence mocninné řady samozřejmě na hodnotě proměnné x. Dá se dokázat, že může nastat právě jeden ze tří případů:

(a) řada (60) konverguje jen pro $x = 0$ (a její součet v tomto bodě je ovšem roven „absolutnímu členu“ a_0);

(b) řada (60) konverguje pro všechna reálná x;

(c) existuje takové kladné reálné číslo ϱ, že řada (60) konverguje na intervalu $(-\varrho, \varrho)$, ale nekonverguje v žádném bodě ξ takovém, že $|\xi| > \varrho$.

Číslo ϱ v případě (c) se nazývá *poloměr konvergence mocninné řady*. Co se týče konvergence mocninné řady v bodech $x = -\varrho$ a $x = \varrho$, je třeba ji vyšetřit v každém případě zvlášť.

Skutečnost, že pro každou mocninnou řadu, která nesplňuje (a) ani (b), existuje číslo ϱ, jež je jejím poloměrem konvergence, plyne z následující věty:

Věta 34. *Nechť mocninná řada* (60) *konverguje v bodě* $x_0 \neq 0$. *Pak tato řada konverguje v každém bodě* x, *pro nějž platí* $|x| < |x_0|$, *tj. na intervalu* $(-|x_0|, |x_0|)$.

Důkaz. Jestliže řada (60) konverguje v bodě x_0, znamená to, že členy číselné řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ tvoří ohraničenou posloupnost (dokonce platí $a_n x_0^n \to 0$). Existuje tedy takové reálné číslo c, že $|a_n x_0^n| \leq c$ pro všechna $n \in \mathrm{N}$. Je-li $|x| < |x_0|$, je

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n < c\gamma^n ,$$

kde $0 \leq \gamma < 1$.

Řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ tedy konverguje v bodě x podle věty 20 (odst. 3.4). Řada (60) v bodě x konverguje absolutně (viz Definice 9) a tedy konverguje podle věty 26.

Z důkazu věty 34 je vidět, že pro čísla x, jejichž absolutní hodnota je menší než poloměr konvergence řady (60), konverguje tato řada dokonce absolutně. Neabsolutní konvergence může tedy nastat jen pro ta x, jejichž absolutní hodnota se rovná poloměru konvergence řady.

Konvergenci některých mocninných řad jsme již vlastně vyšetřili v odst. 3.4, i když jsme přitom nehovořili o řadách funkcí. Tak z příkladu 32 plyne, že mocninná řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ konverguje pro všechna reálná x. Stejný výsledek platí i pro řadu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$ z příkladu 30. Z příkladu 33 dostáváme, že mocninná řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} nx^n$ má poloměr konvergence $\varrho = 1$. Jako příklad mocninné řady, pro niž platí případ (a), uveďme řadu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!x^n$. Kdyby tato řada konvergovala v bodě $x \neq 0$, bylo by to zřejmě ve sporu s podílovým kritériem (věta 22; srov. úlohu 5, kap. 3).

Mocninné řady můžeme považovat za jisté zobecnění mnohočlenů. Protože mnoho „rozumných" funkcí se dá přibližně vyjádřit mnohočleny, přičemž přesnost tohoto vyjádření je tím větší, čím vyšší je stupeň mnohočlenu (samozřejmě při optimální volbě jeho koeficientů), dá se očekávat, že danou funkci je možno (za jistých předpokladů o jejím chování) vyjádřit ve tvaru mocninné řady tak, jako geometrická řada v příkladu 48 vyjadřuje funkce $\frac{x}{1-x}$, $\frac{1}{1-x}$ (viz (58), (59)). Tyto otázky zkoumali matematici již od doby Newtonovy a Leibnizovy. V r. 1715 dosáhl základního výsledku B. Taylor, který ukázal metodu, jíž lze dané funkci přiřadit mocninnou řadu. Teprve Cauchy však dal okolo r. 1820 Taylorovým úvahám pevný základ. Dnes je teorie mocninných řad důležitou součástí matematické analýzy, zejména *teorie funkcí komplexní proměnné.*

Vedle mocninných řad jsou důležitým typem řad tzv. *trigonometrické řady*, tj. řady tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\,,$$

které jsou užitečné zvlášť při studiu periodických funkcí. Podle jejich objevitele se jim říká obyčejně *Fourierovy řady*. Podrobnější výklad jejich vlastností a použití by však vyžadoval, stejně jako v případě mocninných řad, hlubší předběžné znalosti matematické analýzy.

