Booleova algebra

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

BOOLEOVA ALGEBRA

31

Vydal ÚV Matematické olympiády a ÚV SSM v nakladatelství Mladá fronta

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

Booleova algebra

OLDŘICH ODVÁRKO

PRAHA 1973
VYDAL ÚV MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY
V NAKLADATELSTVÍ MLADÁ FRONTA

PŘEDMLUVA

Tato knížka je věnována algebře, jež je na počest irského matematika a logika George Boolea (1815—1864) nazývána *Booleova* (čti „búlova“) *algebra.*

Booleova algebra je užitečná v mnoha matematických disciplínách: v teorii pravděpodobnosti, ve statistice, ve funkcionální analýze, v teorii míry a integrálu, v topologii atd. Má velmi široké uplatnění v technických aplikacích. Tvoří teoretický základ pro navrhování elektrických počítacích strojů, telefonních systémů, hlasovacích a zkušebních strojů, obecně rozmanitých regulujících systémů a mechanismů.

Hlavním cílem této knížky je ilustrovat užitečnost Booleovy algebry na řadě různých typů úloh. Ukážeme si, jak je možno „booleovským výpočtem“ řešit příklady z logiky a s tématikou množinovou. Uvedeme také řešení některých jednoduchých úloh z oblasti fyziky a techniky.

1. kapitola

MNOŽINY A VENNOVY DIAGRAMY

V této kapitole si stručně připomeneme některé základní poznatky o množinách a znázorňování množinových situací Vennovými diagramy.

Je-li nějaký objekt m prvkem množiny M, píšeme „$m \in M$“. Není-li m prvkem M, zapisujeme „$m \notin M$“. Říkáme, že množina je určena, jestliže o každém objektu umíme jednoznačně rozhodnout, zda je jejím prvkem či nikoliv. Množiny lze určovat tzv. charakteristickou vlastností (např. „F je množina všech prvočísel menších než číslo 8“); v případě konečných množin také výčtem, tj. vypsáním všech jejich prvků („$F = \{2, 3, 5, 7\}$“).

Prázdnou množinou nazýváme množinu, jež neobsahuje žádný prvek. Označujeme ji symbolem $\emptyset$.

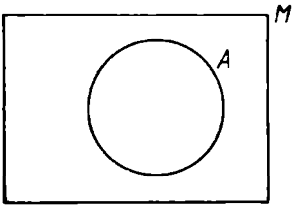
Množinu A nazýváme *podmnožinou* množiny B, právě když platí: každý prvek množiny A je také prvkem množiny B. Zapisujeme: $A \subset B$.

Říkáme, že *množiny A, B jsou si rovny*, právě když platí $A \subset B$ a zároveň $B \subset A$. K zápisu rovnosti množin používáme obyčejného rovnítka; píšeme $A = B$.

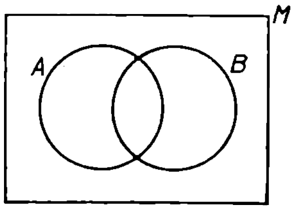
Nejsou-li splněny obě podmínky ve shora uvedené definici, říkáme, že *množiny A, B jsou různé*, a zapisujeme $A \neq B$.

Omezme v dalším rámec svých úvah na nějakou neprázdnou (jinak zcela libovolnou) množinu M. Písmeny A, B, C, D označujme podmnožiny množiny M.

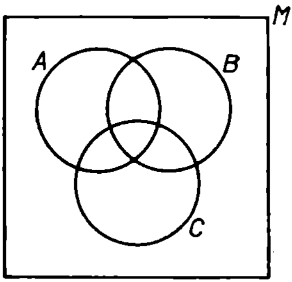
Skutečnost, že A je podmnožinou množiny M, můžeme znázornit graficky tzv. *Vennovým diagramem* (obr. 1). Obdobně ilustrujeme Vennovým diagramem skutečnost, že množiny A, B jsou podmnožinami množiny M (obr. 2).



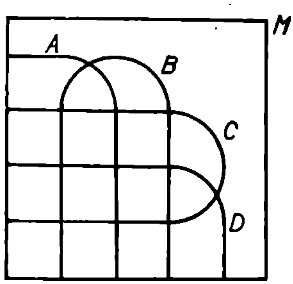
Obr. 1



Obr. 2



Obr. 3



Obr. 4

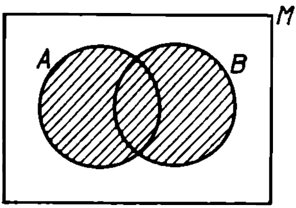
Na obrázcích 3 a 4 jsou ještě sestrojeny Vennovy diagramy pro tři množiny A, B, C a čtyři množiny A, B, C, D.

Ovály na obrázku 2 znázorňující množiny A, B rozdělí obdélník, jenž je obrazem množiny M, na čtyři části, kterým říkáme *pole Vennova diagramu*. Části obdélníka, které vznikají „skládáním" polí, nazýváme *oblasti Ven-*

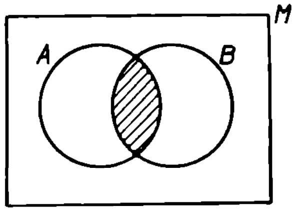
nova diagramu. Přitom pole počítáme také mezi oblasti.

Ve stejném smyslu budeme mluvit o polích a oblastech Vennových diagramů pro jednu, tři a čtyři množiny.

Ke každým dvěma množinám A, B existuje jednoznačně určená množina, kterou nazýváme *sjednocení množin* A, B a označujeme $A \cup B$. Je to množina všech těch prvků z M, které patří množině A nebo patří množině B. Přitom slůvko „*nebo*" chápeme ve smyslu



Obr. 5



Obr. 6

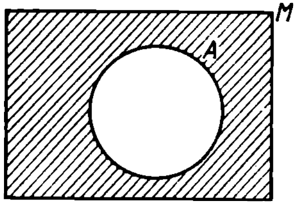
nevylučovacím (tj. do $A \cup B$ patří i prvky, které jsou z A i z B). Na obrázku 5 je vyšrafována oblast Vennova diagramu, jež je obrazem množiny $A \cup B$.

Ke každým dvěma množinám A, B existuje jednoznačně určená množina, kterou nazýváme *průnik množin* A, B a označujeme $A \cap B$. Je to množina všech těch prvků z M, jež patří A a zároveň patří B. Na obrázku 6 je vyšrafováno pole, jež znázorňuje množinu $A \cap B$.

Ke každé množině A existuje jednoznačně určená množina, jež se nazývá *doplněk množiny* A vzhledem k množině M (stručněji „doplněk množiny A"). Označujeme ji A'. Je to množina všech takových prvků z M, jež nepatří množině A. Lze ji charakterizovat těmito dvěma podmínkami:

$$A \cap A' = \varnothing, \ A \cup A' = M$$

Obraz množiny A' je vyšrafován na obrázku 7.



Obr. 7

Aplikujme nyní připomenuté definice na několika příkladech, zvláště si ukažme užití Vennových diagramů.

Příklad 1: Nechť je P_1 množina všech reálných kořenů rovnice $x^2 + 5x + 6 = 0$, P_2 množina všech reálných kořenů rovnice $x^2 + 4x + 3 = 0$. Určete $P_1 \cap P_2$, $P_1 \cup P_2$, P_1'.

Řešení: Podle definice průniku množin je $x \in P_1 \cap P_2$, právě když $x \in P_1$ a zároveň $x \in P_2$, tj. právě když platí $x^2+5x+6 = 0$ a zároveň $x^2+4x+3 = 0$. Množina $P_1 \cap P_2$ je tedy rovna množině všech reálných kořenů soustavy rovnic

$$x^2+5x+6 = 0$$
$$x^2+4x+3 = 0$$

Vyřešíte-li ji, zjistíte, že $P_1 \cap P_2$ je jednoprvková množina, jejímž prvkem je číslo -3, čili $P_1 \cap P_2 = \{-3\}$.

Ověřte, zda jsou správné i následující závěry o $P_1 \cup P_2$

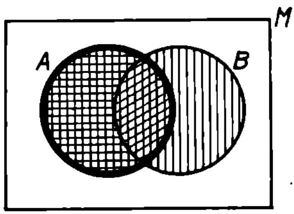
a P_1': Množina $P_1 \cup P_2$ je rovna množině všech reálných kořenů rovnice $(x^2 + 5x + 6) . (x^2 + 4x + 3) = 0$, neboli $P_1 \cup P_2 = \{-1, -2, -3\}$.
P_1' je množina všech reálných čísel x, pro něž platí $x^2 + 5x + 6 \neq 0$.

Příklad 2: Zjednodušte zápis množiny

$$[(A \cup B) \cap (A \cap B')] \cup (A \cap B)$$

tak, aby obsahoval co nejméně symbolů.

Řešení: Příklad vyřešíme užitím Vennova diagramu pro množiny A, B (viz obrázek 8). Svislými čarami vyšrafu-



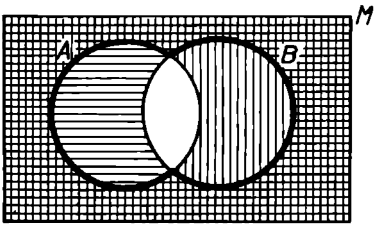
Obr. 8

jeme oblast, jež je obrazem množiny $A \cup B$, vodorovnými čarami oblast znázorňující $A \cap B'$ a čarami šikmými obraz množiny $A \cap B$. Obrazem uvažované množiny je potom oblast, která se skládá ze všech těch polí Vennova diagramu, jež jsou vyšrafována svisle a zároveň vodorovně, a dále ze všech polí vyšrafovaných šikmými čarami. Ohraničíme tuto oblast silnější čarou. Pak je ihned vidět, že zkoumaná množina $[(A \cup B) \cap (A \cap B')] \cup (A \cap B)$ je rovna množině A.

Příklad 3: Rozhodněte, zda pro všechny podmnožiny A, B množiny M platí:

$$(A' \cap B')' = A \cup B$$

Řešení: Sestrojme ve Vennově diagramu pro množiny A, B (obr. 9) postupně obrazy množin A', B', $A' \cap B'$. Pole, jež je na obrázku 9 vyšrafováno svislými i vodorovnými čarami, znázorňuje množinu $A' \cap B'$; oblast diagramu, jež je ohraničena silnější čarou, je potom obrazem množiny $(A' \cap B')'$ a zřejmě také znázorňuje množinu



Obr. 9

$A \cup B$ (srovnej s obrázkem 5). Platí tedy $(A' \cap B')' = A \cup B$ pro všechny podmnožiny A, B množiny M.

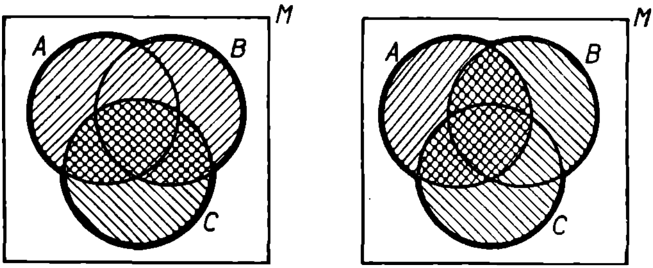
Příklad 4: Dokažte, že pro všechny podmnožiny A, B, C množiny M platí:

a) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
b) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Řešení: Vyřešme daný úkol užitím Vennova diagramu. Sestrojme dvakrát Vennův diagram pro množiny A, B, C (obr. 10a, 10b). Na obrázku 10a je silnější čarou ohraničena oblast, jež je obrazem množiny $(A \cup B) \cup C$, na obrázku 10b oblast, jež znázorňuje množinu $A \cup (B \cup C)$. Porovnáním těchto oblastí zjišťujeme, že se skládají z týchž polí, znázorňují tedy sobě rovné množiny.

Druhou část příkladu vyřešte už každý samostatně.

Z řešení příkladu 4 plyne, že při tvoření sjednocení a průniku tří množin nezáleží na uzávorkování. Můžeme tedy psát „$A \cup B \cup C$", „$A \cap B \cap C$".



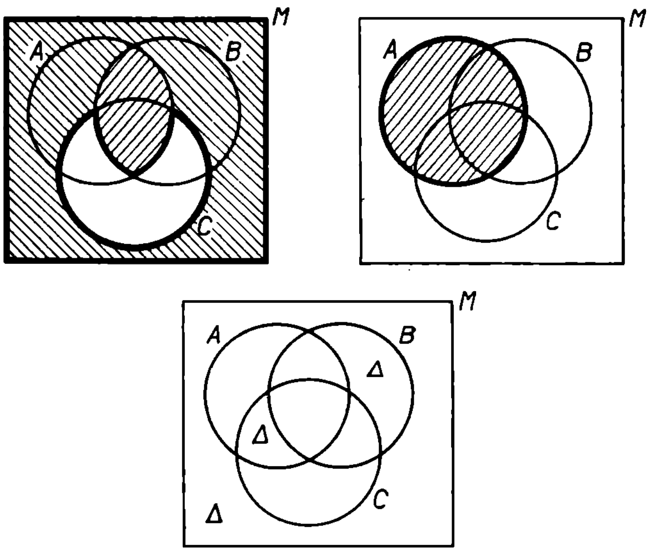
Obr. 10a, b

Poznámka: Vennovy diagramy názorně ilustrují různé množinové situace a jsou vhodným prostředkem pro řešení množinových úloh. Tyto diagramy zde chápeme ale pouze intuitivně, v podstatě jako jisté „obrázky", jež znázorňují množiny. To s sebou přináší řadu problémů. Můžete například právem namítnout, že důkazy vět z příkladů 3 a 4 nejsou důkazy v přesném matematickém smyslu. Lze ovšem provést úvahy, z nichž plyne, že Vennovy diagramy můžeme používat skutečně oprávněně a bez jakýchkoliv obav. Tyto úvahy jsou však značně komplikované a nebudeme se jimi zde zabývat.

Příklad 5: Nechť jsou A, B, C podmnožiny množiny M. Určete nutnou a postačující podmínku pro to, aby platilo

$$(A \cap B) \cup C' = A!$$

Řešení: Sestrojme třikrát Vennův diagram pro množiny A, B, C (obr. 11a, 11b, 11c). Na obrázku 11a znázorníme množinu $(A \cap B) \cup C'$, na obrázku 11b množinu A. Na obrázku 11c vyznačíme nějakým znakem, například $\triangle$, všechna ta pole Vennova diagramu, jež jsou *částí obrazu právě jedné ze zkoumaných množin*. Je-li některé z takto vyznačených polí obrazem neprázdné množiny, pak jsou množiny $(A \cap B) \cup C'$ a A různé.



Obr. 11a, b, c

Jedině v tom případě, kdy každé z těchto polí znázorňuje prázdnou množinu, jsou uvažované množiny sobě rovny. Vyznačená pole jsou postupně obrazy množin $A \cap B' \cap \cap C$, $A' \cap B \cap C'$, $A' \cap B' \cap C'$.

Jsou tedy množiny $(A \cap B) \cup C'$, A sobě rovny právě tehdy, když zároveň platí: $A \cap B' \cap C = \varnothing$, $A' \cap \cap B \cap C' = \varnothing$, $A' \cap B' \cap C' = \varnothing$.

Cvičení

1. Zvolme za rámec svých úvah množinu všech čtyřúhelníků v rovině. Písmenem A označme množinu všech rovnostranných čtyřúhelníků, písmenem B množinu všech čtyřúhelníků, které mají všechny vnitřní úhly pravé. Rozhodněte, zda platí:

a) $A \cap B$ je množina všech čtverců.
b) $A \cup B$ je množina všech čtyřúhelníků, které mají aspoň dvě osy souměrnosti.
c) B' je množina všech čtyřúhelníků, které mají aspoň jeden vnitřní úhel ostrý nebo tupý.
Určete dále množiny $A \cap B'$, $A' \cup B'$.

2. Zjednodušte zápisy těchto množin:
a) $[(A \cap B') \cup (A \cap B)] \cup (B \cap A')$
b) $[(A \cup C) \cap B'] \cup B$
c) $(A \cap B \cap D') \cup (D' \cap B' \cap A') \cup (A \cap B' \cap D') \cup (B \cap \cap D' \cap A')$

3. Rozhodněte, zda pro všechny podmnožiny A, B, C, D množiny M platí:

a) $A \cup (A \cap B) = A$
b) $(A' \cup B')' = A \cap B$
c) $(A \cap D) \cup (A \cup D) = A \cap D'$

d) $(B \cap A') \cup (D' \cap A) = B \cup (A \cap D')$

e) $(A \cap B) \cup C \subset A \cup B \cup C$

4. A, B, C jsou podmnožiny množiny M. Určete nutnou a postačující podmínku pro to, aby platilo:

a) $A \cap B' = A$ b) $A \cup B = A \cup C$

c) $[(A \cup B) \cap (C \cup A)'] \cup (A \cap C') = (C' \cap B) \cup A$

2. kapitola

VÝROKY, PRAVDIVOSTNÍ HODNOTY VÝROKŮ

Zopakujme si v této kapitole nejprve některé základní pojmy z výrokové logiky.

Z řady konkrétních příkladů jste si vytvořili představu o tom, co je *výrok*. Víte, že pro každý výrok P z dané množiny výroků nastává právě jedna z těchto možností: buď je pravdivý, nebo je nepravdivý. Říkáme také, že ke každému výroku P je přiřazena jeho *pravdivostní hodnota*, kterou označujeme „ph(P)“. Je-li výrok P pravdivý, budeme psát „ph(P) = 1“ a číst „pravdivostní hodnota výroku P je rovna jedné“. Je-li výrok P nepravdivý, zapíšeme tuto skutečnost „ph(P)=0“ a čteme „pravdivostní hodnota výroku P je rovna nule“.

K daným výrokům P, Q z množiny *V* umíme vytvořit jejich alternativu, konjunkci, implikaci a ekvivalenci; dále ke každému výroku jeho negaci.*)

Stručně si připomeňme, jak tyto složené výroky symbolicky zapisujeme, jak je čteme, a popišme, kdy jsou pravdivé (popřípadě nepravdivé):

alternativa výroků P, Q $\qquad$ $P \vee Q$ $\qquad$ P nebo Q

---

*) Předpokládejme, že jsme zvolili množinu *V* tak „rozsáhlou“, že spolu s výroky P a Q do ní patří i jejich konjunkce, alternativa, implikace, ekvivalence a negace.

Tento výrok je pravdivý ve všech těch případech, kdy aspoň jeden z výroků P, Q je pravdivý.

konjunkce výroků P, Q $P \wedge Q$ P a Q

Výrok je pravdivý jenom v tom případě, kdy oba výroky P, Q jsou zároveň pravdivé.

implikace výroku Q výrokem P**)

$P \Rightarrow Q$ jestliže P, pak Q

Výrok je nepravdivý jedině v tom případě, kdy je P pravdivý výrok a zároveň je Q výrok nepravdivý.

ekvivalence výroků P, Q $P \Leftrightarrow Q$ P, právě když Q (nebo „P právě tehdy, když Q")

Výrok je pravdivý v těchto dvou případech: oba výroky P, Q jsou zároveň pravdivé; oba výroky jsou zároveň nepravdivé.

negace výroku P P′ není pravda, že P

Výrok P′ je pravdivý, právě když je P nepravdivý.

Poznatky o pravdivostních hodnotách těchto složených výroků můžeme zapsat přehledně v tabulkách:

ph(X)	ph(Y)	ph(X ∨ Y)
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

tab. 1

ph(X)	ph(Y)	ph(X ∧ Y)
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

tab. 2

**) Výrok P obvykle nazýváme předpoklad implikace $P \Rightarrow Q$, výrok Q závěr této implikace.

ph(X)	ph(Y)	ph(X $\Rightarrow$ Y)
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

tab. 3

ph(X)	ph(Y)	ph(X $\Leftrightarrow$ Y)
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

tab. 4

ph(X)	ph(X′)
1	0
0	1

tab. 5

Písmena X, Y v jednotlivých tabulkách značí *výrokové proměnné* s oborem V. Jsou-li P, Q výroky z V, jejichž pravdivostní hodnoty jsou známy, můžeme z těchto tabulek pohodlně určit ph $(P \vee Q)$, ph $(P \wedge Q)$, ph$(P \Rightarrow Q)$, ph $(P \Leftrightarrow Q)$, ph (P').

Příklad 6: Jsou dány výroky P, Q, R, pro něž je ph $(P) = 1$, ph $(Q) = 0$, ph $(R) = 0$. Určete pravdivostní hodnotu výroku

$$[(P \wedge Q)' \Rightarrow R] \Rightarrow P$$

***Řešení*:** Pomocí tabulek 1 až 5 postupně zjistíme, že je ph$(P \wedge Q) = 0$, ph$[(P \wedge Q)'] = 1$, ph$[(P \wedge Q)' \Rightarrow R] = 0$ a ph $([(P \wedge Q)' \Rightarrow R] \Rightarrow P) = 1$.

Výrazy, které sestavujeme podle určitých pravidel z výrokových proměnných, symbolů $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $'$ a závorek, nazýváme obvykle *výrokové formule.*

Příklad 7: Je dána výroková formule $(X \wedge Y)' \Rightarrow (X \vee Y')$. Dosaďte do této formule všude za X výrok P, pro nějž je ph(P) = 0, za Y výrok Q, pro nějž je ph(Q) = 1. Určete pravdivostní hodnotu takto vzniklého výroku. *Řešení*: Naším úkolem je určit pravdivostní hodnotu výroku $(P \wedge Q)' \Rightarrow (P \vee Q')$, kde je ph(P) = 0, ph(Q) = = 1. Sami snadno zjistíte, že tato pravdivostní hodnota je rovna 0.

Když dosadíme za každou proměnnou do výrokové formule výrok z množiny *V*, jehož pravdivostní hodnota je dána (tj. dosadíme za každou výrokovou proměnnou jistou hodnotu této proměnné z *V*), dospějeme k výroku, jehož pravdivostní hodnotu umíme určit.

Přitom pravdivostní hodnota tohoto výroku závisí zřejmě při dané výrokové formuli pouze na pravdivostních hodnotách dosazovaných výroků, nikoliv na jejich konkrétní „podobě“. Jestliže například do výrokové formule z příkladu 7 dosadíme za X místo P libovolný výrok T, pro nějž je ph(T) = 0, a za Y namísto Q libovolný výrok U, pro nějž je ph(U) = 1, pak pravdivostní hodnota výroku $(T \wedge U)' \Rightarrow (T \vee U')$ bude opět rovna 0.

Abychom zjistili, jakých pravdivostních hodnot nabývá výroková formule z příkladu 7 pro všechny možné uspořádané dvojice pravdivostních hodnot výroků, jež dosazujeme za proměnné X, Y, stačí zřejmě probrat ještě tři případy. Řešení obvykle uspořádáváme přehledně v tabulce:*)

---

*) Důvodem neobvyklého tvaru zápisů „$\overset{\text{ph}}{(X)}$“, „$\overset{\text{ph}}{(Y)}$“ atd. je pouze nedostatek místa.

ph (X)	ph (Y)	ph $(X \wedge Y)$	ph$[(X \wedge Y)']$	ph (Y')	ph $(X \vee Y')$	ph$[(X \wedge Y)' \Rightarrow$ $\Rightarrow (X \vee Y')]$
1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	0
0	0	0	1	1	1	1

Příklad 8: Určete pravdivostní hodnoty, jichž nabývá výroková formule

$$(X \Rightarrow Y) \Leftrightarrow (Y' \Rightarrow X')$$

při všech pravdivostních hodnotách výroků, které dosazujeme za X a Y.

