Co asi nevíte o vzdálenosti

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

CO ASI NEVÍTE O VZDÁLENOSTI

35

Vydal ÚV Matematické olympiády v nakladatelství Mladá fronta

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

ALOIS KUFNER

Co asi nevíte o vzdálenosti

PRAHA 1974
VYDAL ÚV MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY
V NAKLADATELSTVÍ MLADÁ FRONTA

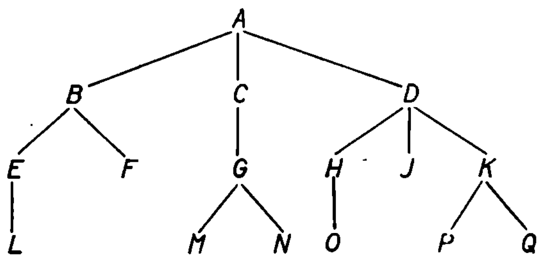
Recenzovali RNDr. Josef Král, DrSc. Jiří Šídlo

PŘEDMLUVA

Milí mladí přátelé, první reakce na titul této knížky asi bude: je to zřejmě něco z geometrie a mnoho zajímavého se tu asi nedozvíme. Vzdálenost dvou míst — to je nejkratší vzdálenost, vzdálenost vzdušnou čarou; ale co je to „nejkratší" vzdálenost? Poštovní doručovatel, který ani nelétá vzduchem, ani neumí procházet zdí, počítá s nejkratší vzdáleností po ulicích. I v ošumělé eukleidovské geometrii je potřeba často vzdálenost definovat různými složitějšími způsoby — to je zhruba obsah kapitoly první.

Matematici jsou lid posedlý zobecňováním a tvořením abstrakcí. Když už poznali řadu vlastností těch různých vzdáleností, povšimli si, co mají společného, a napadlo je vybrat některé vlastnosti jako charakteristické a pomocí nich definovat vzdálenost. Tak se zrodila nová struktura, zvaná metrický prostor; jemu je věnována kapitola druhá.

Když matematici něco zobecní, ohlížejí se se zálibou na své dílo a chtějí se přesvědčit, že to, *co udělali, dobré bylo*. To znamená, že tvoří další a další modely nové matematické teorie. Tak tomu bylo i s metrickým prostorem. A tu se ukázalo, že můžeme vytvářet i negeometrické modely nové teorie; podívejte se třeba na tohle:



Na obrázku je zakreslena část nějakého rodokmenu. Písmena znamenají (pro jednoduchost!) muže (kdo čí je otec, syn či děd, snad není třeba vykládat). Jak se to běžně říká? Třeba, že D, L jsou navzájem vzdálenější příbuzní než H, Q. Kde je ta „vzdálenost“? Nejkratší cesta od D k L v rodokmenu obsahuje čtyři spojnice, od H ke Q jen tři. Množina mužů {A, B, C, . . . , Q} s takto interpretovanou vzdáleností je novým, pěkným modelem metrického prostoru. Tento model je navíc konečný a negeometrický.

Na konci kapitoly 2 stojíme na rozcestí; pojem vzdálenosti je tak silný a účinný, že se zdá být možné vybudovat na něm celou geometrii. Můžeme např. definovat úsečku AB takto

$$AB = \{X \mid \delta(A, X) + \delta(B, X) = \delta(A, B)\}$$

přitom $\delta(P, Q)$ značí vzdálenost bodů P, Q. Můžeme pak definovat polopřímku, přímku, kružnici atd.

ALE

bude-li mít vzdálenost jen ty charakteristické vlastnosti, které jsme jí dali do vínku při definování metrického prostoru, budou mít zavedené rádoby geometrické útvary vlastnosti velmi divné, negeometrické (např.

dvěma různými body může procházet nekonečně mnoho přímek!). Pro matematika je to pokyn připojit další charakterizující vlastnosti tak, aby z toho nakonec byla nějaká „pořádná“ geometrie, např. eukleidovská.

Touto cestou se však autor nedal. Naopak — načerpal sice další podnět z geometrie, je to pojem okolí, ale použil ho k přípravě studia dalších negeometrických vlastností metrického prostoru. Zkrátka vykročil kurážně po cestě vedoucí k matematické analýze a topologii. Základnímu topologickému pojmu otevřené množiny je věnována kapitola třetí.

Něco z toho mnoha, co se dá vytěžit z pojmu otevřené množiny a okolí — to je obsahem kapitoly 4. Všecko, co se tu vykládá, se dá sice ilustrovat geometricky, ale hlavní dopad pojmů i vět je mimo geometrii.

Pátá kapitola je už dosti učená a poskytuje četné výhledy „do daleka“. Ti z vás, kdo se už cítí být v kondici pro dosti abstraktní uvažování, ať se do ní pustí hned. Ti ostatní čtenáři jí přijdou asi na chuť později, až absolvují aspoň krátký úvodní kurs matematické analýzy a až se důvěrně spřátelí s takovými pojmy jako je spojitost, limita, supremum — infimum, ale hlavně stejnoměrná spojitost. Rád bych vás upozornil, že těmito věcmi se zabývají např. belgičtí gymnasisté a že jim jdou docela k duhu.

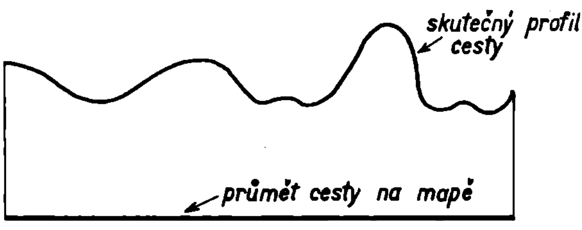
Až budete brožuru číst, soustřeďte se hlavně na dvě věci: důkladně — skoro pedanticky — promýšlejte definice a velmi podrobně si řešte všechny úlohy, hlavně úlohy ilustrační. Po prostudování příručky sami zjistíte, že vaše „matematická vzdělanost“ znatelně stoupla.

Mnoho zdaru!

Jan Vyšín

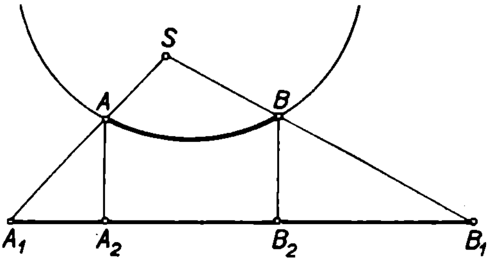
ÚVOD

Každý se jistě ve svém životě na vlastní kůži seznámil se skutečností, že vzdálenost je pojem velice relativní. Např. turista, který si kolečkovým měřidlem změřil na mapě trasu plánovaného pochodu a považoval naměřený údaj za spolehlivý, byl značně překvapen, že v členitém terénu ušel o dost více — neuvědomil si totiž, že mapa (či přesněji: měřidlo, kterého použil) nemůže zachytit výškové rozdíly.



Obr. 1

Ale i kdyby náš naivní turista šel po „naprosté“ rovině, může se údaj na mapě lišit od skutečně ušlé vzdálenosti. Je to tím, že Země není „naprosto rovná“ — je to koule, kterou při vytváření mapy promítáme do roviny. Vzdálenost mezi body A a B na kouli se do roviny promítne při středovém promítání na úsečku $\overline{A_1B_1}$, při kolmém promítání pak na úsečku $\overline{A_2B_2}$. Z obrázku je vidět, že záleží jednak na typu zvoleného promítání a u středového promítání pak také na poloze středu S.



Obr. 2

Obrázek pochopitelně přehání, a také kartografové dobře vědí, že při zobrazování terénu na mapu nelze dodržet vzdálenosti (je to tím, že koule *není* plocha rozvinutelná do roviny), a promítají tak, aby vzniklé zkreslení bylo minimální.

Příklad. Půlkružnice o poloměru r (a tedy délky πr) se při kolmém promítání zobrazí na úsečku délky $2r$; dojde tedy ke zkrácení skutečné vzdálenosti v poměru $\frac{\pi}{2} = 1{,}57\ldots$. Při středovém promítání ze středu půlkružnice se tato dráha promítne dokonce na nekonečnou přímku.

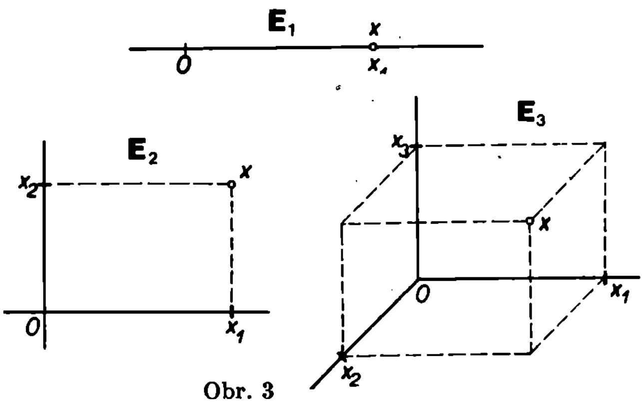
Je tedy vidět, že vzdálenost musíme v běžném životě brát s jistou rezervou, že tento pojem nelze absolutizovat. My se však přesto v dalším o jakousi absolutizaci pojmu vzdálenosti pokusíme — ovšem nebude to vzdálenost v tom smyslu, v jakém se s ní setkáváme denně v nejrůznějších souvislostech; bude to vzdálenost ve světě přesně definovaných matematických objektů.

1. kapitola

VZDÁLENOST V EUKLEIDOVSKÉM PROSTORU

Nejprve budeme pracovat s objekty, které jsou vám dobře známy ze školy nebo (i z jiných hledisek) např. z předcházejících svazků Školy mladých matematiků: s **přímkou** (jednorozměrným eukleidovským prostorem E_1), s **rovinou** (dvourozměrným eukleidovským prostorem E_2) a s trojrozměrným eukleidovským **prostorem** E_3 (viz např. Budinský-Šmakal: Vektory v geometrii. ŠMM sv. 28, Praha 1971).

Body na přímce budeme značit $x = [x_1]$, body v rovině $x = [x_1, x_2]$, body v prostoru $x = [x_1, x_2, x_3]$; zde jsou x_1, x_2, x_3 reálná čísla.



Obr. 3

V těchto prostorech známe vzdálenost:

Na přímce E_1 je vzdálenost bodu $x = [x_1]$ od bodu $y = [y_1]$ — označíme ji symbolem $d(x, y)$ — definována takto:

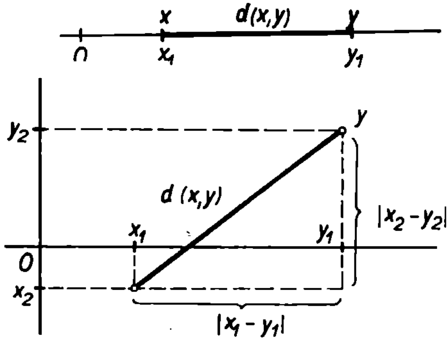
(1) $$d(x, y) = | x_1 - y_1 |$$

V rovině E_2 je vzdálenost $d(x, y)$ bodu $x = [x_1, x_2]$ od bodu $y = [y_1, y_2]$ definována takto:

(2) $$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

V prostoru E_3 je vzdálenost $d(x, y)$ bodu $x = [x_1, x_2, x_3]$ od bodu $y = [y_1, y_2, y_3]$ definována takto:

(3) $$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$$



Obr. 4

Poznámka 1. Ve všech třech případech jsme použili stejného označení $d(x, y)$. Je to celkem přirozené, neboť vzorec (1) můžeme zapsat též takto:

(1*) $$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2}$$

a vzorce (1) i (2) jsou pak speciálními případy vzorce (3), neboť body z E_2 jsou speciálními případy bodů z E_3 — jsou to body tvaru $[x_1, x_2, 0]$ — a body z E_1 jsou také speciálními případy bodů z E_3 — jsou to body tvaru $[x_1, 0, 0]$.

Vzdálenost $d(x, y)$ budeme nazývat **eukleidovskou vzdáleností**; všimněme si nyní podrobněji jejích vlastností.

A Především je $d(x, y)$ vždy nezáporné číslo:

(4) $$d(x, y) \geqq 0$$

přitom je vzdálenost bodu x od bodu y rovna nule právě tehdy, jsou-li oba body totožné:

(5) $$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

Připomeňme, že **totožnost** bodů $x = [x_1, x_2, x_3]$, $y = [y_1, y_2, y_3]$ (kterou zapíšeme symbolem $x = y$) znamená, že $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, $x_3 = y_3$.

Dokážeme platnost vztahů (4) a (5): Nerovnost (4) je zřejmým důsledkem definice čísla $d(x, y)$. — Je-li $x = y$, je opět podle definice číslo $d(x, y)$ rovno nule. — Je-li naopak $d(x, y) = 0$, je také $[d(x, y)]^2 = 0$, čili

$$(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 = 0$$

To je součet tří *nezáporných* čísel, a ten je nulový jen tehdy, jsou-li rovny nule všechny sčítance: $x_1 - y_1 = 0$, $x_2 - y_2 = 0$, $x_3 - y_3 = 0$. To však znamená, že $x_i = y_i$ pro $i = 1, 2, 3$ čili že $x = y$.

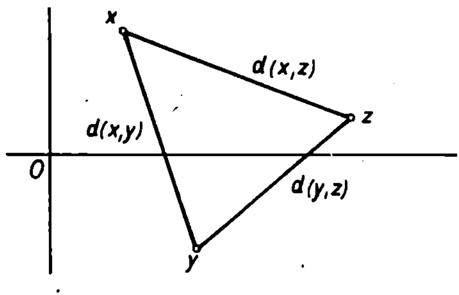
B Dále je vzdálenost bodu x od bodu y stejná, jako vzdálenost bodu y od bodu x:

(6) $$d(x, y) = d(y, x)$$

Důkaz opět plyne z definice čísla $d(x, y)$: Protože $(x_i - y_i)^2 = [-(y_i - x_i)]^2 = (y_i - x_i)^2$ pro $i = 1, 2, 3$, máme rovnost (6) ihned z (3).

C Jsou-li x, y a z tři body, lze z nich utvořit trojúhelník.*) V tomto trojúhelníku pak není délka jedné strany větší než součet délek obou zbývajících stran. Jinými slovy: Vzdálenost bodu x od bodu z není větší než součet vzdálenosti bodu x od bodu y a vzdálenosti bodu y od bodu z. Lze to zapsat ve tvaru tzv. *trojúhelníkové nerovnosti*

$$d(x, z) \leqq d(x, y) + d(y, z) \tag{7}$$



Obr. 5

Platnost této nerovnosti je sice takřka „zřejmá" (viz obr. 5), nebudeme však spoléhat na názor, abychom nedopadli jako onen turista v úvodu, a dokážeme platnost nerovnosti (7) korektním způsobem.

*) Tento trojúhelník může být též úsečkou, leží-li všechny tři body na přímce. V E_1 tomu bude vždy tak.

Odbočení první. Buďte a, b libovolná reálná čísla. Pak je také číslo $(a - b)$ reálné, a číslo $(a - b)^2$ je tedy nezáporné:

$$0 \leqq (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

neboli $2ab \leqq a^2 + b^2$ čili

$$ab \leqq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$$

Tato nerovnost platí pro každou dvojici reálných čísel a, b. Zvolíme-li speciálně $a = \sqrt{\alpha}$, $b = \sqrt{\beta}$, kde α a β jsou nezáporná čísla, dostáváme důležitou nerovnost

$$\sqrt{\alpha\beta} \leqq \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \tag{8}$$

Buďte nyní α_i a β_i $(i = 1, 2, 3)$ nezáporná čísla a nechť jsou čísla $A = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2$ a $B = \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2$ kladná. Zvolíme-li v (8) $\alpha = \alpha_i^2/A$ a $\beta = \beta_i^2/B$ $(i = 1, 2, 3)$, dostaneme tři nerovnosti

$$\frac{\alpha_1\beta_1}{\sqrt{AB}} \leqq \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_1^2}{A} + \frac{\beta_1^2}{B}\right)$$

$$\frac{\alpha_2\beta_2}{\sqrt{AB}} \leqq \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_2^2}{A} + \frac{\beta_2^2}{B}\right)$$

$$\frac{\alpha_3\beta_3}{\sqrt{AB}} \leqq \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_3^2}{A} + \frac{\beta_3^2}{B}\right)$$

a jejich sečtením pak nerovnost

$$\frac{\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3}{\sqrt{AB}} \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}{A} + \frac{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2}{B}\right) = 1$$

(poslední rovnost plyne z definice čísel A a B). Po vynásobení nezáporným číslem $\sqrt{AB}$ pak dostáváme důležitou Hölderovu nerovnost

$$(9) \qquad \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 \leqq$$
$$\leqq (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)^{\frac{1}{2}}(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2)^{\frac{1}{2}}$$

Tato nerovnost platí pro všechna reálná čísla α_i, β_i. My jsme sice při jejím odvození požadovali, aby bylo $A > 0$ a $B > 0$, z (9) je však vidět, že je-li $A = 0$ nebo $B = 0$, platí (9) také a má tvar $0 \leqq 0$ (dokažte to!).

Z nerovnosti (9) plyne další důležitý vztah — tzv. Minkowského nerovnost

$$(10) \qquad \sqrt{(\gamma_1 + \delta_1)^2 + (\gamma_2 + \delta_2)^2 + (\gamma_3 + \delta_3)^2} \leqq$$
$$\leqq \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2} + \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2}\,,$$

která platí pro všechna reálná čísla $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \delta_1, \delta_2, \delta_3$.

Dokážeme platnost nerovnosti (10): Označíme-li $C = (\gamma_1 + \delta_1)^2 + (\gamma_2 + \delta_2)^2 + (\gamma_3 + \delta_3)^2$, můžeme psát

$$C = \{\gamma_1(\gamma_1 + \delta_1) + \gamma_2(\gamma_2 + \delta_2) + \gamma_3(\gamma_3 + \delta_3)\} +$$
$$+ \{\delta_1(\gamma_1 + \delta_1) + \delta_2(\gamma_2 + \delta_2) + \delta_3(\gamma_3 + \delta_3)\}$$

Použijeme-li na oba výrazy v lomených závorkách Hölderovy nerovnosti (9) [pro první závorku volíme $\alpha_i = \gamma_i$, $\beta_i = (\gamma_i + \delta_i)$, pro druhou pak $\alpha_i = \delta_i$, $\beta_i = (\gamma_i + \delta_i)$, $i = 1, 2, 3$], dostáváme

$$C \leqq (\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2)^{\frac{1}{2}}[(\gamma_1+\delta_1)^2 + (\gamma_2 + \delta_2)^2 + (\gamma_3 + \delta_3)^2]^{\frac{1}{2}} +$$
$$+ (\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2)^{\frac{1}{2}} [(\gamma_1 + \delta_1)^2 + (\gamma_2 + \delta_2)^2 + (\gamma_3 + \delta_3)^2]^{\frac{1}{2}} =$$
$$= \sqrt{C}\left[(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2)^{\frac{1}{2}} + (\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2)^{\frac{1}{2}}\right]$$

Je-li $C = 0$, nerovnost (10) zřejmě platí. Je-li $C \neq 0$ (a tedy $C > 0$), stačí předchozí nerovnost vydělit číslem $\sqrt{C} > 0$ a máme ihned nerovnost (10).

Konec prvního odbočení

Nyní už můžeme dokázat trojúhelníkovou nerovnost (7): Tato nerovnost plyne ihned z (10), kde volíme $\gamma_i = x_i - y_i$ a $\delta_i = y_i - z_i$ $(i = 1, 2, 3)$, neboť pak je $\gamma_i + \delta_i = x_i - z_i$ a tedy

$$\sqrt{(x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2 + (x_3 - z_3)^2} \leqq$$
$$\leqq \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2} +$$
$$+ \sqrt{(y_1 - z_1)^2 + (y_2 - z_2)^2 + (y_3 - z_3)^2}$$

což je (7).

Shrňme tři vlastnosti eukleidovské vzdálenosti d, které jsme zatím dokázali:

A $d(x, y) \geqq 0$; $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

B $d(x, y) = d(y, x)$ pro každé dva body x, y

C $d(x, z) \leqq d(x, y) + d(y, z)$ pro každé tři body x, y, z

Vzdálenost d má ovšem řadu dalších vlastností. Definujme pro $x = [x_1, x_2, x_3]$, $y = [y_1, y_2, y_3]$ a pro reálné číslo α součet $x + y$ a α-násobek αx takto:

$$x + y = [x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3]$$
$$\alpha x = [\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3]$$

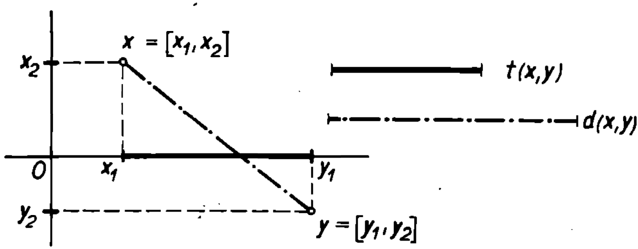
Dokažte, že pak platí:

D $d(x + z, y + z) = d(x, y)$ pro každé tři body x, y, z

E $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha|\, d(x, y)$ pro každé dva body x, y a pro každé reálné číslo α

My se však v dalším omezíme na vlastnosti **A**, **B** a **C**. Pokusíme se totiž o zobecnění pojmu vzdálenosti na jiné množiny — méně názorné než je množina bodů eukleidovského prostoru, a budeme se přitom snažit zavádět co nejméně nových pojmů, klást co nejméně podmínek na strukturu vyšetřovaných množin. Kdybychom vzali v úvahu i vlastnosti **D** a **E**, museli bychom zavést *součet* dvou prvků množiny a *α-násobek*, a to už je dosti podstatné omezení.

Příklad 1. Vraťme se k turistovi a k jeho slepé důvěře v mapu. Lze to zjednodušeně srovnat se situací, která nastane, když „vzdáleností" dvou bodů v E_3 budeme rozumět eukleidovskou vzdálenost jejich průmětů do roviny E_2 (do mapy). — Uberme další rozměr a definujme novou vzdálenost $t(x, y)$ bodu x v E_2 od bodu y v E_2 jako eukleidovskou vzdálenost průmětů těchto dvou bodů do osy x_1. Bude tedy (viz obr. 6)



Obr. 6

$$(11) \qquad t(x, y) = |x_1 - y_1|$$

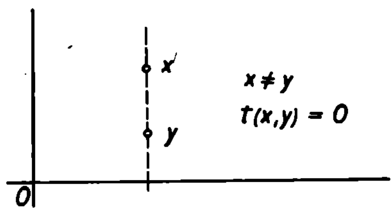
Má tato nová vzdálenost v rovině opět vlastnosti **A** až **C**? Vlastnosti **B** a **C** zřejmě splněny jsou: Je-li $x = [x_1, x_2]$, $y = [y_1, y_2]$ a $z = [z_1, z_2]$, je

$$t(x, y) = |x_1 - y_1| = |-(y_1 - x_1)| = |y_1 - x_1| = t(y, x)$$

a

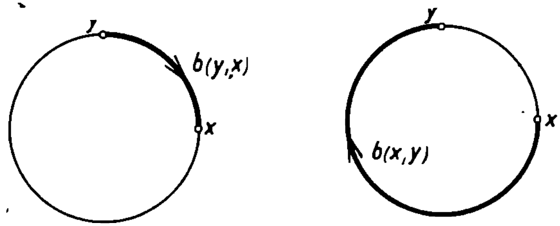
$$t(x, z) = |x_1 - z_1| = |(x_1 - y_1) + (y_1 - z_1)| \leqq$$
$$\leqq |x_1 - y_1| + |y_1 - z_1| = t(x, y) + t(y, z)$$

Zřejmě je také $t(x, y) \geqq 0$ a $t(x, y) = 0$ pro $x = y$. Není však splněna implikace $\Rightarrow$ z podmínky **A**, neboť body $x = [x_1, x_2]$ a $y = [x_1, y_2]$ jsou pro $x_2 \neq y_2$ různé, zatím co $t(x, y) = |x_1 - x_1| = 0$ (viz obr. 7).



Obr. 7

Příklad 2. Představme si bytost, jejímž světem je kružnice v rovině a která se navíc může po této kružnici pohybovat jen ve směru pohybu hodinových ručiček. I tato bytost může svůj pohyb po kružnici měřit — označme proto $b(x, y)$ vzdálenost, kterou naše bytost urazí, když se pohybuje z bodu x do bodu y.



Obr. 8

Jak ukazuje obrázek 8, nemá vzdálenost b už vlastnost **B**: pro konkrétní body z obr. 8 je vzdálenost $b(y, x)$ bodu y od bodu x třikrát menší než vzdálenost $b(x, y)$ bodu x od bodu y čili je $b(x, y) \neq b(y, x)$. [Rovnost $b(x, y) = b(y, x)$ platí dokonce tehdy a jen tehdy, leží-li body x a y na stejném průměru naší kružnice.]

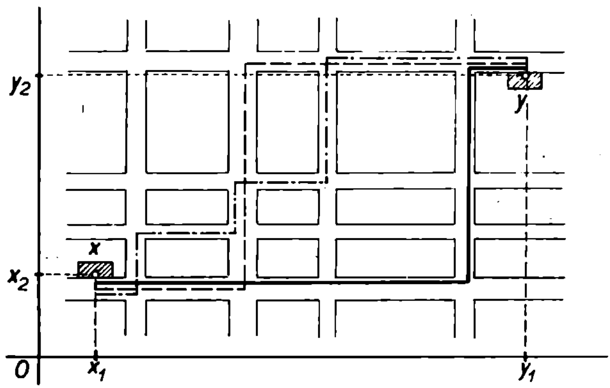
Úloha 1. Má vzdálenost b z předcházejícího příkladu vlastnosti **A** a **C**?

Vzdálenost t, kterou jsme definovali v příkladu 1, tedy nemá všechny vlastnosti **A** až **C**, ačkoliv je definována poměrně přirozeným způsobem — využili jsme analogie se zobrazováním na mapu. Ani vzdálenost b z příkladu 2 neměla všechny tyto vlastnosti. Existuje tedy vůbec nějaká přirozeným způsobem definovaná vzdálenost, která by zachovávala všechny vlastnosti **A**, **B**, **C**?

