Dokonalé a spriatelené čísla

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

DOKONALÉ A SPRIATELENÉ ČÍSLA

22

Vydal ÚV Matematické olympiády v nakladatelství Mladá fronta

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

TIBOR ŠALÁT

dokonalé a spriatelené čísla

VYDAL ÚV MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY
V NAKLADATELSTVÍ MLADÁ FRONTA

Recenzovali dr. Jaroslav Fuka a dr. Jaroslav Blažek

PREDHOVOR

Cieľom tejto knižky je oboznámiť čitateľa s jedným zaujímavým úsekom teorie čísel. Spracovanie látky je volené tak, aby štúdium knižky bolo dostupné študentom strednej školy, ktorí majú hlbší záujem o matematiku.

Do textu sú vložené príklady (označované $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots$), ktoré slúžia na precvičenie látky a tiež prehĺbenie textu. Mnohé z nich sú rozriešené, k iným je pripojený návod na riešenie. Jednotlivé vety (poučky) označujeme priebežne znakmi $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \ldots$, definície označujeme znakmi $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2, \ldots$.

Obsahove sa knižka člení na tri kapitoly. *V prvej* sú vyložené niektoré poznatky z teorie čísel, potrebné ku štúdiu ďalších kapitol. Ide hlavne o základné poznatky, ktoré sa týkajú deliteľnosti v obore celých čísel a vlastností funkcií σ a τ. *Druhá kapitola* obsahuje výklad základných vlastností dokonalých a spriatelených čísel. *Tretia kapitola* je obsahove najnáročnejšia. Vyžaduje znalosť istých poznatkov o číselných postupnostiach. Predpokladáme hlavne, že čitateľovi je známy pojem nulovej postupnosti. Autor sa snažil potrebné veci o limitách postupností objasniť priamo v texte tretej kapitoly. Ak by napriek tomu štúdium tejto kapitoly robilo čitateľovi veľké ťažkosti, nech sa spokojí s preštudovaním prvých dvoch kapitol, už tie mu poskytnú dostatočnú informáciu o dokonalých a spriatelených číslach.

Pretože viacero publikácií, vyšlých v edícii „*Škola mla-*

dých matematikú" je venovaných teorii čísel, nebolo možné vyhnúť sa prekrývaniu textu tejto publikácie s textom už vyšlých publikácií (ide hlavne o Sedláčkovu publikáciu „*Co víme o prirozených číslech*", Praha, 1965 a Veselého „*O delitelnosti celých čísel*", Praha, 1966). Autor sa usiloval spracovať spomínanú prekrývajúcu sa časť odlišne od spôsobu spracovania v uvedených knižkách. Vo veľkej miere to bolo umožnené novým, originálnym Surányiho dôkazom tzv. fundamentálnej vety aritmetiky.

Autor

1. kapitola

NIEKTORÉ POZNATKY Z TEORIE ČÍSEL

DELITEĽNOSŤ V OBORE CELÝCH ČÍSEL

V tejto knižke slovo „číslo", uvedené samostatne, bez prídavného mena, značí celé číslo, teda prvok množiny

$$\{0, 1, -1, 2, -2, \ldots n, -n, \ldots\}.$$

Často budeme hovoriť o prirodzených číslach, teda o prvkoch množiny

$$\{1, 2, 3, \ldots n, \ldots\}.$$

V ďalšom budeme používať túto, čitateľovi iste známu vlastnosť celých čísel:

Nech M je nejaká neprázdna množina celých čísel. Ak existuje také reálne číslo a, že všetky prvky množiny M sú nie väčšie než a, potom v množine M existuje najväčší (maximálny) prvok (tj. existuje také číslo b, že $b \in M$*) a pre každý prvok $x \in M$ platí $x \leqq b$).

Podobne platí:

Nech M je nejaká neprázdna množina celých čísel. Ak existuje také reálne číslo a', že všetky prvky množiny M sú nie menšie než a', potom v množine M existuje najmenší (minimálny) prvok (tj. existuje teké číslo b', že $b' \in M$ a pre každý prvok $x \in M$ platí $x \geqq b'$).