Řešení:

ph (X)	ph (Y)	ph$(X \Rightarrow Y)$	ph(Y')	ph(X')	ph$(Y' \Rightarrow X')$	ph $[(X \Rightarrow Y) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (Y' \Rightarrow X')]$
1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

Vidíme, že pro tuto výrokovou formuli platí: Dosadíme-li za výrokové proměnné X, Y libovolně zvolené výroky P, Q, pak výrok $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (Q' \Rightarrow P')$ je pravdivý. Jde o příklad výrokové formule, kterou nazýváme tautologicky pravdivá čili *tautologie*.

Příklad 9: Dokažte, že výrokové formule

a) $(X \Rightarrow Y) \Leftrightarrow (X' \vee Y)$
b) $(X \Leftrightarrow Y) \Leftrightarrow [(X \wedge Y) \vee (X' \wedge Y')]$

jsou tautologie.

Řešení:

ph(X)	ph(Y)	ph(X⇒Y)	ph(X′)	ph(X′ ∨ Y)	ph[(X⇒Y)⇔(X′∨Y)]
1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1

Prosím, abyste důkaz části b) provedli už samostatně.

Všimněme si příkladu 9 ještě trochu podrobněji. Pro každou dvojici výroků P, Q, které dosazujeme například v části a) do příslušné výrokové formule za X a Y, platí ph (P ⇒ Q) = ph (P′ ∨ Q). Obdobně v případě b) je ph (P ⇔ Q) = ph [(P ∧ Q) ∨ (P′ ∧ Q′)].

Jestliže tedy řešíme úlohy, jež se týkají určování pravdivostních hodnot výroků, můžeme všude namísto „P ⇒ Q" psát „P′ ∨ Q", obdobně „P ⇔ Q" můžeme všude nahradit „(P ∧ Q) ∨ (P′ ∧ Q′)". Vyskytuje-li se ve výrokové formuli „X ⇒ Y", můžeme tento výraz nahradit „X′ ∨ Y", obdobně „X ⇔ Y" lze zaměnit „(X ∧ Y) ∨ (X′ ∧ Y′)". Při řešení úloh, jejichž typy jsme doposud v této kapitole uvedli, vystačíme tedy s tabulkami 1,2 a 5.

Řešíme-li příklady, jež se týkají určování pravdivostních hodnot výroků, omezujeme se v podstatě na „práci" s prvky 0 a 1, tj. na práci v dvouprvkové množině pravdivostních hodnot výroků. Označujme ji všude v dalším písmenem *H*. Všimněme si této množiny poněkud blíže.

Pro symbolický zápis rovnosti prvků *r*, *s* množiny *H* budeme užívat obyčejného rovnítka. Nejsou-li prvky *r*, *s* sobě rovny, budeme psát „$r \neq s$".

Ke každé uspořádané dvojici [ph (P), ph (Q)] prvků z množiny H existují jednoznačně určené prvky ph (P $\vee$ $\vee$ Q), ph (P $\wedge$ Q) z H. Dále ke každému prvku ph (P) z množiny H existuje jednoznačně určený prvek ph (P′) z H.

Jinak řečeno: Ke každým dvěma prvkům r, s z množiny H existují jednoznačně určené prvky t a u množiny H, pro něž platí: jsou-li P, Q výroky z množiny V, pro něž je ph(P) $= r$, ph(Q) $= s$, pak je $t =$ ph(P $\vee$ Q), $u =$ ph(P $\wedge$ Q). Nazývejme tyto prvky postupně „*součet* r, s“, „*součin* r, s“ a označujme je „$r+s$“, „$r.s$“.

Dále ke každému prvku r množiny H existuje jednoznačně určený prvek $r' \in H$, který nazveme „*doplněk* k r“ a pro nějž platí: Je-li P výrok z množiny V, pro který ph (P) $= r$, pak je $r' =$ ph (P′).

Poznámka: Názvy „součet“, „součin“ a symboly „+“, „.“ jsme si „vypůjčili“ z číselné algebry, „doplněk“ a „′“ z teorie množin. Později sámi uvidíte vhodnost této volby názvů a znaků.

Na základě shora uvedených definic můžete už sami prověřit, že platí:

$0+0=0$	$0.0=0$	$0'=1$
$0+1=1$	$0.1=0$	$1'=0$
$1+0=1$	$1.0=0$	
$1+1=1$	$1.1=1$	

Pro větší přehlednost lze sestavit tyto tabulky pro určování „součtu“, „součinu“ a „doplňku“ prvků množiny H:

$r+s$:

$r \backslash s$	0	1
0	0	1
1	1	1

tab. 6

$r.s$:

$r \backslash s$	0	1
0	0	0
1	0	1

tab. 7

r	r'
0	1
1	0

tab. 8

V množině H, na níž je definováno „sčítání", „násobení" a „doplněk" tabulkami 6 až 8, můžeme provádět výpočty, obdobně jako v „číselné algebře". Stejně jako při počítání s čísly budeme i zde například namísto „$(0.1)+(0'.0)$" psát stručněji pouze „$0.1+0'.0$", namísto „$r+(s.t)$" pouze „$r+s.t$" atd. Mějme však přitom stále na mysli, že násobení má „přednost" před sčítáním.

Příklad 10: Rozhodněte, zda prvek

$$((0+1)'+(0'+1)).((1+0.1')+0'.1')$$

z množiny H je roven 0 nebo 1.
Řešení: Na základě tabulek 6 až 8 dostaneme postupně $((0+1)'+(0'+1)).((1+0.1')+0'.1') = (1'+(1+1)).$ $.((1+0.0)+1.0) = (0+1).((1+0)+0) = 1.(1+0) =$ $= 1.1 = 1$

Příklad 11: Rozhodněte, zda prvky

$$(0'+1').(1+0')+(0'+1).0' \quad \text{a} \quad (0+1')'.(1'+0')'$$

z množiny H jsou sobě rovny.
Řešení: $(0'+1').(1+0')+(0'+1).0' = (1+0).(1+1)+$ $+(1+1).1 = 1.1+1.1 = 1+1 = 1$
$(0+1')'.(1'+0')' = (0+0)'.(0+1)' = 0'.1' = 1.0 = 0$
Uvažované prvky jsou různé.

Ukažme si nyní, jak lze provedené úvahy o množině H užít při řešení úloh o pravdivostních hodnotách výroků a výrokových formulí.

Příklad 12: Určete pravdivostní hodnotu výroku

$$[(G \wedge H') \vee (L' \wedge K')] \wedge (G' \vee L),$$

je-li $ph(G) = 1$, $ph(H) = 0$, $ph(K) = 0$, $ph(L) = 1$.

Řešení: $\mathrm{ph}\,([(G \wedge H') \vee (L' \wedge K')] \wedge (G' \vee L)) =$
$= [\mathrm{ph}(G).(\mathrm{ph}(H))' + (\mathrm{ph}(L))'.(\mathrm{ph}(K))'].[(\mathrm{ph}(G))' +$
$+ \mathrm{ph}(L)] = (1.0' + 1'.0').(1' + 1) = (1.1 + 0.1).$
$.(0+1) = (1+0).1 = 1.1 = 1$

Pravdivostní hodnota zkoumaného výroku je rovna 1.

Příklad 13: Určete pravdivostní hodnotu výroku

$$[(P \Rightarrow Q) \wedge (P \wedge Q)] \vee (R' \Rightarrow Q)\,,$$

je-li $\mathrm{ph}(P) = 1$, $\mathrm{ph}(Q) = 0$, $\mathrm{ph}(R) = 1$.

Řešení: $\mathrm{ph}\,([(P \Rightarrow Q) \wedge (P \wedge Q)] \vee (R' \Rightarrow Q)) =$
$= \mathrm{ph}\,([(P' \vee Q) \wedge (P \wedge Q)] \vee ((R')' \vee Q)) =$
$= ((\mathrm{ph}(P))' + \mathrm{ph}(Q)).(\mathrm{ph}(P).\mathrm{ph}(Q)) + (\mathrm{ph}(R) + \mathrm{ph}(Q)) =$
$= (1' + 0).(1.0) + (1 + 0) = 0.0 + 1 = 1$

Pravdivostní hodnota uvažovaného výroku je rovna 1.

Příklad 14: Rozhodněte, zda výroková formule

$$[(X \Rightarrow Y) \wedge X'] \vee (Y \Rightarrow X)$$

je tautologie.

Řešení: Naším úkolem je prozkoumat postupně všechny dvojice pravdivostních hodnot výroků, tj. tyto uspořádané dvojice prvků z množiny H: [0,0], [0,1], [1,0], [1,1].

Namísto výrokové formule v textu příkladu můžeme zkoumat výrokovou formuli

$$[(X' \vee Y) \wedge X'] \vee (Y' \vee X)$$

a) Určeme pravdivostní hodnotu, kterou dostaneme v případě dvojice [0,0]:

$$(0' + 0).0' + (0' + 0) = (1 + 0).1 + (1 + 0) = 1$$

b) Uvažujme dvojici [0,1]:

$$(0'+1).0'+(1'+0) = (1+1).1+(0+0) = 1$$

c) Pro dvojici [1,0] dostaneme postupně:

$$(1'+0).1'+(0'+1) = (0+0).0+(1+1) = 1$$

d) Zbývá ještě dvojice [1,1]:

$$(1'+1).1'+(1'+1) = 1.0+1 = 1$$

Ve všech čtyřech případech jsme dospěli k pravdivostní hodnotě 1, je tedy naše výroková formule tautologie.

Cvičení

1. Rozhodněte, zda následující prvky z množiny H jsou rovny 0 nebo 1:

a) $(0'+1').(1'+1')+0'.1'$

b) $(0'.1'+0.1)'.((0+1)'+(1+0')')'$

c) $[(0+1).(1'+0')]'+[(0'+1')'.(0+1)]$

2. Rozhodněte, zda následující prvky z množiny H jsou sobě rovny:

a) $(0+1')'.(0.1)'+(0'+1)'.(1.0')'$; $(0.1')'.((0'+1')')'$

b) $[(0+1)+[(0.1)'+(1'.0')]]'$; $[(0.1'+1'.0')+(0'.0'+$
$+1'.1')]'+1'.0'$

3. Určete pravdivostní hodnoty, jichž nabývají tyto výrokové formule při všech pravdivostních hodnotách výroků, které dosazujeme za proměnné X, Y, Z:

a) $((X \Leftrightarrow Y) \wedge Z) \Rightarrow ((X' \vee Y') \wedge Z')$

b) $((X \Rightarrow Y) \Rightarrow Z) \wedge (Z' \vee Y')$

c) $((X \wedge Y) \vee Z) \wedge (Y' \Rightarrow Z')$

4. Dokažte, že následující výrokové formule jsou tautologie:

a) $(X' \wedge Y')' \Leftrightarrow (X \vee Y)$ b) $(X' \vee Y')' \Leftrightarrow (X \wedge Y)$

5. Rozhodněte, zda následující výrokové formule jsou tautologie:

a) $(X \wedge Y) \Rightarrow (X \vee Y)$ b) $(X' \Rightarrow Y) \Leftrightarrow (X \vee Y)$

c) $((X \Rightarrow Z) \Rightarrow Y) \Leftrightarrow ((X \wedge Z) \Rightarrow Y)$

3. kapitola

OPERACE A JEJICH VLASTNOSTI

V této kapitole se seznámíme s pojmy binární a unární operace a uvedeme jejich některé vlastnosti. Nejprve připomeňme dva pojmy, které mnozí znáte z učiva středoškolské matematiky.

Kartézským součinem množin K, L nazýváme množinu všech uspořádaných dvojic $[x,y]$, kde $x \in K$ a $y \in L$. Kartézský součin množin K, L označujeme $K \times L$.

Je-li například $C = \{1, 2, 7\}$, $D = \{\sqrt{2}, 0\}$, pak je $C \times D = \{[1,\sqrt{2}], [1,0], [2,\sqrt{2}], [2,0], [7,\sqrt{2}], [7,0]\}$.

Zobrazením množiny K do množiny L (stručně „K do L") nazýváme každou podmnožinu T kartézského součinu $K \times L$, pro niž platí: ke každému $x \in K$ existuje právě jedno $y \in L$ takové, že $[x,y] \in T$.

Množiny $T_1 = \{[1,\sqrt{2}], [2,\sqrt{2}], [7,0]\}$, $T_2 = \{[1,0], [7,0], [2,0]\}$ jsou příklady zobrazení C do D.

Množiny $T_3 = \{[1,\sqrt{2}], [7,0]\}$, $T_4 = \{[1,\sqrt{2}], [2,\sqrt{2}], [1,0]\}$ jsou příklady podmnožin $C \times D$, jež nejsou zobrazením C do D.

Uvažujme nyní speciální případ zobrazení K do L, kdy je $K = L \times L$. Zobrazením $L \times L$ do L je pak (v souladu se shora uvedenou definicí zobrazení K do L) každá podmnožina U kartézského součinu $(L \times L) \times L$, pro niž platí: ke každé uspořádané dvojici $[x, y] \in L \times L$ existuje právě jedno $z \in L$ takové, že $[[x,y],z] \in U$.

Zobrazení $L \times L$ do L obvykle nazýváme *binární operace na množině* L (stručně „na L“) a symbolicky označujeme například „$z = x * y$ na L“, „$z = x \circ y$ na L“ atd. (znaky „$*$“, „$\circ$“ čtěte „hvězdička“, „kolečko“). Pokud bude z kontextu jasné, že jde o binární operaci, budeme často psát pouze „operace“.

Pro nás běžnými příklady binárních operací jsou například operace sčítání a násobení na množině všech reálných čísel R. Ke každé dvojici čísel $[x,y]$ existuje jednoznačně určené reálné číslo $x+y$, které nazýváme součet čísel x, y, a jednoznačně určené číslo „$x.y$“ (nebo stručněji „xy“), jež nazýváme součin čísel x, y.

V 1. kapitole jsme si připomněli, že ke každým dvěma podmnožinám A, B dané neprázdné množiny M existuje jednak jednoznačně určená podmnožina množiny M, zvaná sjednocení množin A, B, jednak podmnožina, kterou nazýváme průnik množin A, B. Podívejme se na tuto skutečnost z hlediska množiny $\hat{M}$ (čtěte „m se stříškou“) všech podmnožin množiny M: Ke každým dvěma prvkům A, B množiny $\hat{M}$ existuje právě jeden prvek množiny $\hat{M}$, který je roven $A \cup B$, a dále právě jeden prvek množiny $\hat{M}$, rovný $A \cap B$. Na množině $\hat{M}$ jsou tedy definovány dvě binární operace „sjednocení“ a „průnik“.

Ve 2. kapitole jsme tabulkami 6 a 7 definovali binární operace „sčítání“ a „násobení“ na množině H pravdivostních hodnot výroků.

Zabývejme se nyní některými vlastnostmi binárních operací. Připomeňme si důležité vlastnosti operací sčítání a násobení na množině R, kterých běžně a zcela mechanicky při počítání s reálnými čísly používáme:

Pro všechna reálná čísla x, y, z platí:

a) $x+y = y+x$ b) $xy = yx$
c) $(x+y)+z = x+(y+z)$ d) $(xy).z = x.(yz)$

Jde o vlastnosti, kterým postupně říkáme komutativnost sčítání, komutativnost násobení, asociativnost sčítání a asociativnost násobení.

Obecně nazýváme operaci „$u = x * y$ na L“ komutativní, právě když pro všechny prvky x, y množiny L platí

$$x * y = y * x$$

Operaci „$u = x * y$ na L“ nazýváme asociativní, právě když pro všechny prvky x, y, z množiny L platí

$$(x * y) * z = x * (y * z)$$

Je-li operace „$u = x * y$ na L“ asociativní, pak zřejmě můžeme psát „$x * y * z$“ bez závorek.

Zkoumejme nyní, které z uvedených vlastností mají operace zavedené na $\hat{M}$ a na H.

Operace sjednocení i průnik na množině $\hat{M}$ jsou zřejmě obě komutativní. Komutativnost operací sčítání a násobení na H plyne ihned z tabulek 6 a 7 (zde stačí uvážit, že platí $0+1 = 1+0$, $0.1 = 1.0$).

V příkladě 4, který byl uveden v 1. kapitole, jsme dokázali, že operace průnik i sjednocení na množině $\hat{M}$ jsou asociativní.

Zabývejme se problémem, zda také operace „$u = x+y$ na H“ je asociativní. Prověřme postupně všechny uspořádané trojice prvků z H.

x	y	z	$x+y$	$(x+y)+z$	$y+z$	$x+(y+z)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

Z uvedené tabulky je vidět, že operace sčítání na H je asociativní.

Poznámka: „Tabulková" metoda, kterou jsme pro splnění našeho úkolu zvolili, má výhodu v tom, že je zcela mechanická, na druhé straně je však značně zdlouhavá. Proto hledáme obvykle efektivnější metodu řešení. V našem případě si například stačí uvědomit, že platí $(x+y)+z = 0$ a zároveň $x+(y+z) = 0$ právě tehdy, když je $x = y = z = 0$. Ve všech ostatních případech je tedy $(x+y)+z = x+(y+z) = 1$. Proto pro všechna x, y, z množiny H platí $(x+y)+z = x+(y+z)$.

Prosím, abyste už samostatně prověřili, že i operace násobení na H je asociativní.

Připomeňme si ještě jednu důležitou vlastnost, kterou mají operace sčítání a násobení na množině všech reálných čísel R.

Pro všechna reálná čísla x, y, z platí:

$$x.(y+z) = x.y+x.z$$

Říkáme, že operace násobení je distributivní vzhledem k operaci sčítání.

Obecně nazýváme operaci „$u = x \circ y$ na L“ distributivní vzhledem k operaci „$u = x \ast y$ na L“, právě když pro každé tři prvky x, y, z množiny L platí

$$x \circ (y \ast z) = (x \circ y) \ast (x \circ z) \text{ a zároveň } (y \ast z) \circ x = (y \circ x) \ast (z \circ x)$$

Poznámka: Je-li operace „$u = x \circ y$ na L“ komutativní, pak stačí ve shora uvedené definici psát pouze jednu z podmínek, tj. buď „$x \circ (y \ast z) = (x \circ y) \ast (x \circ z)$“, nebo „$(y \ast z) \circ x = (y \circ x) \ast (z \circ x)$“.

Víme, že operace násobení na R je distributivní vzhledem k operaci sčítání. Jestlipak je také operace sčítání na R distributivní vzhledem k operaci násobení, tj. jestlipak platí pro všechna reálná čísla x, y, z

$$x + yz = (x + y) . (x + z)?$$

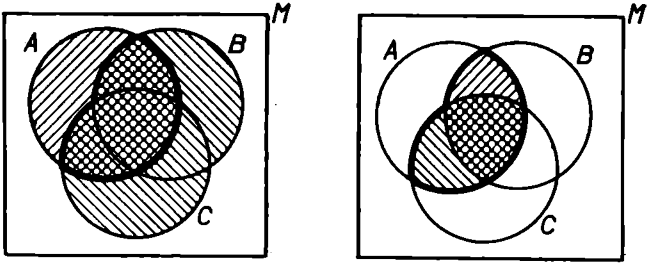
Najděte aspoň jeden protipříklad!

Zkoumejme nyní operace sjednocení a průnik na $\widehat{M}$. Rozhodněme nejprve, zda je operace průnik distributivní vzhledem k operaci sjednocení. Naším úkolem je tedy prověřit, zda pro všechny prvky A, B, C z $\widehat{M}$ platí

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

(Vzhledem k tomu, že operace průnik je komutativní, stačí podle předchozí poznámky ověřovat skutečně jenom tuto rovnost.)

Úkol vyřešíme užitím Vennova diagramu pro množiny A, B, C (obrázky 12a, 12b). Porovnáním oblastí ohraničených silnějšími čarami, jež jsou obrazy množin $A \cap (B \cup C)$ a $(A \cap B) \cup (A \cap C)$, dospíváme k závěru, že operace průnik je distributivní vzhledem k operaci sjednocení.

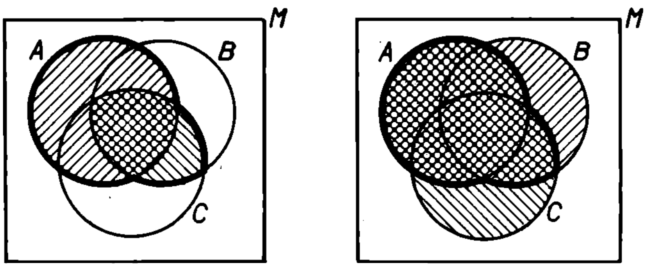


Obr. 12a, b

Obdobně můžete pomocí Vennova diagramu rozhodnout, zda operace sjednocení je distributivní vzhledem k operaci průnik, tj. zda pro všechny prvky A, B, C množiny $\hat{M}$ platí

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Srovnejte své závěry s obrázky 13a, 13b.



Obr. 13a, b

Zabývejme se z hlediska „distributivnosti“ operacemi sčítání a násobení na množině H pravdivostních hodnot výroků. Rozhodněme nejprve, zda operace „$u = x + y$ na H“ je distributivní vzhledem k operaci „$u = x . y$ na H“. Úkolem je tedy prověřit, zda pro všechny prvky r, s, t množiny H platí

$$r + s . t = (r + s) . (r + t)$$

(Opět vzhledem k tomu, že operace sčítání na H je komutativní, stačí ověřovat pouze tuto rovnost.)
Prozkoumejme postupně všech osm uspořádaných dvojic prvků z H:

r	s	t	$s.t$	$r+s.t$	$r+s$	$r+t$	$(r+s).(r+t)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Z tabulky ihned vidíme, že operace sčítání na H je distributivní vzhledem k operaci násobení na H. Můžete se pokusit, obdobně jako při zkoumání asociativnosti operace sčítání na H, najít efektivnější metodu vedoucí k cíli.

Prosím, abyste už každý samostatně dokázal, že také operace „$u = x . y$ na H“ je distributivní vzhledem k operaci „$u = x + y$ na H“, tj. že pro všechny prvky r, s, t množiny H platí

$$r . (s + t) = r . s + r . t$$

Při sčítání reálných čísel hraje význačnou roli číslo 0; je totiž $x+0 = 0+x = x$ pro každé reálné číslo x. Obdobně při násobení reálných čísel je jistým význačným prvkem číslo 1; pro každé reálné číslo x platí $x.1 = 1.x = x$. Říkáme, že číslo 0 je neutrální prvek operace sčítání, číslo 1 neutrální prvek operace násobení.

Obecně nazýváme neutrálním prvkem vzhledem k operaci „$u = x * y$ na L" (stručněji „neutrálním prvkem operace $u = x * y$ na L") prvek $e \in L$, pro nějž platí: Pro všechna $x \in L$ je

$$x * e = e * x = x$$

Poznámka: Je-li operace „$u = x * y$ na L" komutativní, pak ve shora uvedené definici stačí zřejmě psát pouze buď „$x * e = x$", nebo „$e * x = x$".