Uvedeme dva příklady, které ukazují, že takové vzdálenosti skutečně existují. Vzdálenost $t(x, y)$ byla „špatně definována", neboť nebrala v úvahu „výškové rozdíly" bodů x a y. Ukážeme, jak lze tento „topografický" nedostatek odstranit — uvedeme dokonce dvě eventuality.

Poznámka 2. Vzdálenost $b(x, y)$ z příkladu 2 měla poněkud výjimečný charakter, neboť také podmínky, které má naše bytost pro svůj „život na kružnici“, jsou výjimečné. Má-li však nějaká vzdálenost vlastnost **B**, nemusíme rozlišovat mezi vzdáleností z bodu x do bodu y a vzdáleností z bodu y do bodu x. Budeme proto v dalším hovořit většinou pouze o „vzdálenosti bodů x a y“.

Příklad 3. Představme si město ležící v rovině, jehož ulice tvoří pravoúhlou síť, a vžijme se do úlohy listonoše, který má doručit telegram z místa x do místa y. Listonoš si volí pochopitelně nejkratší cestu, má však celou řadu možností: tři z nich jsou naznačeny na obr. 9 a k r a t š í cesta neexistuje (listonoš může používat jen ulice). Umístíme-li naše město do roviny E_2 a obě místa opatří-



Obr. 9

me souřadnicemi: $x = [x_1, x_2]$, $y = [y_1, y_2]$, bude délka cesty, kterou listonoš urazí, rovna součtu délek průmětů úsečky $\overline{xy}$ [tj. eukleidovské vzdálenosti $d(x, y)$] do obou souřadných os. Označme tuto „pošťáckou" vzdálenost $p(x, y)$ — pak je tedy

$$p(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \tag{12}$$

Ukážeme, že tato vzdálenost má všechny vlastnosti **A** až **C**:

A Z (12) ihned plyne, že $p(x, y) \geqq 0$ a že pro $x = y$ je $p(x, y) = 0$. Stačí tedy dokázat platnost implikace $\{p(x, y) = 0 \Rightarrow x = y\}$. Ale je-li $p(x, y) = 0$, musí být rovny nule oba sčítanci, které číslo $p(x, y)$ tvoří: $|x_1 - y_1| = 0$ a $|x_2 - y_2| = 0$. To znamená, že $x_1 = y_1$ a $x_2 = y_2$ čili že $x = y$.

B
$$\begin{aligned} p(x, y) &= |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| = \\ &= |-(y_1 - x_1)| + |-(y_2 - x_2)| = \\ &= |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2| = p(y, x) \end{aligned}$$

C
$$\begin{aligned} p(x, z) &= |x_1 - z_1| + |x_2 - z_2| = \\ &= |(x_1 - y_1) + (y_1 - z_1)| + \\ &+ |(x_2 - y_2) + (y_2 - z_2)| \leqq \\ &\leqq (|x_1 - y_1| + |y_1 - z_1|) + \\ &+ (|x_2 - y_2| + |y_2 - z_2|) = \\ &= (|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|) + \\ &+ (|y_1 - z_1| + |y_2 - z_2|) = \\ &= p(x, y) + p(y, z) \end{aligned}$$

Stačilo tedy k „špatně definované" vzdálenosti $t(x, y)$ přidat ještě vzdálenost průmětů bodů x a y na osu x_2 a vznikla „dobře definovaná" vzdálenost $p(x, y)$.

Poznámka 3. Omezili jsme se pro názornost na rovinu, ale stejně jako u eukleidovské vzdálenosti d lze zavést vzdálenost p i v E_1 a v E_3 : v E_1 bude

$$p(x, y) = |x_1 - y_1|$$

v E_3 bude

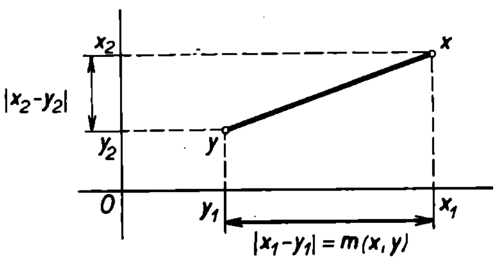
$$p(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + |x_3 - y_3|$$

I pak budou splněny podmínky **A** až **C** (dokažte si to!). Na přímce E_1 jsme ovšem nedostali nic nového, tam je $p(x, y) = d(x, y)$; ale v E_2 a v E_3 už znamená vzdálenost p novou kvalitu.

Pokud jde o stejné značení vzdálenosti p v E_1, E_2 i E_3, platí to, co bylo řečeno v poznámce 1.

Příklad 4. Definujme v E_2 ještě jednu novou vzdálenost:

$$m(x, y) = \max\left(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\right) \tag{13}$$



Obr. 10

Vzdálenost dvou bodů x a y v rovině je tedy definována jako větší z délek průmětů spojnice obou bodů na jednotlivé souřadné osy. Také vzdálenost m má vlastnosti **A** až **C**:

A Z (13) ihned plyne, že $m(x, y) \geqq 0$ a že $m(x, y) = 0$ pro $x = y$. Předpokládejme tedy naopak, že $m(x, y) = 0$. To znamená, že větší z nezáporných čísel $|x_1 - y_1|$, $|x_2 - y_2|$ je rovné nule, čili musí být rovna nule obě čísla: $|x_1 - y_1| = 0$ a $|x_2 - y_2| = 0$ neboli $x = y$.

B $m(x, y) = m(y, x)$, neboť $|x_i - y_i| = |-(y_i - x_i)| = |y_i - x_i|$, $i = 1, 2$.

Odbočení druhé. Buďte a, b, c, d, A a B reálná čísla. Dokažte, že platí tyto dva vztahy:

(14) Pro $a \leqq A$ a $b \leqq B$ je $\max(a, b) \leqq \max(A, B)$

(15) $\max(a + c, b + d) \leqq \max(a, b) + \max(c, d)$

Konec druhého odbočení

C Především je $m(x, z) = \max(|x_1 - z_1|, |x_2 - z_2|) = \max\{|(x_1 - y_1) + (y_1 - z_1)|, |(x_2 - y_2) + (y_2 - z_2)|\}$. Protože $|(x_i - y_i) + (y_i - z_i)| \leqq |x_i - y_i| + |y_i - z_i|$, je podle (14)

$$m(x, z) \leqq \max\{(|x_1 - y_1| + |y_1 - z_1|), (|x_2 - y_2| + |y_2 - z_2|)\}$$

a podle (15) je pak

$$m(x, z) \leqq \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} + \max\{|y_1 - z_1|, |y_2 - z_2|\} = m(x, y) + m(y, z)$$

Poznámka 4. Opět můžeme vzdálenost m definovat v E_1:

$$m(x, y) = \max [|x_1 - y_1|] = |x_1 - y_1|$$

a v E_3:

$$m(x, y) = \max [|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, |x_3 - y_3|]$$

Kvalitativně odlišnou vzdálenost tedy dostáváme jen v E_2 a v E_3.

Poznali jsme zatím tři typy vzdáleností — d, p a m, které měly všechny vlastnosti **A**, **B**, **C**. Zatím co v E_1 bylo

$$d(x, y) = p(x, y) = m(x, y) \tag{16}$$

platí v E_2 nerovnosti

$$d(x, y) \leqq p(x, y) \leqq \sqrt{2}\, d(x, y) \tag{17}$$

pro každé dva body x, y z E_2. Dokažme (17). První nerovnost plyne ihned ze zřejmé nerovnosti

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 \leqq (|\alpha| + |\beta|)^2:$$

položíme-li zde $\alpha = |x_1 - y_1|$ a $\beta = |x_2 - y_2|$, dostáváme první nerovnost v (17) odmocněním. — V prvním odbočení jsme použili toho, že $2|\alpha\beta| \leqq |\alpha|^2 + |\beta|^2$. Je tedy

$$(|\alpha| + |\beta|)^2 = |\alpha|^2 + 2|\alpha\beta| + |\beta|^2 \leqq 2(|\alpha|^2 + |\beta|^2)$$

a odtud opět plyne druhá nerovnost v (17) stejnou volbou α a β jako výše a odmocněním.

Podobný vztah platí v E_2 mezi vzdálenostmi d a m:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\, d(x, y) \leqq m(x, y) \leqq d(x, y) \tag{18}$$

Dokážeme (18). Protože $|\alpha| = \sqrt{\alpha^2} \leqq \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ a podobně $|\beta| \leqq \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, je také $\max(|\alpha|, |\beta|) \leqq \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, a odtud plyne druhá nerovnost v (18). Dále je $\alpha^2 + \beta^2 \leqq$ $\leqq 2 \max(\alpha^2, \beta^2) = 2 [\max(|\alpha|, |\beta|)]^2$ čili $\sqrt{\frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)} \leqq$ $\leqq \max(|\alpha|, |\beta|)$, a odtud plyne první nerovnost v (18).

Z nerovností (17) a (18) plyne vztah mezi vzdálenostmi p a m:

$$\frac{1}{2} p(x, y) \leqq m(x, y) \leqq p(x, y) \tag{19}$$

(dokažte!).

Podobné vzájemné odhady těchto tří typů vzdáleností — ovšem případně s jinými konstantami — lze odvodit i v E_3.

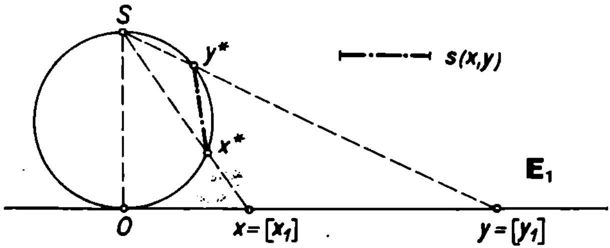
Doporučujeme čtenáři, aby si význam nerovností (17), (18) a (19) ilustroval obrázkem a aby ukázal, že konstanty, které v těchto nerovnostech vystupují, *nelze* zlepšit. Tak např. v (17) nastane *rovnost* v první nerovnosti, volíme-li $x = [0, 0]$ a $y = [a, 0]$, kde a je číslo různé od nuly, neboť pak je $d(x, y) = p(x, y) =$ $= |a|$; v druhé nerovnosti v (17) nastane *rovnost* pro $x = [0, 0]$ a $y = [a, a]$ $(a \neq 0)$, neboť pak je $p(x, y) =$ $= 2|a|$ a $d(x, y) = \sqrt{2}|a|$.

Zvolme za základní vzdálenost třeba eukleidovskou vzdálenost $d(x, y)$. Budou-li se oba body x a y od sebe neomezeně vzdalovat, poroste neomezeně i číslo $d(x, y)$. Z nerovností (17) a (18) resp. z rovností (16) plyne, že pak porostou neomezeně i čísla $p(x, y)$ a $m(x, y)$. Lze to zapsat takto:

$$d(x, y) \to \infty \Rightarrow p(x, y) \to \infty\,,\ m(x, y) \to \infty \tag{20}$$

Uvedeme nyní příklad vzdálenosti, kde to platit nemusí:

Příklad 5. Definujme vzdálenost $s(x, y)$ bodů x, y na přímce E_1 takto: Sestrojíme kružnici k o poloměru R, která se dotýká přímky E_1 v počátku O. Bod na k, ležící na stejném průměru jako počátek O, označíme S. Bod $x = [x_1]$ na E_1 spojme s bodem S; tato spojnice protne



Obr. 11

kružnici k v bodě $x^* = [x_1^*, x_2^*]$, pro jehož souřadnice platí

$$x_1^* = \frac{4R^2x_1}{4R^2 + x_1^2}, \quad x_2^* = \frac{2Rx_1^2}{4R^2 + x_1^2} \tag{21}$$

(proveďte výpočty, nutné k určení souřadnic bodu x^*!). Tím tedy přiřadíme každému bodu x na E_1 jednoznačně určený bod x^* na kružnici k, tj. bod v E_2. Každému bodu na E_1 odpovídá právě jeden bod na k, a také obráceně — každému bodu na k (vyjma bod S!) odpovídá právě jeden bod na E_1. Také ze vzorců (21) je vidět, že

$$x^* \neq y^* \Leftrightarrow x \neq y$$

Nyní položíme

$$s(x, y) = d(x^*, y^*) \tag{22}$$

tj. vzdáleností $s(x, y)$ bodů x a y na E_1 nazveme eukleidovskou vzdálenost (v E_2) jim odpovídajících bodů x^* a y^* na kružnici k.

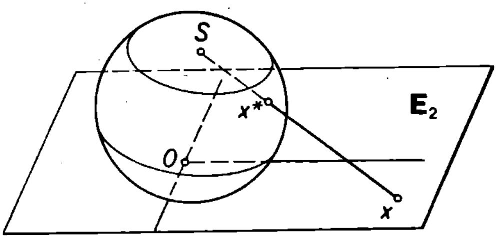
Vzdálenost s má vlastnosti **A** až **C**, neboť je má vzdálenost d a přiřazení mezi body x a x^* je vzájemně jednoznačné.

Vzdálenost s tedy patří mezi „dobře definované" vzdálenosti. Od vzdáleností d, p a m se však liší mimo jiné tím, že je

$$s(x, y) \leqq 2R \quad \text{pro všechny body } x, y \text{ na } E_1$$

neboť body x^* a y^* leží vždy na kružnici k a jejich eukleidovská vzdálenost v E_2 tedy nemůže být větší než je průměr kružnice k. Vzdálenost s tedy nemá vlastnost (20).

Poznámka 5. Taková vzdálenost by se nám jistě hodila v praktickém životě: zvolili bychom si $R = 1$ km a žádná vzdálenost by nebyla větší než 2 km. To by se to chodilo!



Obr. 12

Poznámka 6. Analogicky můžeme postupovat i v rovině: Sestrojíme kouli, která se roviny dotýká, a bodu x z roviny E_2 přiřadíme bod x^* na kouli — průsečík spojnice bodů S a x (viz obr. 12; tomuto přiřazení se říká stereografická projekce). Pak položíme pro body x, y z E_2

$$s(x, y) = d(x^*, y^*) \tag{23}$$

kde d je eukleidovská vzdálenost v E_3.

Úloha 2. Označíme-li body $x = [x_1, x_2]$ a $y = [y_1, y_2]$ v rovině E_2 pomocí komplexních čísel, tj. položíme-li $\xi = x_1 + \mathrm{i}x_2$, $\eta = y_1 + \mathrm{i}y_2$, bude

$$d(x, y) = |\xi - \eta|$$

kde vpravo je obvyklý výraz pro absolutní hodnotu komplexního čísla. Dokažte, že vzdálenost s z (23) lze vyjádřit pomocí absolutních hodnot komplexních čísel takto:

$$s(x, y) = \frac{|\xi - \eta|}{\sqrt{(1 + |\xi|^2)(1 + |\eta|^2)}}$$

Známe tedy už čtyři typy „dobře definovaných" vzdáleností v rovině E_2 — vzdálenosti d, p, m a s. Uveďme ještě dva typy vzdáleností v rovině. První typ zobecňuje vzdálenosti d a p.

Příklad 6. Budiž $p \geqq 1$, $x = [x_1, x_2]$, $y = [y_1, y_2]$, a definujme vzdálenost $d_p(x, y)$ takto:

$$d_p(x, y) = (|x_1 - y_1|^p + |x_2 - y_2|^p)^{1/p} \tag{24}$$

Je ihned vidět, že vzdálenosti d a p jsou speciálními případy této vzdálenosti: eukleidovskou vzdálenost dostaneme pro $p = 2$ a „pošťáckou" vzdálenost pro $p = 1$

$$d = d_2\,, \quad p = d_1$$

Lze tedy očekávat, že také vzdálenost d_p bude splňovat podmínky **A**, **B** a **C**. Platnost podmínek **A** a **B** si čtenář jistě dokáže snadno sám. Podmínka **C** plyne z Minkowského nerovnosti

$$\left[\sum_{i=1}^{n}|\gamma_i+\delta_i|^p\right]^{1/p} \leqq \left[\sum_{i=1}^{n}|\gamma_i|^p\right]^{1/p} + \left[\sum_{i=1}^{n}|\delta_i|^p\right]^{1/p} \tag{25}$$

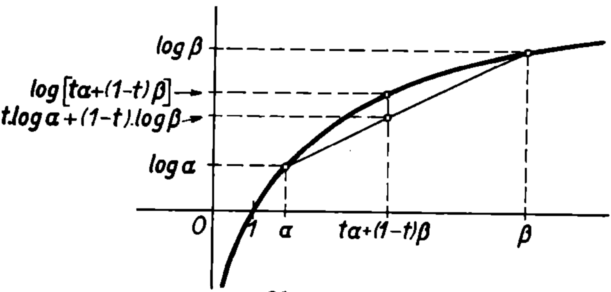
jejímž speciálním případem je nerovnost (10) a která plyne pro $p > 1$ z Hölderovy nerovnosti

$$\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i\beta_i| \leqq \left(\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}|\beta_i|^q\right)^{1/q}, \quad q=\frac{p}{p-1}, \; p>1 \tag{26}$$

V obou nerovnostech je n přirozené číslo, α_i, β_i, γ_i, δ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ jsou libovolná komplexní čísla. Trojúhelníkovou nerovnost

$$d_p(x, z) \leqq d_p(x, y) + d_p(y, z)$$

dostaneme z (25), zvolíme-li $n = 2$, $\gamma_i = x_i - y_i$ a $\delta_i = y_i - z_i$ $(i = 1, 2)$.



Obr. 13

Odbočení třetí. Naznačíme zde důkaz nerovností (25) a (26); je třeba zdůraznit, že jde vlastně o jisté zobecnění postupu z odbočení prvního. Budeme přitom všude předpokládat, že $p > 1$, neboť pro $p = 1$ je (25) jednoduchý důsledek elementární nerovnosti $|a + b| \leqq \leqq |a| + |b|$.

Úsečka, spojující dva body na grafu funkce $y = \log x$, leží pod grafem této funkce; to znamená, že pro $0 < < \alpha \leqq \beta$ platí (viz též obr. 13)

$$(*)\qquad t \log \alpha + (1 - t) \log \beta \leqq \log [t\alpha + (1 - t)\beta]$$

[každý bod úsečky $\overline{\alpha\beta}$ na ose x lze vyjádřit ve tvaru $t\alpha + (1 - t)\beta$, kde $0 \leqq t \leqq 1$, a každý bod, který leží na úsečce spojující body $[\alpha, \log \alpha]$, $[\beta, \log \beta]$, lze vyjádřit ve tvaru $[t\alpha + (1 - t)\beta,\ t \log \alpha + (1 - t) \log \beta]$, $0 \leqq \leqq t \leqq 1$]. Nerovnost (*) lze zapsat takto:

$$\log (\alpha^t \beta^{1-t}) \leqq \log [t\alpha + (1 - t)\beta]\,, \quad 0 \leqq t \leqq 1$$

Odtud ihned plyne, že $\alpha^t\beta^{1-t} \leqq t\alpha + (1 - t)\beta$. Zvolíme-li $t = \frac{1}{p}$, bude $1 - t = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p} = \frac{1}{q}$ a máme tedy nerovnost

$$(27)\qquad \alpha^{\frac{1}{p}}\beta^{\frac{1}{q}} \leqq \frac{1}{p}\alpha + \frac{1}{q}\beta,$$

která platí pro každé $\alpha > 0$ a $\beta > 0$ a pro $p > 1$, $q = \frac{p}{p-1}$. Označíme-li nyní $A = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^p$, $B = \sum_{i=1}^{n} |\beta_i|^q$, předpokládáme-li $A > 0$, $B > 0$ a použijeme-li nerovnosti (27) postupně nejprve pro $\alpha = |\alpha_1|^p/A$, $\beta = = |\beta_1|^q/B$, pak pro $\alpha = |\alpha_2|^p/A$, $\beta = |\beta_2|^q/B$ atd. až pro $\alpha = |\alpha_n|^p/A$, $\beta = |\beta_n|^q/B$, dostaneme n nerovností, jejichž sečtením vznikne nerovnost

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i\beta_i|}{A^{1/p}B^{1/q}} \leqq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

a to už je vlastně nerovnost (26). Je-li $A = 0$ nebo $B = 0$, je též $\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i \beta_i| = 0$ a nerovnost (26) opět platí (podrobně je celý postup pro trochu jednodušší případ proveden v prvním odbočení).

Odvození nerovnosti (27) z (26) je opět podobné postupu z prvního odbočení: Stačí psát

$$C = \sum_{i=1}^{n} |\gamma_i + \delta_i|^p = \sum_{i=1}^{n} |\gamma_i + \delta_i| \cdot |\gamma_i + \delta_i|^{p-1} \leqq$$

$$\leqq \sum_{i=1}^{n} |\gamma_i| \cdot |\gamma_i + \delta_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} |\delta_i| \cdot |\gamma_i + \delta_i|^{p-1}$$

a na obě poslední sumy použít nerovnosti (26) — jednou pro $\alpha_i = |\gamma_i|$, $\beta_i = |\gamma_i + \delta_i|^{p-1}$, podruhé pro $\alpha_i = |\delta_i|$, $\beta_i = |\gamma_i + \delta_i|^{p-1}$.

Proveďte podrobně celý zde naznačený postup včetně diskuse případů $C = 0$, $C > 0$!

Konec třetího odbočení

Příklad 7. Definujme v E_2 vzdálenost $b(x, y)$ bodů $x = [x_1, x_2]$, $y = [y_1, y_2]$ předpisem

$$(28) \qquad b(x, y) = c_1 \frac{|x_1 - y_1|}{1 + |x_1 - y_1|} + c_2 \frac{|x_2 - y_2|}{1 + |x_2 - y_2|}$$

kde c_1 a c_2 jsou dvě kladné konstanty. Také tato vzdálenost vyhovuje podmínkám **A** až **C**. Platnost podmínek **A** a **B** si čtenář opět snadno dokáže sám; trojúhelníková nerovnost **C** plyne z nerovnosti

$$(29) \qquad \frac{|\alpha + \beta|}{1 + |\alpha + \beta|} \leqq \frac{|\alpha|}{1 + |\alpha|} + \frac{|\beta|}{1 + |\beta|}$$

která platí pro každou dvojici reálných čísel α, β. Zvolíme-li zde totiž $\alpha = x_i - y_i$, $\beta = y_i - z_i$ $(i = 1, 2)$, bude $\alpha + \beta = x_i - z_i$, takže máme

$$\frac{|x_i - z_i|}{1 + |x_i - z_i|} \leqq \frac{|x_i - y_i|}{1 + |x_i - y_i|} + \frac{|y_i - z_i|}{1 + |y_i - z_i|}$$

Vynásobíme-li tuto nerovnost kladným číslem c_i, dostaneme dvě nerovnosti (pro $i = 1$ a pro $i = 2$) a po jejich sečtení bude

$$b(x, z) \leqq b(x, y) + b(y, z) .$$

Vzdálenost b má se vzdáleností s společné to, že neroste do nekonečna, když $d(x, y)$ neomezeně roste: je totiž

$$b(x, y) < c_1 + c_2$$

pro všechny body x, y z E_2, neboť $\dfrac{|\alpha|}{1 + |\alpha|} < 1$.

Poznámka 7. Analogickou vzdálenost lze opět definovat na přímce E_1:

$$b(x, y) = c_1 \frac{|x_1 - y_1|}{1 + |x_1 - y_1|}$$

a v E_3:

$$b(x, y) = c_1 \frac{|x_1 - y_1|}{1+|x_1-y_1|} + c_2 \frac{|x_2 - y_2|}{1+|x_2-y_2|} + c_3 \frac{|x_3 - y_3|}{1+|x_3-y_3|}$$

Odbočení čtvrté. Dokažme zde nerovnost (29): (I) Je-li alespoň jedno z čísel α, β rovno nule, platí v (29) rovnost. (II) Jsou-li obě čísla α, β nenulová a mají-li stejné znaménko, lze bez újmy na obecnosti předpokládat, že $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Pak je $|\alpha + \beta| = \alpha + \beta$ a

$$\frac{|\alpha+\beta|}{1+|\alpha+\beta|} = \frac{\alpha+\beta}{1+\alpha+\beta} =$$

$$= \frac{\alpha}{1+\alpha+\beta} + \frac{\beta}{1+\alpha+\beta} < \frac{\alpha}{1+\alpha} + \frac{\beta}{1+\beta} =$$

$$= \frac{|\alpha|}{1+|\alpha|} + \frac{|\beta|}{1+|\beta|},$$

neboť $1 + \alpha + \beta > 1 + \alpha$ čili $\dfrac{1}{1+\alpha+\beta} < \dfrac{1}{1+\alpha}$

a podobně je $1 + \alpha + \beta > 1 + \beta$ čili $\dfrac{1}{1+\alpha+\beta} < \dfrac{1}{1+\beta}$.

(III) Jsou-li obě čísla α, β nenulová a mají-li různá znaménka, můžeme vzhledem k symetrii vzorce (29) v α i β předpokládat, že $|\alpha| \geqq |\beta| > 0$. Pak je $0 \leqq$ $\leqq |\alpha + \beta| < |\alpha|$ a tedy

$$|\alpha+\beta|\,(1+|\alpha|) = |\alpha+\beta| + |\alpha+\beta|\,.\,|\alpha| < |\alpha| +$$
$$+ |\alpha+\beta|\,.\,|\alpha| = |\alpha|\,(1+|\alpha+\beta|)$$

Vynásobíme-li tuto nerovnost kladným číslem $\dfrac{1}{1+|\alpha|} \cdot \dfrac{1}{1+|\alpha+\beta|}$, dostáváme

$$\frac{|\alpha+\beta|}{1+|\alpha+\beta|} \leqq \frac{|\alpha|}{1+|\alpha|}$$

a odtud už (29) plyne.

Konec čtvrtého odbočení

2. kapitola

METRIKA, METRICKÝ PROSTOR

Poznali jsme zatím několik typů vzdáleností v rovině, které vesměs vyhovovaly podmínkám **A** až **C**. Provedeme nyní jisté zevšeobecnění našich poznatků a přeneseme pojem vzdálenosti do obecných, nijak blíže nepopsaných množin.