*) $x \in \mathbf{A}$ značí: x patrí do množiny $\mathbf{A}$.

Pripomeňme ešte pojem absolutnej hodnoty celého čísla. Ak a je celé číslo, potom absolutnou hodnotou $|a|$ čísla a rozumieme číslo a, ak $a \geq 0$ a číslo $-a$, ak $a < 0$. Tak napríklad $|6| = 6$, $|-5| = -(-5) = 5$ a pod.

Iste je čitateľovi známe, že absolutná hodnota súčinu dvoch čísel sa rovná súčinu absolutných hodnôt tých čísel a absolutná hodnota súčtu dvoch čísel nepresahuje súčet absolutných hodnôt tých čísel. Tak napr. $|(-3).8| = |-3|.8 = 3.8 = 24$, $|-3+8| \leqq |-3| + |8| = 11$.

D1. Hovoríme, že číslo a delí číslo b, ak existuje číslo q tak, že $b = aq$.

Namiesto „a delí b" hovoríme aj „a je deliteľom čísla b", „b je násobkom čísla a", „b je deliteľné číslom a". Ak a delí b, píšeme $a \mid b$. Ak a nedelí b, píšeme $a \nmid b$.

Celé čísla, ktoré sú deliteľné číslom 2 nazývame párnymi, ostatné celé čísla nazývame nepárnymi.

P1. $3 \mid 18$, $3 \nmid (-101)$, $0 \mid 0$, $0 \nmid 6$.

P2. Ako vyzerá množina všetkých násobkov čísla 7?

P3. Ak $a \mid b$, potom aj $(-a) \mid b$, $a \mid (-b)$, $(-a) \mid (-b)$.

Tie prirodzené čísla, ktoré sú deliteľmi čísla a, nazývame prirodzenými deliteľmi čísla a. Tak napr. čísla 1, 2, 3, 4, 6, 12 sú prirodzenými deliteľmi čísla -12 a číslo -12 už iných prirodzených deliteľov nemá.

P4. Číslo 0 je deliteľné každým číslom.

P5. Číslo 0 nie je deliteľom žiadneho celého čísla $b \neq 0$.

V1. Ak $a \mid b$, $b \neq 0$, potom $|a| \leqq |b|$.

Dôkaz. Na základe predpokladu existuje celé q tak, že

$$b = aq. \tag{1}$$

Keďže $b \neq 0$, je aj $q \neq 0$ a tak $|q| \geq 1$. Z (1) dostávame potom $|b| = |a|.|q| \geq |a|$, teda $|b| \geq |a|$.

P6. Nech $a \mid b$ a súčasne $b \mid a$. Potom $|a| = |b|$.

Návod: Použite $\mathbf{V}_1$. a $\mathbf{P}_5$!

Vzťah $a \mid b$ nie je symetrický, to značí, že z $a \mid b$ nevyplýva ešte $b \mid a$. Tak napr. $2 \mid 4$, ale $4 \nmid 2$. No tento vzťah má nasledujúcu vlastnosť, tzv. vlastnosť tranzitívnosti.

V₂. Ak $a \mid b$, $b \mid c$, potom $a \mid c$.

Dôkaz. Na základe predpokladu existujú čísla q_1, q_2 tak, že $b = aq_1$, $c = bq_2$. Ak do druhej rovnosti dosadíme z prvej za b, dostaneme $c = (aq_1) \cdot q_2 = a(q_1 \cdot q_2)$. Pretože q_1, q_2 sú celé čísla, je aj $q_1 \cdot q_2$ celé a $c = a(q_1 \cdot q_2)$, teda $a \mid c$.

V₃. Nech a je celé, m prirodzené. Potom existujú čísla q, r, $0 \leqq r < m$ tak, že

$$a = mq + r. \tag{2}$$

Čísla q, r, $0 \leqq r < m$ sú číslami a, m jednoznačne určené.

Dôkaz. Zostrojme racionálne číslo $\frac{a}{m}$. V množine všetkých celých čísel nie väčších než $\frac{a}{m}$ existuje najväčší prvok. Označme ho znakom q. Teda na základe definície čísla q platí: $q \leqq \frac{a}{m} < q + 1$. Vynásobením týchto nerovností číslom m dostaneme $mq \leqq a < mq + m$. Položme

$$r = a - mq. \tag{3}$$

Z predošlého vyplýva, že r je celé a $0 \leqq r < m$. Z (3) dostávame potom $a = mq + r$.