5.4. STEJNOMĚRNÁ KONVERGENCE

V příkladech odstavce 5.2 jsme upozornili na to, že konvergence posloupnosti funkcí má některé rysy, které jsou trochu neočekávané a nepříjemné. Na příkladu 46 jsme viděli, že může platit $\lim_{n \to \infty} f_n = 0$ na nějakém intervalu, ačkoliv každá funkce f_n nabývá hodnot velmi odlišných od nuly. V příkladu 44 dokonce členy posloupnosti byly neohraničené funkce, a přesto posloupnost funkcí konvergovala k nule. Druhým takovým rysem byla skutečnost, že limita posloupnosti spojitých funkcí nemusí být funkce spojitá. Pojem spojitosti jsme sice přesně nedefinovali, ale jeho názorný smysl je jasný z grafu: graf spojité funkce je spojitá „nepřetržitá" křivka, zatímco graf nespojité funkce může mít „skoky". (Srov. příkl. 43, 47). Tyto nedostatky odstraňuje pojem stejnoměrné konvergence, který si nyní objasníme.

Definice 13. Nechť $\{f_n\}_1^\infty$ je posloupnost funkcí s definičním oborem D. Říkáme, že posloupnost $\{f_n\}_1^\infty$ *konverguje stejnoměrně na množině* $D_0 \subset D$ *k funkci* f, jestliže platí: Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje takové $n_0 \in \mathrm{N}$, že pro všechna $n \in \mathrm{N}\,[n_0]$ a všechna $x \in D_0$ platí

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\,. \tag{61}$$

Porovnáme-li tuto definici s definicí 11, vidíme ihned, že posloupnost funkcí, která konverguje stejnoměrně na množině D_0 k funkci f, konverguje k téže funkci na množině D_0 ve smyslu definice 11. (Konvergence ve smyslu definice 11 se na rozdíl od stejnoměrné konvergence nazývá často bodovou konvergencí.) Obrácené tvrzení však neplatí. V definici stejnoměrné konvergence musíme najít takové číslo n_0, aby platilo (61) nezávisle na tom, které číslo x z množiny D_0 zvolíme. Naproti tomu v definici 11 jsme nejdříve pevně zvolili číslo $x \in D_0$ a k němu pak našli číslo n_0. Stačí se podívat na příklad 44 nebo 46, abychom viděli, že číslo n_0 skutečně záviselo na tom, pro které $x \in D_0$ jsme je hledali. Není těžké dokázat následující větu, z níž ihned plyne, že posloupnosti z příkladu 44 a 46 nekonvergují k nule stejnoměrně (na svém definičním oboru, tj. na množině **R** resp. na intervalu $\langle 0,1 \rangle$).

Věta 35. *Posloupnost funkcí $\{f_n\}_1^\infty$ konverguje stejnoměrně k nule (tj. k funkci f, $f(x) = 0$) na množině D právě tehdy, když existuje přirozené číslo p a číselná posloupnost $\{c_n\}_1^\infty$, $\lim\limits_{n \to \infty} c_n = 0$, pro kterou platí*

$$|f_n(x)| \leq c_n \tag{62}$$

pro všechna $x \in D$ a všechna $n \geq p$.

Důkaz. Existuje-li taková posloupnost $\{c_n\}_1^\infty$ a je-li $\varepsilon > 0$, pak existuje takové $n_0 \in \mathbf{N}$, že $|c_n| < \varepsilon$ pro všechna $n \in \mathbf{N}\,[n_0]$ a tedy podle (62) také

$$|f_n(x)| \leq \varepsilon$$

pro všechna $x \in D$ a pro $n \in \mathbf{N}[\max\,(n_0, p)]$, což dokazuje stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí f_n na množině D k nule.