Definice 1. Budiž M nějaká množina, jejíž prvky budeme označovat x, y, z .... Řekneme, že *na množině M je definována metrika* ϱ, jestliže každé uspořádané dvojici prvků x, y z M je přiřazeno nezáporné číslo, které označíme

$$\varrho(x, y)$$

(= „vzdálenost prvku x od prvku y") a které má tyto vlastnosti:

A $\quad \varrho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

B $\quad \varrho(x, y) = \varrho(y, x)$ pro každé dva prvky x, y z M

C $\quad \varrho(x, z) \leqq \varrho(x, y) + \varrho(y, z)$ pro každé tři prvky x, y, z z M

Poznámka 8. Definice 1 je vlastně zbytečně široká. Stačilo by definovat metriku takto:

Definice 1*. Řekneme, že na množině M je definována metrika, jestliže každé uspořádané dvojici prvků x, y z M je přiřazeno reálné číslo $\varrho(x, y)$, vyhovující těmto podmínkám:

A* $\varrho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

B* $\varrho(x, z) \leqq \varrho(y, x) + \varrho(y, z)$ pro každé tři prvky x, y, z z M

Ukážeme, že pak už jsou splněny všechny podmínky definice 1:

1. Položíme-li v **B*** $x = z$, dostaneme vzhledem k **A***

$$0 = \varrho(x, x) \leqq \varrho(y, x) + \varrho(y, x) = 2\varrho(y, x)$$

Odtud plyne, že $\varrho(y, x) \geqq 0$ pro každé dva prvky x, y z M, tj. že číslo $\varrho(x, y)$, o němž jsme předpokládali pouze to, že je reálné, je dokonce nezáporné.

2. Položíme-li v **B*** $z = y$, dostaneme opět vzhledem k **A***

$$\varrho(x, y) \leqq \varrho(y, x) + \varrho(y, y) = \varrho(y, x)$$

tj.

$$\varrho(x, y) \leqq \varrho(y, x) \text{ pro všechny prvky } x, y \text{ z } M$$

Protože x a y jsou libovolné prvky, můžeme je zaměnit a dostaneme platnou nerovnost

$$\varrho(y, x) \leqq \varrho(x, y)$$

Z obou posledních nerovností už plyne **B**.

3. Protože podle předcházejícího odstavce je splněna podmínka **B**, můžeme v **B*** místo $\varrho(y, x)$ psát $\varrho(x, y)$ a máme trojúhelníkovou nerovnost ve tvaru **C**.

My však budeme používat „názornější" definice 1, ze které více vyniká analogie metriky s eukleidovskou vzdáleností.

Definice 2. Množinu M, opatřenou metrikou („vzdáleností") ϱ, nazveme *metrickým prostorem*. Tento metrický prostor označíme symbolem

$$\{M, \varrho\}$$

Je-li možno na množině M definovat *jinou* metriku σ, tj. lze-li každým dvěma prvkům x, y z M přiřadit nezáporné číslo $\sigma(x, y)$, které má opět vlastnosti **A** až **C**:

$$\sigma(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$
$$\sigma(x, y) = \sigma(y, x)$$
$$\sigma(x, z) \leqq \sigma(x, y) + \sigma(y, z)$$

je tím určen opět metrický prostor

$$\{M, \sigma\}$$

který je *různý* od metrického prostoru $\{M, \varrho\}$, pokud jsou ϱ a σ *různé* metriky, tj. pokud alespoň pro jednu dvojici prvků x, y z M je

$$\varrho(x, y) \neq \sigma(x, y)$$

Proto jsme u označení metrického prostoru explicitně zdůraznili vedle výchozí množiny M *i metriku* ϱ resp. σ.

Příklad 8. Zatím jsme se seznámili s těmito metrickými prostory:

(30) $\{E_2, d\}$

(31) $\{E_2, p\}$ (viz příklad 3)

(32) $\{E_2, m\}$ (viz příklad 4)

(33) $\{E_2, s\}$ (viz poznámku 6)

(34) $\{E_2, d_p\}$ $p > 1$, $p \neq 2$ (viz příklad 6)

(35) $\{E_2, b\}$ (viz příklad 7)

Zde všude je množina M stejná — je to rovina E_2; přesto se jedná o šest různých metrických prostorů, protože použité metriky jsou různé.

Při srovnávání různých metrik bude užitečný tento pojem:

Definice 3. Nechť jsou na množině M definovány dvě metriky ϱ a σ. Řekneme, že tyto metriky jsou ekvivalentní, existují-li dvě konstanty $k > 0$ a $K > 0$ tak, že pro *všechny* prvky x, y z M je

$$k\varrho(x, y) \leqq \sigma(x, y) \leqq K\varrho(x, y) \tag{36}$$

Poznámka 9. Ze vzorce (36) ovšem ihned plyne, že také

$$\frac{1}{K}\sigma(x, y) \leqq \varrho(x, y) \leqq \frac{1}{k}\sigma(x, y) \tag{37}$$

Příklad 9. Metriky d, p, m jsou ekvivalentní metriky na množině E_2; plyne to ze vzorců (17), (18) a (19). Naproti tomu metriky d a s ekvivalentní nejsou: Kdyby totiž byly ekvivalentní, muselo by existovat kladné číslo K tak, že

$$d(x, y) \leqq Ks(x, y)$$

pro všechna x, y z E_2, a tedy by bylo

$$d(x, y) \leqq 2KR \tag{38}$$

pro všechna x, y z E_2. Stačí však zvolit $x = [0, 0]$, $y = [4KR, 0]$. Pak je $d(x, y) = 4KR > 2KR$, což je spor s nerovností (38).

Uvedeme několik příkladů metrických prostorů:

Příklad 10. Budiž M množina všech klubů první ligy kopané v ČSSR v ročníku 1971/72. Těchto klubů je 16 — označme je tedy $a_1, a_2, \ldots, a_{16}$ a budiž b_i ($i = 1, 2, \ldots, 16$) počet bodů, které klub a_i získal v ročníku

Tabulka 1

1. Sp. Trnava	30	17	10	3	60 : 25	44
2. Sn. Bratislava	30	18	6	6	68 : 37	42
3. Dukla Praha	30	14	7	9	56 : 40	35
4. VSS Košice	30	12	11	7	38 : 28	35
5. ZVL Žilina	30	12	7	11	39 : 35	31
6. Sparta	30	13	5	12	50 : 52	31
7. Slavia	30	13	2	15	30 : 37	28
8. Lok. Košice	30	11	6	13	33 : 44	28
9. SU Teplice	30	9	9	12	36 : 37	27
10. AC Nitra	30	10	7	13	31 : 41	27
11. Tatran Prešov	30	10	7	13	31 : 42	27
12. Baník Ostrava	30	10	6	14	39 : 41	26
13. TŽ Třinec	30	9	8	13	41 : 46	26
14. Zbrojovka Brno	30	8	9	13	42 : 61	25
15. Inter Bratislava	30	8	8	14	35 : 42	24
16. J. Trenčín	30	9	6	15	31 : 52	24

1971/72 (viz tabulku 1). Definujme na této množině M „vzdálenost" ϱ dvou „prvků" (klubů) tímto předpisem:

$$\varrho(a_i, a_j) = |b_i - b_j| \tag{39}$$

Takto definovaná „vzdálenost" splňuje podmínky **B** a **C** (dokažte!), nesplňuje však podmínku **A**: „vzdálenost" „prvků" Sparta a ZVL Žilina je nulová, ačkoliv se jedná o různé prvky, čili neplatí implikace

$$\varrho(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$$

V tomto případě se tedy nejedná o metriku, a tedy ani o metrický prostor. — Metrický prostor však tvoří množina N, jejímiž prvky jsou družstva první ligy žen v národní házené, definujeme-li vzdálenost opět vzor-

Tabulka 2

1. Poruba	17	15	2	0	183 : 80	32
2. Náchod	17	13	2	2	171 : 94	28
3. Spartak Praha 4	18	11	4	3	133 : 94	26
4. Dobruška	18	10	1	7	131 : 134	21
5. Žatec	18	9	2	7	146 : 126	20
6. Baník Most	17	7	1	9	89 : 96	15
7. Jihlava	18	5	3	10	116 : 144	13
8. Hošťálkovice	17	5	1	11	84 : 131	11
9. RH Plzeň	18	3	1	14	66 : 122	7
10. TJ VŽKG	18	1	1	16	88 : 186	3

cem (39) na základě tabulky 2. Zde totiž žádná dvě družstva nemají stejný počet bodů, takže skutečně platí

$$\varrho(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$$

a je tedy splněna i podmínka **A**. Tím tedy máme určen metrický prostor $\{N, \varrho\}$.

Příklad 11. Budiž $p \geqq 1$ a budiž M množina všech (nekonečných) posloupností $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ komplexních čísel x_i, které mají tuto vlastnost: řada

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p$$

konverguje. Na této množině M definujme metriku takto: je-li $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ a $y = \{y_i\}_{i=1}^{\infty}$, položíme

$$\varrho(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^p\right)^{1/p} \tag{40}$$

Pak je $\{M, \varrho\}$ metrický prostor: Výraz (40) má smysl (tj. je konečný), neboť platí Minkowského nerovnost

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i + \beta_i|^p\right)^{1/p} \leqq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\beta_i|^p\right)^{1/p} \tag{41}$$

[je to analogie nerovnosti (26), ovšem pro nekonečnou řadu; lze ji z (26) snadno odvodit]. Položíme-li v (41) $\alpha_i = x_i$ a $\beta_i = -y_i$, bude $\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^p = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty$ a také $\sum_{i=1}^{\infty} |\beta_i|^p = \sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p < \infty$, neboť x i y patří do M, a tedy je $\varrho(x, y)$ konečné číslo. Doporučujeme čtenáři, aby si dokázal, že takto definovaná metrika ϱ skutečně má vlastnosti **A** až **C**; trojúhelníková nerovnost plyne z (41), zvolíme-li tam pro $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, $y = \{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ a $z = \{z_i\}_{i=1}^{\infty}$ $\alpha_i = x_i - y_i$ a $\beta_i = y_i - z_i$.

Odbočení páté. Zavedeme si pojem *suprema* a *infima* množiny reálných čísel.

Budiž K libovolná množina reálných čísel. Řekneme, že číslo σ je supremem množiny K, a píšeme

$$\sigma = \sup K$$

jestliže číslo σ má tyto dvě vlastnosti:

(1) pro každé číslo t z K je $t \leqq \sigma$

(2) ke každému kladnému číslu ε existuje číslo t_ε z K (závislé na ε!) tak, že

$$t_\varepsilon > \sigma - \varepsilon$$

Nazveme-li *horní mezí množiny* K každé číslo $\varkappa$, pro které platí:

$$t \leqq \varkappa \quad \text{pro každé } t \text{ z } K$$

je supremum množiny K vlastně „nejmenší horní mez množiny K“.

Pojem suprema je zobecněním pojmu maxima: Je-li množina K konečná, $K = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$, je

$$\sup K = \max \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$$

Rozdíl mezi supremem a maximem je ovšem v tom, že maximum množiny K je *vždy* prvkem množiny K, zatímco supremum σ do množiny K patřit *nemusí*.

Příklad. Zvolíme-li za množinu K otevřený interval $(0,1)$, je $\sup K = 1$ a nepatří do K; maximum množiny K neexistuje. Zvolíme-li za K polootevřený interval $(0,1\rangle$, bude $\sup K = 1$ prvkem množiny K a bude rovno maximu.

Není-li množina K shora omezená, klademe

$$\sup K = +\infty$$

Je-li K nekonečná posloupnost: $K = \{t_i\}_{i=1}^{\infty}$, užíváme místo označení $\sup K$ označení $\sup\limits_i t_i$.

Budiž opět K libovolná množina reálných čísel. Řekneme; že číslo τ je infimem množiny K, a píšeme

$$\tau = \inf K$$

jestliže číslo τ má tyto dvě vlastnosti:

(1*) pro každé číslo t z K je $t \geqq \tau$

(2*) ke každému kladnému číslu ε existuje číslo T_ε z K (závislé na ε!) tak, že

$$T_\varepsilon < \tau + \varepsilon$$

Nazveme-li *dolní mezí množiny* K každé číslo λ, pro které platí:

$$t \geqq \lambda \quad \text{pro každé } t \text{ z } K$$

je infimum množiny K vlastně „největší dolní mez množiny K". .

Pojem infima je opět zobecněním pojmu minima. Pro množiny, které nejsou zdola omezené, klademe

$$\inf K = -\infty$$

Jedna ze základních vět teorie reálných čísel zní takto:

Je-li množina K reálných čísel shora (resp. *zdola*) *omezená, existuje její supremum σ* (resp. *její infimum τ*) *a je určeno jednoznačně.*

Konec pátého odbočení

Příklad 12. Budiž N množina všech omezených posloupností $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$: prvek $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ patří do N, existuje-li číslo c (které může ovšem záviset na prvku x!) tak, že

$$|x_i| \leqq c \quad \text{pro všechna přirozená čísla } i$$

Tato množina je „bohatší" než množina M z příkladu 11, neboť prvek $\{1, 1, 1, \ldots, 1, 1, 1, \ldots\}$ patří do N (stačí zvolit $c = 1$), ale nepatří do M (dokažte!). Definujme na množině N metriku σ takto: pro $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ a $y = \{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ z N je

$$\sigma(x, y) = \sup_i |x_i - y_i| \tag{42}$$

Pak dostáváme metrický prostor $\{N, \sigma\}$:

A Rovnost $x = y$ znamená, že $x_i = y_i$ pro $i = 1, 2,$

.... Zřejmě je $\sigma(x, y) \geqq 0$ a $\sigma(x, y) = 0$ pro $x = y$. Je-li naopak $\sigma(x, y) = 0$, je též $\sup_i |x_i - y_i| = 0$, a protože $|x_j - y_j| \leqq \sup_i |x_i - y_i|$ pro každé přirozené číslo j, je $x_j = y_j$ pro $j = 1, 2, \ldots$ čili $x = y$.

B $$\sigma(x, y) = \sup_i |x_i - y_i| = \sup_i |-(y_i - x_i)| = \\ = \sup_i |y_i - x_i| = \sigma(y, x)$$

C Je $$|x_i - z_i| = |(x_i - y_i) + (y_i - z_i)| \leqq \\ \leqq |x_i - y_i| + |y_i - z_i| \leqq \\ \leqq \sup_i |x_i - y_i| + \sup_i |y_i - z_i| = \\ = \sigma(x, y) + \sigma(y, z)$$

Podle definice suprema je pak také

$$\sigma(x, z) = \sup_i |x_i - z_i| \leqq \sigma(x, y) + \sigma(y, z)$$

Číslo $\sigma(x, y)$ z (42) má přitom smysl, neboť $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ a $y = \{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ patří do N, čili $|x_i| \leqq C$, $|y_i| \leqq D$, a proto je

$$\sup_i |x_i - y_i| \leqq \sup_i \{|x_i| + |y_i|\} \leqq C + D < \infty$$

Příklad 13. Budiž Q množina všech nekonečných posloupností $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$. Také zde lze zavést metriku: stačí položit pro x a y z Q

$$\tau(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x_i - y_i|}{1 + |x_i - y_i|} \tag{43}$$

a $\{Q, \tau\}$ je metrický prostor. Především má číslo (43) smysl, neboť je

$$\tau(x, y) \leqq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1$$

Čtenář si snadno sám dokáže, že τ splňuje podmínky **A** a **B** (u podmínky **A** je třeba využít toho, že nekonečná řada nezáporných sčítanců má součet rovný nule tehdy a jen tehdy, jsou-li nulové všechny sčítance), podmínka **C** plyne z nerovnosti (29) podobně jako v příkladu 7.

Příklad 14. Budiž P množina všech polynomů jedné proměnné t, definovaných na intervalu $\langle 0,1 \rangle$. Prvky x z P tedy mají tvar

$$x = x(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0$$

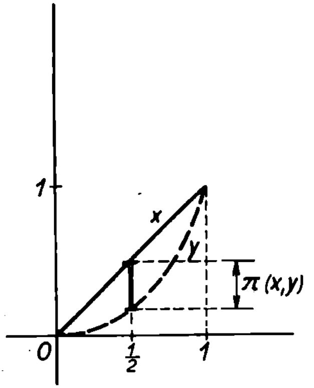
kde n je přirozené číslo, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ jsou komplexní čísla a proměnná t probíhá interval $\langle 0,1 \rangle$. Definujme na množině P metriku π takto: pro $x = x(t)$ a $y = y(t)$ z P je

$$\pi(x, y) = \max_{0 \leqq t \leqq 1} |x(t) - y(t)| \text{ *)} \tag{44}$$

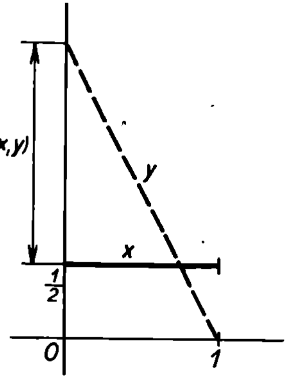
Na obrázcích 14 a 15 jsou znázorněny dva speciální případy: V prvém je $x = x(t) = t$ a $y = y(t) = t^2$ a $|x(t) - y(t)| = t - t^2$, takže $\pi(x, y) = \left|x\left(\frac{1}{2}\right) - y\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$; v druhém je $x = x(t) = \frac{1}{2}$ a $y = y(t) = -2t + 2$ a $\pi(x, y) = \max_{0 \leqq t \leqq 1} \left|-2t + \frac{3}{2}\right| = \frac{3}{2}$.

---

*) Symbolem $\max_{0 \leqq t \leqq 1} g(t)$ nazýváme největší ze všech čísel tvaru $g(t)$, když t probíhá interval $\langle 0,1 \rangle$. Je-li funkce g polynom, existuje skutečně číslo t_0 z intervalu $\langle 0,1 \rangle$ takové, že $\max_{0 \leqq t \leqq 1} g(t) = g(t_0)$; například pro funkci $g(t) = t - t^2$ je to číslo $t_0 = \frac{1}{2}$.



Obr. 14



Obr. 15

Také zde dostáváme metrický prostor $\{P, \pi\}$:

A Rovnost $x = y$ znamená, že $x(t) = y(t)$ pro každé t z intervalu $\langle 0,1 \rangle$. Ze vzorce (44) je tedy zřejmé, že $\pi(x, y) \geqq 0$ a že $\pi(x, y) = 0$ pro $x = y$. Je-li naopak $\pi(x,y) = 0$, plyne z nerovnosti $|x(s) - y(s)| \leqq \leqq \max\limits_{0 \leqq t \leqq 1} |x(t) - y(t)|$, že $x(s) = y(s)$ pro každé s z intervalu $\langle 0,1 \rangle$, a tedy je $x = y$.

B Symetrie metriky π je zřejmá

C Pro každé t z intervalu $\langle 0,1 \rangle$ je $|x(t) - z(t)| = = |[x(t) - y(t)] + [y(t) - z(t)]| \leqq \{|x(t) - y(t)| + + |y(t) - z(t)|\} \leqq \max\limits_{0 \leqq t \leqq 1} |x(t) - y(t)| + + \max\limits_{0 \leqq t \leqq 1} |y(t) - z(t)| = \pi(x, y) + \pi(y, z)$. Je proto také
$\pi(x, z) = \max\limits_{0 \leqq t \leqq 1} |x(t) - z(t)| \leqq \pi(x, y) + \pi(y, z)$

Poznali jsme tedy několik nových metrických prostorů. Přitom si pozorný čtenář jistě všiml, že některé metrické prostory, se kterými jsme se seznámili dříve, byly speciálními případy metrických prostorů zde uvedených.

Zvolíme-li v příkladech 11, 12 a 13 speciální podmnožinu těch posloupností $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, které mají všechny členy počínaje třetím rovné nule, tj. množinu posloupností tvaru $\{x_1, x_2, 0, 0, 0, \ldots, 0, \ldots\}$, kde navíc čísla x_1 a x_2 jsou reálná, dostaneme z metrického prostoru $\{M, \varrho\}$ (příklad 11) metrický prostor, který lze ztotožnit s metrickým prostorem $\{\mathsf{E}_2, d\}$ (při volbě $p = 2$) resp. s metrickým prostorem $\{\mathsf{E}_2, p\}$ (při volbě $p = 1$) resp. s metrickým prostorem $\{\mathsf{E}_2, d_p\}$ (pro obecné $p > 1$). Z metrického prostoru $\{N, \sigma\}$ (příklad 12) dostaneme touto cestou metrický prostor $\{\mathsf{E}_2, m\}$ (dokažte!) a z metrického prostoru $\{Q, \tau\}$ (příklad 13) dostaneme metrický prostor $\{\mathsf{E}_2, b\}$ $\left(\text{se speciální volbou } c_1 = \frac{1}{2},\right.$ $\left.c_2 = \frac{1}{4}\right)$. Je to důsledek tohoto obecného tvrzení:

Věta 1. *Budiž $\{M, \varrho\}$ metrický prostor a N podmnožina množiny $M: N \subset M$. Uvažujme metriku $\varrho(x, y)$ jen pro prvky x a y z množiny N. Pak je také $\{N, \varrho\}$ metrický prostor.*

Důkaz je jednoduchý: Metriku $\varrho(x, y)$, definovanou původně pro x, y z M, uvažujeme tentokrát jen pro x a y z „menší" množiny N. I pak budou splněny podmínky **A** až **C**, ovšem všude pro x, y a z z N; to má smysl, neboť pak x, y a z patří také do M a tam vlastnosti **A** až **C** splněny jsou.

Příklad 15. Pro množiny M, N, Q z příkladů 11, 12, 13 platí

$$M \subset N \subset Q$$

Vzhledem k větě 1 lze tedy utvořit metrické prostory

$$\{N, \tau\} \text{ a } \{M, \tau\} \text{ (pomocí metrického prostoru } \{Q, \tau\})$$

a metrický prostor

$$\{M, \sigma\} \text{ (pomocí metrického prostoru } \{N, \sigma\})$$

Podobně jako v případě roviny E_2 dostáváme tak různé metrické prostory

$$\{M, \varrho\}, \ \{M, \sigma\} \ \text{ a } \ \{M, \tau\}$$

resp.

$$\{N, \sigma\} \ \text{ a } \ \{N, \tau\}$$

jejichž základem je vždy táž množina M resp. N.

Viděli jsme, že metriku lze zúžit z množiny M na „menší" množinu $N \subset M$. Obrácený postup ovšem nemusí vést k cíli — *rozšiřování* metriky z množiny M na širší množinu nemusí mít vždy smysl.

Příklad 16. V příkladu 12 jsme ukázali, že metrika ϱ z příkladu 11 nemusí mít smysl pro prvky z množiny N, která je „širší" než původní množina M z příkladu 11: Prvky $x = \{0, 0, 0, \ldots\}$ a $y = \{1, 1, 1, \ldots\}$ patří do N, ale číslo $\varrho(x, y)$ nemá smysl, neboť příslušná řada v (40) nekonverguje.

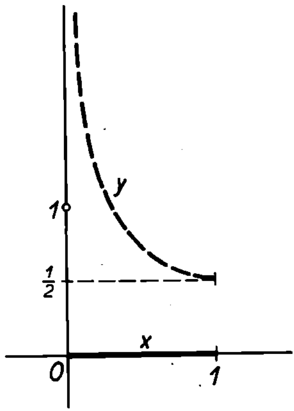
Příklad 17. Kdybychom místo množiny P z příkladu 14 uvažovali množinu F všech funkcí, definovaných na intervalu $\langle 0,1 \rangle$, nelze utvořit metrický prostor $\{F, \pi\}$

s metrikou π podle (44). Stačí totiž zvolit dvě funkce z množiny F:

$$x = x(t) = 0 \quad \text{pro všechna } t \text{ z intervalu } \langle 0,1 \rangle$$

$$y = y(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2t} & \text{pro} \quad t > 0 \\ 1 & \text{pro} \quad t = 0 \end{cases}$$

(viz obr. 16); zde rozdíl $|x(t) - y(t)|$ roste do nekonečna,



Obr. 16

když se t blíží k nule, takže výraz $|x(t) - y(t)|$ nemá pro t z intervalu $\langle 0,1 \rangle$ žádné maximum.

Poznali jsme tedy řadu množin, na nichž jsme zavedli různým způsobem metriku. Vzniká nyní přirozená otázka, zda pro libovolnou množinu M lze definovat metriku ϱ, která by měla vlastnosti **A** až **C**. Odpověď je kladná:

Věta 2. *Budiž M množina. Pak existuje metrika ϱ tak, že $\{M, \varrho\}$ je metrický prostor.*

Důkaz provedeme tím, že vhodnou metriku prostě sestrojíme. Definujme ϱ takto:

$$\varrho(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x = y; \quad x, y \text{ z } M \\ 1 & \text{pro } x \neq y; \quad x, y \text{ z } M \end{cases} \tag{45}$$

Takto definovaný výraz ϱ má skutečně vlastnosti **A** až **C**:

A plyne přímo z definice čísla ϱ: $\varrho(x, y) = 0$ tehdy a jen tehdy, je-li $x = y$

B symetrie je též zřejmá přímo z definice čísla $\varrho(x, y)$

C je-li $x = z$, je $\varrho(x, z) = 0$, a je tedy vždy $0 \leqq \leqq \varrho(x, y) + \varrho(y, z)$

je-li $x \neq z$, je $\varrho(x, z) = 1$; jsou nyní tyto možnosti:

(a) $y \neq x$ a současně $y \neq z$; pak je $\varrho(x, y) = = \varrho(y, z) = 1$ a trojúhelníková nerovnost platí, neboť má tvar $1 \leqq 1 + 1 = 2$

(b) je buď $y \neq x$ a $y = z$, nebo $y = x$ a $y \neq z$; pak je jedno z čísel $\varrho(x, y)$, $\varrho(y, z)$ rovno nule a druhé je rovno jedné a trojúhelníková nerovnost opět platí, neboť má tvar $1 \leqq 0 + 1 = = 1$ resp. $1 \leqq 1 + 0 = 1$

Větu 2 bychom mohli vyslovit též takto: *Každou množinu lze metrizovat* (tj. lze na ní definovat metriku). My si však termín *metrizovatelnost* vyhradíme pro poněkud jiný pojem (viz str. 112).