Nech čísla q', r', $0 \leqq r' < m$ spĺňajú rovnosť

$$a = mq' + r' \tag{4}$$

a nech napr. $r \geqq r'$. Potom ak od (2) odčítame (4), dostaneme

$$r - r' = m(q - q'). \tag{5}$$

Odtiaľ vyplýva, že m delí rozdiel $r - r'$. No z podmienok $r \geq r', 0 \leqq r < m, 0 \leqq r' < m$ vyplýva $0 \leqq r - r' < m$ a odtiaľ v dôsledku $\mathbf{V}_1$ $r - r' = 0, r = r'$ a z (5) $q = q'$. Teda dvojica čísel $q, r, 0 \leqq r < m$ je číslami a, m jednoznačne určená.

P7. Nájdite $q, r, 0 \leqq r < m$, ak

1. $a = -58, m = 10.$
2. $a = 74, m = 13.$

Uvedieme teraz niektoré vlastnosti párnych a nepárnych čísel. Ak a je celé číslo, potom na základe vety $\mathbf{V}_3$ existujú celé k, r tak, že $a = 2k + r$, pričom $0 \leqq r < 2$. Ak $r = 0$, potom a je deliteľné číslom 2, teda a je párne. Ak $r = 1$, potom a nemôže byť deliteľne číslom 2. Ak by totiž a bolo deliteľné číslom 2, potom na základe $\mathbf{V}_4$ a $\mathbf{P}_3$ aj číslo $1 = a - 2k$ by bolo deliteľné číslom 2, a to nie je možné (pozri $\mathbf{V}_1$). Tým sme dokázali vetu

$\mathbf{V}_{3a}$. Celé číslo a je párne vtedy a len vtedy, keď má tvar $a = 2k$ (k celé) a nepárne vtedy a len vtedy, keď má tvar $a = 2k + 1$ (k celé).

Ľahkým dôsledkom uvedenej poučky sú tieto vety.

$\mathbf{V}_{3b}$. Súčet dvoch párnych čísel je párny, súčet dvoch nepárnych čísel je párny. Súčet k ($k \geqq 2$) nepárnych čísel je párne číslo vtedy a len vtedy, keď k je párne číslo.

$\mathbf{V}_{3c}$. Súčin dvoch párnych čísel je párny, súčin dvoch nepárnych čísel je nepárny a súčin nepárneho a párneho čísla je párny.

Ak a, b sú celé čísla, potom existujú (celé) čísla, ktoré sú súčasne deliteľmi aj čísla a aj čísla b. Takými číslami sú 1, — 1.

$\mathbf{D}_2$. Číslo d nazývame spoločným deliteľom čísel a, b, ak $d \mid a, d \mid b$.

$\mathbf{D}_3$. Čísla a, b nazývame nesúdeliteľnými, ak nemajú

iných spoločných deliteľov než 1, — 1. Ak a, b nie sú nesúdeliteľné, nazývajú sa súdeliteľné.

Príkladom nesúdeliteľných čísel sú čísla 12, — 35, príkladom súdeliteľných čísel sú čísla 24, 60.

P₃. Nájdite množinu všetkých spoločných deliteľov čísel 1. 24, 60 2. — 50, 17 3. — 18, 48.

V₄. Ak $a \mid b$, a $a \mid c$, potom $a \mid (b + c)$.

Dôkaz. Podľa predpokladu existujú celé q_1, q_2 tak, že $b = aq_1$, $c = aq_2$. Potom $b + c = a(q_1 + q_2)$. Pretože $q_1 + q_2$ je celé, vyplýva tvrdenie vety z rovnosti $b + c = a(q_1 + q_2)$.

V₅. Ak $a \mid b$ a c je celé číslo, potom $a \mid b.c$.

Dôkaz. Podľa predpokladu existuje celé q tak, že $b = aq$. Potom z rovnosti $bc = a(q.c)$ vyplýva tvrdenie vety.