V množině $\hat{M}$ je zřejmě jedním z neutrálních prvků vzhledem k operaci sjednocení množina prázdná — pro každé $A \in \hat{M}$ platí $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$. Dokážeme dále, že žádný prvek $B \in \hat{M}$, $B \neq \emptyset$, nemůže být neutrálním prvkem operace sjednocení: Nechť je $B \in \hat{M}$ neutrální prvek operace sjednocení na $\hat{M}$. Pak pro každé $A \in \hat{M}$ je $A \cup B = A$, tedy speciálně i $\emptyset \cup B = \emptyset$. Současně ale též platí $\emptyset \cup B = B$. Odtud plyne $B = \emptyset$. Existuje tedy v $\hat{M}$ právě jeden neutrální prvek operace sjednocení — prázdná množina.

Obdobně už sami dokažte, že v $\hat{M}$ existuje právě jeden neutrální prvek vzhledem k operaci průnik, a to množina M.

Zabývejme se nyní otázkou existence neutrálních prvků jednotlivých operací na H. Uvědomíme-li si, že platí $1+0 = 0+1 = 1$, $0+0 = 0$, pak je ihned zřejmé, že 0 je neutrální prvek vzhledem k sčítání na H. Dokažte samostatně, že 1 není neutrálním prvkem této operace.

Dále ověřte, že neutrálním prvkem operace „$u = x.y$ na H“ je právě prvek 1.

Uvažujme další speciální případ zobrazení K do L, kdy je $K = L$. Zobrazením L do L (v souladu s definicí zobrazení K do L) je každá podmnožina V kartézského součinu $L \times L$, pro niž platí: ke každému $x \in L$ existuje právě jedno $y \in L$ takové, že je $[x,y] \in V$.

Zobrazení L do L budeme v dalším nazývat *unární operace na* L a symbolicky označovat například „$y = \bar{x}$ na L“, „$y = x^*$ na L“ atd.

Příkladem unární operace na množině všech reálných čísel R je operace „tvoření opačného čísla k danému číslu“, „$y = -x$ na R“.

V neprázdné množině M existuje ke každé její podmnožině A právě jedna podmnožina A' množiny M, zvaná doplněk množiny A. Na množině $\widehat{M}$ všech podmnožin množiny M je tedy definována unární operace; nazývejme ji „tvoření doplňku“ nebo stručněji „doplněk“.

Na množině H pravdivostních hodnot výroků jsme zavedli tabulkou 8 další unární operaci „doplněk“.

Ukažme si, co mají tyto unární operace zavedené na $\widehat{M}$ a na H společného. Vyslovme nejprve definici unární operace „doplněk“ na množině L.

Předpokládejme, že na množině L jsou definovány dvě komutativní binární operace „$u = x * y$“ a „$u = x \circ y$“, ke každé z nichž existuje právě jeden neutrální prvek. Označme tyto prvky postupně e^*, e°.

Unární operaci „$y = x'$“ definovanou na L nazveme „doplněk“ právě tehdy, když pro všechna $x \in L$ platí

$$x * x' = e^\circ \quad \textit{a zároveň} \quad x \circ x' = e^*$$

Vrátíme-li se k definici unární operace zavedené na $\widehat{M}$, je zřejmé, že je v souladu s definicí operace „doplněk" právě uvedenou. Stačí si pouze uvědomit, že pro každé $A \in \widehat{M}$ platí $A \cup A' = M$ a zároveň $A \cap A' = \varnothing$; přitom množiny M, $\varnothing$ jsou postupně neutrální prvky operací průnik a sjednocení.

Právě tak i unární operace na H definovaná tabulkou 8 splňuje všechny požadavky definice operace „doplněk" na L. Uvědomme si, že je $0+1 = 1$ (1 je neutrální prvek operace násobení na H) a zároveň $0 . 1 = 0$ (0 je neutrální prvek operace sčítání na H).

Rozhodněme ještě, zda také unární operace „$y = -x$ na R" je operací „doplněk". V tom případě by muselo pro všechna $x \in R$ platit

$$x+(-x) = 1 \quad \text{a zároveň} \quad x.(-x) = 0\,,$$

což zřejmě splněno není.

Cvičení

1. Zkoumejte u následujících operací, zda jsou komutativní; asociativní. Určujte všechny neutrální prvky.

a) $u = x-y$ na R

b) $u = x+2y$ na R

c) $u = x^2 + y^2$ na R

d) $u = x^y$ na množině všech přirozených čísel

2. Na množině $C = \{2, 3\}$ jsou definovány binární operace těmito tabulkami:

$x \ast y$:

$x \backslash y$	2	3
2	3	2
3	3	2

$x \circ y$:

$x \backslash y$	2	3
2	2	3
3	3	3

Rozhodněte, které z nich jsou komutativní; asociativní; určujte všechny neutrální prvky jednotlivých operací. Rozhodněte, zda operace „$u = x \ast y$ na C" je distributivní vzhledem k operaci „$u = x \circ y$ na C".

3. Definujme na množině všech reálných čísel R dvě binární operace:

a) Operaci „$u = \max(x, y)$" (čtěte „u je rovno maximu x, y") takto:

Pro všechna reálná čísla x, y je $\max(x, y) = x$, právě když je $x \geqq y$, a $\max(x, y) = y$, právě když je $x \leqq y$.

b) Operaci „$u = \min(x, y)$" (čtěte „u je rovno minimu x, y") takto:

Pro všechna reálná čísla x, y je $\min(x, y) = x$, právě když je $x \leqq y$, a $\min(x, y) = y$, právě když je $x \geqq y$.

Rozhodujte, které z těchto operací jsou komutativní; asociativní. Zkoumejte, zda operace „$u = \max(x, y)$ na R" je distributivní vzhledem k operaci „$u = \min(x, y)$ na R"; dále, zda i operace „$u = \min(x, y)$ na R" je distributivní vzhledem k operaci „$u = \max(x, y)$ na R". Rozhodujte o existenci neutrálních prvků jednotlivých operací.

4. Uvažujte binární operace „$u = \max(x, y)$ na D", „$u = \min(x, y)$ na D", kde $D = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Řešte tytéž úkoly jako v příkladě 3. Pokuste se dále řešit tento problém: Lze definovat na množině D unární operaci tak, aby splňovala vlastnosti operace „doplněk"?

4. kapitola

BOOLEOVA ALGEBRA A JEJÍ MODELY

Shrňme přehledně všechny závěry o vlastnostech operací definovaných na množinách $\hat{M}$ a H, k nimž jsme dospěli ve 3. kapitole.

Je dána množina $\hat{M}$ všech podmnožin neprázdné množiny M.	Je dána množina $H = \{0,1\}$ pravdivostních hodnot výroků.
Na $\hat{M}$ jsou definovány binární operace sjednocení a průnik.	Na H jsou definovány binární operace — „sčítání“ a „násobení“.
Každá z těchto operací je komutativní a asociativní.	Každá z těchto operací je komutativní a asociativní.
Operace průnik je distributivní vzhledem k operaci sjednocení a také operace sjednocení je distributivní vzhledem k operaci průnik.	Operace násobení je distributivní vzhledem k operaci sčítání a také operace sčítání je distributivní vzhledem k operaci násobení.
Vzhledem k operaci sjednocení existuje právě jeden neutrální prvek — $\varnothing$.	Vzhledem k operaci sčítání existuje právě jeden neutrální prvek — 0.
Vzhledem k operaci průnik existuje právě jeden neutrální prvek — M.	Vzhledem k operaci násobení existuje právě jeden neutrální prvek — 1.

Platí: $M \neq \varnothing$
Na $\widehat{M}$ je definována unární operace „doplněk“.

Platí: $1 \neq 0$
Na H je definována unární operace „doplněk“.

Z našeho přehledu je vidět, že uvažované množiny s příslušnými operacemi mají mnoho podstatného společné. Na obou jsou definovány dvě binární operace a jedna operace unární, které mají „stejné“ vlastnosti, ke každé binární operaci existuje právě jeden neutrální prvek.

Množinu $\widehat{M}$ spolu s příslušnými binárními operacemi a unární operací označujme v dalším $(\widehat{M}, \cup, \cap, ')$ a nazývejme *množinová algebra.*

Množinu H spolu s operacemi sčítání, násobení a doplněk budeme označovat $(H, +, ., ')$ a nazývat *algebra pravdivostních hodnot výroků,* stručněji jenom *algebra pravdivostních hodnot.*

Vytvořme nyní jistou abstraktní nadstavbu nad oběma algebrami, definujme tzv. *Booleovu algebru.*

Mějme dánu neprázdnou, jinak zcela libovolnou, množinu B, v níž je definována rovnost jejích prvků a na které jsou zavedeny dvě binární operace, „sčítání“ a „násobení“, a jedna unární operace „doplněk“. Množinu B spolu s příslušnými operacemi budeme nazývat Booleova algebra právě tehdy, když platí:
Každá z binárních operací je komutativní a asociativní. Dále je operace „násobení“ distributivní vzhledem k operaci „sčítání“ a také operace „sčítání“ je distributivní vzhledem k operaci „násobení“. Ke každé z binárních operací existuje právě jeden neutrální prvek; přitom jsou tyto neutrální prvky vzájemně různé. Unární operace splňuje všechny požadavky definice operace „doplněk“ z 3. kapitoly.

Prvky Booleovy algebry budeme označovat malými písmeny $a, b, c, \ldots, x, y, z$. Pro rovnost prvků budeme užívat obyčejného rovnítka. Symboly pro jednotlivé binární operace si „vypůjčíme“ z číselné algebry. Operaci ***sčítání*** budeme symbolicky označovat „$u = x + y$ na B“ (stručněji „$u = x + y$“), operaci *násobení* „$u = x . y$ na B“ nebo „$u = xy$ na B“ (stručněji „$u = x . y$“ nebo „$u = xy$“). Jsou-li x, y prvky množiny B, budeme „$x + y$“ nazývat ***součet*** prvků x, y, „xy“ ***součin*** prvků x, y. *Operaci doplněk* budeme označovat „$u = x'$ na B“ (stručněji „$u = x'$“), *doplněk k prvku* x symbolem x'. Neutrální prvek operace sčítání označíme 0 (čtěte nula), neutrální prvek operace násobení symbolem 1 (čtěte „jedna“). Takto zvolená symbolika se ukáže při „booleovských výpočtech“ nejvhodnější.

Musíme mít ovšem stále na paměti, že v našem případě nejde o běžné sčítání a násobení reálných čísel; neutrální prvky 0 a 1 jsou prvky množiny B a obvykle nejsou rovny číslům 0 a 1.

Na základě předchozích úmluv můžeme definici Booleovy algebry vyslovit také takto:

Mějme dánu neprázdnou množinu B, v níž je definována rovnost, existují v ní vzájemně různé prvky 0,1 a jsou na ní definovány binární operace „$u = x + y$“, „$u = xy$“ a unární operace „$u = x'$“. Množinu B spolu s příslušnými operacemi budeme nazývat Booleova algebra, právě když pro všechny prvky x, y, z množiny B platí:

(1)	$x + y = y + x$	$x . y = y . x$	(2)
(3)	$(x + y) + z = x + (y + z)$	$(x . y) . z = x . (y . z)$	(4)
(5)	$x . (y + z) = (x . y) + (x . z)$	$x + (y . z) = (x + y) . (x + z)$	(6)

$$(7)\ x+0 = x \qquad x.1 = x\ (8)$$
$$(9)\ x+x' = 1 \qquad x.x' = 0\ (10)$$

Takto zavedenou Booleovu algebru budeme označovat $(B, +, ., ')$.

O rovnosti definované v B budeme předpokládat, že je „*rovností vůči booleovským operacím*"; to znamená, že *pro všechny prvky* x, y, z *množiny* B *platí: je-li* $x = y$, *pak platí* $x+z = y+z$, $x.z = y.z$, $x' = y'$.
Poznámka: Pozorný čtenář si jistě všiml, že druhá z definic Booleovy algebry je „slabší" než první. V systému axiómů*), který jsme uvedli, se sice zaručuje existence neutrálních prvků jednotlivých binárních operací, nikoliv však jejich jednoznačnost (axiómy (7), (8)). Tu lze ale velmi snadno z axiómů (1)—(10) dokázat. Naznačme důkaz pro neutrální prvek operace sčítání.
Předpokládejme, že existuje $0_1 \in B$ takový, pro nějž platí: pro každé $x \in B$ je $x+0_1 = x$. Pak je tedy speciálně
$0+0_1 = 0$ a zároveň
$0+0_1 = 0_1+0 = 0_1$ (podle (1) a (7))
Odsud plyne $0_1 = 0$.
Obdobně lze provést důkaz jednoznačnosti neutrálního prvku operace násobení.

O „povaze" prvků množiny B se v definici Booleovy

*) Volně řečeno, axiómy určitého oboru (systému) jsou věty, které se v tomto oboru nedokazují z jiných vět, považují se za pravdivé. Podrobně se můžete s problematikou týkající se pojmu axióm seznámit například v knížce „M. Katětov: Jaká je logická výstavba matematiky?" (edice Cesta k vědění, JČMF, II. vydání 1950).

algebry $(B, +, ., ')$ nic bližšího neříká, právě tak abstraktně pojaté jsou všechny operace i oba neutrální prvky. Známe ale už dva konkrétní příklady Booleovy algebry.

Zvolme za B konkrétně množinu $\widehat{M}$ všech podmnožin neprázdné množiny M. Operace „sčítání", „násobení" a „doplněk" konkretizujme postupně jako operace sjednocení, průnik a doplněk na $\widehat{M}$. Pak pro všechny prvky množiny $\widehat{M}$ axiómy (1)—(10) zřejmě platí. Říkáme, že *množinová algebra* $(\widehat{M}, \cup, \cap, ')$ *je modelem Booleovy algebry.* Roli neutrálních prvků 0,1 hrají množiny $\varnothing$ a M.

Představme si dále namísto množiny B konkrétně množinu H pravdivostních hodnot výroků, operace sčítání, násobení a doplněk na B konkretizujme jako operace sčítání, násobení a doplněk definované na H. Pak opět pro všechny prvky množiny H jsou axiómy (1)—(10) splněny. Říkáme, že *algebra pravdivostních hodnot* $(H, +, ., ')$ *je modelem Booleovy algebry.*

Ve cvičeních budete mít příležitost seznámit se s řadou dalších modelů Booleovy algebry $(B, +, ., ')$. Při ověřování, zda nějaká neprázdná množina s dvěma binárními a jednou unární operací je modelem Booleovy algebry, musíte postupně prozkoumat platnost axiómů (1)—(10) pro všechny její prvky.

Na základě definice Booleovy algebry můžeme nyní vyslovit a dokázat celou řadu vět, které budou při „booleovském počítání" velmi důležité. Předtím však ještě proveďme jednu úvahu, jež se ukáže při důkazech těchto vět užitečná.

Uvažujeme-li libovolný z axiómů (1)—(10) a provedeme-li v něm záměny

$$\begin{aligned} + &\longrightarrow \cdot \\ \cdot &\longrightarrow + \\ 0 &\longrightarrow 1 \\ 1 &\longrightarrow 0\,, \end{aligned}$$

dospějeme opět k některému z axiómů, a to k tomu, jenž je zapsán ve stejném řádku jako původní. Odsud plyne tento důležitý závěr: Jestliže na základě axiómů (1)—(10) a z nich odvozených vět dokážeme nějakou další větu a přepíšeme-li ji zcela formálně pomocí našeho „seznamu záměn", získáme opět pravdivou větu, tzv. *duální větu* k dané větě. V tomto smyslu mluvíme o tzv. *principu duality* v Booleově algebře.

Obdobně jako v „číselné algebře" a v algebře pravdivostních hodnot umluvíme se i zde psát místo „$(xy)+(xz)$" jenom „$xy+xz$", místo „$x+(yz)$" stručněji pouze „$x+yz$" atd. Jestliže však chceme k dané větě vytvořit větu duální, musí být její zápis uveden v nezkrácené formě, se všemi závorkami (promyslete toto konstatování např. na axiómech (5) a (6)).

Uveďme a dokažme nyní některé důležité věty o prvcích Booleovy algebry $(B, +, ., ')$.

Věta: *Pro každý prvek* $x \in B$ *platí:*

(11) $x+x = x$ $\qquad\qquad x.x = x$ (12)

Důkaz (11): $x+x = (x+x).1 = (x+x).(x+x') = = x+x.x' = x+0 = x$

Při důkazu jsme postupně použili axiómy (8), (9), (6), (10), (7).

Platnost druhé části věty plyne z principu duality Booleovy algebry a z (11). Můžete si však přesto provést podrobný důkaz. Porovnejte pak jednotlivé kroky důkazů (11) a (12).

Poznámky:

1. Z uvedené věty plyne, že v Booleově algebře nemá význam zavádět přirozené násobky prvků ani mocniny s přirozeným exponentem, což v „číselné algebře“ jsou naopak pojmy značně důležité.

2. Na tomto místě už můžeme ilustrovat užitečnost uvedené definice Booleovy algebry. Z úvah o modelech Booleovy algebry a shora dokázané věty plynou ihned tyto závěry:

a) Pro každý prvek $A \in \hat{M}$ platí: $A \cup A = A$ a zároveň $A \cap A = A$.

b) Pro každý prvek $h \in H$ platí: $h+h = h$ a zároveň $h.h = h$.

Platí-li nějaká věta v Booleově algebře $(B, +, ., ')$ pak platí i v každém jejím modelu.

V důkazech dalších vět už nebudeme obvykle zdůvodňovat jednotlivé kroky. Prověřujte je podrobně sami!

Věta: *Pro každý prvek $x \in B$ platí:*

(13) $x.0 = 0$ $\qquad\qquad$ $x+1 = 1$ (14)

Důkaz (13): $x.0 = x.0+0 = x.0+x.x' = x.(0+x') = $
$= x.x' = 0$

Druhá část věty plyne ihned z principu duality a z (13).

Věta: *Pro každý prvek $x \in B$ platí*

(15) $(x')' = x$

Důkaz: Podle definice operace doplněk a podle axiómů (1) a (2) lze psát $x' + x = 1$ a zároveň $x' . x = 0$. Odtud ihned plyne, že x je doplňkem k x', tj. $x = (x')'$.

Věta: *Pro všechny prvky x, y množiny B platí:*

(16) $(x + y)' = x' . y'$ $\qquad$ $(x . y)' = x' + y'$ (17)

Důkaz (16): Naším úkolem je dokázat, že $x' . y'$ je doplňkem k prvku $x + y$, tj. musíme ověřit, že platí

1) $(x' . y') . (x + y) = 0$ a zároveň
2) $x' . y' + (x + y) = 1$

Nejprve dokažme 1):

$(x' . y') . (x + y) = (x' . y') . x + (x' . y') . y = (x' . x) . y' + x' .$
$. (y' . y) = 0 . y' + x' . 0 = 0 + 0 = 0$

Dokažme dále 2):

$x' . y' + (x + y) = (x' + (x + y)) . (y' + (x + y)) = ((x' + x) +$
$+ y) . ((y' + y) + x) = (1 + y) . (1 + x) = 1 . 1 = 1$

Tím je důkaz (16) proveden.
Poznámka: Mnozí z vás jistě znáte (16) a (17) v modelu množinové algebry pod názvem „de Morganovy zákony“.

Věta: *Pro všechny prvky x, y množiny B platí*:

(18) $x + xy = x$ $\qquad$ $x . (x + y) = x$ (19)

Důkaz (18): $x + xy = x . 1 + xy = x . (1 + y) = x . 1 = x$

Věta: *Pro všechny prvky x, y množiny B platí:*

(20) $x+x'.y = x+y \qquad x.(x'+y) = xy$ (21)

Důkaz (20): $x+x'.y = (x+x').(x+y) = 1.(x+y) = $
$= x+y$

Věta: *Nechť x, y jsou libovolné prvky množiny B. Pak platí:*

(22) $x+y = 0$, *právě když je* $x = 0$ *a zároveň* $y = 0$

(23) $x.y = 1$, *právě když je* $x = 1$ *a zároveň* $y = 1$

Důkaz (22): a) Nechť je $x = 0$ a zároveň $y = 0$. Pak je podle (7) $x+y = 0$.
b) Nechť je $x+y = 0$. Pak je $x+(x+y) = (x+x)+y = = x+y = 0$ a zároveň $x+(x+y) = x+0 = x$. Odtud plyne $x = 0$. Zcela obdobně zjistíme, že je také $y = 0$. Tím je důkaz (22) proveden.

Věta: *Nechť jsou x, y libovolné prvky množiny B. Pak platí:*

(24) $x = y$, *právě když je* $xy'+x'y = 0$

(25) $x = y$, *právě když je* $(x+y').(x'+y) = 1$

Důkaz (24): a) Nechť je $x = y$. Pak $xy' = yy'$, čili $xy' = 0$, a zároveň také $x'.y = 0$. Podle (22) je tedy $xy'+x'y = 0$.
b) Nechť je nyní $x \neq y$. Chceme dokázat, že potom platí $xy'+x'y \neq 0$. Předpokládejme, že existují prvky x, y množiny B, $x \neq y$, pro něž je $xy'+x'y = 0$. Podle (22)

je pak $\qquad xy' = 0 \quad$ (a)
a zároveň $\quad x'y = 0 \quad$ (b)

Z (a) plyne dále $xy'+y = y$ a podle (20) je $x+y = y$. Z (b) obdobným postupem dostaneme $x+y = x$. Odtud plyne $x = y$, což je spor s předpokladem $x \neq y$. Tím je důkaz (24) proveden.

Užijme nyní dokázaných vět k řešení několika příkladů, naučme se „booleovsky počítat". Ve všech příkladech značí a, b, c, d, e prvky Booleovy algebry $(B, +, ., ')$. Vždy si podrobně zdůvodňujte jednotlivé kroky řešení podle axiómů a vět (1)—(25).

Příklad 15: Dokažte, že pro všechny prvky a, b, c, d platí

$$(a+b).(c+d) = ac+bc+ad+bd$$

Řešení: $(a+b).(c+d) = (a+b).c + (a+b).d =$
$= ac+bc+ad+bd$

Příklad 16: Zjednodušte zápis prvku

$$abc+[b'.(a'+c)]'$$

tak, aby obsahoval co nejméně symbolů.
Řešení: $abc+[b'.(a'+c)]' = abc+(b')'+(a'+c)' =$
$= abc+b+(a')'.c' = b+ac'$

Příklad 17: Zjednodušte zápis prvku

$$(ab+de)'.(d+e).ca.(c'+b')$$

tak, aby obsahoval co nejméně symbolů.