Předpokládejme nyní, že $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$ stejnoměrně na množině D. Ke kladnému číslu $\varepsilon_k = \frac{1}{k}$ $(k \in \mathbf{N})$ existuje tedy $n_k \in \mathbf{N}$ takové, že platí

$$|f_n(x)| < \frac{1}{k} \tag{63}$$

pro všechna $x \in D$ a všechna $n \in \mathbf{N}$ $[n_k]$. Přitom čísla n_k můžeme navíc volit tak, aby tvořila rostoucí posloupnost přirozených čísel, takže

$$\lim_{k\to\infty} n_k = +\infty . \tag{64}$$

Nyní stačí položit $c_1 = c_2 = \ldots = c_{n_1-1} = 1$, $c_n = \frac{1}{k}$ pro $n = n_k, \ldots, n_{k+1} - 1$ a $p = n_1$. Ze vztahu (64) plyne, že čísla c_n jsou definována pro všechna $n \in \mathbf{N}$, $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$ a nerovnost (63) není nic jiného než (62). Věta je dokázána. Poznamenejme ještě pro čtenáře, kteří se již seznámili s pojmem suprema, že ve větě můžeme položit $c_n = \sup_{x\in D} |f_n(x)|$.

Příklad 50. Buď $\varphi_n(x) = \dfrac{x}{1 + nx^2}$. Je-li $|x| \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, je $|\varphi_n(x)| \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Je-li $|x| > \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, je $|\varphi_n(x)| \leq \dfrac{|x|}{nx^2} = \dfrac{1}{n|x|} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Položíme-li $c_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, jsou splněny předpoklady věty 35 a tedy posloupnost $\{\varphi_n\}_1^\infty$ konverguje k nule stejnoměrně na množině $\mathbf{R}$ všech reálných čísel.

Poznamenejme, že stejnoměrnou konvergenci musíme vyšetřovat vždy v souvislosti s danou množinou (označenou D_0 v definici 13). Se změnou množiny D_0 se může změnit bodová konvergence posloupnosti ve stejnoměrnou nebo naopak. Z věty 35 je např. jasné, že posloupnost n-tých mocnin (viz příkl. 43) nekonverguje k nule stejnoměrně na intervalu $(0,1)$, neboť jakákoliv čísla c_n splňující (62) musí splňovat $|c_n| \geq 1$ a tedy nemohou konvergovat k nule. Zmenšíme-li však interval $(0,1)$ na interval $(0,a\rangle$, kde $a < 1$, stane se konvergence funkcí f_n, $f_n(x) = x^n$ k nule stejnoměrnou na této menší množině (stačí volit $c_n = a^n$).

Protože součet řady funkcí byl definován jako limita posloupnosti číselných součtů (viz definice 12), můžeme hovořit také o stejnoměrné konvergenci řady funkcí. Z definicí 12 a 13 dostaneme, že řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \tag{65}$$

(kde f_n jsou funkce, definované na množině D) konverguje stejnoměrně na množině $D_0 \subset D$ k funkci f, jestliže ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathrm{N}$ takové, že pro všechna $k \in \mathrm{N}\,[n_0]$ a všechna $x \in D_0$ platí

$$\left| f(x) - \sum_{n=1}^{k} f_n(x) \right| < \varepsilon\,; \tag{66}$$

tuto nerovnost zapisujeme často ve tvaru

$$\left| \sum_{n=k+1}^{\infty} f_n(x) \right| < \varepsilon\,. \tag{67}$$

Příklad 51. Při zkoumání stejnoměrné konvergence řad používáme často větu 20. Vyšetříme tímto způsobem stejnoměrnou konvergenci řady (65), kde $f_n(x) = = \frac{1}{n\sqrt{x^2+n}}$, tj. řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{x^2+n}} . \tag{68}$$

Pro všechna přirozená čísla n a reálná čísla x platí

$$0 \leq f_n(x) = \frac{1}{n\sqrt{x^2+n}} \leq n^{-3/2} .$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3/2}$ konverguje (srov. příkl. 37) a její členy nezávisí na x. Říkáme jí majorantní řada k řadě (68), protože její členy splňují nerovnost $|f_n(x)| < n^{-3/2}$. Z věty 20 plyne, že řada (68) konverguje pro každé reálné číslo x. Buď $\varepsilon > 0$. Pak existuje takové $n_0 \in \mathrm{N}$, že pro všechna $k \in \mathrm{N}\,[n_0]$ platí

$$\left| \sum_{n=k+1}^{\infty} n^{-3/2} \right| < \varepsilon$$

(používáme obdobného zápisu jako ve vztahu (67)). Potom však také platí pro všechna reálná x a $k \in \mathrm{N}[n_0]$

$$\left| \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{x^2+n}} \right| < \varepsilon ,$$

čímž je dokázána stejnoměrná konvergence řady (68) na množině reálných čísel.