Naskytá sa otázka, či predošlé vety $\mathbf{V}_4$, $\mathbf{V}_5$ možno v istom zmysle obrátiť, presne rečeno, či platia tieto poučky:

Ak $a \mid bc$, potom buď $a \mid b$ alebo $a \mid c$.

Ak $a \mid (b + c)$, potom buď $a \mid b$ alebo $a \mid c$.

Ľahko sa možno presvedčiť, že posledne uvedené výroky sú nepravdivé. Stačí napr. voliť $b = 6$, $c = 8$, $a = 14$. Potom $a \mid (b + c)$, a súčasne $a \mid b.c$, no pritom $a \nmid b$, $a \nmid c$.

Teda deliteľ súčinu dvoch čísel nemusí byť deliteľom niektorého z činiteľov súčinu. Pri istom dodatočnom predpoklade vyplýva z deliteľnosti súčinu dvoch čísel daným číslom deliteľnosť aspoň jedného z činiteľov daným číslom. O tom pojednáva nasledujúca veta, nazývaná pre jej veľký význam aj fundamentálnou vetou aritmetiky. Originálny dôkaz tejto vety, ktorý tu podáme, pochádza od maďarského matematika *J. Surányiho*.

V₆. Nech $a \mid b.c$ a nech a je nesúdeliteľné s b. Potom $a \mid c$.

Dôkaz. Označme znakom C, množinu všetkých tých

čísel x, pre ktoré $a \mid bx$. Teda $c \in C$. Na základe $\mathbf{V}_5$ do C patria všetky násobky čísla a. Ukážeme (a to k dokončeniu dôkazu stačí), že C pozostáva práve zo všetkých násobkov čísla a.

Označme znakom m najmenšie kladné číslo patriace do C. Zrejme stačí dokázať platnosť týchto dvoch výrokov:
(i) Každý prvok z C je deliteľný číslom m.
(ii) $m = |a|$.

Nech $x \in C$. Na základe $\mathbf{V}_3$ existujú celé q, r, $0 \leqq r < m$ tak, že $x = mq + r$. Odtiaľ $r = x - mq$ a tak $br = bx - bmq$. Pretože $x, m \in C$, delí číslo a súčin bx i bm a teda aj čísla bx a $-bmq$ (pozri $\mathbf{V}_5$). Na základe $\mathbf{V}_4$ potom $a \mid (bx - bmq)$, teda $a \mid br$, $r \in C$. Keby bolo $0 < r < m$, potom by r bolo kladným prvkom množiny C menším než m a to by viedlo ku sporu s definíciou čísla m. Musí teda byť $r = 0$, potom $x = mq$, $m \mid x$. Tým je platnosť výroku (i) dokázaná.

Dokážeme (ii). Pretože $a \in C$, $m \mid a$ na základe (i). Teda existuje číslo q_1 tak, že

$$a = mq_1. \tag{6}$$

Keďže $m \in C$, $a \mid bm$, existuje číslo q_2 tak, že $bm = aq_2$. Dosaďme za a do poslednej rovnosti zo (6), dostaneme $bm = mq_1 . q_2$, odtiaľ

$$b = q_1 . q_2. \tag{7}$$

Teda q_1 delí a (pozri (6)) a na základe (7) aj b. Pretože však a, b sú nesúdeliteľné, je $q_1 = 1$ alebo $q_1 = -1$ (pozri $\mathbf{D}_3$). Zo (6) potom dostávame $m = |a|$.

Každé prirodzené číslo $n > 1$ má aspoň dvoch prirodzených deliteľov, sú nimi čísla 1 a n. Ak $d \mid n$ a $1 < d < n$, potom d nazývame netriviálnym deliteľom čísla n. Čísla 1 a n nazývame triviálnymi deliteľmi čísla n.

D4. Číslo $n > 1$ sa nazýva prvočíslom, ak nemá netriviálnych deliteľov. Číslo $n > 1$ sa nazýva zloženým číslom, ak nie je prvočíslom.

Ak teda číslo n je zložené, má aspoň jedného netriviálneho deliteľa.