Řešení: $(ab+de)'.(d+e).ca.(c'+b') = (ab)'.(de)'.$
$.(d+e).ca.(c'+b') = a.(a'+b').(d'+e').(d+e).c.$
$.(c'+b') = (aa'+ab').(d'd+e'd+d'e+e'e).(cc'+cb') =$
$= ab'.(e'd+d'e).cb' = ab'c.(de'+d'e)$

Poznámka: V 1. kapitole (příklad 3) jsme ukázali, že pro všechny prvky A, B množiny $\hat{M}$ platí $(A' \cap B')' = A \cup B$. Ve cvičení 4a) ke kapitole 2 jste měli možnost dokázat, že pro všechny prvky X, Y z dané množiny výroků platí $(X' \wedge Y')' \Leftrightarrow (X \vee Y)$; z toho také vyplývá, že pro všechny prvky r, s množiny H pravdivostních hodnot výroků je $(r'.s')' = r + s$.
Odsud plyne, že Booleovu algebru je možno zavést i jiným způsobem, než jsme uvedli zde. Můžeme vyjít z neprázdné množiny B, na níž jsou definovány operace násobení a doplněk, uvedeme vhodný systém axiómů pro tuto „algebru" a teprve poté definujeme operaci součet na základě zavedených operací násobení a doplněk.
Má-li čtenář chuť, může se tímto problémem zabývat hlouběji.

Cvičení

1. Je dána množina K, jejímiž prvky jsou uzavřené intervaly $\langle \frac{5}{2}, 3\rangle$ a $\langle 2, 3\rangle$. Definujme na K binární operace sjednocení a průnik a unární operaci „$u = x'$" tabulkou:

x	$\langle \frac{5}{2}, 3\rangle$	$\langle 2,3\rangle$
x'	$\langle 2, 3\rangle$	$\langle \frac{5}{2}, 3\rangle$

Rozhodněte, zda $(K, \cup, \cap, ')$ je modelem Booleovy algebry.

2. Je dána úsečka AB, A $\neq$ B. Uvažujme množinu G, jejímiž prvky jsou prázdná část úsečky O_u, body A, B a úsečka AB. Definujme na G operace tabulkami takto:

$x * y$:

$x \backslash y$	O_u	A	B	AB
O_u	O_u	A	B	AB
A	A	A	AB	AB
B	B	AB	B	AB
AB	AB	AB	AB	AB

$x \circ y$:

$x \backslash y$	O_u	A	B	AB
O_u	O_u	O_u	O_u	O_u
A	O_u	A	O_u	A
B	O_u	O_u	B	B
AB	O_u	A	B	AB

x	O_u	A	B	AB
$\bar{x}$	AB	B	A	O_u

Dokažte, že $(G, *, \circ, ^-)$ je modelem Booleovy algebry.

3. Pokuste se sami konstruovat další modely Booleovy algebry obdobně jako v předchozím příkladě. Vyjděte například z těchto geometrických útvarů: trojúhelník; čtverec; čtyřstěn; krychle. Volte příslušné množiny analogicky jako množinu G v příkladu 2.

4. Zvolme množinu $C = \{1, 2, 3, 6\}$. Definujme na C binární operace „tvoření nejmenšího společného násobku“, „tvoření největšího společného dělitele“ a unární operaci „$u = \dfrac{6}{x}$“. Dokažte, že C s takto definovanými operacemi je modelem Booleovy algebry.

5. Uvažujme množinu $T = \{2, 3\}$ a definujme na ní binární operace „$u = \max(x, y)$“, „$u = \min(x, y)$“ (viz cvičení 3, 3. kapitola) a unární operaci „$u = \bar{x}$“ takto:

x	2	3
$\bar{x}$	3	2

Dokažte, že množina T spolu s uvedenými operacemi je modelem Booleovy algebry.

6. Zvolme množinu U všech uspořádaných dvojic $[x,y]$, kde x a y patří množině $\{2, 3\}$. Definujme na U rovnost a binární operace „$u = x \ast y$", „$u = x \circ y$" takto:
Pro všechny prvky $[x_1, y_1]$, $[x_2, y_2]$ množiny U je
$[x_1, y_1] = [x_2, y_2]$ právě tehdy, když $x_1 = x_2$ a zároveň $y_1 = y_2$;
$[x_1, y_1] \ast [x_2, y_2] = [\max (x_1, x_2), \max (y_1, y_2)]$;
$[x_1, y_1] \circ [x_2, y_2] = [\min (x_1, x_2), \min (y_1, y_2)]$.

Dále definujme na U unární operaci „$u = \bar{x}$" takto:
Pro každou dvojici $[x_1, x_2] \in U$ je $\overline{[x_1, x_2]} = [\bar{x}_1, \bar{x}_2]$, kde pro $i = 1, 2$ je $\bar{x}_i = 2$ právě tehdy, když $x_i = 3$ (a tedy $\bar{x}_i = 3$ právě tehdy, když je $x_i = 2$).
Dokažte, že $(U, \ast, \circ, {}^-)$ je modelem Booleovy algebry.

7. Nechť n je libovolné přirozené číslo. Uvažujme množinu V všech uspořádaných n-tic $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, kde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ patří do množiny $\{2, 3\}$.
Definujte na V rovnost, binární operace „$u = x \ast y$", „$u = x \circ y$" a unární operaci „$u = \bar{x}$" obdobně jako v příkladě 6. Rozhodněte pak, zda $(V, \ast, \circ, {}^-)$ je modelem Booleovy algebry.

8. Uvažujme množinu F všech reálných funkcí jedné reálné proměnné, jejichž definiční obor je množina všech reálných čísel R a pro něž platí: pro každé $f \in F$ a každé $z \in R$ je $f(z) = 2$ nebo $f(z) = 3$.
Definujme v F rovnost funkcí takto: pro všechny prvky f, g množiny F je f rovno g (symbolicky „$f = g$") právě tehdy, když pro každé $z \in R$ je $f(z) = g(z)$.
Zaveďme dále na F binární operace „$u = x \ast y$" a „$u = x \circ y$":
Pro všechny prvky f, g z množiny F je

$f \ast g$ rovno funkci h, pro niž platí: pro každé $z \in R$ je $h(z) = \max(f(z), g(z))$;

$f \circ g$ rovno funkci k, pro niž platí: pro každé $z \in R$ je $k(z) = \min(f(z), g(z))$.

Definujme na F unární operaci „$u = \bar{x}$" takto: Pro všechna $f \in F$ je $\bar{f}$ funkce, pro niž platí: pro každé $z \in R$ je $\bar{f}(z) = 2$ právě tehdy, když $f(z) = 3$ (a tedy $\bar{f}(z) = 3$, právě když $f(z) = 2$). Dokažte, že $(F, \ast, \circ, \bar{\ })$ je modelem Booleovy algebry.

9. Dokažte, že pro všechny prvky a, b, c, d Booleovy algebry $(B, +, ., ')$ platí:

a) $a.(b+c+d) = ab+ac+ad$ b) $a+bcd = (a+b).(a+c).(a+d)$

c) $(a+b+c)' = a'b'c'$ d) $(abc)' = a'+b'+c'$

10. Zjednodušte zápisy prvků Booleovy algebry tak, aby obsahovaly co nejméně symbolů:

a) $a+a'b+ab'+a'b'$ b) $(a+b'+c').(a+b'c)$

c) $abc'+a'b'c'+a'bc'+abc$ d) $a+c'+b.(a+c')'+(a+c').(a+b+c')$

e) $((ab+c)'+ab+d)'$ f) $(abc+ab'+bc')'$

g) $b.(a+c+d).(a+e).b.(e+d).(bd)'.(e+c+d)$

h) $(a+c).(dg)'.(ab)'.(d+a').(f+g).c'.(ad)'.(dc)'$

11. Říkáme, že systém axiómů je nezávislý, když žádný z axiómů tohoto systému nelze dokázat z ostatních.

Pokuste se ukázat, že systém axiómů Booleovy algebry, uvedený v této kapitole, je závislý. Můžete například dokázat, že axiómy (3) a (4) lze odvodit pomocí axiómů (1), (2), (5)—(10) a vět, jež byly v této kapitole dokázány bez použití axiómů (3) a (4).

5. kapitola

DVOUPRVKOVÁ BOOLEOVA ALGEBRA

V definici Booleovy algebry $(B, +, ., ')$ je zaručena existence neutrálních prvků 0 a 1 vzhledem k jednotlivým binárním operacím. Odtud plyne, že Booleova algebra musí obsahovat aspoň dva prvky vzájemně různé.

Určujte nyní podle axiómů a vět (1)—(25) součty a součiny prvků 0 a 1, utvořte k 0 a 1 jejich doplňky.

Jestliže jste počítali správně, musí vaše výpočty formálně souhlasit s výsledky, k nimž jsme dospěli ve 2. kapitole (tabulky 6 až 8). Odtud ale ihned plyne, že množina $D = \{0,1\}$ spolu s operacemi definovanými tabulkami 6, 7 a 8 je Booleova algebra. Nazýváme ji *dvouprvková Booleova algebra* a označujeme $(D, +, ., ')$.

Jestliže prvky 0,1 konkretizujeme jako pravdivostní hodnoty výroků, dospějeme zpět k algebře pravdivostních hodnot, jakožto modelu dvouprvkové Booleovy algebry.

V „číselné algebře" umíte jistě řešit řadu typů rovnic a jejich soustav. Definovali jste také pojem funkce, seznámili jste se s různými příklady funkcí, jež jsou určeny rovnicí nebo tabulkou. V této kapitole ukážeme, jak lze zavést pojmy rovnice a funkce v Booleově algebře, a užijeme jich při řešení úloh v $(D, +, ., ')$.

Nejprve si připomeňme několik pojmů z logiky. Na příkladech jste se mnozí seznámili s tzv. *výrokovými formami*. Výrazy „$\sqrt{x} \geqq 2$", „$x + 1 = x$" jsou příklady výrokových forem o jedné proměnné x, „trojúhelník p je shodný s trojúhelníkem r" je výrokovou formou o dvou proměnných p, r, „$(xy + xz^3).x = z^{10}$" je výroková forma o třech proměnných x, y, z. Výrokové formy lze v podstatě charakterizovat jako výrazy obsahující jednu nebo více proměnných s touto vlastností: dosadíme-li za všechny proměnné vhodné konstanty (pevně zvolené objekty), dostaneme výrok.

Všimněme si nyní blíže výrokové formy „$\sqrt{x} \geqq 2$". Zvolme nějakou množinu, například množinu všech reálných čísel R. Dosazujeme-li za proměnnou x jednotlivé prvky množiny R, dostaneme buď výraz, který nemá smysl (například po dosazení čísla —2), nebo výrok — a to buď pravdivý (např. po dosazení čísla 7,6), nebo nepravdivý (např. po dosazení čísla 1).

Určeme množinu P všech těch reálných čísel, pro každé z nichž platí: dosadíme-li je za x do uvažované výrokové formy, dostaneme pravdivý výrok. Lehce zjistíme, že P je rovno množině všech reálných čísel, jež jsou větší nebo rovna číslu 4. Množinu P nazveme obor pravdivosti výrokové formy $\sqrt{x} \geqq 2$ v množině R.

Obecně definujeme obor pravdivosti dané výrokové formy o jedné proměnné v množině A takto: *Je dána výroková forma $V(x)$ o jedné proměnné x a neprázdná množina A. Oborem pravdivosti výrokové formy $V(x)$ v množině A nazýváme množinu P všech těch prvků z množiny A, pro každý z nichž platí: dosadíme-li jej do $V(x)$ za proměnnou x, dostaneme pravdivý výrok.*

Pokuste se nyní samostatně zformulovat pojmy „obor pravdivosti výrokové formy o dvou proměnných x_1, x_2 v množině $A_1 \times A_2$"; „obor pravdivosti výrokové formy o třech proměnných x_1, x_2, x_3 v množině $A_1 \times A_2 \times A_3$“*).

Zabývejme se nyní výrokovou formou „$x + 1 = x$“. Dosazujme za x postupně jednotlivé prvky z množiny $D = \{0,1\}$.

Dosadíme-li za x prvek 0, dostaneme výrok „$0 + 1 = 0$“ o rovnosti prvků z množiny D, který je nepravdivý.

Dosadíme-li všude za x prvek 1, dospějeme opět k výroku o rovnosti prvků z D „$1 + 1 = 1$“, který je v tomto případě pravdivý.

Uvažovaná výroková forma je příkladem tzv. booleovské rovnice o jedné proměnné x.

Nechť je dána Booleova algebra $(B, +, ., ')$. Výrokovou formu o jedné proměnné x nazveme booleovská rovnice (stručněji „rovnice“) o jedné proměnné x, právě když platí: dosadíme-li do této výrokové formy všude za x libovolný prvek množiny B, dostaneme výrok o rovnosti prvků z B.

Termín „*řešte rovnici o jedné proměnné x v množině B*“ budeme chápat jako úkol určit obor pravdivosti dané rovnice v množině B — a to pokud možno výčtem (tj. vypsáním všech prvků). Každý prvek z oboru pravdivosti dané rovnice v množině B budeme nazývat „řešení rovnice“. Ve stejném smyslu jako v číselné algebře budeme užívat také termínů „*pravá strana rovnice*“, „*levá strana rovnice*“.

Zkuste sami vyslovit definici booleovské rovnice například o dvou (třech) proměnných.

---

*) Ve 3. kapitole jsme definovali kartézský součin $K \times L$ množin K, L. Obdobně lze definovat kartézský součin tří množin K, L, M takto: $K \times L \times M = (K \times L) \times M$. Analogicky tomu je i v případě čtyř množin, obecně n množin, kde n je libovolné přirozené číslo, $n \geqq 2$.

Co budeme rozumět pod termínem „*řešte soustavu rovnic o dvou proměnných x, y v množině $B \times B$*“?

Uveďme několik ukázek řešení rovnic a jejich soustav v dvouprvkové Booleově algebře $(D, +, ., ')$. Na místě množiny B v definici booleovské rovnice uvažujeme tedy speciálně množinu D.

Příklad 18: Řešte rovnici $((x'+1)'+(x+0))'=0$ o jedné proměnné x v množině D.

Řešení: Naším úkolem je určit všechny prvky z množiny D, pro něž po dosazení za proměnnou x dostaneme pravdivý výrok. Vzhledem k tomu, že D je pouze dvouprvková množina, můžeme zvolit metodu postupného „prověřování“ jednotlivých prvků množiny D. Užijeme k tomuto účelu tabulek 6 až 8 z 2. kapitoly.

Označme levou stranu dané rovnice písmenem L a dosaďme do ní nejprve za proměnnou x prvek 0. Dostaneme pak postupně:

$$\mathrm{L} = ((0'+1)'+(0+0))' = ((1+1)'+0)' = (1'+0)' = \\ = (0+0)' = 1$$

Pravá strana rovnice je rovna 0. Výrok $1 = 0$ není pravdivý, proto prvek 0 není řešením rovnice.

Dále dosaďme do levé strany rovnice za x prvek 1. Postupně získáváme $\mathrm{L} = ((1'+1)'+(1+0))' = ((0+ +1)'+1)' = (0+1)' = 1' = 0$. Výrok $0 = 0$ je pravdivý, prvek 1 je řešením dané rovnice.

Množina všech řešení naší rovnice v množině D je tedy $\{1\}$.

Rovnici můžeme řešit ještě jiným způsobem. Upravíme nejprve pomocí axiómů a vět (1)—(25) její levou stranu. Dostaneme

$$L = ((x'+1)'+(x+0))' = (1'+x)' = (0+x)' = x'$$

Přecházíme tedy k úkolu určit všechna $x \in D$, pro něž platí $x' = 0$. Zřejmě je $x' = 0$, právě když $x = 1$. Množina všech řešení uvažované rovnice je $\{1\}$. Tento závěr je v souladu s výsledkem, k němuž jsme dospěli při řešení první metodou.

Příklad 19: Řešte soustavu rovnic

$$(x+y').(x'+y) = x \tag{26}$$

$$x+y = x \tag{27}$$

o dvou proměnných x, y v množině $D \times D$.
Řešení: Naším úkolem je určit všechny uspořádané dvojice z množiny $D \times D = \{[0,0], [1,0], [0,1], [1,1]\}$, pro každou z nichž platí: dosadíme-li její první složku za x a druhou složku za y do rovnic soustavy, budou oba získané výroky pravdivé.

Opět jako v předešlém příkladě bychom mohli postupně „prověřit" každý ze čtyř prvků množiny $D \times D$. Řešení touto metodou ponechávám vaší vlastní iniciativě.

Zde vyřešíme soustavu rovnic užitím axiómů a vět (1) až (25). Zabývejme se nejprve rovnicí (26). Upravujme její levou stranu:

$$\begin{aligned} (x+y').(x'+y) &= x \\ xx'+y'x'+xy+y'y &= x \\ xy+x'y' &= x \end{aligned}$$

Nyní použijeme větu (24); dospějeme k rovnici

$$(xy+x'y').x'+(xy+x'y')'.x = 0$$

Zjednodušujme postupně její levou stranu takto:

$$\begin{aligned} xyx'+x'y'x'+(x'+y').(x+y).x &= 0 \\ x'y'+(x'+y').x &= 0 \\ x'y'+xy' &= 0 \\ y'.(x+x') &= 0 \\ y' &= 0 \end{aligned}$$

Přitom $y' = 0$, právě když $y = 1$. Dosaďme za y do rovnice (27) prvek 1; dostaneme

$$x+1 = x$$

Přitom $x+1 = x$ platí, právě když $x = 1$.

Z dosud provedených úvah plyne tento závěr: Je-li dvojice $[x, y]$ řešením naší soustavy, pak musí být $x = 1$ a zároveň $y = 1$.

Prověřme zkouškou dosazením, zda dvojice [1,1] je skutečně řešením soustavy.

$$\left.\begin{aligned} L_1 &= (1+1').(1'+1) = (1+0).(0+1) = 1 \\ P_1 &= 1 \end{aligned}\right\} L_1 = P_1$$

$$\left.\begin{aligned} L_2 &= 1+1 = 1 \\ P_2 &= 1 \end{aligned}\right\} L_2 = P_2$$

Množina všech řešení dané soustavy rovnic je rovna {[1,1]}.*)

---

*) Uvádíme-li řešení rovnice nebo soustavy rovnic o n proměnných ($n \geqq 2$) ve tvaru uspořádané n-tice, je „uspořádání" provedeno tak, že jednotlivé složky odpovídají hodnotám proměnných seřazených abecedně.

Příklad 20: Řešte rovnici $(xy')' . (zx')' . (yz')' = 1$ o třech proměnných x, y, z v množině $D \times D \times D$.

Řešení: 1) Můžeme postupně prověřovat všechny prvky z $D \times D \times D$, tj. všechny uspořádané trojice prvků z množiny D.

2) K řešení příkladu můžeme také použít „tabulkové metody“, kterou jsme se zabývali ve 2. kapitole při určování pravdivostních hodnot výroků:

x	y	z	x'	y'	z'	xy'	$(xy')'$	zx'	$(zx')'$	yz'	$(yz')'$	$(xy')' . (zx')' . (yz')'$
1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0
1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0
1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0
0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	0
0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0
0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1

Z tabulky je ihned vidět, že množina všech řešení dané rovnice je rovna $\{[0, 0, 0], [1, 1, 1]\}$.

3) Užijme axiómů a vět (1)—(25) k úpravě levé strany rovnice:

$$(xy')' . (zx')' . (yz')' = (x' + y) . (z' + x) . (y' + z) = (x'z' + yz' + x'x + yx) . (y' + z) = x'z'y' + yz'y' + yxy' + x'z'z + yz'z + yxz = xyz + x'y'z'$$

Přecházíme tak k řešení rovnice $xyz + x'y'z' = 1$ o třech proměnných x, y, z v množině $D \times D \times D$.

Z tabulky 6 pro sčítání plyne

$$xyz = 1 \quad \text{nebo} \quad x'y'z' = 1$$

Z věty (23) dále dostáváme

$$x = 1 \text{ a } y = 1 \text{ a } z = 1 \quad \text{nebo} \quad x' = 1 \text{ a } y' = 1 \text{ a } z' = 1$$

čili

$$x = 1 \text{ a } y = 1 \text{ a } z = 1 \quad \text{nebo} \quad x = 0 \text{ a } y = 0 \text{ a } z = 0$$

Dospíváme ke stejnému výsledku jako při předchozí metodě řešení.

Příklad 21: Řešte rovnici $x + a = 1$ o proměnné $x \in D$ a parametru $a \in D$.

Řešení: Pro $a = 0$ je množina všech řešení rovna $\{1\}$.
Pro $a = 1$ je množina všech řešení rovna $\{0,1\}$.

Příklad 22: Řešte rovnici $ax + bx' = 1$ o proměnné $x \in D$ a parametrech a, b z množiny D.

Řešení: Dosazujme za a, b jednotlivé prvky z množiny D a řešme vždy rovnici pro takto zvolené hodnoty parametrů.

1. $a = 1, b = 1$: $$1.x + 1.x' = 1$$ $$x + x' = 1$$ $$x = 0 \text{ nebo } x = 1$$

2. $a = 1, b = 0$: $$1.x + 0.x' = 1$$ $$x = 1$$

3. $a = 0, b = 1$: $$0.x + 1.x' = 1$$ $$x' = 1$$ $$x = 0$$

4. $a = 0, b = 0$: $$0.x + 0.x' = 1$$ $$0 = 1$$

Shrňme si na závěr získané výsledky přehledně v tabulce:

Parametry a, b	Množina všech řešení
$a = 1$, $b = 1$	$\{0,1\}$
$a = 1$, $b = 0$	$\{1\}$
$a = 0$, $b = 1$	$\{0\}$
$a = 0$, $b = 0$	$\emptyset$

Zkuste ještě vyřešit tento příklad „tabulkovou metodou“.

Zabývejme se nyní tzv. booleovskými funkcemi. *Uvažujme Booleovu algebru* $(B, +, ., ')$; *nechť* C *je neprázdná podmnožina množiny* B.

Booleovskou funkcí (stručněji „funkcí“) o jedné proměnné budeme nazývat každé zobrazení množiny C *do množiny* B.

Booleovské funkce budeme označovat f, g, h.... Uvažujme funkci f o jedné proměnné x. Jestliže dvojice $[x_0, y_0] \in f$, nazveme x_0 *hodnotou proměnné* x, y_0 *hodnotou funkce* f *(funkční hodnotou* f*) pro hodnotu* x_0 *proměnné* x. Namísto „$[x_0, y_0] \in f$“ budeme častěji užívat zápisu „$y_0 = f(x_0)$“.

Funkce může být určena tak, že jsou vypsány všechny její prvky. Příkladem je třebas funkce $g = \{[1,0], [0,1]\}$. Tuto funkci lze zapsat také takto:

x	$g(x)$
1	0
0	1

Říkáme pak, že g je určena *tabulkou*.

Funkci g můžeme také definovat jako obor pravdivosti rovnice $y = x'$ v množině $D \times D$. Přesvědčte se o tom! Říkáme pak stručně, že *g je určena rovnicí* $y = x'$, kde proměnná x je prvkem množiny D, a zapisujeme $g : y = x'$, kde $x \in D$.

Formulujte sami definici booleovské funkce o dvou (třech, čtyřech atd.) proměnných.

V dalším se omezme jenom na případy funkcí v dvouprvkové Booleově algebře. Budeme zkoumat zobrazení D do D (funkce jedné proměnné), zobrazení $D \times D$ do D (funkce dvou proměnných), obecně zobrazení $\underbrace{D \times D \times \ldots \times D}_{n\text{-krát}}$ do D (funkce n proměnných).