Metrika (45) z věty 1 je ovšem velmi „chudá" — pro vzdálenost dvou prvků máme jen dvě možnosti: 0 a 1. Metriku (45) lze pochopitelně zavést i v rovině E_2 a srovnání s eukleidovskou metrikou d ukazuje, oč se ochuzujeme. Metrika ϱ z (45) je také nejjednodušší možnou metrikou a má především teoretický význam — v dalším uvidíme, že při jejím použití nedávají pojmy, které zavedeme, nic zajímavého; prostor opatřený touto metrikou je velmi „fádní". Věta 2 ovšem opravňuje existenci této metriky a dává jí smysl.

V každé množině existuje tedy alespoň jedna metrika — triviální metrika ϱ z (45). Zbývá ještě odpovědět na tuto otázku:

Kolik metrik existuje na dané množině M?

Odpověď zní: *Obsahuje-li množina M alespoň dva různé prvky, je metrik nekonečně mnoho.* Plyne to z tohoto tvrzení:

Věta 3. *Je-li ϱ metrika na množině M, je též výrazem*

$$\varrho_1(x, y) = \frac{\varrho(x, y)}{1 + \varrho(x, y)} \tag{46}$$

definována metrika.

Důkaz přenecháváme čtenáři. To, že ϱ_1 má vlastnosti **A** a **B**, je zřejmé ihned ze vzorce (46); trojúhelníková nerovnost **C** se dokáže pomocí nerovnosti (29).

Protože pro $\alpha > 0$ je $\alpha \neq \dfrac{\alpha}{1 + \alpha}$, je metrika $\varrho_1(x, y)$ různá od metriky $\varrho(x, y)$, existují-li v množině M dva různé body. Pro $x \neq y$ je totiž podle **A** $\varrho(x, y) > 0$ a tedy $0 < \varrho_1(x, y) \neq \varrho(x, y)$. Dokonce platí

$$\varrho_1(x, y) \leqq \varrho(x, y)$$

přičemž rovnost platí jen tehdy, je-li $\varrho(x, y) = 0$ [dokažte to na základě vzorce (46)!]. Nyní lze utvořit další metriku ϱ_2 na M předpisem

$$\varrho_2(x, y) = \frac{\varrho_1(x, y)}{1 + \varrho_1(x, y)}$$

která je opět různá od metriky ϱ_1, a tak můžeme pokračovat v utváření různých metrik podle rekurentního vzorce

$$\varrho_{n+1}(x, y) = \frac{\varrho_n(x, y)}{1 + \varrho_n(x, y)}, \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

Dostáváme tak nekonečnou posloupnost různých metrik na téže množině M, pro něž platí

$$\varrho_{n+1}(x, y) \leqq \varrho_n(x, y) \leqq \ldots \leqq \varrho_1(x, y) \leqq \varrho(x, y)$$

a tedy i posloupnost různých metrických prostorů

$$\{M, \varrho\}, \{M, \varrho_1\}, \{M, \varrho_2\}, \ldots, \{M, \varrho_n\}, \ldots$$

Úloha 3. Vyšetřete, zda pro $x = [x_1]$ a $y = [y_1]$ z E_1 je výrazem

$$\varrho(x, y) = \left| \frac{x_1}{1 + \sqrt{(1 + x_1^2)}} - \frac{y_1}{1 + \sqrt{(1 + y_1^2)}} \right|$$

definována metrika na E_1.

Úloha 4. Nechť je ϱ metrika na množině M. Rozhodněte, zda výrazy σ, τ a ω, definované vzorci

$$\sigma(x, y) = [\varrho(x, y)]^2$$
$$\tau(x, y) = \min \{\varrho(x, y), 1\}$$
$$\omega(x, y) = \sqrt{\varrho(x, y)}$$

jsou také metrikami na M, tj. zda vyhovují podmínkám **A**, **B** a **C**. Podobně rozhodněte, zda jsou metrikami na M výrazy

$$\varrho(x, y) = \varrho_1(x, y) + \varrho_2(x, y)$$
$$\varkappa(x, y) = \sqrt{[\varrho_1(x, y)]^2 + [\varrho_2(x, y)]^2}$$
$$\lambda(x, y) = \max [\varrho_1(x, y), \varrho_2(x, y)]$$

víte-li, že ϱ_1 a ϱ_2 jsou dvě metriky na množině M.

Vraťme se k eukleidovské rovině E_2. Viděli jsme už v kapitole 1, že třeba mezi eukleidovskou metrikou d a metrikou b z vzorce (28) byl podstatný rozdíl spočívající v tom, že číslo $b(x, y)$ nepřevýšilo při *žádné* volbě prvků x a y jisté předem dané kladné číslo, zatím co číslo $d(x, y)$ mohlo být při vhodné volbě prvků x a y libovolně velké. To nás vede k zavedení nového pojmu:

Definice 4. Budiž $\{M, \varrho\}$ metrický prostor. Existuje-li kladné číslo K tak, že

(47) $\qquad \varrho(x, y) \leqq K \quad$ pro všechna x, y z M

řekneme, že metrický prostor $\{M, \varrho\}$ je omezený. Neexistuje-li takové číslo K [tj. může-li $\varrho(x, y)$ nabývat libovolně velkých hodnot], řekneme, že metrický prostor $\{M, \varrho\}$ je neomezený.

Příklad 18. Metrické prostory $\{\mathsf{E}_2, d\}$, $\{\mathsf{E}_2, p\}$, $\{\mathsf{E}_2, m\}$,

$\{E_2, d_p\}$ jsou neomezené, metrické prostory $\{E_2, s\}$ a $\{E_2, b\}$ jsou omezené (určete odpovídající číslo K!). Metrický prostor $\{Q, \tau\}$ z příkladu 13 je omezený.

Příklad 19. Metrický prostor $\{P, \pi\}$ z příkladu 14 je neomezený: Je-li totiž K libovolné kladné číslo, stačí v P zvolit prvky $x = x(t) = 0$ a $y = y(t) = 2Kt$ $(0 \leq \leq t \leq 1)$ a bude

$$\pi(x, y) = \max_{0 \leq t \leq 1} |2Kt| = 2K > K$$

Úloha 5. Dokažte (nalezením vhodných prvků x, y), že metrické prostory $\{M, \varrho\}$ z příkladu 11 a $\{N, \sigma\}$ z příkladu 12 jsou neomezené.

Nechť se množina M skládá jen z konečného počtu prvků $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Pak je konečná také množina vzdáleností jednotlivých prvků množiny M mezi sebou: je tvořena čísly

$$\varrho(x_i, x_k), \quad i, k = 1, 2, \ldots, n$$

Mezi konečným počtem těchto konečných čísel najdeme největší, a to pak zvolíme za konstantu K z (47). Tím jsme dokázali, že *má-li množina M jen konečný počet prvků, je metrický prostor $\{M, \varrho\}$ omezený.*

Příklad 20. Metrický prostor $\{N, \varrho\}$ z příkladu 10 je tedy omezený.

Všimněte si, že v předcházející úvaze nezáleželo vůbec na tom, jaká byla uvažovaná metrika ϱ. Příklad 18 ovšem ukazuje, že u množiny M, která má *nekonečně mnoho* prvků, hraje už charakter metriky podstatnější roli. Pro každou množinu M lze sestrojit takovou metriku, aby vzniklý metrický prostor byl omezený. Ukazují to tyto dva příklady:

Příklad 21. Metrický prostor $\{M, \varrho\}$, kde M je libovolná množina a ϱ je triviální metrika daná vzorcem (45), je omezený; stačí zvolit $K = 1$.

Příklad 22. Budiž $\{M, \varrho\}$ neomezený metrický prostor a budiž ϱ_1 metrika na M, určená vzorcem (46). Pak je $\{M, \varrho_1\}$ omezený metrický prostor. Plyne to z věty 3 a opět lze zvolit $K = 1$.

Metrika je zobecněním vzdálenosti dvou bodů. V životě však dovedeme měřit také vzdálenost bodu od množiny a vzdálenost dvou množin, a metrika nám umožní zavést tyto pojmy i v obecném metrickém prostoru.

Definice 5. Budiž $\{M, \varrho\}$ metrický prostor a budiž S podmnožina množiny M. *Vzdáleností prvku x z M od množiny S* (v $\{M, \varrho\}$) nazýváme číslo $\varrho(x, S)$, určené takto:

$$\varrho(x, S) = \inf_{y \in S} \varrho(x, y) \text{ *)}$$

Buďte S a T dvě podmnožiny množiny M. *Vzdáleností množin S a T* (v $\{M, \varrho\}$) nazýváme číslo $\varrho(T, S)$ určené takto:

$$\varrho(T, S) = \inf_{x \in T} \varrho(x, S) \text{ **)}$$

*) Poslední výraz je třeba chápat jako infimum množiny K, tvořené všemi možnými čísly tvaru $\varrho(x, y)$, kdy y leží v S (viz též odbočení páté, str. 39).

**) Poslední symbol je třeba chápat jako infimum množiny K^*, tvořené všemi možnými čísly tvaru $\varrho(x, S)$ pro x z T.

Poznámka 10. Vzdálenost $\varrho(T, S)$ množin T a S bychom mohli definovat též takto:

$$\varrho(T, S) = \inf_{x \in T, y \in S} \varrho(x, y)$$

tj. jako infimum množiny K^{**}, tvořené všemi čísly tvaru $\varrho(x, y)$, kde x probíhá množinu T a y množinu S. — Lze také definovat *vzdálenost množiny S od prvku x* z M (v $\{M, \varrho\}$) vzorcem

$$\varrho(S, x) = \inf_{y \in S} \varrho(y, x)$$

Vzhledem k vlastnosti **B** metriky ϱ je zřejmě

$$\varrho(S, x) = \varrho(x, S)$$

Úloha 6. Ukažte, že $\varrho(x, S) \geqq 0$, $\varrho(T, S) \geqq 0$ a že $\varrho(T, S) = \varrho(S, T)$. Jsou-li S, T a P tři podmnožiny množiny M, platí „trojúhelníková nerovnost“

$$\varrho(S, T) \leqq \varrho(S, x) + \varrho(x, T)$$

pro každý bod x z množiny P (a dokonce pro každý bod x z M); *neplatí* však „trojúhelníková nerovnost“ tvaru

$$\varrho(S, T) \leqq \varrho(S, P) + \varrho(P, T)$$

(Návod: Stačí zvolit množiny S a T tak, aby měly kladnou vzdálenost, a za množinu P zvolit množinu, která má společné body jak s množinou S, tak s množinou T. Dále pak užijeme následujícího příkladu 25.)

Příklad 23. Patří-li prvek x do množiny S, je $\varrho(x, S) = 0$. Stačí totiž zvolit za y prvek x — pak je $\varrho(x, y) = \varrho(x, x) = 0$, a pro ostatní prvky y z M, které jsou různé od prvku x, je podle vlastnosti **A** $\varrho(x, y) > 0$.

Příklad 24. Uvažujme metrický prostor $\{M, \varrho\}$, kde M je libovolná množina a ϱ je metrika daná vzorcem (45). Tam je pro $x \neq y$ $\varrho(x, y) = 1$. Je-li nyní S podmnožina množiny M a je-li x prvek množiny M, který *neleží* v S, je $\varrho(x, y) = 1$ pro *všechny* prvky y z S, a je tedy také $\varrho(x, S) = 1$. Leží-li prvek x v množině S, je podle předcházejícího příkladu $\varrho(x, S) = 0$.

Příklad 25. Nechť jsou S a T dvě podmnožiny množiny M, které mají *společný bod* x_0. Pak je jejich vzdálenost nulová: $\varrho(S, T) = 0$. Protože x_0 leží v S, je totiž podle příkladu 23 $\varrho(x_0, S) = 0$; pro ostatní body x z T je $\varrho(x, S) \geqq 0$, a tedy je $\inf\limits_{x \in T} \varrho(x, S) = 0$.

Poznámka 11. Tvrzení z příkladů 23 a 25 lze zapsat takto:

(a) x leží v $S \Rightarrow \varrho(x, S) = 0$

(b) S a T mají společný bod $\Rightarrow \varrho(S, T) = 0$

Tyto implikace *nelze* obrátit — ukážeme to na příkladech v následující kapitole: k implikaci (a) viz příklad 29, k implikaci (b) viz příklad 34.

3. kapitola

OTEVŘENÉ MNOŽINY

Metrika je zobecněním pojmu eukleidovské vzdálenosti v E_2 nebo v E_3, je přenesením tohoto pojmu na obecné množiny. Můžeme proto naopak v těchto obecných množinách zavést pojmy, které známe důvěrně z roviny či z prostoru.

Budiž $a = [a_1, a_2, a_3]$ resp. $a = [a_1, a_2]$ bod v E_3 resp. v E_2 a budiž r kladné číslo. *Koule* (v E_3) resp. *kruh* (v E_2) se středem v bodě a a o poloměru r je množina těch bodů x z E_3 resp. z E_2, které mají od bodu a vzdálenost (eukleidovskou!) menší než r: jsou to ty body x, pro něž platí

$$d(x, a) < r$$

Ty body x, pro které platí

$$d(x, a) = r$$

tvoří *kulovou plochu* (sféru) v E_3 resp. *kružnici* v E_2.

Při definici koule a sféry je tedy důležitý pojem vzdálenosti. Použitím metriky můžeme analogické pojmy zavést v metrickém prostoru.

Definice 6. Budiž $\{M, \varrho\}$ metrický prostor, a prvek množiny M a r kladné číslo. Množinu těch prvků x z M, které vyhovují nerovnosti

$$\varrho(x, a) < r \tag{48}$$

označíme $K(a, r)$ a nazveme *otevřenou koulí* (v metrickém prostoru $\{M, \varrho\}$) o středu a a o poloměru r. — Množinu těch prvků x z M, pro které platí

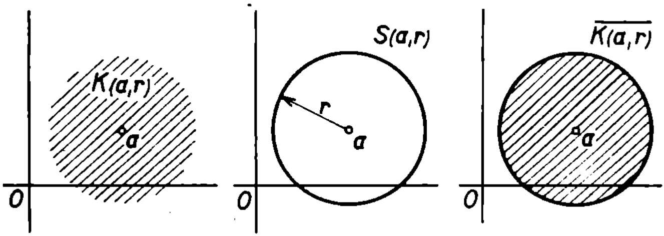
$$\varrho(x, a) = r \tag{49}$$

označíme $S(a, r)$ a nazveme *sférou* (v metrickém prostoru $\{M, \varrho\}$) o středu a a o poloměru r. — Množinu těch prvků x z M, pro které platí

$$\varrho(x, a) \leqq r \tag{50}$$

označíme $\overline{K(a, r)}$ a nazveme *uzavřenou koulí* (v metrickém prostoru $\{M, \varrho\}$) o středu a a o poloměru r.

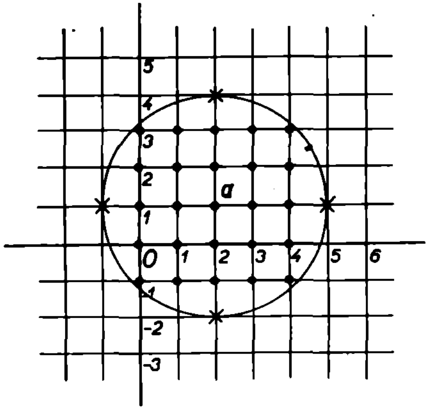
Příklad 26. V metrickém prostoru $\{E_2, d\}$ je $K(a, r)$ kruh (přesněji v n i t ř e k kruhu) o středu a a o poloměru



Obr. 17

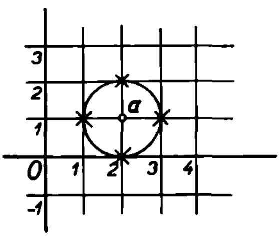
r, $S(a, r)$ je kružnice, která tento kruh ohraničuje, a $\overline{K(a, r)}$ je kruh *včetně* kružnice (viz obr. 17).

Příklad 27. Budiž M množina těch bodů $x = [x_1, x_2]$ z roviny E_2, jejichž souřadnice x_1, x_2 jsou *celá* čísla. Pak je $M \subset E_2$ a podle věty 1 je $\{M, d\}$ opět metrický prostor. Zvolme za bod a bod [2,1]. Množina $K(a, 3)$ se skládá z 25 bodů, znázorněných na obr. 18 kroužkem, množina $S(a, 3)$ pak ze čtyř bodů znázorněných křížkem.

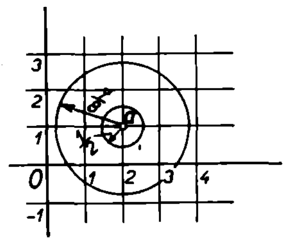


Obr. 18

Množina $K(a, 1)$ se skládá z *jediného* bodu a, množina $S(a, 1)$ pak ze čtyř bodů [1,1], [2,2], [3,1] a [2,0] (viz obr. 19). Množina $K\left(a, \frac{1}{2}\right)$ obsahuje opět



Obr. 19



Obr. 20

jen bod a, množina $S\left(a, \frac{1}{2}\right)$ pak neobsahuje *žádný* bod, stejně jako množina $S\left(a, \frac{7}{8}\right)$ (viz obr. 20).

Příklad 28. Uvažujme metrický prostor $\{M, d\}$ z předcházejícího příkladu. Pro dva *různé* body y, z z M je zřejmě $d(y, z) \geqq 1$. Uvažujme množinu $S \subset M$ a vzdálenost $d(x, S)$ bodu x z M od podmnožiny S (viz definici 5). Pak jsou dvě možnosti: (α) buď je x z S, a pak je podle příkladu 23 $d(x, S) = 0$, (β) nebo prvek x nepatří do S, a pak je $d(x, y) \geqq 1$ pro každé $y \in S$, a tedy také $d(x, S) \geqq 1$. Situace je tedy podobná jako v příkladu 24.

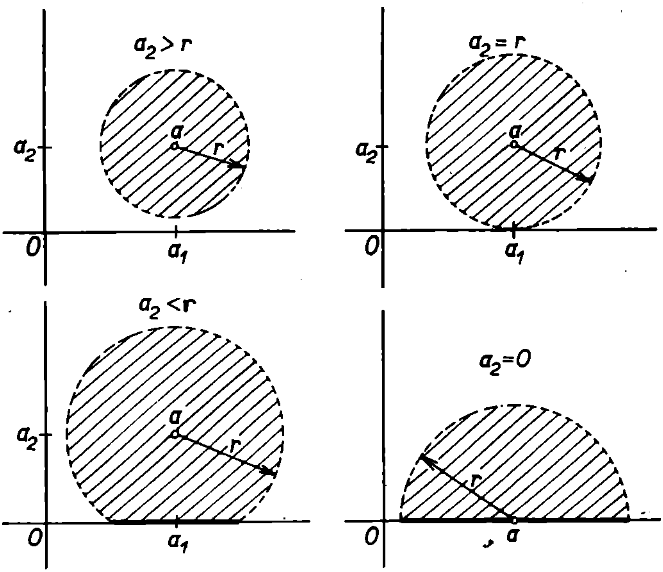
Příklad 29. Uvažujme v $\{E_3, d\}$ otevřenou kouli $K(a, r)$, kde zvolíme $a = [0,0,0]$, a označme tuto otevřenou kouli písmenem S. Pak bod $x = [r, 0, 0]$ ($r > 0$!) *neleží* v S; přesto však je

$$d(x, S) = 0$$

Dokážeme to: Je $d(x, y) \geqq 0$ pro všechna y z S, a tedy je také $d(x, S) \geqq 0$. Kdyby bylo $d(x, S) = \alpha > 0$, muselo by být $d(x, y) \geqq \alpha$ pro *všechna* y z S. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že je $\alpha < r$. Zkoumejme nyní bod $y = \left[r - \frac{1}{2}\alpha, 0, 0\right]$; tento bod leží v S, neboť $d(y, a) = r - \frac{1}{2}\alpha < r$. Přitom však je $d(x, y) = \sqrt{\left[r - \left(r - \frac{1}{2}\alpha\right)\right]^2} = \frac{1}{2}\alpha$, tj. našli jsme bod y v S, který je od bodu x vzdálen o méně než α. To je spor s tím, že $d(x, y) \geqq \alpha > 0$ pro všechna y z S, a tedy musí být $\alpha = 0$, tj. $d(x, S) = 0$. — Tento příklad tedy ukazuje, že implikaci (a) v poznámce 11 nelze obrátit.

Poznámka 12. V dalším budeme obvykle místo termínu „otevřená koule" užívat prostě termínu „koule", zatím co u uzavřené koule $\overline{K(a, r)}$ uzavřenost vždy zdůrazníme. — Upozorněme též, že množina $K(a, r)$ se často nazývá *okolím* (nebo přesněji *r-okolím*) bodu a (v metrickém prostoru $\{M, \varrho\}$).

Příklad 30. Budiž M množina těch bodů $x = [x_1, x_2]$ z E_2, pro jejichž druhou souřadnici platí $x_2 \geqq 0$ (množina M je tedy horní polorovina včetně osy x_1). Podle věty 1 je $\{M, d\}$ opět metrický prostor; geometrický tvar



Obr. 21

koule $K(a, r)$ v $\{M, d\}$ závisí na poloze bodu a (viz obr. 21): je-li $a = [a_1, a_2]$ a $a_2 \geqq r$, tvoří kouli $K(a, r)$ celý vnitřek kruhu; je-li $0 < a_2 < r$, tvoří kouli $K(a, r)$ jen část vnitřku tohoto kruhu a do $K(a, r)$ patří i body na tětivě; je-li konečně $a_2 = 0$, tvoří kouli $K(a, r)$ vnitřek půlkruhu (opět včetně průměru).

Příklad 31. Budiž M libovolná množina a ϱ metrika z věty 2, daná vzorcem (45). Pak se koule $K(a, r)$ skládá

(α) jen z bodu a, je-li $r \leqq 1$

(β) ze *všech* bodů množiny M, je-li $r > 1$

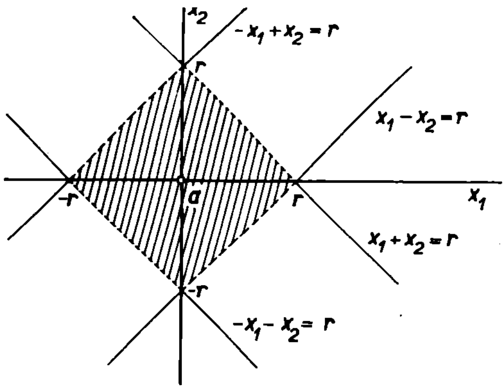
Sféra $S(a, r)$ neobsahuje *žádný* bod, je-li $r < 1$ nebo $r > 1$; je-li $r = 1$, patří do $S(a, r)$ [tj. do $S(a, 1)$] všechny body množiny M *vyjma* bod a samotný.

Protože se celý život pohybujeme v prostoru E_3 a jsme zvyklí na eukleidovskou vzdálenost $d(x, y)$, žijeme v představě, že koule musí být vždy „kulatá“. Tuto představu trochu narušily předcházející příklady. 27, 30 a 31. Ale i v rovině, v níž vzdálenost měříme poměrně přirozenou „pošťáckou“ metrikou $p(x, y)$, ztrácí koule svůj „kulatý“ charakter:

Příklad 32. Uvažujme v $\{\mathsf{E}_2, p\}$ bod $a = [0, 0]$. Koule $K(a, r)$ je pak tvořena všemi těmi body $x = [x_1, x_2]$, pro něž je

$$|x_1| + |x_2| < r$$

Snadný rozbor této nerovnosti ukazuje, že jí vyhovují ty body $[x_1, x_2]$, které leží v oboru ohraničeném přímkami $x_1 + x_2 = r$, $x_1 - x_2 = r$, $-x_1 + x_2 = r$ a $-x_1 - x_2 = r$ (viz obr. 22). V $\{\mathsf{E}_2, p\}$ je tedy koule $K(a, r)$ *čtverec* (přesněji v n i t ř e k čtverce) o straně $r\sqrt{2}$, který má střed v bodě a a jehož úhlopříčky jsou rovnoběžné se souřadnými osami. Sféra $S(a, r)$ je pak tvořena obvodem tohoto čtverce.



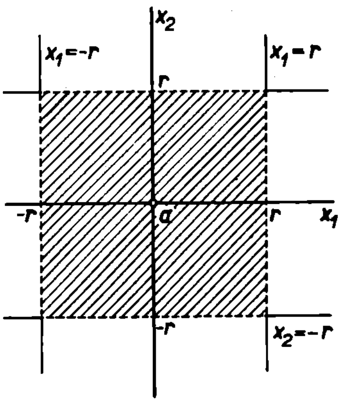
Obr. 22

Příklad 33. Podobně jako v $\{E_2, p\}$ má také koule v metrickém prostoru $\{E_2, m\}$ „hranatý" tvar: Zvolíme-li bod a jako v příkladu 32, bude koule $K(a, r)$ tvořena těmi body $x = [x_1, x_2]$, pro něž je

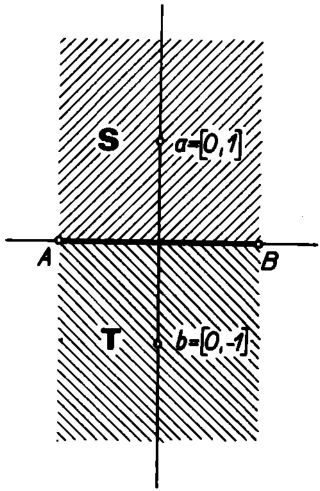
$$\max(|x_1|, |x_2|) < r$$

této nerovnosti vyhovují všechny ty body $[x_1, x_2]$, které leží v oboru ohraničeném přímkami $x_1 = r$, $x_1 = -r$, $x_2 = r$ a $x_2 = -r$ (viz obr. 23). V $\{E_2, m\}$ je tedy koule $K(a, r)$ opět *čtverec* o straně $2r$, který má střed v bodě a a jehož strany jsou rovnoběžné se souřadnými osami. Sféra $S(a, r)$ je pak tvořena obvodem tohoto čtverce.

Příklad 34. Uvažujme v metrickém prostoru $\{E_2, m\}$ z příkladu 33 dvě otevřené koule: $S = K(a, 1)$, $T = K(b, 1)$, kde $a = [0, 1]$ a $b = [0, -1]$ (viz obr. 24).