Už *Euklidovi* (4. st. pred n. l.) bol známy pojem prvočísla. Od Euklida pochádza aj prvý dôkaz nekonečnosti počtu prvočísel. I keď vieme, že všetkých prvočísel je nekonečne mnoho, predsa ich konkrétne všetky nepoznáme. Nevieme napríklad, aké je vyjadrenie všetkých prvočísel v desiatkovej sústave. Ba vieme toho hodne menej. Nepoznáme dokonca ani žiadne prvočíslo väčšie než $2^{11^{213}}$. Najväčšie známe prvočíslo je $2^{11^{213}} - 1$. Pre hľadanie prvočísel sa v poslednom čase s výhodou používajú najnovšie matematické počítacie stroje.

P9. Dokážte, že každé párne číslo $a > 2$ je zložené!

P10. Ak p, q sú dve prvočísla, potom buď $p = q$ alebo p, q sú nesúdeliteľné. Dokážte to!

V7. Nech n je zložené číslo, nech p je najmenší netriviálny deliteľ čísla n. Potom p je prvočíslo.

Dôkaz. Z definície netriviálneho deliteľa vyplýva, že $p > 1$. Ak p nie je prvočíslo, potom existuje d, $1 < d < p$ tak, že $d \mid p$. Z $d \mid p$, $p \mid n$ vyplýva na základe $\mathbf{V}_2$ $d \mid n$. To je však vo spore s definíciou čísla p.

V8. Ak a je celé a p prvočíslo, potom buď $p \mid a$ alebo p, a sú nesúdeliteľné.

Dôkaz. Ak p, a sú súdeliteľné, potom existuje celé číslo $d \neq 1, -1$ tak, že $d \mid p$ a súčasne $d \mid a$. Z $d \mid p$ vyplýva na základe $\mathbf{P}_3$ $|d| \mid p$ a keďže $d \neq 1, -1$, je $q = |d| > 1$. Keďže $q \mid p$, je $q = p$ a tak $p \mid a$.

V9. Nech a, b sú celé a p prvočíslo. Ak $p \mid a.b$, potom buď $p \mid a$ alebo $p \mid b$.

Dôkaz. Ak $p \nmid a$, potom na základe $\mathbf{V}_8$ sú a, p nesúdeliteľné. Z $\mathbf{V}_6$ vyplýva $p \mid b$.

Nasledujúca veta má veľmi názorný význam. Ukazuje, populárne rečeno, že prvočísla sú stavebnými kameňmi, z ktorých sú vybudované všetky prirodzené čísla > 1.

Poznamenajme, že v ďalšom výraz $a_1.a_2 \dots a_s$, kde a_i sú celé a $s \geqq 1$, nazývame súčinom (o s činiteľoch). Teda v prípade $s = 1$ máme súčin o jedinom činiteli.

V$_{10}$. Každé prirodzené číslo $n > 1$ sa dá vyjadriť ako súčin prvočísel a to až na poradie činiteľov jednoznačne.

Dôkaz. Napred ukážeme, že každé $n > 1$ sa dá písať vo tvare súčinu prvočísel. Dôkaz tohoto faktu uskutočníme matematickou indukciou. Tvrdenie je zrejme správne pre $n = 2$ (2 je prvočíslo!). Predpokladajme, že tvrdenie je správne pre všetky prirodzené čísla > 1, ktoré sú nie väčšie než $n (n > 1)$. Dokážeme, že tvrdenie platí aj pre $n + 1$. Keďže $n + 1 > 1$, je $n + 1$ buď prvočíslo alebo zložené číslo. Ak $n + 1$ je prvočíslo, potom tvrdenie platí zrejme. Ak $n + 1$ je zložené, potom na základe V$_7$ existuje prvočíslo p tak, že $p \mid (n + 1)$. V dôsledku toho existuje prirodzené a tak, že

$$n + 1 = p.a. \tag{8}$$

Keďže $p \geqq 2$, je $a \leqq n$ a keďže $n + 1$ je zložené, musí byť $a > 1$. Podľa indukčného predpokladu $a = p_1.p_2 \dots p_s$, kde $p_i (i = 1, 2, \dots s)$ sú prvočísla, $s \geqq 1$. Z (8) potom vyplýva $n + 1 = p.p_1.p_2 \dots p_s$, teda aj $n + 1$ je súčinom prvočísel.