Smluvme se, že namísto zápisu „$g : y = x'$, kde $x \in D$“ budeme psát stručněji jenom „$g : y = x'$“; obdobně budeme uvádět takto zkrácené zápisy funkcí i v dalších případech.

Příklad 23: Je dána funkce $f : y = (xz + x').z'$. Určete její funkční hodnotu $f(x, z)$ pro $x = 1$, $z = 0$, tj. najděte $f(1,0)$.

Řešení: $f(1,0) = (1.0 + 1').0' = (0 + 0).1 = 0$

Příklad 24: Je dána funkce $h : y = x + uv'$. Určete ji tabulkou!

Řešení:

x	u	v	v'	uv'	$h(x, u, v)$
1	1	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1
0	0	1	0	0	0
0	0	0	1	0	0

Budeme říkat, že *funkce* f, g *o jedné proměnné* (tj. zobrazení D do D) *jsou sobě rovny*, právě když pro každé $x \in D$ je $f(x) = g(x)$. Zapisujeme „$f = g$". Nejsou-li funkce f, g sobě rovny, budeme říkat, že jsou *různé*, a psát „$f \neq g$".

Vyslovte obdobně definici pro funkce o dvou (třech atd.) proměnných.

Příklad 25: Určete tabulkami a rovnicemi všechny vzájemně různé funkce o jedné proměnné x.

Řešení: Zapište každou z funkcí výpisem všech jejích prvků a srovnejte své závěry s dále uvedenou tabulkou.

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
1	1	0	1	0
0	0	1	1	0

Určeme každou z těchto čtyř funkcí rovnicí:

$$f_1 : y = x$$
$$f_2 : y = x'$$
$$f_3 : y = 1$$
$$f_4 : y = 0$$

Přesvědčte se sami o správnosti těchto výsledků dosazováním do příslušných rovnic a porovnáním s tabulkovým vyjádřením funkcí.

Příklad 26: Určete tabulkami a rovnicemi všechny vzájemně různé funkce o dvou proměnných x, y.

Řešení: *)

x	1	1	0	0
y	1	0	1	0
$f_1(x, y)$	0	0	0	0
$f_2(x, y)$	0	0	0	1
$f_3(x, y)$	0	0	1	0
$f_4(x, y)$	0	1	0	0
$f_5(x, y)$	1	0	0	0
$f_6(x, y)$	0	0	1	1
$f_7(x, y)$	0	1	0	1
$f_8(x, y)$	0	1	1	0
$f_9(x, y)$	1	0	0	1
$f_{10}(x, y)$	1	0	1	0
$f_{11}(x, y)$	1	1	0	0
$f_{12}(x, y)$	0	1	1	1
$f_{13}(x, y)$	1	0	1	1
$f_{14}(x, y)$	1	1	0	1
$f_{15}(x, y)$	1	1	1	0
$f_{16}(x, y)$	1	1	1	1

Přesvědčte se, že všechny uvedené funkce f_1 až f_{16} jsou skutečně vzájemně různé a že jsme na žádnou funkci o dvou proměnných nezapomněli.

Určujme postupně jednotlivé funkce rovnicemi. Snadno zjistíme, že je $f_1 : z = 0$. Určit rovnicí funkci f_2 nám dá už asi více práce. Po určité námaze a hledání dospějeme k závěru, že je $f_2 : z = x'y'$. Neexistuje nějaká věta, která by naši práci urychlila?

Dá se dokázat, že pro každou funkci f o dvou proměnných x, y platí:

$$f : z = f\,(1,1).xy + f\,(1,0).xy' + f\,(0,1).x'y + f\,(0,0).x'y'$$

Přesvědčme se, zda výsledky, k nimž jsme dospěli

*) Úprava tabulky je poněkud neobvyklá; důvod tkví v malém formátu publikace.

u funkcí f_1 a f_2, jsou v souladu s právě uvedeným tvrzením.

Dosaďme za $f(1,1), \ldots, f(0,0)$ funkční hodnoty funkce f_1 ze shora uvedené tabulky. Dostaneme

$$f_1 : z = 0.xy + 0.xy' + 0.x'y + 0.x'y'$$

a po úpravě

$$f_1 : z = 0$$

Aplikujeme-li větu na funkci f_2, získáváme

$$f_2 : z = 0.xy + 0.xy' + 0.x'y + 1.x'y'$$

a po úpravě

$$f_2 : z = x'y'$$

Tento závěr opět souhlasí s dříve uvedeným vyjádřením funkce f_2 rovnicí.

Pomocí shora uvedené věty můžeme dále snadno určit například

$f_3 : z = x'y,\quad f_4 : z = xy',\quad f_5 : z = xy,\ f_6 : z = x'y + x'y'$ (a po úpravě $f_6 : z = x'$).

Zbývajících deset funkcí určete rovnicemi už každý samostatně.

Tvrzení uvedené v předchozím příkladě lze zobecnit pro funkce o n proměnných, kde n je libovolné přirozené číslo. Dá se dokázat, že *pro každou funkci g o n proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ platí:*

$g :\ u = g(1,1,\ \ldots,\ 1).x_1x_2.\ \ldots\ .x_n + g(1,1,\ \ldots,\ 1,0).$
$.x_1x_2.\ \ldots\ .x_{n-1}x'_n + \ \ldots\ + g(0,0,\ \ldots,\ 0,1).x'_1x'_2.\ \ldots\ .$
$.x'_{n-1}x_n + g(0,0,\ \ldots,\ 0,0).x'_1x'_2.\ \ldots\ .x'_{n-1}x'_n$

Odtud například plyne, že *každou funkci h o třech proměnných x, y, z lze vyjádřit takto*:

$h : u = h(1, 1, 1).xyz + h(1, 1, 0).xyz' + h(1, 0, 1).$
$.xy'z + h(0, 1, 1).x'yz + h(1,0,0).xy'z' + h(0,1,0).x'yz' +$
$h(0, 0, 1).x'y'z + h(0, 0, 0).x'y'z'$

Příklad 27: Funkce k o třech proměnných x, y, z je určena touto tabulkou:

x	y	z	$k(x, y, z)$
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	1

Určete ji rovnicí.
Řešení: Pro funkci k platí

$$k : u = xyz + xyz' + x'yz + x'y'z'$$

Po úpravě pravé strany rovnice dostaneme

$$k : u = xy + x'.(yz + y'z')$$

Cvičení

1. Řešte rovnici $x + x' = x.x' + x$ o jedné proměnné $x \in D$.

2. Řešte soustavu rovnic
$$x + 1 = x$$
$$x \,.\, 1 = 0$$
o jedné proměnné x v množině D.

3. Řešte soustavu rovnic $\quad x+y'+xy' = x$

$$xy = x'+y$$

o proměnných x, y v množině $D \times D$.

4. Řešte rovnici $(xyz)' + (xz+u') = x'+u$ o proměnných x, y, z, u v množině $D \times D \times D \times D$.

5. Řešte rovnice o proměnné $x \in D$ a parametrech a, b, c z množiny D.

a) $ax'+bx+c = 0$ b) $x+x'.a = 1$

c) $ax+bx' = c$ d) $(x'+b).(x'+a).x+a'x = 0$

6. Řešte soustavu rovnic $\quad ax+by' = 1$

$$ay+bx' = 1$$

o proměnných x, y z množiny D a parametrech a, b z D.

7. *) Určete tabulkami tyto funkce:

a) $f_1 : y = (xz'+x'z).u$

b) $f_2 : y = (xz+yz)+uv'.(x'+z')$

8. Určete rovnicí každou z funkcí f_1, f_2, f_3, jež jsou definovány tabulkami.

x	y	z	$f_1(x, y, z)$	$f_2(x, y, z)$	$f_3(x, y, z)$
1	1	1	1	1	0
1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	0	1
0	1	0	1	0	1
0	0	1	0	0	1
0	0	0	0	1	0

*) V příkladech 7—10 uvažujeme všechny funkce v dvouprvkové Booleově algebře.

9. Rozhodněte, zda jsou sobě rovny funkce

$$g_1 : y = xu + x'.(u+v)$$
$$g_2 : y = x.(v+u)' + x'u$$

10. Kolik existuje vzájemně různých funkcí jedné; dvou; tří; čtyř proměnných? Vyslovte hypotézu o počtu všech vzájemně různých funkcí o n proměnných pro libovolné přirozené číslo n a potom ji dokažte!

6. kapitola

NĚKOLIK ÚLOH Z MNOŽINOVÉ ALGEBRY A ALGEBRY PRAVDIVOSTNÍCH HODNOT

Ilustrujme v této kapitole užitečnost zavedené Booleovy algebry na několika příkladech o množinách a z logiky.

Příklad 28: Zjednodušte zápis množiny

$$(A \cap E \cap C) \cup ((D \cap A)' \cup B)' \cup (E \cap C' \cap A) \cup$$
$$\cup ((B \cup D)' \cap A)$$

tak, aby obsahoval co nejméně symbolů. Přitom A, B, C, D, E jsou podmnožiny dané neprázdné množiny M.

Řešení: V zápise uvažované množiny se vyskytuje celkem pět písmen označujících podmnožiny množiny M. V této knížce jsme uvedli Vennovy diagramy nejvýše pro čtyři množiny, nemůžeme tedy této grafické metody pro řešení našeho příkladu použít.*)

Využijme té skutečnosti, že množinová algebra $(\hat{M}, \cup, \cap, ')$ je modelem Booleovy algebry. Přepišme zápis dané množiny do symboliky užívané v Booleově algebře $(B, +, ., ')$. Půjde o tyto záměny: $A \to a$, $B \to b$, $C \to c$, $D \to d$, $E \to e$, $\cap \to .$, $\cup \to +$. Dospějeme pak k prvku

$$aec + ((da)' + b)' + ec'a + (b + d)' . a$$

množiny B.

*) Množinové diagramy lze sice sestrojovat i pro více než čtyři množiny, řešení úloh pomocí nich je však už nepřehledné a komplikované.

(Všimněte si, že jsme na základě úmluvy o zápisech prvků Booleovy algebry vynechali také některé „zbytečné“ závorky.)

Použijeme-li nyní ke zjednodušení zápisu tohoto prvku axiómů a vět (1) až (25), dostaneme postupně

$$aec + ((da)' + b)' + ec'a + (b + d)' . a = aec + ec'a +$$
$$+ ((da)')'b' + b'd'a = ae . (c + c') + dab' + b'd'a =$$
$$= ae . 1 + ab' . (d + d') = ae + ab' = a . (e + b')$$

Poslední výraz opět zcela formálně přepíšeme do symboliky užívané v $(\tilde{M}, \cup, \cap, ')$. Dospíváme k závěru ... $A \cap (E \cup B')$.

Náš příklad lze řešit také takto: Přepíšeme-li každý z axiómů a vět (1)—(25) do symboliky používané v $(\tilde{M}, \cup, \cap, ')$, bude pravdivou větou o prvcích z $\tilde{M}$. Použijeme-li jich pak k úpravě zápisu uvažované množiny, dostaneme

$$(A \cap E \cap C) \cup ((D \cap A)' \cup B)' \cup (E \cap C' \cap A) \cup$$
$$\cup ((B \cup D)' \cap A) = ((A \cap E) \cap C) \cup ((A \cap E) \cap$$
$$\cap C') \cup (((D \cap A)')' \cap B') \cup (B' \cap D' \cap A) =$$
$$= ((A \cap E) \cap (C \cup C')) \cup (A \cap B' \cap D) \cup (A \cap$$
$$\cap B' \cap D') = (A \cap E \cap M) \cup ((A \cap B') \cap (D \cup$$
$$\cup D')) = (A \cap E) \cup ((A \cap B') \cap M) = (A \cap E) \cup$$
$$\cup (A \cap B') = A \cap (E \cup B')$$

Sami posuďte, který z obou způsobů řešení se jeví pohodlnější a elegantnější.

Příklad 29: Určete pravdivostní hodnoty, jichž nabývá výroková formule

$$((X \Rightarrow Y) \wedge (X' \Rightarrow Z')) \vee (Y' \wedge Z')$$

při všech pravdivostních hodnotách výroků, které dosazujeme za X, Y, Z.

Řešení: Přejděme od našeho příkladu k tomuto úkolu: Určit všechny uspořádané trojice pravdivostních hodnot výroků dosazovaných za X, Y, Z, pro něž platí

$$\text{ph}\,[((X \Rightarrow Y) \wedge (X' \Rightarrow Z')) \vee (Y' \wedge Z')] = 0$$

Jestliže rozřešíme tento úkol, bude už v podstatě vyřešen i celý příklad.

Z úvah provedených ve 2. kapitole plyne, že můžeme bez obav „$X \Rightarrow Y$" zaměnit „$X' \vee Y$" a „$X' \Rightarrow Z'$" nahradit „$(X')' \vee Z'$". Označme dále $\text{ph}(X) = x$, $\text{ph}(Y) = y$, $\text{ph}(Z) = z$.

Náš úkol lze potom přeformulovat ještě takto:

Řešte rovnici $\quad (x'+y).((x')'+z')+y'z' = 0 \qquad (28)$

o třech proměnných x, y, z v množině $H \times H \times H$.

Vzhledem k tomu, že algebra pravdivostních hodnot $(H, +, ., ')$ je modelem dvouprvkové Booleovy algebry $(D, +, ., ')$, můžeme přejít k řešení rovnice (28) v množině $D \times D \times D$.*)

Použijme axiómů a vět (1)—(25) k úpravě její levé strany:

$$(x'+y).((x')'+z')+y'z' = (x'+y).(x+z')+y'z' =$$
$$= x'x+yx+x'z'+yz'+y'z' = yx+x'z'+z'.(y+y') =$$
$$= yx+(x'z'+z') = yx+z'$$

---

*) Po formální stránce bude zápis celého postupu řešení v obou případech zřejmě zcela shodný.

Přecházíme tedy k řešení rovnice $yx + z' = 0$ o proměnných x, y, z z množiny D.

Podle (22) je $yx + z' = 0$ právě tehdy, když platí $yx = 0$ a zároveň $z' = 0$. Z tabulky 7 v kapitole 2 je vidět, že $yx = 0$, právě když je $y = 0$ nebo $x = 0$.

Dospíváme k závěru, že množina všech řešení rovnice (28) je rovna $\{[0, 0, 1], [0, 1, 1], [1, 0, 1]\}$.

Odtud už můžete sami formulovat odpověď, jež je požadována v textu příkladu. Zkouškou dosazením do zkoumané výrokové formule se můžete přesvědčit, že jsme počítali správně.

Zkuste ještě pro srovnání vyřešit náš příklad „tabulkovou metodou".

Další úloha je slovní, podmínky v textu nejsou matematizovány. Ukážeme na ní dva různé způsoby matematizace a několik různých metod řešení.

Příklad 30: Z města H do města K povede trať nové dálkové autobusové linky. Komise odborníků rozhoduje, ve kterých z měst A, B, C, D, která leží na této trati, má být zřízena zastávka. Byly podány tyto návrhy:

1. člen komise: Není vhodné zřizovat zastávku v obou z měst B a C, ale je nutné, aby autobus stavěl v B nebo v D.

2. člen komise: Autobusová zastávka by měla být určitě v C nebo v B; jsem dále proti tomu, aby byla současně v městech A a C.

3. člen komise: Není možné, aby byla zastávka zřízena v B a přitom nebyla zřízena v A. Jsem také proti tomu, aby autobus stavěl ve všech třech městech B, C a D.

Ve kterých z měst A, B, C, D byly zbudovány zastávky této autobusové linky, víme-li, že všechny návrhy byly respektovány a žádný další návrh nebyl podán?

Řešení: I. Pokusme se nejprve všechny podmínky z textu úlohy matematizovat tak, abychom dospěli k množinovým situacím.

Zvolme za rámec našich úvah množinu všech autobusových linek vedoucích z města H do města K a označme ji písmenem Z. Písmeny A, B, C, D označme postupně tyto podmnožiny množiny Z:

A ... množina všech autobusových linek, které staví v A
B ... množina všech autobusových linek, které staví v B
C ... množina všech autobusových linek, které staví v C
D ... množina všech autobusových linek, které staví v D

Naším úkolem je určit takovou podmnožinu množiny Z, do níž patří „naše" autobusová linka. Vyjádřeme všechny podmínky z textu úlohy pomocí podmnožin A, B, C, D a operací s nimi:
1. člen komise navrhuje, aby linka patřila do množiny $(B \cap C)' \cap (B \cup D)$.
2. člen komise zastává názor, že autobusová linka má patřit do množiny $(C \cup B) \cap (A \cap C)'$.
3. člen komise požaduje, aby tato linka patřila do množiny $(B \cap A')' \cap (B \cap C \cap D)'$. Promyslete důkladně všechna tři tvrzení!

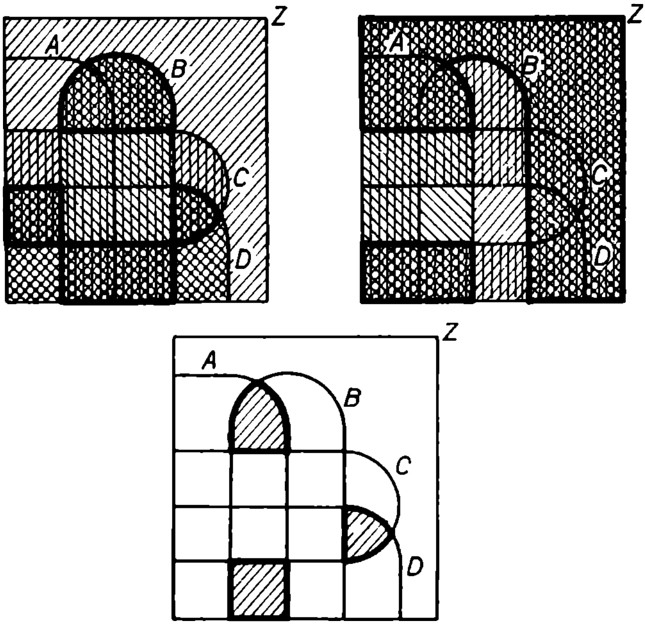
Vzhledem k tomu, že všechny tři návrhy byly schváleny, musí nově zaváděná linka patřit do průniku všech tří uvedených množin, tj. do množiny

$$(B \cap C)' \cap (B \cup D) \cap (C \cup B) \cap (A \cap C)' \cap (B \cap$$
$$\cap A')' \cap (B \cap C \cap D)'$$

Jenom na základě tohoto poměrně složitého zápisu množiny dáme asi těžko ihned odpověď. Pokusme se proto tento zápis co nejvíce zjednodušit.

a) Vyřešme nejprve daný úkol **užitím Vennova diagramu** pro čtyři množiny A, B, C, D. Na obrázku 14a je sestrojen obraz množiny $(B \cap C)' \cap (B \cup D) \cap \cap (C \cup B)$, na obrázku 14b je znázorněna množina $(A \cap C)' \cap (B \cap A')' \cap (B \cap C \cap D)'$. Na obrázku 14c je potom sestrojen obraz průniku těchto dvou množin.

Z obrázku 14c můžeme vyčíst tyto závěry: Nově zaváděná autobusová linka patří buď do množiny



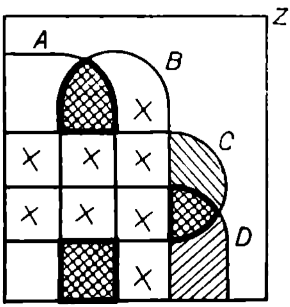
Obr. 14a, b, c

$A \cap B \cap C' \cap D'$ nebo do množiny $A \cap B \cap C' \cap D$ nebo do množiny $A' \cap B' \cap C \cap D$. Po schválení všech tří návrhů zůstávají tedy tyto možnosti pro zřízení zastávek:

Autobus bude stavět jenom ve městech A, B;
autobus bude stavět jenom ve městech A, B, D;
autobus bude stavět jenom ve městech C, D.

Zkouškou dosazením do textu úlohy se přesvědčte o správnosti uvedených závěrů.

Nemohli bychom vyřešit náš příklad Vennovým diagramem nějak elegantněji a jednodušeji než jsme provedli zde? Co kdybyste předem „vyškrtali" všechna pole Vennova diagramu, jež jsou obrazy těch podmnožin množiny Z, do nichž autobusová linka nemůže patřit (tj. například $B \cap C$, $A \cap C$ atd.) a pracovali už jenom se zbývajícími poli diagramu? Porovnejte své výsledky s obrázkem 15.



Obr. 15

b) Pro srovnání s metodou Vennova diagramu ukažme zjednodušení zápisu naší množiny booleovským výpočtem. Přejděme k zápisu v symbolice Booleovy algebry a použijme při úpravách axiómů a vět (1)—(25):

$$(bc)'.(b+d).(c+b).(ac)'.(ba')'.(bcd)' =$$
$$= [(b'+c').((b'+c')+d')].(c+b).(a'+c').(b+d).$$
$$.(b'+a) = (b'+c').(c+b).(a'+c').(bb'+db'+ba+$$
$$+da) = (b'c+c'b).(a'+c').(db'+ba+da) = (a'b'c+$$
$$+a'bc'+bc').(db'+ba+da) = (a'b'c+bc').(db'+ba+$$
$$+da) = a'b'cd+bc'db'+a'b'cba+bc'ba+a'b'cda+$$
$$+bc'da = a'b'cd+abc'+abc'd = a'b'cd+abc'.(d+d')+$$
$$+abc'd = a'b'cd+abc'd+abc'd'$$

Vrátíme-li se zpět k zápisu v množinové algebře, dostaneme

$$(A' \cap B' \cap C \cap D) \cup (A \cap B \cap C' \cap D) \cup (A \cap$$
$$\cap B \cap C' \cap D')$$

Dospíváme ke stejnému výsledku jako při předchozí metodě řešení.

II. Matematizujme podmínky z textu úlohy tak, abychom dospěli k problému z logiky.

Vyhledejme nejprve v textu všechny „jednoduché" výroky a označme je písmeny:

S ... autobus bude stavět v městě A,
T ... autobus bude stavět v městě B,
U ... autobus bude stavět v městě C,
V ... autobus bude stavět v městě D.

Zapišme symbolicky pomocí písmen S, T, U, V a znaků

„$\vee$“, „$\wedge$“, „$'$“ všechny výroky jednotlivých členů komise.