Obr. 23



Obr. 24

Tyto množiny nemají *žádný společný bod*, přitom však je jejich vzdálenost nulová:

$$m(S, T) = 0$$

Označíme-li totiž P úsečku AB z obr. 24, lze ukázat, že platí

$$m(x, S) = 0\ , \quad m(x, T) = 0 \quad \text{pro každý bod } x \text{ z } P$$

důkaz se vede sporem podobně jako v příkladu 29. Podle „trojúhelníkové nerovnosti“ z úlohy 6 je

$$0 \leqq m(S, T) \leqq m(S, x) + m(x, T) = 0 + 0 = 0$$

čili je $m(S, T) = 0$. — Tento příklad tedy ukazuje, že implikaci (b) v poznámce 11 nelze obrátit.

Úloha 7. Rozmyslete si, jak budou vypadat koule v metrických prostorech $\{\mathsf{E}_3, p\}$ a $\{\mathsf{E}_3, m\}$. (Budou to jisté *krychle.*)

Geometrický tvar koule $K(a, r)$ v rovině E_2 tedy může být při různých metrikách dosti odlišný. Dokonce lze *naopak* k danému geometrickému útvaru v rovině (který ovšem musí splňovat jisté podmínky) najít metriku ϱ tak, aby ve výsledném metrickém prostoru $\{\mathsf{E}_2, \varrho\}$ znázorňoval tento útvar kouli (o poloměru 1).

Budiž tedy v rovině dán nějaký rovinný útvar $\mathcal{U}$, který má tyto vlastnosti:

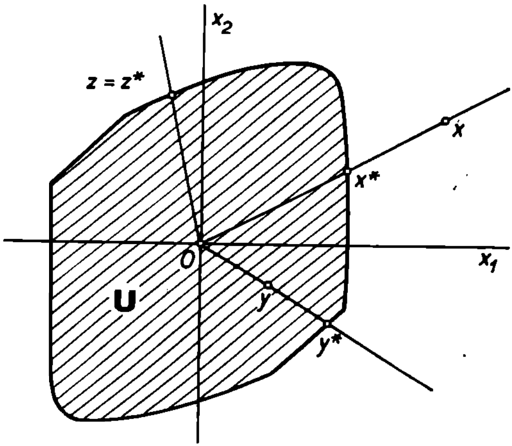
(1) obsahuje počátek [0, 0]

(2) je *konvexní* (tj. jsou-li x a y dva body z $\mathcal{U}$, leží úsečka, která tyto body spojuje, celá v $\mathcal{U}$)

(3) je *symetrický* vzhledem k počátku (tj. leží-li v $\mathcal{U}$ bod $[x_1, x_2]$, leží v $\mathcal{U}$ i bod $[-x_1, -x_2]$)

(4) je *otevřený* (tj. je-li x bod z $\mathcal{U}$, existuje číslo $\varepsilon > 0$ tak, že „koule“ $K(x, \varepsilon)$ — při použití eukleidovské metriky, tj. koule v metrickém prostoru $\{\mathsf{E}_2, d\}$ — leží také v $\mathcal{U}$; číslo ε přitom může záviset na bodu x)

Protože obor $\mathcal{U}$ je konvexní, protne každá přímka, vycházející z počátku, hranici oboru $\mathcal{U}$ právě v jednom bodě. Je-li nyní x libovolný bod z E_2, označme x^* průsečík polopřímky, určené bodem x a počátkem 0, s hra-



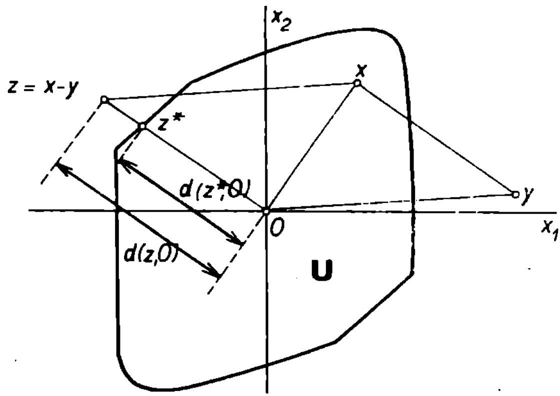
Obr. 25

nicí oboru $\mathcal{U}$ (viz obr. 25). Bod x^* je bodem x určen jednoznačně. Definujme nyní metriku ϱ takto:

$$\varrho(x, y) = \frac{d(z, 0)}{d(z^*, 0)} \tag{51}$$

kde $z = x - y = [x_1 - y_1, x_2 - y_2]$ a z^* je bod na hranici oboru $\mathcal{U}$, odpovídající bodu z (viz obr. 26).

Nebudeme zde dokazovat, že vzorcem (51) je skutečně definována metrika, tj. že $\varrho(x, y)$ má vlastnosti **A** až **C** z definice 1. Poznamenejme jen, že vlastnost (3) — tj. symetrie oboru $\mathcal{U}$ podle počátku — je podstatná pro symetrii metriky ϱ, tj. pro vlastnost **B**, a že vlastnost (2) — tj. konvexita (vypuklost) útvaru $\mathcal{U}$ — se využívá



Obr. 26

pro důkaz trojúhelníkové nerovnosti, tj. pro vlastnost **C**.

Pomocí metriky ϱ z (51) dostáváme tedy metrický prostor $\{\mathsf{E}_2, \varrho\}$ a platí toto tvrzení:

Koule $K(0, 1)$ *v metrickém prostoru* $\{\mathsf{E}_2, \varrho\}$ *je totožná s rovinným útvarem* $\mathcal{U}$.

D ů k a z: (a) Je-li x bod z $\mathcal{U}$, leží odpovídající bod x^* na polopřímce $0x$ *za* bodem x; je tedy $d(x, 0) < d(x^*, 0)$ čili

$$\varrho(x, 0) < 1$$

To znamená, že všechny body z $\mathcal{U}$ leží současně v kouli $K(0,1)$ čili že $\mathcal{U} \subset K(0, 1)$.

(b) Neleží-li bod x v oboru $\mathcal{U}$, jsou dvě možnosti: (b-1) leží na hranici oboru $\mathcal{U}$ — pak je $x^* = x$ čili $d(x, 0) = d(x^*, 0)$ čili $\varrho(x, 0) = 1$; (b-2) bod x^* leží na polopřímce $0x$ *před* bodem x čili je $d(x^*, 0) < d(x, 0)$ čili $\varrho(x, 0) > 1$. V případě (b) je tedy

$$\varrho(x, 0) \geqq 1$$

čili takový bod x *neleží* v kouli $K(0, 1)$.

Doporučujeme čtenáři, aby si předchozí úvahy ilustroval na obrázku. Případu (a) odpovídá bod y z obr. 25, případu (b-1) bod z a případu (b-2) bod x. — Současně si čtenář při těchto úvahách všiml, že hranice oboru $\mathcal{U}$ je totožná se sférou $S(0, 1)$. Všude jsme se ovšem spoléhali na to, že z geometrického názoru víme, co je míněno *hranicí* oboru $\mathcal{U}$. V dalším budeme tento pojem precizovat (viz kap. 4).

Poznámka 13. Dovedeme tedy k jistému rovinnému útvaru $\mathcal{U}$ sestrojit metriku ϱ tak, že tvar oboru $\mathcal{U}$ předurčuje tvar koule $K(0, 1)$ v metrickém prostoru $\{\mathsf{E}_2, \varrho\}$. Čtenář jistě snadno upraví podmínky (1)—(4), které obor $\mathcal{U}$ musel splňovat, i pro případ trojrozměrného útvaru $\mathcal{U}$. Je ovšem třeba zdůraznit, že přenesení těchto úvah z roviny E_2 či z prostoru E_3 na *obecné* množiny M *není vždy možné*. Aby bylo možno k nějaké podmnožině $\mathcal{U}$ v množině M sestrojit takovou metriku ϱ, že by množina $\mathcal{U}$ byla totožná s jistou koulí v metrickém prostoru $\{M, \varrho\}$, musí mít množina M už předem jistou strukturu: musí být definován součet dvou prvků z M a α-násobek prvku z M, aby bylo možno vůbec hovořit o „úsečce" v $\mathcal{U}$ [viz vlastnost (2)] nebo o „symetrických prvcích" [viz vlastnost (3)]. S podobnou situací jsme se setkali už na str. 16 při úvaze o vlastnostech **D** a **E** metriky d.

Nyní už můžeme zavést důležitý pojem otevřené množiny:

Definice 7. Budiž $\{M, \varrho\}$ metrický prostor. Řekneme, že množina $S \subset M$ je *otevřená* (v metrickém prostoru $\{M, \varrho\}$), jestliže ke každému prvku x z S existuje kladné číslo $r = r(x)$*) tak, že koule $K(x, r)$ leží celá v S.

Poznámka 14. Kdybychom užili terminologie, o níž se zmiňujeme v poznámce 12, mohli bychom říci, že množina $S \subset M$ je otevřená (v metrickém prostoru $\{M, \varrho\}$), jestliže s každým bodem x z S leží v S i jisté okolí tohoto bodu.

Příklad 35. Množina M, která tvoří základ metrického prostoru $\{M, \varrho\}$, je otevřenou množinou (v $\{M, \varrho\}$). Každá koule $K(x, r)$ v $\{M, \varrho\}$ je totiž už podle definice 6 tvořena výhradně body množiny M a leží tedy automaticky celá v množině M. — Také *prázdná* množina (tj. množina, neobsahující *žádné* prvky — označme ji v dalším $\emptyset$) je otevřenou množinou v $\{M, \varrho\}$: Pak je totiž také každá „koule" se „středem" v $\emptyset$ prázdnou množinou a leží tedy celá v prázdné množině $\emptyset$. Dokázali jsme tedy tuto větu:

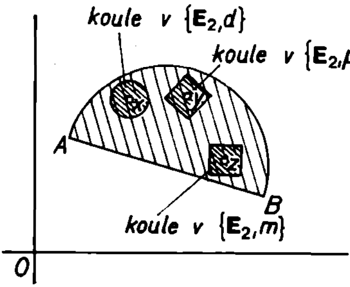
Věta 4. *Množina M a prázdná množina $\emptyset$ jsou otevřené množiny v metrickém prostoru $\{M, \varrho\}$.*

Příklad 36. Uvažujme v rovině E_2 tři množiny (viz obr. 27): Množinu S_1 tvoří půlkruh bez oblouku $\widehat{AB}$ i bez úsečky $\overline{AB}$, množinu S_2 půlkruh bez oblouku $\widehat{AB}$, ale

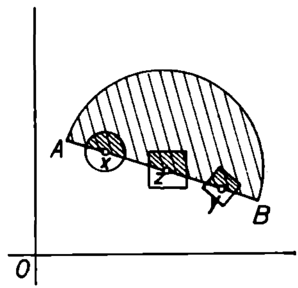
---

*) Tímto zápisem zdůrazňujeme skutečnost, že číslo r může záviset na prvku x.

včetně úsečky $\overline{AB}$, a množinu S_3 tvoří půlkruh včetně oblouku $\widehat{AB}$ i úsečky $\overline{AB}$. — Množina S_1 je otevřená v metrických prostorech $\{E_2, d\}$, $\{E_2, p\}$, $\{E_2, m\}$, neboť pro každý bod x z S_1 lze v příslušných prostorech sestrojit koule se středem v x tak, aby celá koule ležela opět v S_1 (tyto koule jsou znázorněny na obr. 27a — srv.



Obr. 27a



Obr. 27b

též s příklady 32 a 33). Množina S_2 naproti tomu *není* otevřená v žádném z těchto metrických prostorů, a stejně je tomu s množinou S_3: zvolíme-li totiž bod x na úsečce $\overline{AB}$ (a tedy v S_2 i v S_3), bude část koule v každém z těchto prostorů ležet *mimo* množiny S_2 a S_3 (na obr. 27b je to nezašrafovaná část příslušných koulí).

Úloha 8. Ukažte, že koule $K(a, r)$ v metrickém prostoru $\{M, \varrho\}$ je otevřená množina v tomto prostoru.

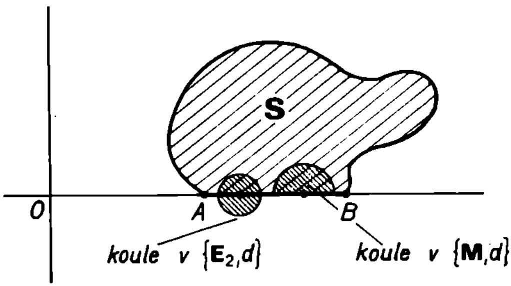
Příklad 37. Uvažujme množinu S_2 z příkladu 36 a metrický prostor $\{S_2, p\}$. Podle věty 4 *je* množina S_2

otevřená v metrickém prostoru $\{S_2, p\}$, podle příkladu 36 však *není* otevřená v metrickém prostoru $\{\mathsf{E}_2, p\}$.

Příklad 38. Uvažujme v rovině E_2 množinu S, tvořenou *jediným* bodem a. Tato množina není otevřená v žádném z metrických prostorů z příkladu 36: Každá koule $K(a, r)$ v některém z těchto metrických prostorů totiž podle příkladů 26, 32 a 33 obsahuje vedle bodu a ještě řadu dalších bodů roviny a nemůže proto ležet celá v S (což by v tomto případě znamenalo: být totožná s bodem a).

Podobná situace jako v příkladu 37 nastane v následujícím příkladu:

Příklad 39. Uvažujme obor S v rovině E_2, znázorněný na obr. 28. Úsečka $\overline{AB}$ nechť přitom *patří* do množiny S,



Obr. 28

zbytek křivky, ohraničující obor S, nechť do S *nepatří*. Pak je množina S otevřená v metrickém prostoru $\{M, d\}$ z příkladu 30, ale *není* otevřená v metrickém prostoru $\{\mathsf{E}_2, d\}$. Důvod je patrný z obrázku: u prostoru

$\{E_2, d\}$ „vadí" — podobně jako u množiny S_2 z příkladu 36 — opět body na úsečce $\overline{AB}$, neboť pro takové body x každá koule $K(x, r)$ v $\{E_2, d\}$ obsahuje body, které v S neleží; naproti tomu koule $K(x, r)$ v metrickém prostoru $\{M, d\}$ zůstává i pro tyto body x v množině S — viz příklad 30.

Z příkladů 37 a 39 plyne, že *táž* množina S může být v jednom metrickém prostoru $\{M_1, \varrho_1\}$ otevřená, zatím co v druhém metrickém prostoru $\{M_2, \varrho_2\}$ otevřená být nemusí (musí být ovšem $S \subset M_1$ i $S \subset M_2$). Proto jsme v definici 7 důsledně říkali, že množina je „otevřená (v $\{M, \varrho\}$)". V dalším budeme dodatek „v $\{M, \varrho\}$" vynechávat, bude-li ze souvislosti jasné, o *jaký* metrický prostor se jedná.

V příkladech 37 a 39 byly metriky ϱ_1 a ϱ_2 vždy stejné (byla to metrika p v příkladu 37 a metrika d v příkladu 39) a vlastnost množiny S „býti otevřená v $\{M, \varrho\}$" závisela jen na množině M. Z dalších příkladů vyplyne, že tuto vlastnost množiny S může ovlivnit také metrika ϱ.

Dokážeme nejprve toto tvrzení:

Věta 5. *Budiž M libovolná množina a budiž ϱ metrika z věty 2, daná vzorcem* (45). *Pak platí: V metrickém prostoru $\{M, \varrho\}$ je každá množina $S \subset M$ otevřená.*

D ů k a z : Budiž S libovolná množina v M a budiž x bod z S. Zvolíme-li $r < 1$, je koule $K(x, r)$ v metrickém prostoru $\{M, \varrho\}$ tvořena *jen* bodem x (viz příklad 31), a leží tedy celá v S. To platí pro každý bod z S, a proto je množina S otevřená v $\{M, \varrho\}$.

Příklad 40. Zvolíme-li ve větě 5 za množinu M rovinu E_2, je v metrickém prostoru $\{E_2, \varrho\}$ otevřená *každá* množina roviny, tedy i množiny S_2 a S_3 z příkladu 36 a jednobodová množina z příkladu 32, které *nejsou* otevřenými množinami v metrickém prostoru $\{\mathsf{E}_2, d\}$.

Metrika ϱ z věty 2 je sice velmi jednoduchá, ale z věty 5 plyne, že pomocí této metriky asi nebude možné nějak blíže charakterizovat a roztřídit podmnožiny S množiny M. Příklad 40 to konečně názorně ilustruje: v $\{\mathsf{E}_2, \varrho\}$ jsou všechny množiny z hlediska otevřenosti stejně „kvalitní", zatím co např. v $\{\mathsf{E}_2, d\}$ je struktura podmnožin S z tohoto hlediska podstatně mnohotvárnější.

Nechť je dána množina M a nechť jsou ϱ_1, ϱ_2 dvě metriky na M. Označme dále $\mathscr{S}_1$ soustavu všech otevřených množin v $\{M, \varrho_1\}$ a $\mathscr{S}_2$ soustavu všech otevřených množin v $\{M, \varrho_2\}$. Pak je často užitečné znát odpověď na tento problém: Za jakých podmínek na metriky ϱ_1 a ϱ_2 platí: patří-li množina $S \subset M$ do soustavy $\mathscr{S}_1$, pak patří také do soustavy $\mathscr{S}_2$?

Na tuto otázku odpovídá zčásti následující věta.

Věta 6. *Buďte ϱ_1 a ϱ_2 dvě metriky definované na množině M a nechť existuje kladná konstanta c tak, že pro všechny prvky x a y z M platí*

$$\varrho_1(x, y) \leqq c\varrho_2(x, y) \tag{52}$$

Pak platí: Je-li množina $S \subset M$ otevřená v $\{M, \varrho_1\}$, je otevřená i v $\{M, \varrho_2\}$.

Důkaz: Označme $K_1(a, r)$ kouli v $\{M, \varrho_1\}$ a $K_2(a, r)$ kouli v $\{M, \varrho_2\}$. Nechť je množina S otevřená v $\{M, \varrho_1\}$. To znamená, že pro každý prvek x z S existuje číslo $r = r(x)$ tak, že koule $K_1(x, r)$ leží celá v S.

Uvažujme nyní v $\{M, \varrho_2\}$ kouli $K_2(x, r/c)$, kde c je konstanta z nerovnosti (52). Je-li z bod z této koule, znamená to, že

$$\varrho_2(x, z) < \frac{r}{c}$$

Z nerovnosti (52) pak plyne

$$\varrho_1(x, z) \leqq c\varrho_2(x, z) < c\frac{r}{c} = r$$

To však znamená, že $\varrho_1(x, z) < r$ neboli že bod z z koule $K_2(x, r/c)$ leží v kouli $K_1(x, r)$.

To platí pro *každý* bod z koule $K_2(x, r/c)$, takže tato koule leží celá v kouli $K_1(x, r)$. Ale koule $K_1(x, r)$ leží celá v množině S, a proto leží v S i celá koule $K_2(x, r/c)$. Tím jsme k danému prvku x z S našli požadované kladné číslo r/c, a množina S je tedy otevřená v $\{M, \varrho_2\}$.

Poznámka 15. Použijeme-li pro soustavy otevřených množin v metrických prostorech z věty 6 označení $\mathscr{S}_1$ a $\mathscr{S}_2$, lze tvrzení věty 6 vyslovit takto: *Platí-li* (52) *a patří-li množina* $S \subset M$ *do soustavy* $\mathscr{S}_1$, *patří i do soustavy* $\mathscr{S}_2$. Z (52) tedy plyne

$$\mathscr{S}_1 \subset \mathscr{S}_2 \tag{53}$$

Soustava $\mathscr{S}_2$ ovšem může být mnohem „bohatší" než soustava $\mathscr{S}_1$; mohou existovat množiny S, které jsou otevřené v $\{M, \varrho_2\}$ a nejsou otevřené v $\{M, \varrho_1\}$.

Poznámka 16. Nerovnost (52) není možno přeceňovat. Z předchozích příkladů totiž plyne (viz např. příklad 40), že každá množina, která je otevřená v $\{\mathsf{E}_2, d\}$, je otevřená i v $\{\mathsf{E}_2, \varrho\}$, kde ϱ je metrika z vzorce (45). Přitom však pro obě metriky analogie vztahu (52) neplatí: pak by totiž musela existovat kladná konstanta c tak, že pro všechny body x, y v rovině by bylo

$$d(x, y) \leqq c\varrho(x, y) \leqq c \tag{54}$$

neboť — jak víme — $\varrho(x, y) \leqq 1$. Nerovnost (54) však *není* splněna pro všechny body roviny: stačí zvolit $x = [0, 0]$ a $y = [2c, 0]$.

Z věty 6 plyne toto tvrzení:

Jsou-li ϱ_1 a ϱ_2 dvě ekvivalentní metriky, definované na množině M (viz definici 3), *jsou všechny otevřené množiny v $\{M, \varrho_1\}$ otevřené i v $\{M, \varrho_2\}$ a naopak všechny otevřené množiny v $\{M, \varrho_2\}$ jsou otevřené i v $\{M, \varrho_1\}$.*

Důkaz: Jsou-li metriky ϱ_1 a ϱ_2, ekvivalentní, platí nerovnost (52) a podle poznámky 15 je tedy $\mathscr{S}_1 \subset \mathscr{S}_2$. Současně však existuje konstanta $C > 0$ tak, že platí také nerovnost

$$\varrho_2(x, y) \leqq C\varrho_1(x, y)$$

a podle poznámky 15 je pak $\mathscr{S}_2 \subset \mathscr{S}_1$. To znamená, že $\mathscr{S}_1 = \mathscr{S}_2$, a to jsme také chtěli dokázat.

Příklad 41. Z příkladu 9 plyne, že otevřené množiny v metrickém prostoru $\{E_2, d\}$ jsou otevřené i v metrických prostorech $\{E_2, p\}$ a $\{E_2, m\}$ a naopak.

Odbočení šesté. V moderní matematice se velmi často setkáváme s tzv. *topologickými prostory*. Nebudeme je zde rozebírat; zmiňujeme se o nich především proto, že v nich hraje důležitou roli právě pojem otevřené množiny. Poznamenejme tedy jen tolik, že každý metrický prostor $\{M, \varrho\}$ je současně topologickým prostorem a že dva metrické prostory $\{M, \varrho_1\}$ a $\{M, \varrho_2\}$ s ekvivalentními metrikami ϱ_1 a ϱ_2 určují *týž* topologický prostor.

Konec šestého odbočení

Odbočení sedmé. Čtenář je jistě seznámen s pojmem funkce *spojité v bodě:* Je-li f funkce reálné proměnné t, definovaná pro všechna reálná čísla t, řekneme, že je spojitá v bodě a z E_1, platí-li:

Ke každému kladnému číslu ε existuje kladné číslo $\delta = \delta(\varepsilon)$ závislé na ε tak, že pro všechna t, pro která platí $|t - a| < \delta$, je $|f(t) - f(a)| < \varepsilon$.

Uvědomíme-li si, jak je definována eukleidovská vzdálenost d v E_1, můžeme poslední požadavek zapsat takto:

$$d(t, a) < \delta \Rightarrow d[f(t), f(a)] < \varepsilon$$

nebo takto:

$$t \text{ leží v kouli } K(a, \delta) \Rightarrow f(t) \text{ leží v kouli } K[f(a), \varepsilon],$$

nebo to konečně — bez použití čísel ε a δ — můžeme vyjádřit takto: *Ke každé kouli* (v $\{\mathsf{E}_1, d\}$) *se středem v bodě* $f(a)$ (označme ji $\mathscr{K}$) *existuje koule se středem v bodě a, která se celá zobrazí* (pomocí funkce f) *do koule* $\mathscr{K}$.

Tato formulace umožňuje přenést pojem spojitosti v bodě i na abstraktní množiny a na zobrazení F, která prvkům metrického prostoru $\{M, \varrho\}$ přiřazují prvky jiného metrického prostoru $\{N, \sigma\}$: Je-li každému prvku x z M přiřazen jednoznačně určený prvek $F(x)$ z N, řekneme, že zobrazení F (z M do N) je *spojité v bodě* (*prvku*) a z M, jestliže ke každé kouli K_1 (v metrickém prostoru $\{N, \sigma\}$) se středem v $F(a)$ existuje koule K_2 (v metrickém prostoru $\{M, \varrho\}$) se středem v a, která se *celá* zobrazí (pomocí zobrazení F) do koule K_1.

Úloha. Ilustrujte si pojem spojitosti zobrazení v bodě metrického prostoru na různých konkrétních případech. Rozmyslete si, co znamená spojitost zobrazení F z $\{E_2, d\}$ do $\{E_2, d\}$. — V příkladu 5 jsme definovali zobrazení přímky E_1 do roviny E_2 a v poznámce 6 jsme analogicky definovali zobrazení roviny E_2 do prostoru E_3. Jsou tato zobrazení spojitá?

Konec sedmého odbočení

4. kapitola

VNITŘEK MNOŽINY, HRANICE MNOŽINY. UZAVŘENÁ MNOŽINA

U takových množin v rovině, jako je např. obor S z obrázku 28, dovedeme určit, který bod leží „uvnitř“, který „na hranici množiny S“, který „vně“. Existují ovšem i méně názorné rovinné útvary, u nichž už je podobné rozhodnutí podstatně těžší, u nichž naše intuice selhává a může nás svést dokonce na scestí.*) Tyto intuitivně zřejmé pojmy dovedeme pomocí metriky zavést i v obecnějších množinách.

Budiž tedy $\{M, \varrho\}$ metrický prostor a S podmnožina množiny M. Prvky množiny M pak rozdělíme do *tří* skupin, určených vztahem příslušného prvku k množině S. Nejprve si však připomeneme jisté označení: Symbolem

$$M - S$$

označíme množinu všech prvků z M, které *nepatří* do S. Množinu $M—S$ nazýváme doplňkem množiny S (vzhledem k množině M).

Definice 8. (1) Řekneme, že prvek x z M je *vnitřním bodem množiny S*, existuje-li kladné číslo $r = r(x)$ tak, že koule $K(x, r)$ leží celá v S.

---

*) S různými takovými velmi „nenázornými“ množinami se může čtenář seznámit např. v knížce N. J. Vilenkina: Neznámý svět nekonečných množin (Praha 1971).