Dokážeme teraz jednoznačnosť takého vyjadrenia. Treba dokázať, že ak

$$n = p_1.p_2 \dots p_s \tag{9}$$

a súčasne

$$n = q_1.q_2 \dots q_r \tag{10}$$

($p_i, i = 1, 2, \dots s$; $q_j, j = 1, 2, \dots r$, sú prvočísla, s, r sú

prirodzené čísla), potom $s = r$ a každé p_i je totožné s nejakým q_j a obrátene. Z (9) a (10) dostávame

$$p_1 . p_2 \ldots p_s = q_1 . q_2 \ldots q_r. \tag{11}$$

Nech $s < r$. Potom z (11) vyplýva $q_1 \mid p_1 . p_2 \ldots p_s$. Na základe $\mathbf{V_9}$ odtiaľ vyplýva $q_1 \mid p_1$ alebo $q_1 \mid p_2 . p_3 \ldots p_s$. Ak $q_1 \nmid p_1$ opätovným použitím $\mathbf{V_9}$ dostaneme: $q_1 \mid p_2$ alebo $q_1 \mid p_3 \ldots p_s$. Po konečnom počte týchto úvah nájdeme také i, $1 \leqq i \leqq s$, že $q_1 \mid p_i$. Pretože pri formulácii jednoznačnosti neberieme ohľad na poradie činiteľov, môžeme už predpokladať, že $i = 1$ (keby tomu tak nebolo, zamenili by sme očíslovanie čísel p_1 a p_i). Potom teda $q_1 \mid p_1$ a z $\mathbf{P_{10}}$ vyplýva $q_1 = p_1$. Ak $s > 1$, dostaneme z (11)

$$p_2 \ldots p_s = q_2 \ldots q_r. \tag{12}$$

Ak predošlú úvahu zopakujeme ešte $s - 1$ -krát, dostaneme z (12) $1 = q_{s+1} \ldots q_r$. Táto rovnosť je zrejme nesprávna, pretože súčin na jej pravej strane má hodnotu $\geqq 2$. Musí teda byť $s \geqq r$. Analogicky sa dá ukázať, že $r \geqq s$, teda $s = r$. Z priebehu dôkazu vidieť, že pri eventuálnom prečíslovaní čísel $p_1, \ldots p_s$ dostávame $p_i = q_i$ $(i = 1, 2, \ldots s)$.

Pri vyjadrení čísla $n > 1$ vo tvare súčinu prvočísel

$$n = p_1 . p_2 \ldots p_s, s \geqq 1, \tag{13}$$

nemusia byť prvočísla $p_1, p_2, \ldots p_s$ navzájom rôzne. Ak na základe známeho komutatívneho a asociatívneho zákona pre násobenie zgrupujeme rovnakých činiteľov, dostaneme z (13) tzv. kanonický rozklad čísla

$$n = q_1^{\alpha_1} . q_2^{\alpha_2} \ldots q_k^{\alpha_k}, \tag{14}$$

$q_1, q_2, \ldots q_k$ sú navzájom rôzne prvočísla, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k$ sú prirodzené čísla.

P11. Nájdite kanonické rozklady čísel 32, 54, 300.

P12. Dokážte, že ak $n > 2$, potom medzi n a $n! = 1.2 \ldots n$ leží aspoň jedno prvočíslo.

Riešenie. Pretože $n \geq 3$, je $n! - 1 \geq 2$. Preto v dôsledku $\mathbf{V}_{10}$ existuje prvočíslo p tak, že $p \mid (n! - 1)$, teda $p \leq n! - 1 < n!$. Ak by $p \leq n$, potom by p delilo $n!$ a tak v dôsledku $\mathbf{V}_1$ by p delilo aj $1 = n! - (n! - 1)$. Musí teda byť $p > n$, teda vcelku $n < p < n!$.

P13. Dokážte na základe **P12**, že všetkých prvočísel je nekonečne veľa.