1. člen ... $(T \wedge U)' \wedge (T \vee V)$
2. člen ... $(U \vee T) \wedge (S \wedge U)'$
3. člen ... $(T \wedge S')' \wedge (T \wedge U \wedge V)'$

Naším úkolem je určit všechny uspořádané čtveřice pravdivostních hodnot výroků S, T, U, V, pro něž je pravdivá konjunkce všech těchto tří výroků. Máme tedy určit všechny uspořádané čtveřice pravdivostních hodnot výroků S, T, U, V, pro které jsou zároveň pravdivé výroky $(T \wedge U)'$, $T \vee V$, $U \vee T$, $(S \wedge U)'$, $(T \wedge S')'$, $(T \wedge U \wedge V)'$.

a) Vyřešme tento úkol nejprve „tabulkovou metodou“. Prověřte, zda řešení uvedené v následující tabulce je správné.

ph (S)	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
ph (T)	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
ph (U)	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
ph (V)	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
ph $(T \wedge U)$	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
ph $((T \wedge U)')$	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1
ph $(T \vee V)$			1	1	1	0	1	0			1	1	1	0	1	0
ph $(T \vee U)$			1	1	1		0				1	1	1		0	
ph $(S \wedge U)$			0	0	1						0	0	0			
ph $((S \wedge U)')$			1	1	0						1	1	1			
ph (S')			0	0							1	1	1			
ph $(T \wedge S')$			0	0							1	1	0			
ph $((T \wedge S')')$			1	1							0	0	1			
ph $(T \wedge U \wedge V)$			0	0									0			
ph $((T \wedge U \wedge V)')$			1	1									1			

Z tabulky zjišťujeme, že požadované vlastnosti mají tyto čtveřice pravdivostních hodnot: [1, 1, 0, 1], [1, 1, 0, 0], [0, 0, 1, 1]. Odtud dospějeme k týmž třem možnostem pro zřízení autobusových zastávek jako při předchozích metodách řešení.

b) Vyřešme úkol určit všechny čtveřice pravdivostních hodnot výroků S, T, U, V, pro které je

$$\mathrm{ph}[(T \wedge U)' \wedge (T \vee V) \wedge (U \vee T) \wedge (S \wedge U)' \wedge (T \wedge$$
$$\wedge\, S')' \wedge (T \wedge U \wedge V)'] = 1,$$
booleovským výpočtem.

Po přepisu do symboliky dvouprvkové Booleovy algebry $(D, +, ., ')$ docházíme k problému řešit rovnici

$$(tu)' . (t + v) . (u + t) . (su)' . (ts')' . (tuv)' = 1$$

o čtyřech proměnných s, t, u, v v množině $D \times D \times D \times \times D$.

Po úpravě levé strany rovnice (všimněte si metody I.b) dostáváme

$$s't'uv + stu'v + stu'v' = 1$$

Z tabulky 6 z 2. kapitoly je vidět, že čtveřice $[s, t, u, v]$ patří do množiny všech řešení této rovnice, právě když platí $s't'uv = 1$ nebo $stu'v = 1$ nebo $stu'v' = 1$.
Podle (23) je $s't'uv = 1$ právě tehdy, když zároveň platí

$$s' = 1, t' = 1, u = 1, v = 1, \text{ čili}$$
$$s = 0, t = 0, u = 1, v = 1.$$

Obdobně dostaneme další dvě řešení rovnice:

$$s = 1, t = 1, u = 0, v = 1$$
$$s = 1, t = 1, u = 0, v = 0$$

Množina všech řešení dané rovnice je tedy rovna {[0, 0, 1, 1], [1, 1, 0, 1], [1, 1, 0, 0]}. Odtud už snadno dojdeme k týmž „kombinacím" zastávek jako při všech předchozích způsobech řešení úlohy.

Poznámka: Někteří z vás jistě umíte řešit tyto typy úloh pomocí uzlových diagramů. Zkuste i tento způsob řešení!

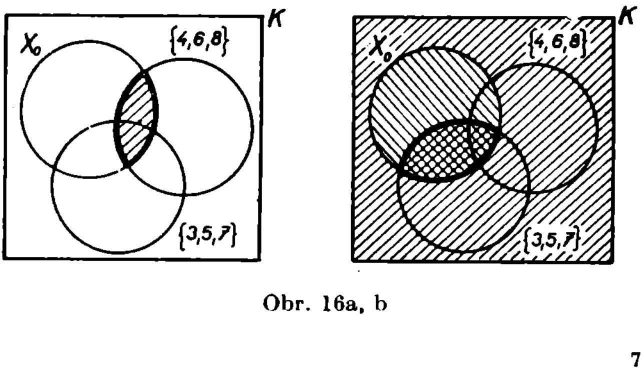
Příklad 31: Řešte rovnici

$$X \cap \{4, 6, 8\} = (X' \cup \{3, 5, 7\}) \cap X \qquad (29)$$

o jedné proměnné X v množině $\hat{K}$ všech podmnožin množiny $K = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

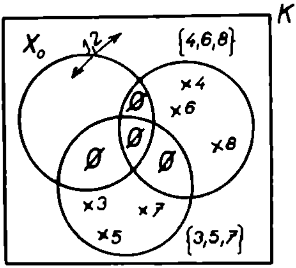
Řešení: I. Příklad vyřešme nejprve užitím Vennova diagramu. Předpokládejme, že množina všech řešení rovnice (29) v $\hat{K}$ je neprázdná množina, tj. existuje aspoň jedna podmnožina X_0 množiny K, pro niž je $X_0 \cap \{4, 6, 8\} = (X_0' \cup \{3, 5, 7\}) \cap X_0$ pravdivý výrok.

Sestrojme třikrát Vennův diagram pro množiny X_0, $\{4, 6, 8\}$, $\{3, 5, 7\}$ (obrázky 16a, b, c). Na obrázku 16a je sestrojen obraz množiny $X_0 \cap \{4, 6, 8\}$, na obrázku 16b je znázorněna množina $(X_0' \cup \{3, 5, 7\}) \cap X_0$.



Obr. 16a, b

Množiny $X_0 \cap \{4, 6, 8\}$ a $(X_0' \cup \{3, 5, 7\}) \cap X_0$ jsou si rovny, musí tedy každé pole diagramu, jež je částí obrazu právě jedné z těchto množin, znázorňovat prázdnou množinu (vzpomeňme na úvahy při řešení příkladu 5 v 1. kapitole). Vyhledejme všechna taková pole a na obrázku 16c do nich vepišme znak pro prázdnou množinu. Vzhledem k tomu, že průnik množin $\{4, 6, 8\}$ a $\{3, 5, 7\}$ je prázdná množina, lze znak $\emptyset$ vepsat do dalších dvou polí.



Obr. 16c

Nyní se na tomto obrázku pokusme obraz každého prvku množiny K „umístit“ do některého z polí diagramu, jež není označeno znakem $\emptyset$. Zřejmě lze jednoznačně zakreslit každý z obrazů prvků 4, 6, 8, 3, 5, 7. Obrazy čísel 1 a 2 nelze jednoznačně umístit, mohou se nalézat v kterémkoliv ze dvou zbývajících polí, v němž dosud není zakreslen obraz žádného prvku množiny K. Tuto skutečnost vyznačíme na obrázku 16c obloučkem spojujícím příslušná pole a nad něj připíšeme číslice 1 a 2.

Z obrázku už snadno nahlédneme, že platí: je-li X_0 řešením rovnice (29), pak je $X_0 \subset \{1, 2\}$. Vypišme všechny podmnožiny množiny K, pro něž platí tato podmínka: $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{1, 2\}$.

Zkouškou dosazením do dané rovnice „prověřte“ postupně každou z těchto množin. Zjistíte, že množina všech řešení je $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.

II. Ukažme řešení rovnice (29) booleovským výpočtem. Přejděme k zápisu v Booleově algebře ($\{4, 6, 8\} \to a$, $\{3, 5, 7\} \to b$) a použijme axiómů a vět (1) až (25):

$$\begin{aligned} ax &= (x' + b) . x \\ ax &= x'x + bx \\ ax &= bx \end{aligned} \tag{30}$$

$$(ax)' . bx + ax . (bx)' = 0 \tag{31}$$

$$\begin{aligned} (a' + x') . bx + ax . (b' + x') &= 0 \\ a'bx + ab'x &= 0 \\ (a'b + ab') . x &= 0 \end{aligned} \tag{32}$$

Přejděme zpět k symbolice množinové algebry:

$$[(\{4, 6, 8\}' \cap \{3, 5, 7\}) \cup (\{4, 6, 8\} \cap \{3, 5, 7\}')] \cap X = \emptyset$$

Po úpravě levé strany této rovnice dostaneme (prověřte!)

$$\{3, 4, 5, 6, 7, 8\} \cap X = \emptyset \tag{33}$$

Přitom (33) platí právě tehdy, když je $X \subset \{1, 2\}$. Tento závěr je shodný s výsledkem předchozí metody řešení; množina všech řešení je $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.

Jistě jste si všimli, že při řešení booleovských rovnic jsme nijak nezdůrazňovali, že je třeba provádět zkoušku. Zabývejme se hlouběji tímto problémem. Vyjděme z konkrétního příkladu; zkoumejme z tohoto hlediska postup řešení rovnice (29).

Představme si, že rovnice (30) až (32) jsou přepsány do symboliky množinové algebry (případně si je do této symboliky přepište). Označme množiny všech řešení rovnic (29)—(33) postupně písmeny P, P_1, P_2, P_3, P_4.

Snadno nahlédneme, že platí $P = P_1$ (upravovali jsme pouze pravou stranu rovnice (29); přitom pro všechna b, x množiny B je $(x' + b) . x = bx$). Od rovnice (30) jsme dospěli k rovnici (31) užitím věty (24). Jestliže si ji znovu připomenete, je ihned zřejmé, že platí $P_1 = P_2$. Sami prověřte, že je také $P_2 = P_3$, $P_3 = P_4$. Odtud plyne $P = P_4$.

Z této úvahy vyplývá, že v našem případě není třeba zkoušku provádět; je pro nás nejvýše kontrolou správnosti výpočtů.

Tento závěr je možno zobecnit na všechny případy booleovských rovnic a jejich soustav, při jejichž řešení používáme jenom axiómů a vět (1)—(25).

Některým z vás se možná zdá úprava rovnic užitím věty (24) zbytečně komplikovaná. Můžete namítat, že po této úpravě (tj. po „anulování" rovnice) dostaneme obvykle na levé straně dané rovnice složitější výraz, který pak často zjednodušujeme dosti pracně. Přitom při řešení „číselných" rovnic používáme *ekvivalentní**) *úpravy*, jež jsou daleko „jednodušší":

Násobíme obě strany rovnice stejným číslem různým od nuly; přičítáme k oběma stranám rovnice stejné číslo.

Nebylo by vhodnější namísto věty (24) (respektive

---

*) Volně řečeno, o ekvivalentní úpravě hovoříme tehdy, když platí: upravíme-li pomocí ní nějakou rovnici, pak množiny všech řešení této rovnice a rovnice upravené jsou si rovny.

(25)) při řešení booleovských rovnic užívat takovýchto jednoduchých úprav?

Vraťme se k rovnici (30) z příkladu 31 a vynásobme obě její strany například prvkem b' ($b \neq 1$, tedy $b' \neq 0$):

$$axb' = bxb'$$
$$ab'x = 0$$

Po přepisu do symboliky množinové algebry $(\hat{K}, \cup, \cap, ')$ dostáváme

$$\{4, 6, 8\} \cap \{3, 5, 7\}' \cap X = \emptyset$$

a po úpravách levé strany této rovnice

$$\{4, 6, 8\} \cap X = \emptyset$$

Odtud plyne $X \subset \{1, 2, 3, 5, 7\}$.

Porovnáme-li tento závěr s množinou všech řešení rovnice (29), můžeme konstatovat, že *násobení obou stran booleovské rovnice daným prvkem není ekvivalentní úpravou.* Sice jsme tedy „vyřešili" rovnici (29) tímto způsobem rychleji, ale musíme nyní provést ještě zkoušku, která bude dosti zdlouhavá — je nutno „prověřit" 32 podmnožin množiny K.

Obdobně zjistíme, že ani *úprava „přičtení stejného prvku k oběma stranám rovnice" není ekvivalentní.* Jestliže například přičtete k oběma stranám rovnice (30) prvek 1, dostanete nakonec $X \subset K$.

V čem tkví příčina našeho „neúspěchu"?

Jistě víte, že *pro všechna reálná čísla a, b, c platí věty: Je-li $a+c = b+c$, pak je $a = b$; je-li $ac = bc$ a zároveň $c \neq 0$, pak je $a = b$.*

Tyto věty v Booleově algebře neplatí. V modelu $(K, \cup, \cap, ')$ z příkladu 31 je například $\{1, 2\} \cup \{3, 4,$

$5\} = \{1, 2, 3\} \cup \{3, 4, 5\}$, $\{1, 2\} \cap \{4, 5\} = \{1, 2, 3\} \cap \cap \{4, 5\}$ a přitom je $\{1, 2\} \neq \{1, 2, 3\}$.

Poznámka: V příkladě 31 jsme užitím věty (24) dospěli k „anulovanému" tvaru rovnice. Dá se obecně dokázat, že v $(B, +, \cdot, ')$ platí: *Každou rovnici o jedné proměnné x lze převést na tvar*

$$ax + bx' + c = 0\,,$$

kde a, b, c jsou konstanty z množiny B.

Na závěr této kapitoly uveďme ještě jednu slovní úlohu vedoucí k řešení booleovské rovnice.

Příklad 32: Ve třech pavilónech A, B, C výstavního areálu jsou umístěny exponáty z českého skla a bižuterie. Detektivové Ping a Pong vyšetřují krádež vzácné křišťálové vázy, jež byla vystavena v pavilónu A. Je již zřejmé, že pachatelé jsou mezi osmi návštěvníky, které si zde pro stručnost označíme a, b, c, d, e, f, g, h. Zkušenější Ping už zná jednoho z pachatelů krádeže. Snaží se i Ponga dovést k řešení úkolu.

Pong: „Zjistil jsem, že v pavilónu A byli a, e, h a s nimi nebo mezi nimi všichni pachatelé."

Ping: „Mohu vám prozradit, že nikdo další z podezřelých tam už nebyl."

Pong: „V pavilónu B byli všichni kromě b a c. V pavilónu C byli určitě d, f, g, h."

Ping: „Já jsem navíc zjistil, že v C byli také všichni ti, kteří nepatří mezi zloděje. Ale už nikdo více."

Pong: „Ve všech třech pavilónech byli jenom a, h."

Ping: „Správně. A teď už můžete určit jednoho pachatele a rozhodnout, kteří další z návštěvníků připadají v úvahu jako jeho společníci."

Řešení: Matematizujme text naší úlohy tak, abychom dospěli k **množinovým situacím**.

Zvolme za rámec našich úvah množinu všech podezřelých návštěvníků a označme ji písmenem V; je tedy $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. Množinu zlodějů označme X. Podmínky uvedené v textu úlohy můžeme pak zapsat takto:

Množina všech návštěvníků

v pavilónu A ... $\{a, e, h\} \cup X$
v pavilónu B ... $\{b, c\}'$
v pavilónu C ... $\{d, f, g, h\} \cup X'$

Množina návštěvníků, kteří byli ve všech pavilónech

je jednak ... $(\{a, e, h\} \cup X) \cap \{b, c\}' \cap (\{d, f, g, h\} \cup X')$
a jednak ... $\{a, h\}$

Odtud dospíváme k rovnici

$$(\{a, e, h\} \cup X) \cap \{b, c\}' \cap (\{d, f, g, h\} \cup X') = \{a, h\} \quad (34)$$

o jedné proměnné X.

Naším úkolem je určit množinu všech jejích řešení v množině $\hat{V}$ všech podmnožin množiny V.

Řešme tento úkol **booleovským výpočtem** pomocí axiómů a vět (1)—(25). Přejděme k zápisu v Booleově algebře ($\{a, e, h\} \to j$, $\{d, f, g, h\} \to k$, $\{a, h\} \to m$). Všimněte si ještě, že je $\{b, c\}' = \{a, e, h\} \cup \{d, f, g, h\}$.

Sledujte pozorně jednotlivé kroky řešení a vždy si je odůvodněte podle příslušného axiómu či věty!

$$(j + x) . (j + k) . (k + x') = m$$

$$((j + x) . (j + k) . (k + x'))' . m + (j + x) . (j + k) . (k + x') .$$
$$. m' = 0$$

$$(j'x' + j'k' + k'x) . m + (j + kx) . (km' + x'm') = 0$$

$$j'x'm + j'k'm + k'xm + jkm' + kxm' + jx'm' = 0$$

$$(km' + k'm) . x + (jm' + j'm) . x' + (jkm' + j'k'm) = 0$$

Podle (22) je dále

$(km' + k'm) . x = 0$ a zároveň $(jm' + j'm) . x' = 0$ a zároveň $jkm' + j'k'm = 0$.

Přejděme zpět k symbolice množinové algebry; dostaneme

$$[(\{d, f, g, h\} \cap \{a, h\}') \cup (\{d, f, g, h\}' \cap \{a, h\})] \cap X = \emptyset \tag{35}$$

$$[(\{a, e, h\} \cap \{a, h\}') \cup (\{a, e, h\}' \cap \{a, h\})] \cap X' = \emptyset \tag{36}$$

$$(\{a, e, h\} \cap \{d, f, g, h\} \cap \{a, h\}') \cup (\{a, e, h\}' \cap \{d, f, g, h\}' \cap \{a, h\}) = \emptyset \tag{37}$$

Nejprve rozhodněte, zda výrok (37) je pravdivý či nikoliv. Pravdivost tohoto výroku je zřejmě nutnou podmínkou pro to, aby množina všech řešení rovnice (34) byla neprázdná.

Zjistíte, že (37) je výrok pravdivý.

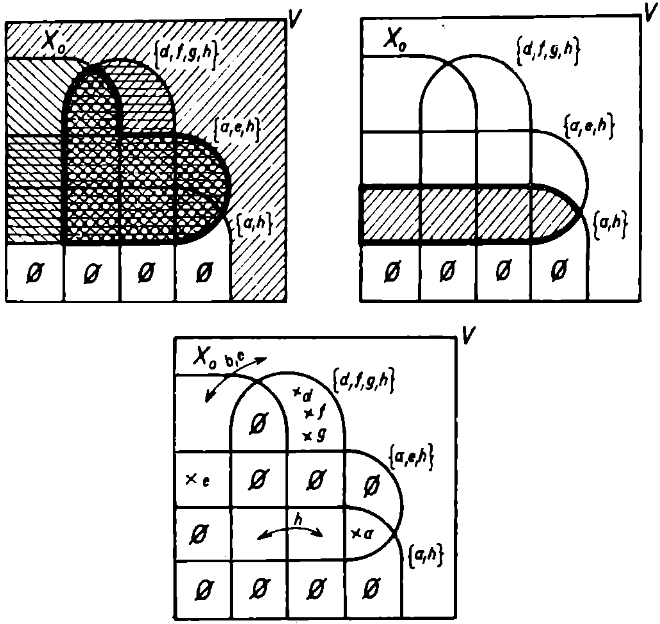
Upravte dále levé strany rovnic (35) a (36); porovnejte pak své závěry s našimi:

$$\{a, d, f, g\} \cap X = \emptyset$$
$$\{e\} \cap X' = \emptyset$$

Odsud postupně dostáváme

$$X \subset \{b, c, e, h\}$$
$$\{e\} \subset X$$

Nyní už může Pong podat řešení úkolu (zkouškou dosazením do textu příkladu se přesvědčte, že následující závěry jsou správné): Jedním z pachatelů krádeže je určitě podezřelý e. Další, kteří připadají v úvahu jako jeho společníci, jsou b, c, h. Z podezření jsou vyloučeni a, d, f, g.



Obr. 17a, b, c

Na obrázcích 17a, b, c je ještě provedeno řešení příkladu užitím Vennova diagramu pro množiny X_0, $\{a, e, h\}$, $\{d, f, g, h\}$, $\{a, h\}$.

Cvičení

1. Řešte cvičení 2 a 3 z 1. kapitoly a cvičení 3 a 5 z 2. kapitoly booleovským výpočtem.

2. Zjednodušte zápisy těchto množin:

a) $(D \cap A \cap B) \cup (C \cap (A \cup E)') \cup (D' \cap (A' \cup B')') \cup$

$\cup ((A' \cap E')' \cap C)$

b) $(A \cup C) \cap (D \cap G)' \cap (A \cap B)' \cap (D \cup E) \cap (F \cup G) \cap C' \cap$

$\cap (A \cap D)' \cap (D \cap C)'$

3. Řešte rovnice o jedné proměnné X v množině všech podmnožin množiny $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$:

a) $(X \cap \{4, 6, 7\}) \cup \{3, 5, 7\} = X$

b) $(X' \cup \{1, 4, 5\}) \cap (X \cup \{2, 3\}) = \emptyset$

c) $(X \cup \{1, 4, 5\}) \cap (X' \cup \{1, 2, 3\}) = \emptyset$

d) $(\{2, 4, 7\} \cap X') \cup (X \cap \{1, 2, 5\}) = \{3, 4, 5, 6\}'$

4. Nechť $\widehat{M}$ je množina všech podmnožin neprázdné množiny M. Řešte rovnici $(A \cap X) \cup (B \cap X') \cup C = \emptyset$ o proměnné X z $\widehat{M}$ a parametrech A, B, C z $\widehat{M}$.

5. Vraťte se k modelu Booleovy algebry, který byl uveden ve cvičení 4 ze 4. kapitoly. Označte nejmenší společný násobek (největší společný dělitel) prvků r, s množiny C symbolicky $\mathrm{n}(r, s)$ $(\mathrm{D}(r, s))$.

Řešte pak rovnice

a) $\mathrm{n}(\mathrm{D}(x, 2), 3) = \mathrm{D}(\mathrm{n}(3, x'), x)$

b) $\mathrm{D}(\mathrm{n}(x, \mathrm{D}(1, x)), 6) = \mathrm{n}(\mathrm{D}(x', 3), 2)$

o jedné proměnné x v množině C.

6. Uvažujme model Booleovy algebry $(V, \ast, \circ, {}^{-})$ ze cvičení 7 ke 4. kapitole. Zvolte konkrétně $n = 3$. Řešte pak rovnici

$$\overline{([x_1, x_2, x_3] \ast [2, 3, 2])} \ast [x_1, x_2, x_3] = [2, 2, 3]$$

o jedné proměnné $[x_1, x_2, x_3]$ v množině V.

7. Třída II. b jistého gymnasia se chystá na výlet. Je předběžně dohodnuto, že navštíví některá z pěti výletních míst, která zde pro stručnost označíme A, B, C, D, E. Později byly podány ještě tyto upřesňující návrhy: Navštívit zároveň A i B nebo se podívat do C i D. Vynechat návštěvu C. Nenavštěvovat současně C a D. Vynechat aspoň jedno z míst E, A nebo nenavštěvovat zároveň B a E. Která výletní místa z uvedených pěti třída navštíví, předpokládáme-li, že všechny návrhy „prošly“ a jiné podány nebyly?

7. kapitola

BOOLEOVA ALGEBRA V ELEKTROTECHNICE

V této a následující kapitole budeme ilustrovat užití Booleovy algebry při řešení některých jednoduchých úloh z technické praxe. Zvláště využijeme poznatků o booleovských funkcích, s nimiž jsme se seznámili v 5. kapitole. Půjde zde pouze o informativní seznámení se s danou problematikou; k hlubšímu studiu vám mohou sloužit některé publikace z doporučené literatury uvedené v závěru knížky.