Stejného způsobu můžeme užít i pro řady, jejichž členy mění znaménko, pokud tyto řady konvergují absolutně.

Příklad 52. Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{2n^2 - \sin nx}$ konverguje stejnoměrně na množině reálných čísel, neboť platí

$$\left| \frac{\cos nx}{2n^2 - \sin nx} \right| \leq \frac{1}{2n^2 - 1}$$

a řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2 - 1}$$

konverguje. (Proveďte celou úvahu podrobně!)

Příklad 53. Je-li $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}(x^2 + \sqrt{n})}$, pak obdobným postupem jako v předchozích případech dostaneme nerovnost $|f_n(x)| \leq \dfrac{1}{n}$, která nám však není nic platná, protože harmonická řada nekonverguje. Přesto řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}(x^2 + \sqrt{n})}$ konverguje stejnoměrně na celé množině reálných čísel. Platí totiž

$$\left| \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}(x^2 + \sqrt{n})} \right| \leq \frac{1}{k+1} + \sum_{n=[\frac{k}{2}+1]}^{\infty} \frac{1}{n(n+1} \qquad (69)$$

a protože výraz na pravé straně konverguje k nule při $k \to \infty$, můžeme již postupovat obdobně jako v předchozích příkladech. Důkaz nerovnosti (69) je založen na větě 31 a je poměrně pracný.

Důležitou otázkou je otázka stejnoměrné konvergence mocninných řad. Z důkazu věty 34 snadno plyne následující věta:

Věta 36. *Nechť mocninná řada* (60) *má poloměr konvergence* $\varrho > 0$. *Nechť* s *je reálné číslo,* $0 < s < \varrho$. *Pak řada* (60) *konverguje stejnoměrně na intervalu* $\langle -s, s \rangle$.

Pokud řada (60) *konverguje pro všechna reálná čísla, pak konverguje stejnoměrně na libovolném ohraničeném intervalu.*

Důkaz. Dokažme jen první část tvrzení — druhou přenecháme čtenáři. Pro všechna $x \in \langle -s, s \rangle$ platí $|x| \leq s$, tedy $|a_n x^n| \leq |a_n s^n|$. Z důkazu věty 34 víme, že řada (60) konverguje absolutně v každém bodě x, $|x| \leq s$, takže zbytek důkazu můžeme provést obdobně jako v příkladu 51.

ŘEŠENÍ ÚLOH OZNAČENÝCH HVĚZDIČKOU

Ke kap. 1:

1. Posloupnost $\{a_n\}_1^\infty$ je ohraničená shora, jestliže existuje číslo K takové, že platí $a_n \leq K$ pro všechna přirozená čísla n.

6. Například $a_n = \dfrac{1}{n}$ pro n sudé, $a_n = n$ pro n liché; $b_n = 1$ pro všechna n.

Ke kap. 2:

11. Je-li $\lim a_n = -\infty$ a existuje-li kladné číslo b a přirozené číslo k takové, že pro všechna $n \in \mathrm{N}\,[k]$ platí $b_n \leq -b$, pak $\lim a_n b_n = +\infty$.
Je-li $\lim a_n = +\infty$ ($\lim a_n = -\infty$) a existuje-li takové kladné číslo b a přirozené číslo k, že pro všechna $n \in \mathrm{N}\,[k]$ platí $b_n \leq -b$ ($b_n \geq b$), pak $\lim a_n b_n = -\infty$.

12. Například a) $a_n = n = b_n$; $\lim (a_n - b_n) = 0$,
$\lim \dfrac{a_n}{b_n} = 1$.
b) $a_n = n + (-1)^n$, $b_n = n$; $\lim (a_n - b_n)$ neexistuje;
$a_n = n(2 + (-1)^n)$, $b_n = n$; $\lim \dfrac{a_n}{b_n}$ neexistuje.
c) $a_n = n^2$, $b_n = n$; $\lim (a_n - b_n) = \lim \dfrac{a_n}{b_n} = +\infty$.

Ke kap. 3:

2. Například $a_n = -1$, $c_n = 1$, $b_n = (-1)^n$.
Je-li $a_n \leq b_n \leq c_n$ pro všechna $n \in \mathrm{N}$ a řady Σa_n, Σc_n mají součet, při čemž neplatí současně $\Sigma a_n = -\infty$, $\Sigma c_n = +\infty$, má i řada Σb_n součet a platí $\Sigma a_n \leq \Sigma b_n \leq \Sigma c_n$.