(2) Řekneme, že prvek x z M je *vnějším bodem množiny* S, existuje-li kladné číslo $r = r(x)$ tak, že koule $K(x, r)$ neobsahuje *žádný* bod z S (a leží tedy celá v $M - S$).

(3) Řekneme, že prvek x z M je *hraničním bodem množiny* S, jestliže v každé kouli $K(x, r)$ se středem v bodě x (tj. pro každý poloměr $r > 0$) leží prvek z množiny S a současně prvek z množiny $M—S$.

Množinu všech vnitřních bodů množiny S označíme $\mathscr{I}(S)$ (od francouzského slova „intérieur" = vnitřní) a nazveme ji vnitřkem množiny S (vzhledem k metrickému prostoru $\{M, \varrho\}$); množinu všech vnějších bodů množiny S označíme $\mathscr{E}(S)$ (od slova „extérieur" = vnější) a nazveme ji vnějškem množiny S (vzhledem k metrickému prostoru $\{M, \varrho\}$); množinu všech hraničních bodů množiny S označíme $\mathscr{H}(S)$ a nazveme ji hranicí množiny S (v metrickém prostoru $\{M, \varrho\}$).
Z definice 8 plynou různé důsledky; zformulujeme je ve tvaru poznámek.

Poznámka 17. Je třeba upozornit na rozdíl mezi vnějškem množiny S a mezi doplňkem $M - S$: Do doplňku $M - S$ patří každý prvek z M, který *nepatří* do S, kdežto do $\mathscr{E}(S)$ patří jen ty prvky z M, které do M nepatří včetně jisté koule, jejímž je příslušný prvek středem.

Poznámka 18. Vnitřní body množiny S nemohou být současně vnějšími body: body z $\mathscr{I}(S)$ totiž *leží* v S, kdežto body z $\mathscr{E}(S)$ tam *neleží*. Můžeme to vyjádřit též takto: vnitřek $\mathscr{I}(S)$ je částí S

(54) $$\mathscr{I}(S) \subset S$$

zatím co vnějšek $\mathscr{E}(S)$ je částí doplňku $M - S$

$$(55) \qquad \mathscr{E}(S) \subset M - S$$

Vztahy (54) a (55) přitom platí pro *každou* množinu $S \subset M$. Vztah hranice $\mathscr{H}(S)$ k původní množině S nelze takto jednoznačně charakterizovat; pro různé množiny mohou nastat různé případy (viz níže příklad 42). Hraniční bod ovšem nemůže být ani vnitřním, ani vnějším bodem: z části (3) definice 8 totiž plyne, že neexistuje *žádné* r (a tedy *žádná* koule), pro něž by byla splněna podmínka z části (1) nebo (2). — A konečně lze ukázat, že hraničními body množiny S jsou všechny ty body množiny M, které nejsou ani vnitřní ani vnější: Jestliže totiž bod x z M *není hraniční*, znamená to, že buď (a) existuje jistá koule $K(x, r)$ (tj. jisté kladné číslo r) tak, že tato koule neobsahuje *žádný* bod z S — pak však tato koule leží celá v $M - S$ a bod x je tudíž *vnějším* bodem množiny S; nebo (b) existuje jistá koule $K(x, r)$ (tj. jisté kladné číslo r) tak, že tato koule neobsahuje *žádný* bod z $M - S$ — pak však tato koule leží celá v S a bod x je tudíž *vnitřním* bodem množiny S.

Množinu M tedy můžeme vyjádřit jako sjednocení tří navzájem různých množin: vnitřku, vnějšku a hranice množiny S:

$$(56) \qquad M = \mathscr{I}(S) \cup \mathscr{E}(S) \cup \mathscr{H}(S)$$

tento vztah platí pro *každou* množinu $S \subset M$.

Poznámka 19. Z definice 8 je také ihned patrné, že vnější bod množiny S je vnitřním bodem množiny $M - S$:

$$(57) \qquad \mathscr{E}(S) = \mathscr{I}(M - S)$$

a že naopak vnitřní bod množiny S je vnějším bodem množiny $M - S$:

$$\mathscr{I}(S) = \mathscr{E}(M - S) \tag{58}$$

Hranice obou množin jsou přitom stejné:

$$\mathscr{H}(S) = \mathscr{H}(M - S) \tag{59}$$

Příklad 42. V příkladu 36 jsme definovali tři množiny v rovině E_2. Čtenář se snadno přesvědčí, že všechny tři množiny mají stejný vnitřek — totiž množinu S_1:

$$\mathscr{I}(S_1) = \mathscr{I}(S_2) = \mathscr{I}(S_3) = S_1$$

že mají stejný vnějšek:

$$\mathscr{E}(S_1) = \mathscr{E}(S_2) = \mathscr{E}(S_3) = \mathsf{E}_2 - S_3$$

(tj. rovinu, z níž vyjmeme půlkruh i křivku, která tento půlkruh ohraničuje), a že mají i stejnou hranici, kterou tvoří půlkružnice $\widehat{AB}$ a úsečka $\overline{AB}$:

$$\mathscr{H}(S_1) = \mathscr{H}(S_2) = \mathscr{H}(S_3)$$

Přitom vztah množiny S_i k její hranici $\mathscr{H}(S_i)$ ilustruje možnosti, které mohou nastat: u množiny S_1 *není* hranice $\mathscr{H}(S_1)$ částí množiny S_1 (a je tedy částí množiny $\mathsf{E}_2 - S_1$); u množiny S_2 patří část hranice $\mathscr{H}(S_2)$ do S_2 (totiž úsečka $\overline{AB}$), zatímco část hranice do S_2 nepatří (totiž oblouk $\widehat{AB}$); u množiny S_3 je *celá* hranice $\mathscr{H}(S_3)$ částí množiny S_3. — Tyto úvahy přitom můžeme provádět v metrických prostorech $\{\mathsf{E}_2, d\}$, $\{\mathsf{E}_2, p\}$ i $\{\mathsf{E}_2, m\}$.

Příklad 43. Uvažujme metrický prostor $\{\mathsf{E}_2, d\}$ a v něm množinu S tvořenou jediným bodem a. Tato množina *nemá* vnitřek: $\mathscr{I}(S) = \emptyset$; přitom bod a je sám svou hranicí: $\mathscr{H}(S) = S$. Ze vzorce (56) pak plyne, že $\mathscr{E}(S) = \mathsf{E}_2 - S$. — Množina T, tvořená např. úsečkou $\overline{AB}$ (nebo obloukem $\widehat{AB}$) z obr. 27, má tytéž vlastnosti: $\mathscr{H}(T) = T$, $\mathscr{I}(T) = \emptyset$ a $\mathscr{E}(T) = \mathsf{E}_2 - T$.

Nebudeme už pojem vnitřku, vnějšku a hranice množiny ilustrovat na dalších příkladech. Doporučujeme však čtenáři, aby si z hlediska těchto pojmů prošel předcházející příklady a rozebral množiny, které v nich vystupují. Zvláště doporučujeme, aby si dokázal, že hranicí koule $K(a, r)$ v metrických prostorech $\{\mathsf{E}_2, d\}$, $\{\mathsf{E}_2, p\}$ i $\{\mathsf{E}_2, m\}$ je sféra $S(a, r)$.

Uvedeme ovšem dva příklady, které ukazují, že pojmy vnitřku, vnějšku a hranice množiny závisejí — stejně jako pojem otevřené množiny — na zvoleném metrickém prostoru.

Příklad 44. Uvažujme množinu S z obr. 28 (viz příklad 39). Zkoumáme-li množinu S jako podmnožinu *celé* roviny, bude se „chovat" podobně jako množina S_2 z příkladu 42: její vnitřek $\mathscr{I}(S)$ (v $\{\mathsf{E}_2, d\}$) bude tvořit množina, která vznikne, když z S odstraníme úsečku $\overline{AB}$, zatímco její hranici $\mathscr{H}(S)$ (v $\{\mathsf{E}_2, d)\}$ tvoří úsečka $\overline{AB}$ i křivka (oblouk) $\widehat{AB}$ z obr. 28. — Zkoumáme-li však množinu S jako podmnožinu množiny M z příkladu 30 (tj. jako podmnožinu horní poloroviny včetně osy x_1), bude její vnitřek $\mathscr{I}(S)$ (v $\{M, d\}$!!) tvořit *celá* množina S — tj. do vnitřku patří tentokrát *i úsečka* $\overline{AB}$ (plyne to z tvaru koule v metrickém prostoru $\{M, d\}$; rozebírali jsme to v příkladu 30) a hranici $\mathscr{H}(S)$ (v $\{M, d\}$) tvoří jen křivka $\widehat{AB}$.

Příklad 45. O něco výše jsme čtenáři doporučili, aby si ukázal, že v $\{E_2, d\}$ je hranicí koule $K(a, r)$ sféra $S(a, r)$. Tento názorně zcela zřejmý fakt nelze automaticky přenést do jiných metrických prostorů: V prostoru $\{M, d\}$ z příkladu 27 *není sféra $S(a, r)$ hranicí koule $K(a, r)$*. Dokážeme to: Zvolíme-li např. bod $b = [2, 4]$ z M, který leží na sféře $S(a, 3)$ z obr. 18, je koule $K\left(b, \frac{1}{2}\right)$ tvořena *jediným* bodem b; tato koule tedy neobsahuje *žádný* bod množiny $K(a, 3)$, a proto nemůže patřit do hranice $\mathscr{H}(K(a, 3))$. Naopak: bod b — a tedy celá koule $K\left(b, \frac{1}{2}\right)$ — leží v $M - K(a, 3)$ a patří tudíž do $\mathscr{E}(K(a, 3))$. V prostoru $\{M, d\}$ z příkladu 27 tedy pro každou kouli K platí: $K = \mathscr{I}(K)$, $M - K = \mathscr{E}(K)$ a hranice $\mathscr{H}(K)$ je *prázdná množina.*

Úloha 9. Srovnáním definice 7 s částí (1) definice 8 dokažte tuto větu:

Věta 7. *Budiž $\{M, \varrho\}$ metrický prostor a S libovolná podmnožina množiny M. Pak platí:* (1) *Vnitřek $\mathscr{I}(S)$ množiny S je otevřená množina (v metrickém prostoru $\{M, \varrho\}$).*

(2) *Množina S je otevřená v $\{M, \varrho\}$ právě tehdy, je-li totožná se svým vnitřkem, tj. platí-li*

$$\mathscr{I}(S) = S$$

Definice 9. Budiž $\{M, \varrho\}$ metrický prostor. Řekneme, že množina $S \subset M$ je *uzavřená* (v metrickém prostoru $\{M, \varrho\}$), je-li její doplněk $M - S$ množina otevřená (v metrickém prostoru $\{M, \varrho\}$).

Příklad 46. Uzavřená koule $\overline{K(a, r)}$ v metrickém prostoru $\{M, \varrho\}$ je v tomto prostoru uzavřenou množinou. Dokážeme to (kreslete si obrázek): Doplněk $M - \overline{K(a, r)}$ je podle definice uzavřené koule tvořen všemi těmi body x z M, pro které je $\varrho(a, x) > r$. Zvolme tedy jeden (libovolný, ale pevný) bod x z doplňku $M - \overline{K(a, r)}$ a označme R jeho vzdálenost od bodu a: $\varrho(a, x) = R$. Pak je $R > r$, a položíme-li $r^* = \frac{1}{2}(R - r)$, bude $r^* > 0$. Ukážeme, že koule $K(x, r^*)$ leží celá v $M - \overline{K(a, r)}$: Budiž y libovolný bod z koule $K(x, r^*)$ — to znamená, že $\varrho(x, y) < r^*$. Podle trojúhelníkové nerovnosti je

$$\varrho(a, x) \leqq \varrho(x, y) + \varrho(a, y)$$

čili

$$\varrho(a, y) \geqq \varrho(a, x) - \varrho(x, y)$$

Ale $\varrho(a, x) = R$ a $-\varrho(x, y) > -r^*$, a proto je

$$\varrho(a, y) > R - r^* = R - \frac{1}{2}(R - r) =$$
$$= \frac{1}{2}(R + r) > \frac{1}{2}(r + r) = r$$

(užili jsme toho, že $R > r$). Bod y tedy leží v $M - \overline{K(a, r)}$, a protože y byl libovolný bod koule $K(x, r^*)$, leží v $M - \overline{K(a, r)}$ celá tato koule. Tím jsme však k danému prvku x z $M - \overline{K(a, r)}$ našli číslo $r^* > 0$, které požaduje definice 7, a podle této definice je tedy množina $M - \overline{K(a, r)}$ otevřená množina. Doplňkem této množiny (vzhledem k M) je však uzavřená koule $\overline{K(a, r)}$, a ta je tedy podle definice 9 uzavřenou množinou.

Příklad 47. Ze vzorce (56) plyne, že doplňkem množiny $\mathscr{I}(S)$ je množina $\mathscr{E}(S) \cup \mathscr{H}(S)$. Protože množina $\mathscr{I}(S)$ je podle tvrzení (1) věty 7 otevřená, dokázali jsme vlastně, že *množina*

$$\mathscr{E}(S) \cup \mathscr{H}(S)$$

je uzavřená v $\{M, \varrho\}$. Toto tvrzení platí pro každou množinu $S \subset M$. Použijeme-li je tedy pro množinu $M - S$, bude uzavřená také množina

$$\mathscr{E}(M - S) \cup \mathscr{H}(M - S)$$

Odtud dostáváme použitím vzorců (58) a (59) ihned tuto větu:

Věta 8. *Budiž* $\{M, \varrho\}$ *metrický prostor a* S *libovolná podmnožina množiny* M. *Pak je množina*

$$\mathscr{I}(S) \cup \mathscr{H}(S)$$

uzavřená v $\{M, \varrho\}$.

Příklad 48. Množina $\mathscr{E}(S)$ je vnitřkem množiny $M - S$ a je tedy podle věty 7 otevřenou množinou. Také $\mathscr{I}(S)$ je otevřená množina, a proto je otevřená také množina

$$\mathscr{I}(S) \cup \mathscr{E}(S)$$

(dokažte to!). Doplňkem této otevřené množiny (vzhledem k M) je podle vzorce (56) hranice $\mathscr{H}(S)$; dokázali jsme tedy, že *hranice libovolné množiny* $S \subset M$ je *uzavřená množina v* $\{M, \varrho\}$.

Příklad 49. Uvažujme znovu metrické prostory a množiny S_1, S_2 a S_3 z příkladu 36 (viz též příklad 42). Množina S_1 je *otevřená* — plyne to nyní např. z věty 7, neboť jsme v příkladu 42 ukázali, že $\mathscr{I}(S_1) = S_1$. Množina S_3 je naproti tomu *uzavřená*: podle příkladu 42 je totiž $\mathscr{E}(S_3) = \mathsf{E}_2 - S_3$, podle vzorce (57) je $\mathscr{E}(S_3) = \mathscr{I}(\mathsf{E}_2 - S_3)$, a tedy je $\mathscr{I}(\mathsf{E}_2 - S_3) = \mathsf{E}_2 - S_3$; to však podle věty 7 znamená, že množina $\mathsf{E}_2 - S_3$ je otevřená. A konečně opět z tvrzení (2) věty 7 plyne, že množina S_2 není *ani otevřená ani uzavřená*: Množina S_2 totiž obsahuje část hranice $\mathscr{H}(S_2)$, takže *není* $\mathscr{I}(S_2) = S_2$, a také množina $\mathsf{E}_2 - S_2$ není otevřená, neboť obsahuje část hranice $\mathscr{H}(S_2) = \mathscr{H}(\mathsf{E}_2 - S_2)$, takže *není* $\mathscr{I}(\mathsf{E}_2 - S_2) = \mathsf{E}_2 - S_2$.

Příklad 50. Vraťme se k prostoru $\{M, d\}$ z příkladu 45 a označme K kouli v tomto prostoru. Podle úlohy 8 je K otevřená množina v $\{M, d\}$, a tedy je podle věty 7 $\mathscr{I}(K) = K$. — V příkladu 45 jsme ukázali, že $\mathscr{H}(K) = \emptyset$, a proto je $\mathscr{I}(K) \cup \mathscr{H}(K) = \mathscr{I}(K) = K$. Podle věty 8 je však množina $\mathscr{I}(K) \cup \mathscr{H}(K)$ uzavřená v $\{M, d\}$, tj. množina K je uzavřená v $\{M, d\}$. Ukázali jsme tedy, že koule K je v $\{M, d\}$ *současně* otevřená i uzavřená!

Množiny, které jsou současně otevřené i uzavřené, nazýváme *obojetné*. Obojetné množiny existují v *každém* metrickém prostoru:

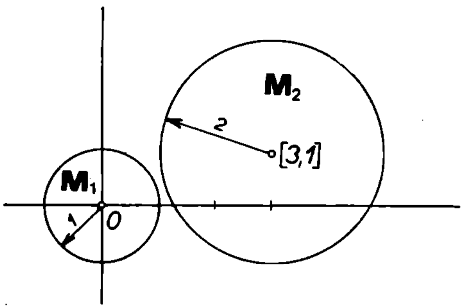
Věta 9. *Budiž $\{M, \varrho\}$ metrický prostor. Pak jsou množiny M a $\emptyset$ obojetné v $\{M, \varrho\}$.*

Důkaz plyne z věty 4 a z definice 9: Doplňkem množiny M vzhledem k M je prázdná množina $\emptyset$; ta je podle věty 4 otevřená v $\{M, \varrho\}$ čili je množina M uzavřená. Podobně je doplňkem množiny $\emptyset$ vzhledem k M množina M sama; ta je podle věty 4 otevřená v $\{M, \varrho\}$, čili podle definice 9 je množina $\emptyset$ uzavřená.

Z věty 5 a z definice 9 také ihned plyne, že v prostoru $\{M, \varrho\}$, kde M je libovolná množina a ϱ je metrika ze vzorce (45), je obojetná *každá množina* $S \subset M$.

Obojetné množiny působí poněkud „rušivě“. Naštěstí však v „běžných“ metrických prostorech $\{E_2, d\}$, $\{E_3, d\}$ atp. jsou množiny E_2 (resp. E_3) a prázdná množina $\emptyset$ *jedinými* obojetnými množinami; to zde ovšem nebudeme dokazovat. Uvedeme však ještě jeden příklad obojetné množiny, který ukazuje, že také obojetnost závisí na metrickém prostoru:

Příklad 51. Uvažujme v rovině E_2 dva kruhy: kruh M_1 se středem v počátku a o poloměru 1, a kruh M_2 se středem v bodě [3,1] a o poloměru 2 (viz obr. 29); kružnice,



Obr. 29

které tyto kruhy ohraničují, přitom k množinám M_1 a M_2 *nepočítáme*. Budiž nyní $M = M_1 \cup M_2$; podle věty 1 je $\{M, d\}$ metrický prostor. Snadno se přesvědčíme, že jak M_1, tak M_2 jsou otevřené množiny v $\{M, d\}$. Současně je však M_1 doplňkem (otevřené) množiny M_2 vzhledem k M, a je tedy uzavřenou množinou v $\{M, d\}$, a stejně je uzavřená i množina M_2 jako doplněk otevřené množiny M_1. Množiny M_1 a M_2 jsou tedy v $\{M, d\}$

obojetné. Přitom v $\{E_2, d\}$ jsou to typické otevřené množiny — např. podle úlohy 8.

Zavedeme na závěr této kapitoly ještě jeden důležitý pojem:

Definice 10. Budiž $\{M, \varrho\}$ metrický prostor. Řekneme, že prvek x z M je *bodem uzávěru* množiny $S \subset M$, jestliže v každé kouli $K(x, r)$ (tj. pro každé kladné číslo r) leží alespoň jeden prvek množiny S. — Množinu všech bodů uzávěru množiny S nazveme *uzávěrem množiny* S (v metrickém prostoru $\{M, \varrho\}$) a označíme ji $\overline{S}$.

Všimněme si některých vlastností uzávěru $\overline{S}$:

(1) Především obsahuje uzávěr $\overline{S}$ množinu S:

(60) $$S \subset \overline{S}$$

Je-li totiž x prvek z S, leží v každé kouli $K(x, r)$ alespoň jeden prvek z S, totiž prvek x samotný.

(2) Z části (3) definice 8 ihned plyne, že také každý hraniční bod množiny S patří do $\overline{S}$:

(61) $$\mathscr{H}(S) \subset \overline{S}$$

(3) Z části (2) definice 8 konečně plyne, že vnější body množiny S *nepatří* do $\overline{S}$: $\mathscr{E}(S) \cap \overline{S} = \emptyset$. Pak totiž existuje alespoň jedno číslo $r = r(x)$ tak, že koule $K(x, r)$ neobsahuje žádný bod z S, a není tedy splněna podmínka z definice 10.

Protože ze vzorců (54) a (56) plyne, že $M = S \cup \mathscr{E}(S) \cup \mathscr{H}(S)$, dostáváme z vlastností (1)—(3) uzávěru $\overline{S}$ ihned tento důsledek:

(62) $$\overline{S} = S \cup \mathscr{H}(S) \quad (= \mathscr{I}(S) \cup \mathscr{H}(S))$$

Můžeme tedy místo (56) psát také

$$M = \overline{S} \cup \mathscr{E}(S) \tag{63}$$

Odtud plyne tato věta:

Věta 10. *Budiž* $\{M, \varrho\}$ *metrický prostor a* S *libovolná podmnožina množiny* M. *Pak je její uzávěr* $\overline{S}$ *uzavřená množina (v* $\{M, \varrho\}$*).*

Důkaz: Podle (63) a podle vlastnosti (3) uzávěru $\overline{S}$ je množina $\overline{S}$ doplňkem vnějšku $\mathscr{E}(S)$. Množina $\mathscr{E}(S)$ je však otevřená — např. podle věty 7, neboť je vnitřkem množiny $M - S$.

Platí dokonce o něco více:

Věta 11. *Množina* $S \subset M$ *je uzavřená v* $\{M, \varrho\}$ *právě tehdy, je-li totožná se svým uzávěrem, tj. platí-li*

$$S = \overline{S}$$

Důkaz: (a) Nechť je $S = \overline{S}$. Množina $\overline{S}$ je podle věty 10 uzavřená v $\{M, \varrho\}$, a je tedy uzavřená i množina S.

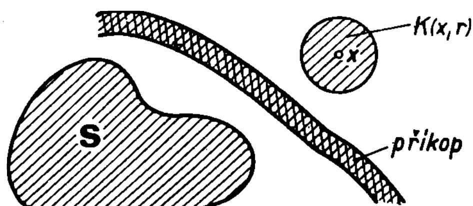
(b) Nechť je množina S uzavřená. To znamená, že množina $M - S$ je otevřená, tj. podle věty 7 je $\mathscr{I}(M - - S) = M - S$. Ale $\mathscr{I}(M - S) = \mathscr{E}(S)$, takže máme $\mathscr{E}(S) = M - S$ čili $S = M - \mathscr{E}(S)$. Současně je však podle (63) $\overline{S} = M - \mathscr{E}(S)$, a tedy máme $S = \overline{S}$.

Opět nebudeme pojem uzávěru ilustrovat na příkladech. Množina $\overline{S}$ je totiž určena pomocí množin S a $\mathscr{H}(S)$ a čtenář si snadno uvědomí, jak vypadají uzávěry množin v předcházejících příkladech.

Úloha 10. Ukažte, že uzávěr $\overline{S}$ je *nejmenší* uzavřená množina, která obsahuje množinu S (tj. dokažte toto tvrzení: Je-li T uzavřená množina v $\{M, \varrho\}$ a je-li $S \subset T$, je také $\overline{S} \subset T$).

Úloha 11. Podobně ukažte, že vnitřek $\mathscr{I}(S)$ množiny S je *největší* otevřená množina obsažená v S (tj. dokažte toto tvrzení: Je-li G otevřená množina a je-li $G \subset S$, je také $G \subset \mathscr{I}(S)$).

V poznámce 17 jsme upozornili na rozdíl mezi *doplňkem* množiny S (vzhledem k M) a mezi jejím *vnějškem* $\mathscr{E}(S)$: Je-li x bod z $\mathscr{E}(S)$, existuje koule $K(x, r)$, která celá leží v $\mathscr{E}(S)$, a bod x je tedy od množiny S *oddělen*.



Obr. 30

Tuto situaci si můžeme ilustrovat v metrickém prostoru $\{E_2, d\}$: abychom se z množiny S dostali do bodu x z $\mathscr{E}(S)$, musíme „přeskočit příkop", znázorněný na obr. 30. (Poloha příkopu je pochopitelně závislá na poloze bodu x!) Z tohoto obrázku je též vidět, že bod x je „dosti

„daleko" od množiny S, tj. že vzdálenost bodu x z $\mathscr{E}(S)$ od množiny S je kladná:

$$d(x, S) > 0$$

Uvidíme v dalším (viz příklad 54), že tak tomu je dokonce v *každém* metrickém prostoru $\{M, \varrho\}$; současně to naznačuje, že množiny, které jsme v této kapitole zavedli, lze charakterizovat pomocí pojmu vzdálenosti bodu od množiny, zavedeného v definici 5.

Příklad 52. Uvažujme v obecném metrickém prostoru $\{M, \varrho\}$ množinu $S \subset M$ a její hranici $\mathscr{H}(S)$. Pak platí:

$$\text{Je-li } x \text{ z } \mathscr{H}(S), \text{ je } \varrho(x, S) = 0$$

Dokážeme to: Zvolme $r = \dfrac{1}{n}$. Protože x patří do $\mathscr{H}(S)$, leží podle části (3) definice 8 v kouli $K\left(x, \dfrac{1}{n}\right)$ nějaký prvek x_n z S; je tedy

$$\varrho(x, x_n) < \frac{1}{n} \tag{64}$$

Takové prvky najdeme pro každé přirozené číslo n, a z nerovnosti (64) tedy plyne, že vždy dovedeme určit prvek y z S tak, aby vzdálenost $\varrho(x, y)$ byla libovolně malá. To však znamená, že $\inf\limits_{y \in S} \varrho(x, y) = 0$, a tvrzení je dokázáno.