Uvažujme elektrický obvod, v němž je zapojeno zařízení, které podle našich pokynů proud buď propouští nebo nepropouští. Nejjednodušším takovým zařízením je *kontakt (spínač)*. Představte si jej například jako zcela obyčejný vypínač (klíč) nebo jako spínač elektromagnetického relé. Zabývejme se elektrickými sítěmi, v nichž jsou zařazeny kontakty; v dalším hovořme o tzv. *kontaktních sítích.*

Kontakt se může nacházet ve dvou stavech: *buď jím prochází proud* („raménko" spínače je sklopeno) *nebo jím proud neprochází* („raménko" spínače je odklopeno). *Označme tyto stavy postupně* 1 *a* 0. Právě tak jako jednotlivé kontakty i kontaktní síť může nabývat pouze dvou různých stavů: *„proud sítí prochází"* — *stav* 1, *„proud sítí neprochází"* — *stav* 0. Stav sítě bude zřejmě záviset na stavech kontaktů v ní zařazených a také na tom, jak jsou tyto kontakty v síti „zkombinovány". Je-li v síti zařazen jediný kontakt, pak stav sítě a stav příslušného kontaktu jsou sobě rovny.

Síť, v níž je zařazen jediný kontakt o stavu x (x je proměnná, oborem je dvouprvková množina stavů), se označuje schematicky tak, jak je uvedeno na obrázku 18.

Obr. 18

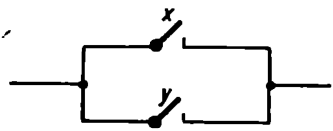
Této síti můžeme přiřadit síť s jedním kontaktem o stavu x', který bude vždy *v opačném stavu* než kontakt o stavu x (promyslete technickou realizaci). V tabulce 9 jsou uvedeny dvojice stavů $[x, x']$, jež mohou nastat, a na obrázku 19 je načrtnuto schéma této nové sítě.

Obr. 19

x	x'
0	1
1	0

tab. 9

Uvažujme nyní kontaktní síť, v níž jsou zapojeny *paralelně dva kontakty o stavech* x, y (schéma na obrázku 20). Dosazujme za x a y postupně jednotlivé prvky z množiny stavů a určujme výsledný stav sítě (viz tabulka 10).



Obr. 20

$x \backslash y$	0	1
0	0	1
1	1	1

tab. 10

Sítí prochází proud, právě když je aspoň jeden z kontaktů ve stavu 1.

Obdobně zkoumejme výsledné stavy sítě při *sériovém zapojení kontaktů* (obrázek 21, tabulka 11).

Obr. 21

$x \backslash y$	0	1
0	0	0
1	0	1

tab. 11

Touto sítí prochází proud právě tehdy, když oba kontakty jsou ve stavu 1 (tj. proud prochází oběma).

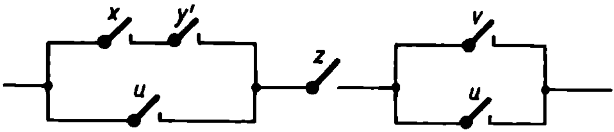
Odmyslíme-li si fyzikální interpretaci symbolů 0 a 1, pak tabulky 9, 10 a 11 jsou vlastně definičními tabulkami operací doplněk, sčítání a násobení na dvouprvkové množině D /(D, +, ., ') — dvouprvková Booleova algebra/. Doplněk k prvku $x \in D$ lze realizovat sítí na obrázku 19; součet prvků z D sítí s kontakty zapojenými paralelně; součin prvků z D sítí s kontakty zapojenými sériově. Jinak řečeno, uvedenými kontaktními sítěmi lze realizovat*) booleovské funkce $f : y = x'$, $g : u = x + y$, $h : u = xy$, kde x, y jsou proměnné o oboru D.

Z našich úvah je zřejmé, že kontaktními sítěmi budeme moci realizovat i další, složitější booleovské funkce. Ilustrujme závěry, k nimž jsme dospěli, na několika příkladech.

---

*) Rčením „*kontaktní síť realizuje booleovskou funkci*" budeme rozumět v podstatě toto: sítí prochází proud, právě když hodnota příslušné booleovské funkce je rovna 1.

Příklad 33: Je dáno schéma kontaktní sítě (obr. 22). Určete booleovskou funkci f o proměnných x, y, z, u, v, která je touto sítí realizována.



Obr. 22

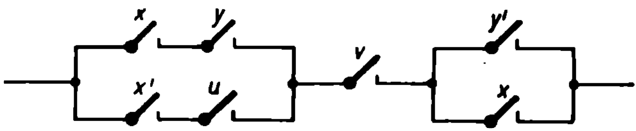
Řešení: Funkci f lze určit rovnicí takto (prověřte!):

$$f : w = (xy' + u) . z . (v + u)$$

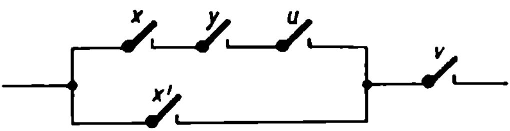
Po zjednodušení pravé strany rovnice můžeme psát

$$f : w = (xy'v + u) . z$$

Příklad 34: Jsou dána schémata kontaktních sítí (obrázky 23, 24).



Obr. 23



Obr. 24

Rozhodněte, zda booleovské funkce f_1, f_2, jež jsou příslušnými sítěmi realizovány, jsou sobě rovny.

Řešení: Určíme nejprve každou z funkcí rovnicí. Dostaneme:

$$f_1 : w = (xy + x'u) . v . (y' + x)$$
$$f_2 : w = (xyu + x') . v$$

Každou z nich můžete určit tabulkou. Odtud už potom snadno dospějete k závěru. Proveďte tuto část řešení úkolu samostatně.

Příklad 35: Je dána booleovská funkce f o třech proměnných x, y, z definována tabulkou takto:

x	y	z	$f(x, y, z)$
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	1

Načrtněte schéma kontaktní sítě, která tuto funkci realizuje.

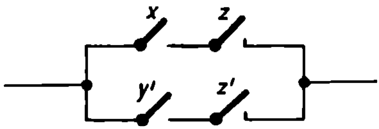
Řešení: Určíme nejprve funkci f rovnicí.

$$f : u = xyz + xy'z + xy'z' + x'y'z'$$

Po úpravách dostaneme

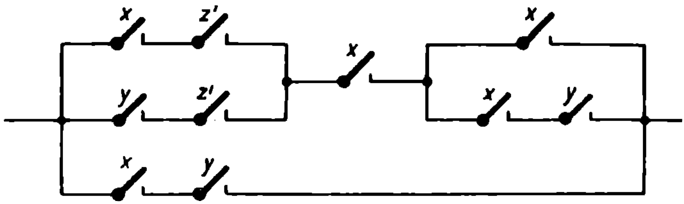
$$f : u = xz + y'z'$$

Schéma kontaktní sítě je na obrázku 25.



Obr. 25

Příklad 36: Je dána kontaktní síť, jež realizuje jistou booleovskou funkci f (schéma na obrázku 26). Rozhodněte, zda existuje kontaktní síť s nejvýše čtyřmi kontakty, jež realizuje funkci rovnou f.



Obr. 26

Řešení: Určíme funkci f rovnicí.

$$f : u = (xz' + yz') . x . (x + xy) + xy$$

Po úpravách pravé strany rovnice dostaneme

$$f : u = x . (z' + y) \qquad \text{Prověřte!}$$

Existuje tedy síť s třemi kontakty, jež realizuje funkci f (tj. síť, jež „funguje“ stejně jako síť výchozí). Načrtněte si její schéma!

Příklad 37: Lampa je ovládána třemi vypínači. Svítí právě tehdy, když aspoň dva z nich jsou zapnuty. Načrtněte schéma příslušné sítě (o co nejmenším počtu kontaktů).

Řešení: Označme vypínače postupně písmeny A, B, C; jejich stavy a, b, c. Stav vypínače A označme 1, právě když je zapnut; 0, právě když je vypnut. Stejně tak pro stavy vypínačů B a C.

Určeme tabulkou funkci g o třech proměnných a, b, c z množiny D, jejíž realizací bude hledaná elektrická síť. Prověřte tuto tabulku!

a	b	c	$g(a, b, c)$
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

Určeme funkci g rovnicí. Lze psát

$$g : y = abc + abc' + ab'c + a'bc$$

a po úpravě pravé strany rovnice

$$g : y = ab + c.(a + b)$$

Schéma příslušné kontaktní sítě si už načrtněte sami!

Při řešení tohoto příkladu můžeme postupovat také takto:

Označme písmeny α, β, γ postupně výroky

α ... vypínač A je zapnut
β ... vypínač B je zapnut
γ ... vypínač C je zapnut

Z podmínek textu úlohy pak dospějeme k závěru, že lampa svítí (tj. sítí prochází proud) právě tehdy, když je pravdivý výrok

$$(\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma) \vee (\beta \wedge \gamma)$$

Přejděme k dvouprvkové Booleově algebře $(D, +, ., ')$ $(\alpha \rightarrow a, \beta \rightarrow b, \gamma \rightarrow c)$. Potom lze předchozí závěr formulovat takto: Sítí prochází proud, právě když je $ab+ac+$ $+bc = 1$. Ještě jinak řečeno, sítí prochází proud, právě když hodnota funkce $g : y = ab+ac+bc$ (a po úpravě $g : y = ab+c.(a+b)$) je rovna 1.
Dospíváme ke stejnému výsledku jako při předchozí metodě řešení.

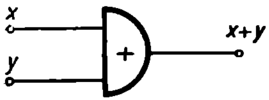
Booleovské funkce lze realizovat i jinými způsoby než pomocí kontaktních sítí. Namísto různých kombinací kontaktů mohou být v síti zařazeny *elektronické elementy* (diody, triody, tranzistory). Mezi základní, elementární části takovýchto obvodů patří tzv. *součtový člen, součinový člen a doplňkový člen (invertor).*

Části, z nichž se skládá součtový člen, můžeme přibližně popsat takto:
1. Dva nebo více *vstupů*, z nichž každý se může nacházet v jednom ze dvou stavů 0,1.*) Na obrázku 27 je schéma

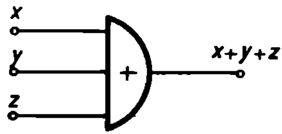
---

*) Jde obvykle o dvě úrovně napětí; znakem 1 se označuje vyšší napětí, znakem 0 napětí nižší.

součtového členu se dvěma vstupy ve stavech x a y, na obrázku 28 schéma součtového členu se třemi vstupy ve stavech x, y, z.



Obr. 27

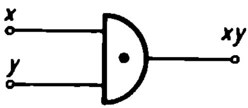


Obr. 28

2. Jeden *výstup*, který se opět může nacházet v jednom ze dvou stavů 0 nebo 1.
3. Zařízení, které pracuje tak, že na výstupu je stav 1, právě když aspoň jeden ze vstupů je ve stavu 1.

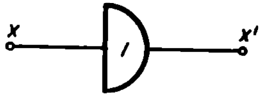
Součtový člen tedy v jistém smyslu nahrazuje funkci paralelně zapojených kontaktů v kontaktní síti.

Součinový člen nahrazuje v podstatě funkci sériově zapojených kontaktů v síti. Má vždy aspoň dva vstupy, jeden výstup a zařízení, které způsobuje, že výstup je ve stavu 1, právě když všechny vstupy jsou ve stavu 1. Na obrázku 29 je schéma součinového členu se dvěma vstupy ve stavech x, y.



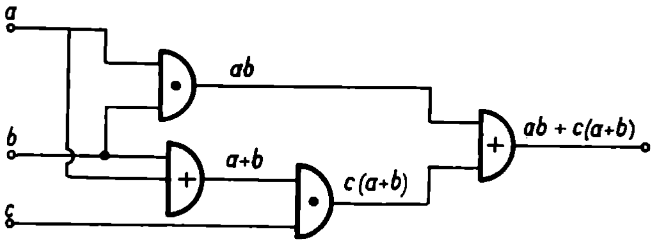
Obr. 29

Doplňkový člen (invertor) má vždy jeden vstup, jeden výstup a zařízení, které pracuje takto: je-li vstup ve stavu 1, je výstup ve stavu 0; je-li vstup ve stavu 0, je výstup ve stavu 1. Schéma invertoru se vstupem o stavu x je na obrázku 30.



Obr. 30

Pomocí součtových, součinových a doplňkových členů můžeme funkci g z příkladu 37 realizovat tak, jak je uvedeno na obrázku 31. Pro vaše pohodlí jsou popsány stavy u jednotlivých výstupů.



Obr. 31

Příklad 38: Výbor čtyř členů K, L, M, N rozhoduje většinou hlasů. Pouze v případě rovnosti hlasů má předseda K rozhodující hlas. Hlasování se provádí tímto systémem: Každý člen výboru stiskne tlačítko umístěné před sebou, právě když návrh schvaluje. Jestliže byl návrh přijat, rozsvítí se žárovka, jinak zůstane zhasnuta. Navrhněte příslušný obvod!

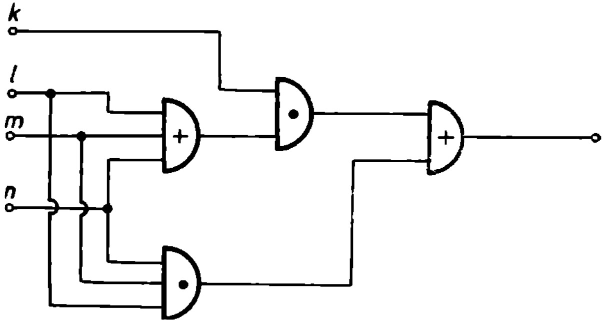
Řešení: Označme stavy tlačítek (vypínačů) u jednotlivých členů výboru K, L, M, N postupně k, l, m, n. Stav vypínače označme 1, právě když je příslušným členem výboru zapojen (stisknut). Výsledný stav sítě bude roven 1, právě když žárovka svítí.

Zkuste samostatně určit funkci h, jejíž realizací bude hledaný obvod. Srovnejte pak své závěry s naším výsledkem:

$$h : y = lmn + k.(l + m + n)$$

(Použijte některou z metod, jež byly uvedeny při řešení příkladu 37).

Na obrázku 32 je schéma obvodu se součtovými, součinovými a doplňkovými členy. Prověřte, že schéma je nakresleno správně!*)



Obr. 32

*) Naše zařízení bude „fungovat" správně jenom v tom případě, když všichni členové výboru, kteří hlasují „pro", stisknou tlačítka současně. Lze však také do obvodu zapojit zařízení, které zaručí, že si „obvod pamatuje", zda nějaké tlačítko bylo stisknuto (tuto funkci může plnit například tzv. *klopný obvod*).

Další příklad je malou ukázkou návrhu konstrukce elektrického obvodu miniaturního „zkoušecího“ stroje.

Příklad 39: Student obdrží tři otázky, na něž má odpovědět „ano“ nebo „ne“. Navrhněte obvod „zkoušecího stroje“, s nímž student pracuje takto: Chce-li na danou otázku odpovědět „ano“, stiskne příslušné tlačítko; v opačném případě tlačítko nestiskne (předpokládáme, že tlačítka jsou opatřena zařízením „na zapamatování“). Požadujeme, aby stroj po skončení zkoušky udal počet správných odpovědí.
Předpokládejme, že při této zkoušce má být správná odpověď na otázky A a C „ano“, na otázku B „ne“.
Řešení: Nechť jsou tlačítka popsána písmeny A, B, C; jejich stavy označme postupně a, b, c. Označme stav příslušného tlačítka 1, právě když je stisknuto. V následující tabulce jsou uvedeny všechny možné kombinace těchto tří stavů; v posledním sloupci je uveden počet správných odpovědí.

a	b	c	Počet správných odpovědí
1	1	1	2
1	1	0	1
1	0	1	3
1	0	0	2
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	2
0	0	0	1

Určeme rovnicemi funkce f_3, f_2, f_1, f_0, které budou realizovány těmi částmi hledaného obvodu, jimž odpovídá postupně 3, 2, 1, 0 správných odpovědí. Pak je

$$
\begin{aligned}
f_3 &: y = ab'c \\
f_2 &: y = a.(bc+b'c')+a'b'c \\
f_1 &: y = abc'+a'.(bc+b'c') \\
f_0 &: y = a'bc'
\end{aligned}
$$

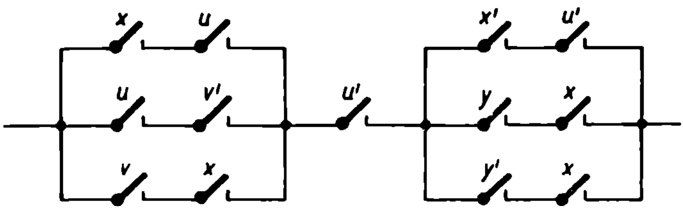
Schéma příslušného obvodu je na obrázku 33. Můžete si ho překreslit a u jednotlivých výstupů nadepsat vždy příslušný stav. Tak prověříte, zda je schéma nakresleno správně.

Cvičení

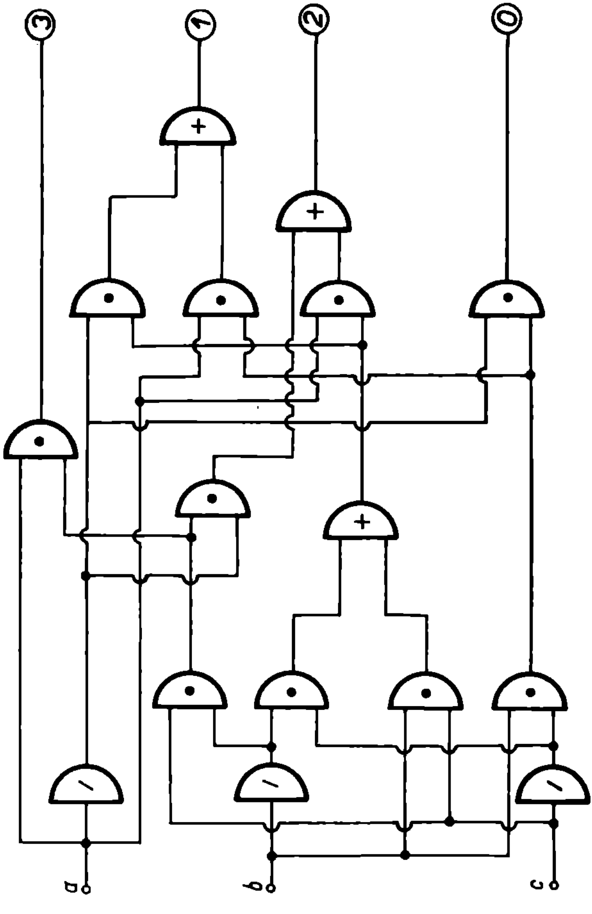
1. Pro každou z funkcí $g_1 : y = xz+ux'+x'z'u'$,
$g_2 : y = (xuv+ux').(v'+z)$

načrtněte schéma kontaktní sítě a obvodu s elektronickými elementy, jež tuto funkci realizují.

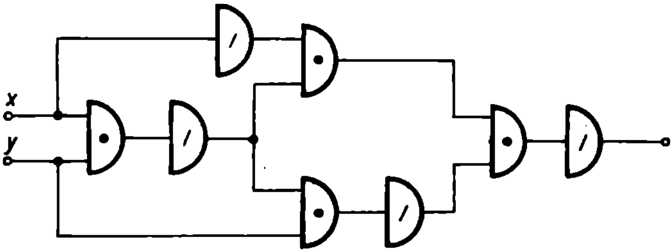
2. Sítě na obrázcích 34, 35, 36 realizují jisté funkce h_1, h_2, h_3. Načrtněte schémata sítí o co nejmenším počtu kontaktů (elementárních členů), jež realizují opět funkce h_1, h_2 a h_3.



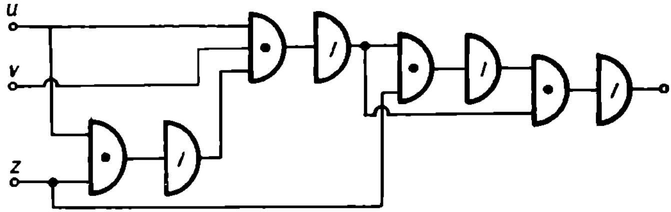
Obr. 34



Obr. 34



Obr. 35



Obr. 36

3. Lampa je ovládána třemi vypínači. Svítí, právě když je zapnutý lichý počet vypínačů. Nakreslete schéma příslušného obvodu!

4. Bezpečný chod stroje je kontrolován pěti vypínači A, B, C, D, E. Každý z vypínačů se vypne, jestliže odpovídající část stroje selže. Bezpečnostní zařízení zastaví stroj, právě když se vypne vypínač B nebo když se vypnou aspoň dva z ostatních vypínačů. Nakreslete schéma příslušného obvodu!

5. Řešte týž úkol jako v příkladě 4 pro případ, že bezpečnostní zařízení zastaví stroj, právě když je splněna aspoň jedna z podmínek a), b), c):

a) A je vypnut a zároveň aspoň jeden z B, C se vypne.

b) D se vypne a zároveň aspoň jeden z C, E se vypne.

c) Aspoň tři z A, B, C, D, E se vypnou.

6. Výbor pěti členů K, L, M, N, O se rozhoduje většinou hlasů. Navíc ale návrh není přijat v tom případě, když předseda K a zároveň místopředseda L jsou oba „proti". Systém hlasování je týž jako v příkladě 38. Navrhněte příslušný obvod!

7. Řešte týž úkol jako v příkladě 39 pro „zkoušecí" stroj se čtyřmi tlačítky. Správné odpovědi na otázky A a B jsou „ano", na otázky C a D „ne".

8. kapitola

ELEKTRICKÉ OBVODY POČÍTAČŮ

V této závěrečné kapitole se na několika jednoduchých příkladech seznámíme s principem navrhování elektrických obvodů počítačů (počítacích strojů). Počítače obvykle pracují ve dvojkové číselné soustavě. Je proto nezbytné, abychom o ní uvedli aspoň velmi stručné poučení.

V teorii čísel platí tato věta:

Nechť je n libovolné přirozené číslo, z libovolné přirozené číslo větší než 1. *Pak každé přirozené číslo b, pro něž platí* $z^n \leqq b < z^{n+1}$, *lze vyjádřit ve tvaru*

$$b = b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \ldots + b_1 z^1 + b_0 z^0 \; ; \qquad (38)$$

přitom je b_n *jednoznačně určené přirozené číslo menší než* z; $b_{n-1}, b_{n-2}, \ldots, b_1, b_0$ *jsou jednoznačně určená celá nezáporná čísla menší než* z.