Riešenie. Medzi 3 a 3! leží p_1, medzi 3! a (3!)! leží p_2 atď. Takto možno (indukciou) konštruovať nekonečnú postupnosť navzájom rôznych prvočísel.

ARITMETICKÉ FUNKCIE σ a τ

Aritmetickými funkciami nazývame funkcie definované na množine všetkých prirodzených čísel s hodnotami v množine komplexných čísel. Aritmetické funkcie sú teda vlastne postupnosti s komplexnými členmi, špeciálne teda môžu ich členy byť celými resp. prirodzenými číslami.

Nám pôjde v ďalšom len o dve také funkcie, a to σ a τ. Funkcia σ (τ) je definovaná takto:
ak n je prirodzené číslo, potom $\sigma(n)$ ($\tau(n)$) značí súčet (počet) prirodzených deliteľov čísla n.
Tak napr. $\sigma(1) = 1$, $\sigma(2) = 1 + 2 = 3$, $\sigma(12) = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = 28$, $\tau(1) = 1$, $\tau(2) = 2$, $\tau(3) = 2$, $\tau(4) = 3$, $\tau(12) = 6$.

Pri štúdiu rozmanitých otázok v teórii čísel je veľmi dôležité vedieť na základe znalosti kanonického rozkladu čísla $n > 1$ určiť hodnoty $\sigma(n)$ a $\tau(n)$. O tom pojednáva nasledujúca poučka.

V$_{11}$. Nech $n = q_1^{\alpha_1} . q_2^{\alpha_2} \dots q_k^{\alpha_k}$ je kanonický rozklad čísla $n > 1$. Potom

$$\sigma(n) = \frac{q_1^{\alpha_1+1} - 1}{q_1 - 1} \cdot \frac{q_2^{\alpha_2+1} - 1}{q_2 - 1} \dots \frac{q_k^{\alpha_k+1} - 1}{q_k - 1},$$
$$\tau(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1).$$

Dôkaz. Napred ukážeme, že prirodzené číslo d je deliteľom čísla n vtedy a len vtedy, keď má tvar

$$d = q_1^{\beta_1} . q_2^{\beta_2} \dots q_k^{\beta_k}, \tag{15}$$

kde $0 \leqq \beta_i \leqq \alpha_i$ $(i = 1, 2, \dots k)$. Ak d má tvar (15), potom je zrejme deliteľom čísla n, vyplýva to ihneď zo zrejmej rovnosti

$$q_1^{\alpha_1} . q_2^{\alpha_2} \dots q_k^{\alpha_k} = (q_1^{\beta_1} . q_2^{\beta_2} \dots q_k^{\beta_k}) . (q_1^{\alpha_1 - \beta_1} . q_2^{\alpha_2 - \beta_2} \dots q_k^{\alpha_k - \beta_k}).$$

Obrátene, ak $d \mid n$, potom existuje prirodzené n' tak, že $n = dn'$, teda $dn' = q_1^{\alpha_1} . q_2^{\alpha_2} \dots q_k^{\alpha_k}$. Z tejto rovnosti na základe **V**$_{10}$ vyplýva, že v prípade $d > 1$ v kanonickom rozklade čísla d môžu vystupovať len prvočísla q_i a to s exponentami nie väčšími než α_i $(i = 1, 2, \dots k)$. Teda $d > 1$ musí mať tvar (15). Ak $d = 1$, dostaneme ho z (15) pri $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k = 0$.

Z vety **V**$_{10}$ vyplýva, že dve čísla

$$d = q_1^{\beta_1} . q_2^{\beta_2} \dots q_k^{\beta_k}, \; d' = q_1^{\beta'_1} . q_2^{\beta'_2} \dots q_k^{\beta'_k}$$

sú rôzne, ak existuje i tak, že $\beta_i \neq \beta'_i$. Odtiaľ vyplýva, že všetkých prirodzených deliteľov čísla n je práve toľko, koľko je rôznych k — tic $(\beta_1, \beta_2, \dots \beta_k)$, $0 \leqq \beta_i \leqq \alpha_i$ $(i = 1, 2, \dots, k)$. Týchto k-tic je zrejme $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$, teda $\tau(n) = (\alpha_1 + 1).(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$.