Příklad 53. Nechť je S otevřená množina v $\{M, \varrho\}$. Pak je $\mathscr{I}(S) = S$ a prvky z hranice $\mathscr{H}(S)$ nepatří do S. Podle předchozího příkladu mají body hranice $\mathscr{H}(S)$ od množiny S nulovou vzdálenost, ačkoliv do S *nepatří*. Jinými slovy: Z toho, že $\varrho(x, S) = 0$, nemusí ještě plynout, že bod x leží v množině S. S touto skutečností jsme se pro speciální metrické prostory už setkali v příkladech 29 a 34; tento příklad tedy doplňuje poznámku 11, implikaci (a). — Ilustrujte si tento obecný poznatek např. na množinách S_1, S_2 a S_3 z příkladu 36 (s přihlédnutím k příkladu 42).

Pomocí pojmu vzdálenosti bodu od množiny lze plně popsat i uzávěr a hranici množiny S:

Věta 12. *Budiž $\{M, \varrho\}$ metrický prostor a S podmnožina množiny M. Pak platí: Prvek x z M patří do uzávěru $\overline{S}$ množiny S právě tehdy, je-li*

$$\varrho(x, S) = 0 \tag{65}$$

Důkaz: (a) Podle (62) je $\overline{S} = S \cup \mathscr{H}(S)$. V příkladech 23 a 52 jsme ukázali, že prvky z S i z $\mathscr{H}(S)$ mají od S nulovou vzdálenost, a proto je také pro prvky x z $\overline{S}$ $\varrho(x, S) = 0$. Podmínka (65) je tedy nutná.

(b) Nechť je naopak splněna podmínka (65). Podle definice infima (viz odbočení páté) to znamená, že k libovolnému kladnému číslu ε existuje prvek y_ε z S tak, že $\varrho(x, y_\varepsilon) < \varepsilon$. Bod y_ε tedy leží v kouli $K(x, \varepsilon)$. Protože to platí pro *každou* takovou kouli (tj. pro každé $\varepsilon > 0$), obsahuje každá z těchto koulí bod množiny S, a to znamená, že prvek x patří do uzávěru $\overline{S}$.

Příklad 54. Z věty 12 plyne, že číslo $\varrho(x, S)$ je různé od nuly (a tedy kladné) právě tehdy, když x *nepatří* do $\overline{S}$. Podle (62) je $\overline{S} = \mathscr{I}(S) \cup \mathscr{H}(S)$, a bod x, který nepatří do $\overline{S}$, musí tedy ležet v $\mathscr{E}(S)$. Tím dostáváme:

$$\varrho(x, S) > 0 \Leftrightarrow x \in \mathscr{E}(S)$$

což potvrzuje situaci, kterou jsme pro speciální metrický prostor ilustrovali na obr. 30.

Věta 13. *Za předpokladů věty* 12 *platí: Prvek x z M patří do hranice $\mathscr{H}(S)$ množiny S právě tehdy, je-li*

$$\varrho(x, S) = \varrho(x, M - S) = 0 \tag{66}$$

Důkaz: (a) Nechť prvek x patří do $\mathscr{H}(S)$. Pak je podle příkladu 52 $\varrho(x, S) = 0$. Protože podle (59) je $\mathscr{H}(S) = \mathscr{H}(M - S)$, patří x také do $\mathscr{H}(M - S)$, a opět podle příkladu 52 je $\varrho(x, M - S) = 0$. Podmínka (66) je tedy nutná.

(b) Nechť jsou naopak splněny podmínky (66). Z rovnosti $\varrho(x, S) = 0$ plyne podle věty 12, že x patří do $\overline{S} = S \cup \mathscr{H}(S)$, z rovnosti $\varrho(x, M - S) = 0$ pak plyne podle téže věty, že x patří do $\overline{M - S} = (M - S) \cup \cup \mathscr{H}(M - S) = (M - S) \cup \mathscr{H}(S)$ [užili jsme opět vzorce (59)]. Prvek x tedy patří *současně* do množin $S \cup \mathscr{H}(S)$ a $(M - S) \cup \mathscr{H}(S)$, a protože množiny S a $M - S$ se navzájem vylučují, musí x patřit do množiny $\mathscr{H}(S)$. Podmínka (66) je tedy postačující.

Hraničními body množiny S v metrickém prostoru $\{M, \varrho\}$ jsou tedy právě ty body množiny M, které mají nulovou vzdálenost jak od množiny S, tak od jejího doplňku $M - S$. — Protože rovnosti (66) znamenají podle věty 12, že x leží současně v množině $\overline{S}$ i v množině $\overline{M - S}$, musí bod x z $\mathscr{H}(S)$ ležet v průniku těchto množin:

$$\mathscr{H}(S) = \overline{S} \cap \overline{(M - S)}$$

Opět doporučujeme čtenáři, aby si obsah vět 12 a 13 ilustroval na množinách v různých metrických prostorech, s nimiž jsme se zde dosud setkali.

Učiňme na okamžik tuto úmluvu: Budeme říkat, že prvek x množiny M leží „daleko" od množiny $S \subset M$ (v metrickém prostoru $\{M, \varrho\}$), je-li jeho vzdálenost od množiny S *kladná* (číslo $\varrho(x, S)$ přitom může být i velice malé, podstatné je jen to, aby bylo větší než nula). Znamená to tedy, že pak existuje celá koule $K(x, r)$, která nemá s množinou S žádné společné body, že bod x je od množiny S oddělen jakýmsi „příkopem" (viz obr. 30). Naopak řekneme, že bod x leží „blízko" množiny S, je-li $\varrho(x, S) = 0$; pak tedy neexistuje žádný příkop, který by bod x od množiny S odděloval.

V rámci této úmluvy můžeme výsledky předcházejících příkladů a vět ilustrovat takto:

(1) do vnějšku $\mathscr{E}(S)$ množiny S patří právě ty body x z M, které leží „daleko" od S (příklad 54)

(2) uzávěr $\overline{S}$ množiny S je tvořen právě těmi body x z M, které leží „blízko" množiny S (věta 12)

(3) hranici $\mathscr{H}(S)$ množiny S tvoří právě ty body x z M, které leží „blízko" množiny S a současně i „blízko" jejího doplňku $M - S$ (věta 13)

(4) do vnitřku $\mathscr{I}(S)$ množiny S patří právě ty body x z M, které leží „daleko" od doplňku $M - S$ množiny S [to plyne z (1) a z toho, že $\mathscr{I}(S) = \mathscr{E}(M - S)$].

5. kapitola

KONVERGENCE V METRICKÉM PROSTORU

Připomeňme nejprve některé pojmy a tvrzení o posloupnostech reálných čísel.

Budiž tedy $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost reálných čísel a budiž a_0 reálné číslo.

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje k číslu* a_0 [a zapíšeme to symbolem

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a_0 \quad \text{nebo} \quad a_n \to a_0] \tag{67}$$

jestliže ke každému kladnému číslu ε existuje přirozené číslo $N = N(\varepsilon)$*) tak, že pro všechna $n > N$ je

$$|a_n - a_0| < \varepsilon \tag{68}$$

Řekneme-li, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje* (nebo že *je konvergentní*), míníme tím, že existuje nějaké číslo a_0 tak, že

$$a_0 = \lim_{n\to\infty} a_n$$

Zřejmě platí: Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k číslu a_0 právě tehdy, když posloupnost $\{a_n - a_0\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k nule (tj. k číslu nula).

Jsou-li $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ dvě posloupnosti a platí-li:

$$|b_n| \leqq |a_n| \text{ pro všechna } n > N$$

---

*) Tím opět zdůrazňujeme, že číslo N může záviset na čísle ε.

kde N je nějaké přirozené číslo, a je-li navíc $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, je také $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

Platí tzv. **Bolzanovo-Cauchyovo kritérium:** Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje právě tehdy, platí-li: Ke každému kladnému číslu ε existuje číslo $N_1 = N_1(\varepsilon)$ tak, že pro všechna $m > N_1$ a $n > N_1$ je

$$|a_m - a_n| < \varepsilon \tag{69}$$

Tolik tedy na zopakování. Vidíme, že podstatné při konvergenci je, aby *vzdálenost* čísel a_m a a_0 (tj. číslo $|a_n - a_0|$) byla pro dosti velká n dostatečně malá. Lze proto očekávat, že pomocí metriky, která vzdálenost zobecňuje, lze zavést pojem konvergence i v obecných metrických prostorech.

Definice 11. Budiž $\{M, \varrho\}$ metrický prostor, x_0 prvek množiny M a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost prvků množiny M. Řekneme, že posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje k prvku* x_0 (v metrickém prostoru $\{M, \varrho\}$) [a zapíšeme to symbolem

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \quad \text{nebo} \quad x_n \underset{①}{\rightarrow} x_0] \tag{70}$$

jestliže posloupnost nezáporných čísel $a_n = \varrho(x_n, x_0)$ konverguje k nule, tj. platí-li

$$\lim_{n\to\infty} \varrho(x_n, x_0) = 0 \tag{71}$$

Řekneme, že posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje* nebo *je konvergentní* (v $\{M, \varrho\}$), existuje-li prvek x_0 z M, k němuž konverguje. Tento prvek x_0 pak nazýváme *limitou* nebo *limitním prvkem* posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Poznámka 20. Rozepíšeme-li vztah (71) podle definice konvergence číselných posloupností z úvodu této kapitoly, znamená konvergence $x_n \underset{\textcircled{1}}{\rightarrow} x_0$ v $\{M, \varrho\}$ toto:

Ke každému kladnému číslu ε existuje přirozené číslo $N = N(\varepsilon)$ tak, že pro všechna $n > N$ je

$$\varrho(x_n, x_0) < \varepsilon \tag{72}$$

Musí tedy být dostatečně malá vzdálenost (v $\{M, \varrho\}$!!) prvků x_n a x_0. Zde je ihned vidět analogii vztahu (72) se vztahem (68).

Příklad 55. Konvergence číselných posloupností $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, jak jsme o ní hovořili na začátku kapitoly, není nic jiného než konvergence v metrickém prostoru $\{\mathsf{E}_1, d\}$.

Příklad 56. Budiž $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost bodů prostoru E_3: $x_n = [x_{n1}, x_{n2}, x_{n3}]$. Konvergence této posloupnosti k bodu $x_0 = [x_{01}, x_{02}, x_{03}]$ v metrickém prostoru $\{\mathsf{E}_3, p\}$ znamená, že

$$\lim_{n\to\infty} p(x_n, x_0) = \lim_{n\to\infty} (|x_{n1} - x_{01}| + |x_{n2} - x_{02}| + \\ + |x_{n3} - x_{02}|) = 0$$

Protože $0 \leqq |x_{ni} - x_{0i}| \leqq p(x_n, x_0)$ pro $i = 1, 2, 3$, konverguje k nule také číselná posloupnost $\{x_{ni} - x_{0i}\}_{n=1}^{\infty}$ neboli posloupnost $\{x_{ni}\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k číslu x_{0i} ($i = 1, 2, 3$). Konvergence $x_n \underset{\textcircled{1}}{\rightarrow} x_0$ v $\{\mathsf{E}_3, p\}$ tedy znamená konvergenci *tří* číselných posloupností:

$$x_{n1} \to x_{01}; \quad x_{n2} \to x_{02}; \quad x_{n3} \to x_{03}$$

Jinými slovy: Posloupnost prvních složek (souřadnic) bodů x_n konverguje k první složce (souřadnici) limitního bodu x_0, posloupnost druhých složek (souřadnic) bodů x_n konverguje k druhé složce (souřadnici) bodu x_0 a posloupnost třetích složek (souřadnic) bodů x_n konverguje ke třetí složce (souřadnici) bodu x_0. Proto o konvergenci v $\{E_3, p\}$ hovoříme jako o *konvergenci po složkách* nebo o *konvergenci po souřadnicích.*

Příklad 57. V příkladu 14 jsme zavedli metrický prostor $\{P, \pi\}$. Definujme nyní v tomto prostoru posloupnost polynomů $x_n = x_n(t)$ takto:

$$x_n(t) = \frac{1}{n} t^n + 1 \quad \text{pro } 0 \leqq t \leqq 1 \text{ a } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Takto definovaná posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje v $\{P, \pi\}$ k prvku (polynomu) $x_0 = x_0(t)$ definovanému takto: $x_0(t) = 1$ pro všechna t z intervalu $\langle 0,1 \rangle$. Je totiž

$$\pi(x_n, x_0) = \max_{0 \leq t \leq 1} |x_n(t) - x_0(t)| = \max_{0 \leq t \leq 1} \left| \frac{1}{n} t^n + 1 - 1 \right| =$$

$$= \max_{0 \leq t \leq 1} \left| \frac{1}{n} t^n \right| = \frac{1}{n}$$

tj. posloupnost $\{\pi(x_n, x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ je číselná posloupnost $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ a ta konverguje k nule. Je tedy $x_0 = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$ v $\{P, \pi\}$.

Příklad 58. Budiž $\{M, \varrho\}$ libovolný metrický prostor a budiž v něm dána posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, která má tuto vlastnost: Od jistého indexu N_0 počínaje se v ní opakuje stále *týž* prvek x_0 z M, tj. pro $n \geqq N_0$ je $x_n = x_0$; prvky $x_1, x_2, \ldots, x_{N_0-1}$ přitom mohou být libovolné prvky z M. Pak platí:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \quad \text{v} \quad \{M, \varrho\}$$

Stačí totiž ke každému kladnému číslu ε volit za číslo $N = N(\varepsilon)$ z definice 11 naše číslo N_0: Pro $n > N_0$ je $x_n = x_0$ a tedy $\varrho(x_n, x_0) = 0 < \varepsilon$, takže je splněna podmínka (72).

Příklad 59. Budiž M libovolná množina a ϱ metrika na M, daná vzorcem (45). Pak platí: Posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ prvků z M konverguje k prvku x_0 z M právě tehdy, jsou-li od jistého indexu N_0 počínaje všechny prvky posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ totožné s prvkem x_0. Plyne to z předcházejícího příkladu a z toho, že kdyby tomu tak nebylo, tj. kdyby pro *každé* $N > 0$ existoval nějaký index $n > N$ tak, že by bylo $x_n \neq x_0$, bylo by $\varrho(x_n, x_0) = 1$ a podmínka (72) by nemohla být (při $\varepsilon < 1$) splněna pro *všechna* $n > N$. — Konvergentní posloupnosti v našem metrickém prostoru $\{M, \varrho\}$ mají tedy velmi jednoduchou strukturu — vypadají asi takto:

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_N, x_0, x_0, x_0, \ldots, x_0, x_0, x_0, \ldots\}$$

tj. od jistého indexu N se neustále opakuje týž prvek x_0, který je také limitním prvkem této posloupnosti (číslo N může být i dosti velké a může být pro různé posloupnosti tohoto typu různé). Jiné *konvergentní* posloupnosti v tomto metrickém prostoru nejsou.

Úloha 12. Dokažte, že podobná situace nastane i v metrickém prostoru $\{M, d\}$ z příkladu 27.

Příklad 60. Budiž $\{M, \varrho\}$ libovolný metrický prostor a nechť množina M obsahuje alespoň dva *různé* prvky x_1 a x_2. Posloupnost

$$\{x_1, x_2, x_1, x_2, x_1, x_2, \ldots, x_1, x_2, \ldots\} \tag{73}$$

pak *není* konvergentní v $\{M, \varrho\}$. Dokážeme to sporem:

Protože je $x_1 \neq x_2$, je $\varrho(x_1, x_2) = r > 0$. Předpokládejme, že naše posloupnost má limitu x_0, a zvolme za ε v definici 11 číslo $\frac{1}{2}r$. Pak existuje N tak, že pro $n > N$ je $\varrho(x_n, x_0) < \frac{1}{2}r$, tj. je $\varrho(x_1, x_0) < \frac{1}{2}r$ a také $\varrho(x_2, x_0) < \frac{1}{2}r$ (mezi prvky x_n se pro $n > N$ střídají prvky x_1 a x_2). Ale z trojúhelníkové nerovnosti **C** plyne

$$r = \varrho(x_1, x_2) \leqq \varrho(x_1, x_0) + \varrho(x_0, x_2) < \frac{1}{2}r + \frac{1}{2}r = r$$

tj. $r < r$, a to je hledaný spor. Posloupnost (73) proto *nemá limitu* v $\{M, \varrho\}$.

Čtenář si jistě snadno sestrojí další příklady posloupností, které nekonvergují. Platí však tato věta:

Věta 14. *Konvergentní posloupnost v $\{M, \varrho\}$ může mít jen jednu limitu.*

Důkaz: Budiž $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost prvků množiny M a nechť existují prvky x_0 a y_0 z M tak, že $x_n \underset{①}{\rightarrow} x_0$ v $\{M, \varrho\}$ a současně $x_n \underset{①}{\rightarrow} y_0$ v $\{M, \varrho\}$. Ukážeme, že musí být $x_0 = y_0$. Předpokládejme proto, že $x_0 \neq y_0$, a označme $\varrho(x_0, y_0) = r > 0$. Zvolme za ε v definici 11 číslo $\frac{1}{2}r$. Protože $x_n \underset{①}{\rightarrow} x_0$, existuje číslo $N_1 = N_1(\varepsilon)$ tak, že pro $n > N_1$ je $\varrho(x_n, x_0) < \frac{1}{2}r$. Protože $x_n \underset{①}{\rightarrow} y_0$, existuje číslo $N_2 = N_2(\varepsilon)$ tak, že pro $n > N_2$ je $\varrho(x_n, y_0) <$

$< \frac{1}{2} r$. Označíme-li N větší z čísel N_1, N_2, bude pro $n > N$ podle trojúhelníkové nerovnosti platit

$$r = \varrho(x_0, y_0) \leqq \varrho(x_0, x_n) + \varrho(x_n, y_0) < \frac{1}{2} r + \frac{1}{2} r = r,$$

tj. $r < r$. To je však spor s předpokladem $x_0 \neq y_0$, a proto musí být $x_0 = y_0$.

Poznámka 21. Vraťme se ještě k definici 11 a k poznámce 20. Vztah (72) říká, že v kouli $K(x_0, \varepsilon)$ leží prvek posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ [dokonce tam leží všechny prvky posloupnosti počínaje $(N + 1)$ — ním!]. Můžeme to vyslovit takto: Je-li prvek x_0 limitou posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ v $\{M, \varrho\}$, leží v *každé* kouli $K(x_0, \varepsilon)$ (tj. pro každé $\varepsilon > 0$) nekonečně mnoho prvků posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. To nás přivádí k tomuto novému pojmu:

Definice 12. Budiž $\{M, \varrho\}$ metrický prostor a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost prvků množiny M. Řekneme, že prvek x_0 z M je *hromadným bodem* posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, jestliže v každé kouli $K(x_0, r)$ (tj. pro každé $r > 0$) leží *nekonečně mnoho* prvků posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Srovnání definice 12 s poznámkou 21 dovoluje vyslovit ihned toto tvrzení:

Každá limita posloupnosti je hromadným bodem této posloupnosti.

Opak ovšem neplatí; ukazuje to následující příklad.

Příklad 61. Vraťme se k posloupnosti z příkladu 60. Ta nemá žádnou limitu, má však hromadný bod. Hromadným bodem je prvek x_1, neboť každá koule $K(x_1, r)$

obsahuje nekonečně mnoho prvků posloupnosti (73): první, třetí pátý atd., zkrátka všechny prvky s lichým indexem. — Ze stejných důvodů je také prvek x_2 hromadným bodem posloupnosti (73).

Tento příklad také ukazuje, že pro hromadné body posloupnosti neplatí analogie věty 14!

Podobně jako pojmy z předcházejících kapitol závisí také pojem konvergence na metrickém prostoru $\{M, \varrho\}$, s nímž pracujeme. Ukazuje to následující příklad; nejprve však dokážeme jednu jednoduchou větu:

Věta 15. *Budiž $\{M, \varrho\}$ metrický prostor a $S \subset M$. Dále budiž $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost prvků z S. Jestliže tato posloupnost konverguje v $\{S, \varrho\}$ k prvku x_0, konverguje i v $\{M, \varrho\}$ k témuž prvku.*

Důkaz: Protože je $S \subset M$, je podle věty 1 také $\{S, \varrho\}$ metrický prostor. Jestliže posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje v $\{S, \varrho\}$, znamená to, že existuje prvek x_0 z S tak, že $x_0 = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$, čili že ke každému kladnému číslu ε existuje číslo N tak, že pro $n > N$ je $\varrho(x_n, x_0) < \varepsilon$. Ale protože x_0 patří také do M a metrika je v M i v S stejná, znamená to, že $x_n \underset{①}{\rightarrow} x_0$ v $\{M, \varrho\}$, a věta je dokázána.

Příklad 62. Budiž I otevřený interval $(0,1)$. Pak je $I \subset \mathsf{E}_1$ a $\{I, d\}$ je podle věty 1 metrický prostor. Zvolme v I posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, jejíž prvky jsou definovány takto: $x_n = \dfrac{n}{n+1}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Umíme ukázat, že *číselná* posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k 1; to podle příkladu 55 znamená, že

$$x_n \underset{①}{\rightarrow} 1 \quad \text{v } \{\mathsf{E}_1, d\}$$

Ovšem v metrickém prostoru $\{I, d\}$ posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *nekonverguje*. Dokážeme to sporem: Předpokládejme, že existuje prvek x_0 z I, který je limitou posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ v $\{I, d\}$. Prvek x_0 leží v I, tj. je $0 < x_0 < 1$. Podle věty 15 konverguje posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ k x_0 i v $\{\mathsf{E}_1, d\}$. To znamená, že naše posloupnost konverguje v $\{\mathsf{E}_1, d\}$ současně k 1 a k x_0. Podle věty 14 pak musí být $x_0 = 1$, a to je spor s tím, že $x_0 < 1$.

Podle věty 15 plyne z konvergence v „menším" metrickém prostoru $\{S, \varrho\}$ už konvergence ve „větším" metrickém prostoru $\{M, \varrho\}$, kdežto obrácená implikace nemusí platit — to ukazuje příklad 62. Má-li platit obrácená implikace, musí být množina S uzavřená v $\{M, \varrho\}$.

Věta 16. *Budiž $\{M, \varrho\}$ metrický prostor a budiž $S \subset M$ uzavřená množina v $\{M, \varrho\}$. Jestliže je $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost prvků z S, která konverguje v $\{M, \varrho\}$, pak konverguje také v $\{S, \varrho\}$.*

Důkaz: Protože posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje v $\{M, \varrho\}$, existuje prvek x_0 z M a číslo $N = N(\varepsilon)$ tak, že

$$(*) \qquad \varrho(x_n, x_0) < \varepsilon \quad \text{pro } n > N$$

Ale prvky x_n leží v S, a srovnáme-li poznámku 21 s definicí 10, vidíme, že prvek x_0 leží v uzávěru $\overline{S}$ množiny S. Množina S je však uzavřená v $\{M, \varrho\}$, tj. $S = \overline{S}$ podle věty 11, a tedy leží prvek x_0 v S. Pak však vztah $(*)$ znamená, že $x_0 = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$ v $\{S, \varrho\}$ (metrika je v obou prostorech stejná), a věta je tím dokázána.

Příklad 63. Množina I z příkladu 62 nebyla uzavřená v $\{\mathsf{E}_1, d\}$, neboť to je koule $K\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Kdybychom za množinu I zvolili polouzavřený interval $(0,1\rangle$, odpadly by potíže s posloupností $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$, ale stejné komplikace by nastaly např. s posloupností $\{2^{-n}\}_{n=1}^{\infty}$ (rozmyslete si to!). Teprve když za I zvolíme uzavřený interval $\langle 0,1\rangle$, bude pro každou posloupnost prvků z I konvergence v $\{I, d\}$ totožná s konvergencí v $\{E_1, d\}$.

V předcházejících příkladech jsme uvažovali dva metrické prostory $\{M_1, \varrho_1\}$ a $\{M_2, \varrho_2\}$, které se lišily pouze základními množinami. Uvažujme nyní naopak tutéž základní množinu, ale *různé* metriky na ní. Platí

Věta 17. *Buďte ϱ_1, ϱ_2 dvě metriky definované na množině M a nechť existuje kladná konstanta c tak, že pro všechny prvky x a y z M platí*

(74) $$\varrho_2(x, y) \leqq c\varrho_1(x, y)$$

Pak platí: Je-li posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ prvků z M konvergentní v $\{M, \varrho_1\}$, je konvergentní i v $\{M, \varrho_2\}$ a má tam tutéž limitu.

Důkaz: Nechť $x_n \underset{(1)}{\rightarrow} x_0$ v $\{M, \varrho_1\}$ a budiž ε kladné číslo. Pak existuje číslo $N = N(\varepsilon)$ tak, že

$$\varrho_1(x_n, x_0) < \varepsilon/c \quad \text{pro } n > N$$

Podle (74) je však potom

$$\varrho_2(x_n, x_0) \leqq c\varrho_1(x_n, x_0) < c\frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon \text{ pro } n > N$$

a to znamená, že $x_n \underset{(1)}{\rightarrow} x_0$ v $\{M, \varrho_2\}$.

Příklad 64. Ve větě 3 jsme k metrice ϱ na M sestrojili další metriku ϱ_1 danou vzorcem

$$\varrho_1(x, y) = \frac{\varrho(x, y)}{1 + \varrho(x, y)} \tag{75}$$

Protože platí (viz str. 50)

$$\varrho_1(x, y) \leqq \varrho(x, y)$$

plyne podle věty 17 z konvergence v $\{M, \varrho\}$ také konvergence v $\{M, \varrho_1\}$.

Z věty 17 plyne ihned toto tvrzení:

Jsou-li ϱ_1 a ϱ_2 dvě ekvivalentní metriky definované na množině M (viz definici 3), *pak je každá posloupnost, která konverguje v $\{M, \varrho_1\}$, konvergentní i v $\{M, \varrho_2\}$, a naopak je každá posloupnost, která konverguje v $\{M, \varrho_2\}$, konvergentní i v $\{M, \varrho_1\}$.*

Důkaz: Pro obě ekvivalentní metriky platí nejen vztah (74); existuje také kladná konstanta C tak, že pro všechna x a y z M je

$$\varrho_1(x, y) \leqq C\varrho_2(x, y)$$

a odtud plyne podle věty 17, že posloupnost konvergentní v $\{M, \varrho_2\}$ konverguje (k téže limitě) i v $\{M, \varrho_1\}$.