Zvolme pro ilustraci například číslo $b = 51$ (chápeme je zapsané v obvykle používané desítkové soustavě). Lze pak psát

pro $z = 10$ $\quad b = 5.10^1 + 1.10^0$
pro $z = 15$ $\quad b = 3.15^1 + 6.15^0$
pro $z = 8$ $\quad b = 6.8^1 + 3.8^0$
pro $z = 5$ $\quad b = 2.5^2 + 0.5^1 + 1.5^0$
pro $z = 3$ $\quad b = 1.3^3 + 2.3^2 + 2.3^1 + 0.3^0$
pro $z = 2$ $\quad b = 1.2^5 + 1.2^4 + 0.2^3 + 0.2^2 + 1.2^1 + 1.2^0$

Vyjádříme-li číslo b ve tvaru (38), říkáme, že jsme je určili *v soustavě o základu z*. Je-li $z = 10$, mluvíme o soustavě *desítkové* (dekadické), pro $z = 9$ o soustavě *devítkové*, pro $z = 2$ o soustavě *dvojkové* atd. Přirozené číslo $z > 1$ nazýváme *základ soustavy;* symboly, kterými se zapisují čísla $b_n, b_{n-1}, \ldots, b_0$, nazýváme *číslice* nebo *cifry* (dále namísto „číslice, kterou je zapsáno číslo b_i“, pišme stručněji „číslice b_i“). O číslici b_i, u níž je z v i-té mocnině ($i = 0, 1, \ldots, n$), říkáme, že je *řádu i-tého.*

Skutečnost, že číslo b je určeno v soustavě o základu z, zapíšeme stručně

$$b = (b_n b_{n-1} \ldots b_1 b_0)_z$$

V našem ilustračním příkladě lze tedy psát

$$b = (51)_{10} = (36)_{15} = (63)_8 = (201)_5 = (1220)_3 = \\ = (110011)_2$$

Zabývejme se nyní pouze dvojkovou soustavou, v níž pracujeme jenom s číslicemi 0 a 1. Smluvme se, že v této kapitole budeme namísto „$(b_n b_{n-1} \ldots b_1 b_0)_2$“ psát stručněji jenom „$b_n b_{n-1} \ldots b_1 b_0$“.

Podívejme se na základní operace — sčítání a násobení — v této soustavě. Určeme nejprve všechny možné součty a součiny čísel o jedné číslici (tzv. základní spoje sčítání a násobení). Platí

$$\begin{array}{lcl} 0+0 = 0 & \qquad & 0.0 = 0 \\ 0+1 = 1 & & 0.1 = 0 \\ 1+0 = 1 & & 1.0 = 0 \\ 1+1 = 10 & & 1.1 = 1 \end{array}$$

Uspořádejme tyto výsledky přehledně v tabulkách:

$a + b$:

$a \backslash b$	0	1
0	0	1
1	1	10

tab. 12

$a \,.\, b$:

$a \backslash b$	0	1
0	0	0
1	0	1

tab. 13

Vzpomeňme na dvouprvkovou Booleovu algebru (D, $+$, $.$, $'$), kterou jsme zavedli v 5. kapitole. Všimněme si, že tabulka 13 je formálně zcela shodná s definiční tabulkou operace násobení na D. Tabulka 12 se liší od tabulky definující operaci sčítání na D pouze v jednom „součtu“.

Obdobně jako v desítkové soustavě můžeme i v soustavě dvojkové sčítat a násobit víceciferná čísla. Prověřte, že dále uvedené výpočty jsou správné! (Využijte tabulek 12 a 13.)

$$
\begin{array}{r}
110\\
+111\\
\hline
1101
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
11111\\
+10010\\
\hline
110001
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
110\\
.111\\
\hline
110\\
110\\
110\\
\hline
101010
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
11111\\
.10010\\
\hline
111110\\
11111\\
\hline
1000101110
\end{array}
$$

Zaveďme ještě jednu úmluvu, jež bude v dalším užitečná. Jestliže před číslo b zapsané ve dvojkové soustavě připíšeme konečný počet nul, chápeme i tento nový zápis jako zápis čísla b. Například místo 11 můžeme psát 011, 00011 atd.

Příklad 40: Navrhněte elektrický obvod počítače, který „umí“ sčítat dvě libovolná jednociferná nezáporná čísla zapsaná ve dvojkové soustavě.

Řešení: Přepišme tabulku 12 takto:

a	b	s_1	s_0
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

V tabulce jsou vždy v příslušném řádku v prvním a druhém sloupci jednotliví sčítanci; ve třetím sloupci je pak číslice prvního řádu součtu, ve čtvrtém sloupci číslice nultého řádu součtu.

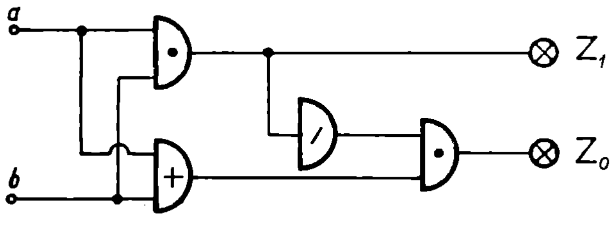
Dívejme se nyní na tuto tabulku formálně jako na tabulku, jíž jsou určeny funkce s_1, s_0 o dvou proměnných a, b z množiny D. Obě funkce lze určit rovnicí:

$$\begin{aligned} s_1 &: y = ab \\ s_0 &: y = ab' + a'b \end{aligned} \qquad (39)$$

Funkci s_0 lze zapsat také takto:

$$s_0 : y = (ab)' . (a + b) \qquad (40)$$

Schéma elektrického obvodu příslušného počítače je na obrázku 37; přitom jsme zvolili funkci s_0 ve tvaru (40). Žárovka Z_1 (Z_0) svítí, právě když je hodnota funkce s_1 (s_0) rovna 1.



Obr. 37

Sestrojte sami schéma obvodu, v němž je realizována funkce s_0 ve tvaru (39). Který z obou obvodů obsahuje méně elementárních částí?

Příklad 41: Navrhněte elektrický obvod počítače, který „umí" násobit dvě libovolná celá nezáporná čísla nejvýše dvojciferná (rozumí se ve dvojkové soustavě).

Řešení: Sestavme obdobnou tabulku jako v příkladě 40 pro násobení dvou nezáporných nejvýše dvojciferných čísel a_1a_0, b_1b_0; součin může být zřejmě nejvýše čtyřciferné číslo (prověřte!).

a_1	a_0	b_1	b_0	n_3	n_2	n_1	n_0
1	1	1	1	1	0	0	1
1	1	1	0	0	1	1	0
1	1	0	1	0	0	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1	1	0
1	0	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	0	1	0
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0	0	1
0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Písmeny n_3, n_2, n_1, n_0 jsou označeny proměnné odpovídající číslicím třetího, druhého, prvního a nultého řádu součinu.

Prověřte všechny řádky tabulky, zda jsou součiny určeny správně!

Dívejme se na tuto tabulku formálně jako na tabulku, jíž jsou určeny funkce n_3, n_2, n_1, n_0

o čtyřech proměnných a_1, a_0, b_1, b_0 z množiny D. Určeme každou z těchto funkcí rovnicí:

$$n_3 : y = a_1 a_0 b_1 b_0$$
$$n_2 : y = a_1 a_0 b_1 b_0' + a_1 a_0' b_1 b_0 + a_1 a_0' b_1 b_0'$$

a po úpravách

$$n_2 : y = a_1 b_1 . (a_0 b_0)'$$

$$n_1 : y = a_1 a_0 b_1 b_0' + a_1 a_0 b_1' b_0 + a_1 a_0' b_1 b_0 + a_1 a_0' b_1' b_0 + \\ + a_1' a_0 b_1 b_0 + a_1' a_0 b_1 b_0' ,$$

po úpravách

$$n_1 : y = a_1 b_0 . (a_0 b_1)' + a_0 b_1 . (a_1 b_0)'$$
$$n_0 : y = a_1 a_0 b_1 b_0 + a_1 a_0 b_1' b_0 + a_1' a_0 b_1 b_0 + a_1' a_0 b_1' b_0$$

a po úpravách pravé strany rovnice

$$n_0 : y = a_0 b_0$$

Schéma příslušného elektrického obvodu sestrojte už samostatně!

Příklad 42: Navrhněte elektrický obvod, pomocí něhož bychom mohli srovnávat podle velikosti dvě celá nezáporná nejvýše dvojciferná čísla z dvojkové soustavy! *Řešení*: Nechť jsou dána dvě čísla A = $a_1 a_0$, B = $b_1 b_0$ a máme rozhodnout, zda platí A $\leqq$ B nebo A $>$ B. V následující tabulce jsou v prvních čtyřech sloupcích zapsány číslice jednotlivých čísel. V posledním sloupci píšeme 1, právě když je A $\leqq$ B, a 0, právě když je A $>$ B.

a_1	a_0	b_1	b_0	$f(a_1, a_0, b_1, b_0)$
1	1	1	1	1
1	1	1	0	0
1	1	0	1	0
1	1	0	0	0
1	0	1	1	1
1	0	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	1	1	0	1
0	1	0	1	1
0	1	0	0	0
0	0	1	1	1
0	0	1	0	1
0	0	0	1	1
0	0	0	0	1

Na tuto tabulku se můžeme dívat jako na booleovskou funkci f o čtyřech proměnných a_1, a_0, b_1, b_0 z množiny D. Funkci f lze určit rovnicí například ve tvaru

$$f : y = a_1'b_1 + a_1'a_0' + a_0'b_1 + a_1'b_0 + b_1b_0$$

nebo ve tvaru $f : y = a_1'b_1 + (a_1' + b_1).(a_0' + b_0)$

Nakreslete schéma příslušného obvodu!

Příklad 43: Určete rovnicemi funkce, pomocí nichž je možno realizovat elektrický obvod počítače na sčítání dvou nejvýše n-ciferných celých nezáporných čísel z dvojkové soustavy (n je přirozené číslo).

Řešení: Nechť jsou $A = a_{n-1} \ldots a_1a_0$, $B = b_{n-1} \ldots b_1b_0$ dvě libovolná nejvýše n-ciferná čísla. Jejich součet S je pak vždy číslo nejvýše $(n+1)$-ciferné, $S = s_n \ldots s_1s_0$.

Označme písmenem c_i cifru, kterou „přenášíme" při sčítání čísel A, B z $(i - 1)$-ního sloupce do sloupce i-tého ($i = 1, 2, \ldots, n$). Zkoumejme všechny možnosti pro c_i, a_i, b_i (zřejmě je $a_n = b_n = 0$) a určeme odtud jednak c_{i+1}, jednak s_i. Prověřte detailně následující tabulku.

c_i	a_i	b_i	c_{i+1}	s_i
1	1	1	1	1
1	1	0	1	0
1	0	1	1	0
1	0	0	0	1
0	1	1	1	0
0	1	0	0	1
0	0	1	0	1
0	0	0	0	0

Dívejme se nyní na c_{i+1} a s_i jako na funkce o třech proměnných c_i, a_i, b_i z množiny D. Odtud pak dospíváme k těmto závěrům:

$$c_{i+1} : y = a_i b_i + c_i . (a_i + b_i)$$
$$s_i : y = c_i . (a_i b_i + a_i' b_i') + c_i' . (a_i b_i' + a_i' b_i)$$

Uvědomme si ještě, že platí

$$c_1 : y = a_0 b_0$$
$$s_0 : y = a_0 b_0' + a_0' b_0$$

Na základě získaných „rekurentních vzorců" je už možno navrhnout obvod příslušného počítače. Pokuste se o to!

Poznámka: Podrobnou informaci o realizaci počítačů — „sčítaček" — najdete například v 3. publikaci seznamu literatury na str. 117. Tam se dočtete o tzv. **paralelních sčítačkách** (základ tvoří úvahy z příkladu 43) i o tzv. **sčítačkách sériových** (s „paměťovým" obvodem).

Cvičení

1. Navrhněte elektrický obvod pro počítač, který by „uměl" násobit dvě libovolná jednociferná nezáporná čísla z dvojkové soustavy.

2. Určete rovnicí funkci, pomocí níž je možno realizovat elektrický obvod pro porovnávání celých nezáporných nejvýše tříciferných čísel podle velikosti.

VÝSLEDKY CVIČENÍ

1. kapitola

1. Všechna tvrzení a), b), c) jsou pravdivá; množina všech rovnostranných čtyřúhelníků, jejichž aspoň jeden vnitřní úhel je ostrý nebo tupý (tj. množina všech kosočtverců); množina všech čtyřúhelníků, které nejsou rovnostranné nebo mají aspoň jeden vnitřní úhel ostrý nebo tupý (tj. množina všech čtyřúhelníků, jež nejsou čtverce) **2.** a) $A \cup B$ b) $A \cup B \cup C$ c) D' **3.** a) ano b) ano c) ne d) ne e) ano **4.** a) $A \cap B = \emptyset$ b) $A' \cap B \cap C' = \emptyset$ a zároveň $A' \cap B' \cap C = \emptyset$ c) $A \cap C = \emptyset$

2. kapitola

1. a) 0 b) 1 c) 0 **2.** a) ano b) ano **5.** a) ano b) ano c) ne

3. kapitola

1. a) Není komutativní ani asociativní $/(x-y)-z;\ x-(y-z)/$, neexistuje neutrální prvek b) není komutativní $/x+2y;\ y+2x/$, není asociativní $/(x+2y)+2z;\ x+2(y+2z)/$, neexistuje neutrální prvek c) je komutativní, není asociativní $/(x^2+y^2)^2+z^2;\ x^2+(y^2+z^2)^2/$, neexistuje neutrální prvek d) není komutativní $/x^y;\ y^x/$ ani asociativní $/(2^3)^4 \neq 2^{(3^4)}/$, neexistuje neutrální prvek **2.** Operace $u = x * y$: není komutativní ani asociativní, neexistuje neutrální prvek; operace $u = x \bigcirc y$: je komutativní i asociativní, neutrálním prvkem je 2. Operace $u = x * y$ není distributivní vzhledem k operaci $u = x \bigcirc y$ /$2 \ast (2 \bigcirc 3) = 2 \ast 3 = 2$; $(2 \ast 2) \bigcirc (2 \ast 3) = 3 \bigcirc 2 = 3$/ **3.** Úkolem je postupně prověřit, zda pro všechny prvky x, y, z množiny R platí: I. max $(x, y) =$ $=$ max (y, x), II. min $(x, y) =$ min (y, x), III. max (max (x, y), $z) =$ max (x, max (y, z)), IV. min (min (x, y), $z) =$ min (x, min (y, z)), V. max (x, min $(y, z)) =$ min (max (x, y), max (x, z)), VI. min (x, max $(y, z)) =$ max (min (x, y), min (x, z)); dále je třeba určit všechny takové prvky $e_1 \in R$, pro něž je max $(x, e_1) =$ max $(e_1, x) = x$ pro každé $x \in R$; všechny prvky $e_2 \in R$, pro něž je min $(x, e_2) =$ min $(e_2, x) = x$ pro každé $x \in R$. I.—VI. platí. Můžete při důkazech uvažovat případy: $x \leqq y \leqq z$, $x \leqq z \leqq y$, $y \leqq x \leqq z$, $y \leqq z \leqq x$, $z \leqq x \leqq y$, $z \leqq y \leqq x$. Neexistuje neutrální prvek vzhledem k žádné z obou operací. **4.** Platí zřejmě I.—VI. (viz př. 3); neutrální prvek operace „$u =$ max (x, y) na D“ je 0, neutrální prvek operace „$u =$ min (x, y) na D“ je 4. Unární operaci s požadovanými vlastnostmi nelze na D definovat (například k prvku $1 \in D$ neexistuje žádný prvek $x \in D$, pro nějž je max $(1, x) =$ $= 4$ a zároveň min $(1, x) = 0$/.

4. kapitola

1. Je modelem; neutrální prvek operace sjednocení je $\langle \frac{5}{2}, 3\rangle$, operace průniku $\langle 2, 3\rangle$ **2.** Neutrální prvky O_u; AB **4.** Neutrální prvky 1; 6 **5.** Využijte závěrů cvičení 3 a 4 z 3. kapitoly **6.** Neutrální prvky [2,2] a [3,3] **8.** Neutrální prvky: funkce f_0, pro niž platí: $f_0(x) = 2$ pro každé $x \in R$; funkce f_1, pro niž platí: $f_1(x) = 3$ pro každé $x \in R$ **10.** a) 1 b) $a+b'c$ c) $ab+a'c'$ d) $a+b+$ $+c'$ e) $(ab)'.cd'$ f) $a'.(b'+c)$ g) $bcd'.(a+e)$ h) 0 **11.** Důkaz /3/ pomocí axiómů /1/, /2/, /5/ až /10/ a vět z těchto axiómů plynoucích lze provést například takto: $((x+y)+z).x = (x+y).$ $.x+zx = x+zx = x$, $(x+(y+z)).x = xx+(y+z).x = x+(y+z).x =$ $= x$. Je tedy $((x+y)+z).x = (x+(y+z)).x$. Obdobně lze dokázat, že je také $((x+y)+z).x' = (x+(y+z)).x'$. Platí tedy dále i $((x+y)+z).(x+x') = (x+(y+z)).(x+x')$, čili $(x+y)+z = x+(y+z)$. Analogicky lze dokázat i /4/.

5. kapitola

1. $\{1\}$ **2.** Prázdná množina řešení **3.** $\{[1, 0], [1, 1]\}$ **4.** Pořadí hodnot proměnných ve čtveřicích je x, y, z, u — $\{[0, 0, 0, 0], [0, 0, 1, 0], [0, 1, 0, 0], [0, 1, 1, 0], [0, 0, 0, 1], [0, 0, 1, 1], [0, 1, 0, 1], [0, 1, 1, 1], [1, 0, 0, 1], [1, 0, 1, 1], [1, 1, 0, 1], [1, 1, 1, 1]\}$ **5.** a) je-li $c = 1$ nebo platí-li $a = 1$ a zároveň $b = 1$: $\varnothing$; $a = 1, b = 0, c = 0 : \{1\}$; $a = 0, b = 1, c = 0 : \{0\}$; $a = 0, b = 0, c = 0 : \{0,1\}$ b) $a = 0 : \{1\}$; $a = 1 : \{0,1\}$ c) $a = 0, b = 0, c = 0$ nebo $a = 1, b = 1, c = 1 : \{0,1\}$; $a = 0, b = 1$ $c = 0$ nebo $a = 1, b = 0$ $c = 1 : \{1\}$; $a = 1, b = 0, c = 0$ nebo $a = 0, b = 1, c = 1 : \{0\}$; $a = 0, b = 0, c = 1$ nebo $a = 1, b = 1, c = 0$: $\varnothing$ d) $a = 1, b = 0 : \{0,1\}$; v ostatních případech $\{0\}$. **6.** $a = 0, b = 0$: $\varnothing$; $a = 0, b = 1 : \{[0, 0]\}$; $a = 1, b = 0 : \{[1,1]\}$; $a = 1, b = 1 : \{[0,0], [1,1]\}$ **8.** $f_1 : u = y$; $f_2 : u = xz+y'z'$; $f_3 : u = x'y+y'z$ **9.** Nejsou si rovny **10.** $2^{(2^1)}$ $2^{(2^2)}$, $2^{(2^3)}$, $2^{(2^4)}$ atd.; $2^{(2^n)}$

6. kapitola

2. a) $(A \cap B) \cup C$ b) $A \cap B' \cap C' \cap D' \cap E \cap (F \cup G)$ **3.** a) $\{\{3, 5, 7\}, \{3, 4, 5, 7\}, \{3, 5, 6, 7\}, \{3, 4, 5, 6, 7\}\}$ b) $\{\{2, 3\}, \{2, 3, 6\}, \{2, 3, 7\}, \{2, 3, 6, 7\}\}$ c) $\varnothing$ d) $\{\{1, 4\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 4, 6\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 4, 6\}, \{1, 3, 4, 6\}, \{1, 2, 3, 4, 6\}\}$ **4.** Množina všech řešení je prázdná, právě když je $C \neq \varnothing$ nebo když je $A' \subset B$ a zároveň $A' \neq B$. Množina všech řešení je neprázdná, právě když je $C = \varnothing$ a zároveň $B \subset A'$ (přitom je jednoprvková právě tehdy, když $C = \varnothing$ a zároveň $A' = B$). **5.** a) $\{3\}$ b) $\{1\}$ **6.** $\varnothing$ **7.** Dvě možnosti: navštíví jenom A a B; navštíví jenom A, B a D

7. kapitola

2. $h_1 : z = xu'v$; $h_2 : z = x+y$; $h_3 : y = z+uv$ **3.** $f : u = x \,.\, (yz+y'z')+x' \,.\, (yz'+y'z)$ **4.** a, b, c, d, e stavy vypínačů A, B, C, D, E; stav a roven 1, právě když se vypínač A vypne (obdobně ostatní stavy); $f : y = b+a.(c+d+e)+cd+e \,.\, (c+d)$ **5.** $f : y = a \,.\, (b+c)+d \,.\, (c+e)+bce$ **6.** $f : y = k \,.\, (lm+ln+lo+mn+mo+no)+l \,.\, (mn+mo+no)$ **7.** f_4, f_3, f_2, f_1, f_0 funkce odpovídající po řadě částem obvodu, které realizují 4, 3, 2, 1, 0 správných odpovědí; $f_4 : y = abc'd'$; $f_3 : y = ab \,.\, (cd'+c'd) + c'd' \,.\, (ab'+a'b)$ $f_2 : y = abcd+a'b'c'd'+(ab'+a'b) \,.\, (cd'+c'd)$; $f_1 : y = cd \,.\, (ab'+a'b)+a'b' \,.\, (c'd+cd')$; $f_0 : y = a'b'cd$

8. kapitola

1. $f : z = xy$ **2.** $A = a_2a_1a_0$, $B = b_2b_1b_0$; $A \leqq B$; $f : y = a_2'b_2 + (a_2'+b_2) \,.\, (a_1'b_1 + (a_1'+b_1) \,.\, (a_0'+b_0))$

LITERATURA

[1] E. Berkli: Simvoličeskaja logika i razumnyje mašiny (Moskva, 1961)
[2] G. E. Hoernes-M. F. Heilweil: Úvod do Booleovy algebry a navrhování elektrických obvodů (SNTL, Praha, 1969)
[3] J. Janků-P. Pelikán: Stroje na zpracování informací (SNTL, Praha, 1964)
[4] J. Kalbertson: Matematika i logika cifrovych ustrojstv (1965)
[5] A. W. Mostowski: Algebry Boole'a i ich zastosowania (Varšava, 1964)
[6] J. Šedivý: O modernizaci školské matematiky (SPN, Praha, 1969)

K procvičení úloh o množinách a úloh z logiky:

[7] J. Šedivý-J. Lukátšová-O. Odvárko-M. Zöldy: Úlohy o výrokoch a množinách pre I. ročník gymnázia (SPN, Bratislava, 1970)

K hlubšímu teoretickému studiu:

[8] L. Rieger: O grupách a svazech (Cesta k vědění, Praha, 1952)
[9] R. Sikorskij: Bulevy algebry (Moskva, 1969)
[10] D. A. Vladimirov: Bulevy algebry (Moskva, 1969)

OBSAH

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

Booleova algebra

OLDŘICH ODVÁRKO

Pro účastníky matematické olympiády
vydává ÚV Matematické olympiády
v nakladatelství Mladá fronta
Praha 1, Panská 8
Řídí akademik Josef Novák
Obálku navrhl Jaroslav Příbramský
Odpovědný redaktor Ladislav Smoljak
Technický redaktor Vladimír Vácha
Publikace číslo 3244
Edice Škola mladých matematiků,
svazek 31.
Vytiskl MÍR, novinářské závody, n. p.,
závod 1, Praha 1, Václavské nám. 15
4,61 AA, 4,77 VA. Náklad 6000 výtisků
1. vydání. 120 stran. Praha 1973
508/21/8.5 23-012-73 03/2
Cena brožovaného výtisku 8,— Kčs

23 - 012 - 73
03/2
Cena brož.
Kčs 8,—