Návod k důkazu: Rozdělte členy řady Σb_n na kladné a záporné jako v důkazu věty 26 na str. 91 a použijte vzorce (29), str. 79, zobecněný na případ, kdy jedna z řad má součet $+\infty$ nebo $-\infty$.

7. Nechť platí $b_n \leq a_n \leq 0$ pro všechna $n \in \mathrm{N}$. Jestliže řada Σb_n konverguje, pak konverguje i řada Σa_n a platí $\Sigma b_n \leq$ $\leq \Sigma a_n$. (Jde o zvláštní případ úlohy 2.)

Ke kap. 4:

3. Například a) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2}$.

b) $a_n = \dfrac{1}{n}$ pro n liché, $a_n = -\dfrac{1}{n^2}$ pro n sudé.

c) $a_n = \dfrac{1}{n^2}$ pro n liché, $a = -\dfrac{1}{n}$ pro n sudé.

d) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ (Σa_n konverguje neabsolutně);

$a_n = (-1)^n$ (Σa_n nemá součet).

OBSAH

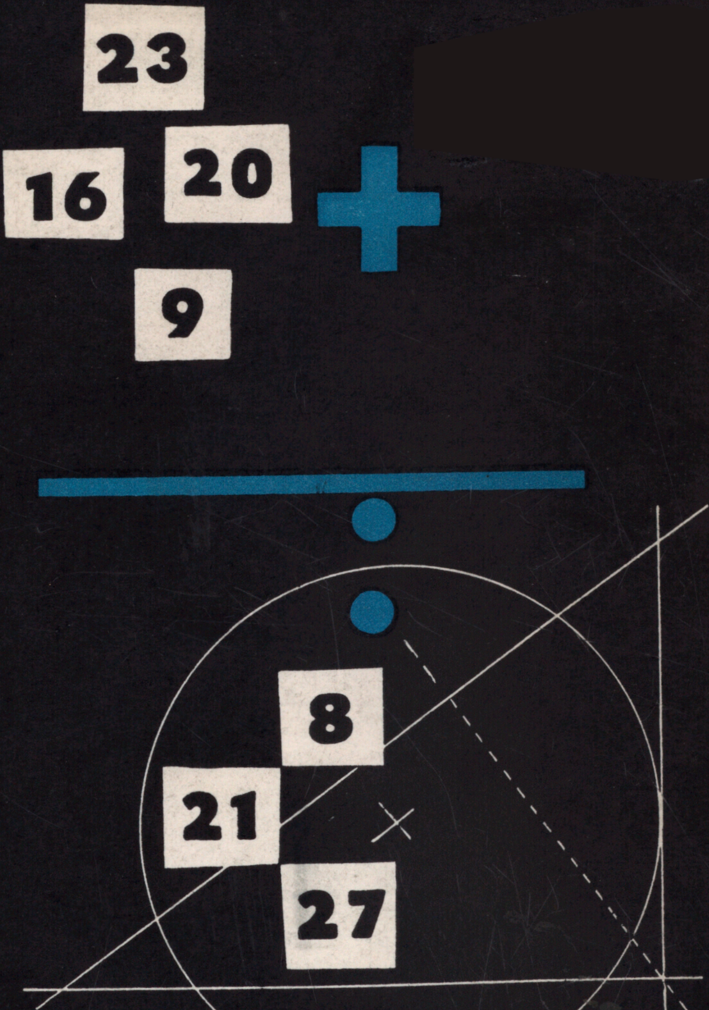
ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

JIŘÍ JARNÍK

Posloupnosti a řady

Pro účastníky matematické olympiády
vydává ÚV matematické olympiády
v nakladatelství Mladá fronta
Řídí akademik Josef Novák
Obálku navrhl Jaroslav Příbramský
K tisku připravil
a kresbami opatřil Vladimír Doležal
Odpovědná redaktorka Libuše Rousková
Publikace číslo 4012
Edice Škola mladých matematiků, svazek 43
Vytiskl Mír, novinářské závody, n. p.,
závod 1, Praha 1, Václavské nám. 15
6,15 AA, 6,57 VA, 144 stran
Náklad 6500 výtisků, 1. vydání
Praha 1979. 508/21/82.5
23-017-79 03/2

Cena brožovaného výtisku Kčs 9,—



23 - 017 - 79
03/2
Cena brož.
Kčs 9,—