Příklad 65. Protože metriky d, p, m jsou na E_2 ekvivalentní (viz příklad 9), konverguje (resp. nekonverguje) posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ bodů roviny současně ve všech prostorech $\{\mathsf{E}_2, d\}$, $\{\mathsf{E}_2, p\}$ a $\{\mathsf{E}_2, m\}$ a má v případě konvergence všude tutéž limitu. Protože podobně jako v příkladu 56 lze ukázat, že konvergence v $\{\mathsf{E}_2, p\}$ znamená konvergenci po souřadnicích, znamená konvergenci po souřadnicích i konvergence v $\{\mathsf{E}_2, d\}$ a $\{\mathsf{E}_2, m\}$.

Nerovnost (74) ovšem nemůžeme přeceňovat. Je to postačující podmínka pro to, aby se konvergence přenášela z prostoru $\{M, \varrho_1\}$ do prostoru $\{M, \varrho_2\}$, nikoliv však podmínka nutná. Ukazuje to tento příklad:

Příklad 66. Budiž $\{M, \varrho\}$ metrický prostor a ϱ_1 metrika z příkladu 64. Předpokládejme, že posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje v $\{M, \varrho_1\}$ k prvku x_0. To znamená, že k danému kladnému číslu η existuje číslo $N = N(\eta)$ tak, že pro $n > N$ je $\varrho_1(x_n, x_0) < \eta$. Zvolme číslo η poněkud speciálně ve tvaru $\eta = \dfrac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}$, kde je $0 < \varepsilon$. Pak je tedy

$$\varrho_1(x_n, x_0) < \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \quad \text{pro } n > N \tag{76}$$

Upravíme-li postupně první z těchto nerovností, dostáváme:

$$(1 + \varepsilon)\, \varrho_1(x_n, x_0) < \varepsilon$$

$$\varrho_1(x_n, x_0) < \varepsilon - \varepsilon\varrho_1(x_n, x_0) = \varepsilon(1 - \varrho_1(x_n, x_0))$$

$$\frac{\varrho_1(x_n, x_0)}{1 - \varrho_1(x_n, x_0)} < \varepsilon$$

ale vzhledem k formuli (75) máme

$$\frac{\varrho_1(x_n, x_0)}{1 - \varrho_1(x_n, x_0)} = \varrho(x_n, x_0), \text{ a tedy}$$

$$\varrho(x_n, x_0) < \varepsilon \quad \text{pro} \quad n > N \tag{77}$$

To však znamená, že $x_n \underset{①}{\to} x_0$ také v $\{M, \varrho\}$. To doplňuje příklad 64: z konvergence v $\{M, \varrho_1\}$ plyne také konvergence v $\{M, \varrho\}$. Tento závěr bychom mohli dostat také z věty 17, kdybychom věděli, že existuje kladné číslo C tak, že pro všechny prvky x a y z M je

$$\varrho(x, y) \leqq C\varrho_1(x, y)$$

Takový vztah však obecně *nemusí* platit: stačí zvolit za $\{M, \varrho\}$ metrický prostor $\{\mathsf{E}_2, d\}$ a pak je metrika ϱ_1 omezená, zatím co metrika ϱ (tj. metrika d) omezená není (viz též poznámku 16).

V úvodu této kapitoly jsme se zmiňovali o Bolzanově-Cauchyově kritériu konvergence číselných posloupností. Podívejme se, zda něco podobného platí v obecných metrických prostorech.

Definice 13. Budiž $\{M, \varrho\}$ metrický prostor a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost prvků z M. Řekneme, že tato posloupnost je *cauchyovská* (v $\{M, \varrho\}$), jestliže ke každému kladnému číslu ε existuje přirozené číslo $N = N(\varepsilon)$ tak, že pro všechna $m > N$ a $n > N$ je

$$\varrho(x_m, x_n) < \varepsilon \tag{78}$$

Poznámka 22. Nerovnost (78) má v metrickém prostoru $\{\mathsf{E}_1, d\}$ tvar (69). V tomto metrickém prostoru však podle zmíněného kritéria ze (78) už plyne (67) nebo (68). V obecném metrickém prostoru pak platí tato věta:

Věta 18. *Je-li posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentní v $\{M, \varrho\}$, je už cauchyovská v $\{M, \varrho\}$.*

Důkaz: Budiž x_0 limita posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. To znamená, že k číslu $\varepsilon > 0$ lze najít číslo $N = N(\varepsilon)$ tak, že pro $n > N$ je $\varrho(x_n, x_0) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Toto číslo N je už oním hledaným číslem z definice 13: pak je totiž také $\varrho(x_m, x_0) < \frac{1}{2}\varepsilon$ pro $m > N$ a z trojúhelníkové nerovnosti plyne, že pro tato m a n je

$$\varrho(x_m, x_n) \leqq \varrho(x_m, x_0) + \varrho(x_n, x_0) < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

To však znamená, že posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská.

Bolzanovo-Cauchyovo kritérium lze vyslovit též takto: *Posloupnost* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *v* $\{\mathsf{E}_1, d\}$ *je konvergentní právě tehdy, je-li cauchyovská.* Zde byla důležitá slova „v $\{\mathsf{E}_1, d\}$“. V obecném metrickém prostoru však z toho, že posloupnost je cauchyovská, ještě *nemusí* plynout, že je konvergentní (opačnou implikaci zaručuje věta 18):

Příklad 67. Uvažujme metrický prostor $\{I, d\}$ z příkladu 62. Posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $x_n = \frac{n}{n+1}$, je cauchyovská v $\{I, d\}$: Je totiž

$$(*) \qquad d(x_m, x_n) = \left|\frac{m}{m+1} - \frac{n}{n+1}\right| =$$

$$= \left|\left(1 - \frac{n}{n+1}\right) + \left(\frac{m}{m+1} - 1\right)\right| \leqq \left|1 - \frac{m}{m+1}\right| +$$

$$+ \left|1 - \frac{n}{n+1}\right| = \frac{1}{m+1} + \frac{1}{n+1}$$

Stačí nyní k danému $\varepsilon > 0$ zvolit $N = N(\varepsilon)$ tak, aby bylo $N \geqq \frac{2}{\varepsilon} - 1$, neboť pro $m > N$ je $m > \frac{2}{\varepsilon} - 1$ čili $m + 1 > \frac{2}{\varepsilon}$ čili $\frac{1}{m+1} < \frac{1}{2}\varepsilon$ a podobně pro $n > N$ je $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{2}\varepsilon$, takže z (*) máme:

$$d(x_m, x_n) \leqq \frac{1}{m+1} + \frac{1}{n+1} < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

pro $m > N$ a $n > N$. Přitom však posloupnost $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ *nekonverguje* v $\{I, d\}$, takže v $\{I, d\}$ nelze větu 18 „obrátit".

Poznámka 23. Důkaz toho, že posloupnost $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská v $\{I, d\}$, který jsme provedli v předchozím příkladu, byl zbytečně komplikovaný, protože jsme vztah (78) dokazovali *přímo*. Lze to však dokázat i zprostředkovaně a bez složitých odhadů: Posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje v $\{\mathsf{E}_1, d\}$ k jedné, a je proto podle věty 18 cauchyovská v $\{\mathsf{E}_1, d\}$. To znamená, že

$$\text{pro } m > N = N(\varepsilon) \quad \text{a} \quad n > N \text{ je } d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

Poslední vztah však platí i v $\{I, d\}$, neboť metrika je zde stejná a prvky x_n patří do I. Naše posloupnost je tedy cauchyovská i v $\{I, d\}$, což jsme chtěli dokázat.

Příklad 68. Uvažujme metrický prostor $\{P, \pi\}$ z příkladu 14 a v něm posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ definovanou takto:

$$x_1 = x_1(t) = 1 + \frac{1}{2}t\ ; \quad x_2 = x_2(t) = 1 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}t^2$$

$$x_3 = x_3(t) = 1 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{8}t^3; \ldots$$

$$x_n = x_n(t) = 1 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}t^2 + \ldots + \frac{1}{2^n}t^n; \ldots$$

$0 \leqq t \leqq 1$. Tato posloupnost je cauchyovská v $\{P, \pi\}$: Je

$$x_m(t) - x_n(t) = \frac{1}{2^{n+1}}t^{n+1} + \frac{1}{2^{n+2}}t^{n+2} + \ldots + \frac{1}{2^m}t^m =$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}}t^{n+1}\left(1 + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{4} + \ldots + \left(\frac{t}{2}\right)^{m-n+1}\right)$$

(můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $m > n$). Součet v závorce není větší než součet geometrické řady $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{t}{2}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{t}{2}} = \frac{2}{2-t}$, takže máme

$$x_m(t) - x_n(t) \leqq \frac{1}{2^{n+1}}t^{n+1}\frac{2}{2-t} \leqq \frac{1}{2^{n+1}}\cdot 2 = \frac{1}{2^n}$$

(použili jsme toho, že je $0 \leqq t \leqq 1$). Proto je

$$\pi(x_m, x_n) = \max_{0 \leqq t \leqq 1} |x_m(t) - x_n(t)| \leqq \frac{1}{2^n}$$

a tedy bude pro $n > N(\varepsilon) \geqq \lg\frac{1}{\varepsilon}\Big/\lg 2$ platit $\pi(x_m, x_n) <$ $< \varepsilon$. — Posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ však *není konvergentní* v $\{P, \pi\}$. Uvažujeme-li totiž číselnou posloupnost $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ pro pevné t z intervalu $\langle 0, 1\rangle$, je $x_n(t)$ částečný součet geometrické řady $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{t}{2}\right)^k$, a tedy

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t) = \frac{2}{2-t} = x_0(t)$$

To platí pro *každé* t z intervalu $\langle 0, 1)$ a lze dokonce ukázat, že také $\lim_{n\to\infty} \pi(x_n, x_0) = 0$. Funkce $x_0(t)$ však není polynom, a *nepatří* tedy do množiny P.

Předcházející příklady ukazují, že v řadě metrických prostorů neplatí analogie Bolzanova-Cauchyova kritéria. Vydělíme proto z množiny všech metrických prostorů zvláštní skupinu:

Definice 14. Řekneme, že metrický prostor $\{M, \varrho\}$ je *úplný*, jestliže každá cauchyovská posloupnost prvků z M má v $\{M, \varrho\}$ limitu (tj. konverguje).

Spolu s větou 18 tedy definice 14 říká, že v *úplném* metrickém prostoru $\{M, \varrho\}$ platí analogie zmíněného kritéria: *Posloupnost* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *prvků z* M *je cauchyovská v* $\{M, \varrho\}$ *právě tehdy, konverguje-li v* $\{M, \varrho\}$.

Příklad 69. Metrický prostor $\{E_1, d\}$ je úplný — plyne to z Bolzanova-Cauchyova kritéria a z příkladu 55. Úplnými metrickými prostory jsou také prostory $\{E_i, d\}$, $\{E_i, p\}$ a $\{E_i, m\}$ pro $i = 2, 3$. Pro prostor $\{E_3, p\}$ to plyne např. z příkladu 56: Je-li $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ cauchyovská posloupnost v $\{E_3, p\}$, $x_n = [x_{n1}, x_{n2}, x_{n3}]$, je také

$$|x_{mi} - x_{ni}| \leqq p(x_m, x_n) < \varepsilon \quad \text{pro } n > N$$

tj. posloupnosti $\{x_{ni}\}_{n=1}^{\infty}$ $(i = 1, 2, 3)$ jsou cauchyovské v $\{E_1, d\}$. Protože tento poslední prostor je úplný, existují čísla $x_{0i} = \lim_{n\to\infty} x_{ni}$ $(i = 1, 2, 3)$ a bod $x_0 = [x_{01}, x_{02}, x_{03}]$ je limitním bodem posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ v $\{E_3, p\}$. Pro

$\{\mathsf{E}_3, d\}$ a $\{\mathsf{E}_3, m\}$ plyne úplnost z ekvivalence metrik p, m a d (dokažte!).

Příklad 70. Metrické prostory $\{P, \pi\}$ a $\{I, d\}$ *nejsou* úplné — plyne to z příkladů 68 a 67.

Příklad 71. Uvažujme na přímce E_1 množinu R všech racionálních čísel. Podle věty 1 je $\{R, d\}$ metrický prostor; není to však úplný metrický prostor. Označíme-li totiž $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, jsou x_n racionální čísla a posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupností v R. Tato posloupnost je přitom cauchyovská v $\{R, d\}$; plyne to např. stejně jako v poznámce 23 z toho, že má v $\{\mathsf{E}_1, d\}$ limitu — Eulerovo číslo e. Přitom však posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *není konvergentní* v $\{R, d\}$, neboť číslo e není racionální a nepatří tedy do R.

Dokázat úplnost nějakého konkrétního metrického prostoru není vždy snadná záležitost. Většina nejdůležitějších metrických prostorů však je úplných; když si přitom čtenář připomene neúplné metrické prostory, s nimiž jsme se zde zatím setkali, vidí, že většinou je možno množinu M „doplnit" vhodnými prvky tak, aby vznikla o něco obsáhlejší množina $\widetilde{M}$ a aby přitom metrický prostor $\{\widetilde{M}, \varrho\}$ už byl úplný. Tak např. v příkladu 71 tvořila množinu M všechna racionální čísla a doplněním této množiny o čísla iracionální dostaneme množinu $\widetilde{M} = \mathsf{E}_1$ a úplný metrický prostor $\{\mathsf{E}_1, d\}$; v příkladu 67 tvoří množinu M otevřený interval $(0, 1)$ a doplněnou množinu $\widetilde{M}$ uzavřený interval $\langle 0, 1\rangle$. Tento poznatek lze zobecnit, to však zde nebudeme probírat. Uvedeme ještě jeden příklad úplného metrického prostoru:

Příklad 72. Budiž M libovolná množina a ϱ metrika daná vzorcem (45). Metrický prostor $\{M, \varrho\}$ je úplný: Podobně jako v příkladu 59 lze totiž ukázat, že k tomu, aby posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ prvků z M byla cauchyovská, je nutné a stačí, aby měla tvar

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_N, x_0, x_0, x_0, x_0, \ldots\}$$

to jsou však právě ty posloupnosti, které podle příkladu 59 konvergují v $\{M, \varrho\}$.

Poznámka 24. Pojem konvergence je velmi důležitý v matematice i v jejích aplikacích. Často totiž nějaký jev nemůžeme popsat či vyjádřit přímo a vytváříme posloupnost přibližných popisů, přičemž při každém kroku chceme, aby tento popis byl přesnější, aby vzniklá posloupnost „konvergovala" k původnímu jevu. Zvláště markantní je to např. při různých početních záležitostech. — V metrickém prostoru jsme ve výhodném postavení: konvergenci můžeme zavést pomocí metriky. Někdy jsme však postaveni před skutečnost, že máme dánu množinu M a na ní už je předem nějak definována konvergence (bez použití metriky). Lze si nyní položit tuto otázku: Existuje nějaká metrika ϱ na množině M tak, aby konvergence v metrickém prostoru $\{M, \varrho\}$ byla právě onou předem danou konvergencí? Je-li odpověď na tuto otázku kladná, řekneme, že množina M je *metrizovatelná*. — Je ovšem třeba poznamenat, že taková metrika nemusí vždy existovat, že se mohou vyskytnout množiny M s konvergencí, které nejsou metrizovatelné.

Příklad 73. Uvažujme množinu F všech funkcí definovaných na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ (viz příklad 17). — (1) Definujme na množině F konvergenci takto:

Řekneme, že $x_0 = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$, kde $x_0 = x_0(t)$ a $x_n = x_n(t)$

($n = 1, 2, 3, \ldots$) jsou funkce definované na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, jestliže pro každé t z tohoto intervalu konverguje číselná posloupnost $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ k číslu $x_0(t)$.

(Je to tzv. *bodová konvergence*.) Lze ukázat, že pak neexistuje *žádná* metrika na F, která by tuto konvergenci realizovala (důkaz tohoto tvrzení přesahuje rámce této knížky). — (2) Definujme na množině F jiný typ konvergence takto:

Řekneme, že $x_0 = \lim_{n \to \infty} x_n$, jestliže existuje index N (závisející na posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$) tak, že pro $n > N$ a pro každé t z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ je $x_n(t) = x_0(t)$.

Tuto konvergenci realizuje metrika ϱ, daná vzorcem (45).

ZÁVĚR

V předcházejících kapitolách jsme čtenáři předložili malou ukázku problémů, které vzniknou, když se pokusíme o zobecnění tak „běžného“ pojmu jako je *vzdálenost*. Výběr těchto ukázek byl přitom nesystematický a nutně omezený; o tomto tématu by se dala napsat ještě řada dalších kapitol. Ale snad alespoň z těchto „vzorků“ vyplynulo, jak mnohotvárná je matematika, jak na jedné straně často potvrzuje naši intuici a „rozumnost“ uspořádání světa kolem nás a jak nás na druhé straně překvapí nečekanými a na první pohled „nepřirozenými“ výsledky.

Domnívám se, že nejvhodnějším zakončením této knížky o metrikách a metrických prostorech bude ještě jedna ukázka: zavedeme další metriku v rovině E_2, metriku, která opět podivuhodně vystihuje jev, s nímž se setkáváme v životě velmi často.

Příklad 74. Definujme pro body $x = [x_1, x_2]$ a $y = [y_1, y_2]$ v rovině E_2 „vzdálenost“ $h(x, y)$ takto:

(1) pro $x = y$ položíme $h(x, y) = 0$

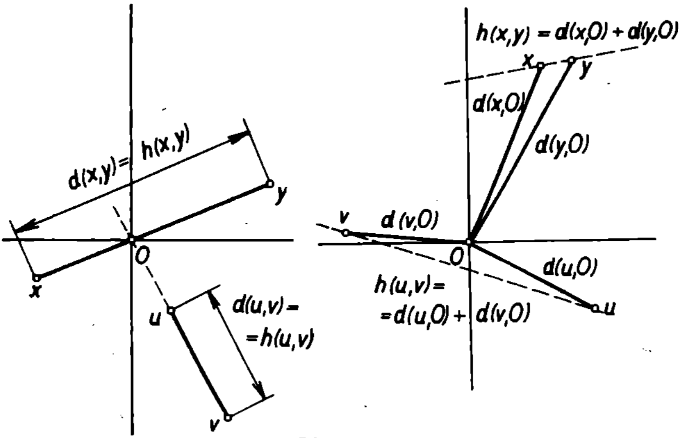
(2) je-li $x \neq y$ a přímka, určená body x a y, prochází počátkem, položíme

$$h(x, y) = d(x, y)$$

(3) je-li $x \neq y$ a přímka, určená body x a y, neprochází počátkem, položíme

$$h(x, y) = d(x, 0) + d(y, 0)$$

(viz obr. 31; d je přitom eukleidovská vzdálenost a 0 je počátek).



Obr. 31.

Podrobnějším rozborem čtenář zjistí, že $h(x, y)$ je vzdálenost, kterou musíme urazit, chceme-li se dostat z bodu x do bodu y ve městě, jehož městská hromadná doprava se řídí heslem „Vše přes centrum": Ulice našeho města jsou uspořádány hvězdicovitě s průsečíkem v počátku; neleží-li body x a y na témže paprsku, musíme v místě x nasednout na tramvaj, jedoucí do centra, a tam přesednout na tramvaj, jedoucí po paprsku, na němž leží místo y. S touto situací — ovšem ještě náležitě zkomplikovanou tím, že paprsky mohou být i „křivé" — se jistě většina čtenářů už někde setkala.

Úloha 13. Přesvědčte se, že vzdálenost h z příkladu 74 vyhovuje skutečně podmínkám **A**, **B** a **C**, kladeným na metriku, a zjistěte, jaký geometrický tvar mají koule $K(x, r)$ v metrickém prostoru $\{E_2, h\}$.

Poznámka 25. Čtenář, který vyřešil předcházející úlohu, jistě zjistil, že koule $K(0, 1)$ má v metrickém prostoru $\{E_2, h\}$ stejný tvar jako v metrickém prostoru $\{E_2, d\}$. Mohl by si nyní položit otázku, jak to souvisí s úvahami na str. 64, kde jsme k jistému danému rovinnému útvaru $\mathcal{U}$ našli metriku ϱ tak, že $\mathcal{U}$ byla koule $K(0, 1)$ v metrickém prostoru $\{E_2, \varrho\}$. Nedošli jsme k nějakému rozporu? Vždyť zmíněná metrika ϱ byla dána jednoznačně vzorcem (51), a my jsme k evidentně *stejnému* útvaru — kruhu $\mathcal{K}$ — našli dvě zcela *rozdílné* metriky d a h tak, že kruh $\mathcal{K}$ je koule $K(0, 1)$ jak v metrickém prostoru $\{E_2, d\}$, tak v metrickém prostoru $\{E_2, h\}$.

Tento rozpor je pouze zdánlivý. Ze vzorce (51) plyne, že metrika ϱ, určená tímto vzorcem, má vlastnost analogickou vlastnosti **D** eukleidovské metriky d (viz str. 16): platí

D* $\quad \varrho(x + u, y + u) = \varrho(x, y)\quad$ pro každé tři body x, y, u z E_2

(Dokažte to použitím vlastnosti **D**!) Odtud pak plyne, že *každá* koule $K(a, 1)$ o poloměru jedna v $\{E_2, \varrho\}$ má stejný tvar jako útvar $\mathcal{U}$ a vznikne jen jeho *posunutím*, při němž bod $0 = [0, 0]$ přejde v bod a. To už nelze říci o koulích $K(a, 1)$ v metrickém prostoru $\{E_2, h\}$ — ty už pro $a \neq [0, 0]$ mají jiný tvar: např. pro $a = [2, 0]$ je koule $K(a, 1)$ v $\{\mathsf{E}_2, h\}$ tvořena *úsečkou* délky 2, ležící na ose x_1 a mající střed v bodě a.

To znamená, že metrika h *nemá* vlastnost typu **D**, a nemůže být tedy dána vzorcem typu (51). Poznamenejme nakonec, že pochyby, které jsme právě rozptýlili, by vůbec nevznikly, kdybychom při definici metriky h zvolili za bod, v němž se „křižují všechny hvězdicovitě uspořádané tramvajové linky“, nějaký jiný bod než právě počátek $[0, 0]$.

OBSAH

Předmluva - - - - - - - - - - - - - - - - - - - 3

Úvod - 6

1. Vzdálenost v eukleidovském prostoru - - - - - - 9

2. Metrika, metrický prostor - - - - - - - - - - - - 33

3. Otevřené množiny - - - - - - - - - - - - - - - 56

4. Vnitřek množiny, hranice množiny.
Uzavřená množina - - - - - - - - - - - - - - - 77

5. Konvergence v metrickém prostoru - - - - - - - 94

Závěr - 114

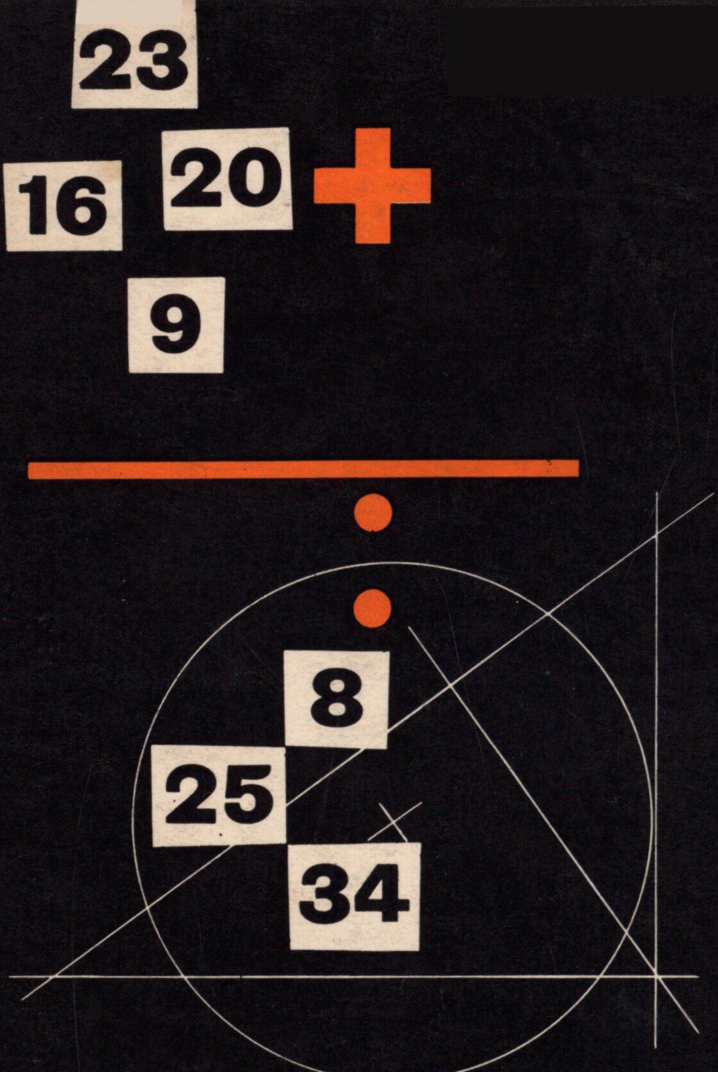
ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

ALOIS KUFNER

Co asi nevíte o vzdálenosti

Pro účastníky matematické olympiády
vydává ÚV Matematické olympiády
v nakladatelství Mladá fronta
Praha 1, Panská 8
Řídí akademik Josef Novák
Obálku navrhl Jaroslav Příbramský
Odpovědný redaktor Ladislav Smoljak
Technický redaktor Vladimír Vácha
Publikace číslo 3405
Edice Škola mladých matematiků,
svazek 35
Vytiskl Mír, novinářské závody, n. p.,
závod 1, Praha 1, Václavské nám. 15
4,60 AA, 4,76 VA. 120 stran
Náklad 6500 výtisků. 1. vydání
Praha 1974. 508/21/82.5

23-047-74 03-2 Cena brož. výt. Kčs 5,50



23-047-74
03/2
Cena brož.
Kčs 5,50