Ďalej $\sigma(n)$ je rovno súčtu všetkých čísel (15) a tento súčet možno napísať vo tvare
$(1 + q_1 + q_1^2 + \ldots + q_1^{\alpha_1}).(1 + q_2 + q_2^2 + \ldots + q_2^{\alpha_2}) \ldots$
$(16) \ldots (1 + q_k + q_k^2 + \ldots + q_k^{\alpha_k})$.
Skutočne, ak v (16) vykonáme naznačené násobenie, objaví sa tam každé z čísel d práve raz. Na základe vzorca pre geometrický súčet dostávame odtiaľ

$$\sigma(n) = \frac{q_1^{\alpha_1+1} - 1}{q_1 - 1} \cdot \frac{q_2^{\alpha_2+1} - 1}{q_2 - 1} \cdots \frac{q_k^{\alpha_k+1} - 1}{q_k - 1}$$

P14. Aký je počet všetkých prirodzených deliteľov čísla 100?

P15. Nájdite všetky tie prirodzené čísla n, pre ktoré je $\tau(n) = 2$, $\tau(n + 1) = 3$.

Riešenie. Z $\tau(n) = 2$ vyplýva, že n je prvočíslo. Z $\tau(n + 1) = 3$ vyplýva zase, že $n + 1$ musí mať tvar $n + 1 = q^2$, q je prvočíslo. Odtiaľ $n = (q - 1).(q + 1)$. Ak $q - 1 > 1$, potom n nie je prvočíslo. Musí teda byť $q - 1 = 1$, $q = 2$, $n + 1 = 4$, $n = 3$. Obrátene $\tau(3) = 2$, $\tau(3 + 1) = \tau(4) = 3$.

P16. Nájdite prirodzené n, ak viete, že $3 \mid n$, $4 \mid n$, $\tau(n) = 14$.

Riešenie. Keďže $4 \mid n$, aj $2 \mid n$. Preto ak $n =$

$$q_1^{\alpha_1} \cdot q_2^{\alpha_2} \cdots q_k^{\alpha_k}$$

je kanonický rozklad čísla n, musí byť $k \geq 2$. Ďalej $\tau(n) = 14 = 2.7 = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_k + 1)$. Pretože 2, 7 sú prvočísla, musí byť $k \leq 2$, teda $k = 2$, $n = q_1^{\alpha_1} \cdot q_2^{\alpha_2}$, $q_1 = 2$, $q_2 = 3$. Potom je buď $\alpha_1 + 1 = 2$, $\alpha_2 + 1 = 7$ alebo $\alpha_1 + 1 = 7$, $\alpha_2 + 1 = 2$. V prvom prípade $\alpha_1 = 1$, $n = 2.3^6$ a n nie je deliteľné číslom 4. Musí teda byť $\alpha_1 + 1 = 7$, $\alpha_2 + 1 = 2$, $n = 2^6.3 = 192$. Obrátene pre $n = 192$ platí $3 \mid n$, $4 \mid n$, $\tau(n) = 14$.

P17. Vypočítajte $\sigma(100)$, $\sigma(128)$, $\sigma(45)$.

P18. Ak a, b sú nesúdeliteľné prirodzené čísla, potom $\sigma(a.b) = \sigma(a).\sigma(b)$, $\tau(a.b) = \tau(a).\tau(b)$. Dokážte to!

Návod. Použite $\mathbf{V}_{11}$.

P19. Dokážte, že $\sigma(n) = n + 1$ vtedy a len vtedy, keď n je prvočíslo!

P20. Dokážte, že pre každé zložené n je $\sigma(n) \geqq \geqq 1 + \sqrt{n} + n$; pre nekonečne mnoho n je $\sigma(n) = 1 + \sqrt{n} + n$ a tiež pre nekonečne mnoho n je $\sigma(n) > 1 + \sqrt{n} + n$.

Návod. Nech p je najmenší netriviálny deliteľ čísla n. Potom $n = pn_1, n > n_1 > 1$ a tak aj n_1 je netriviálny deliteľ čísla n. Z definície p vyplýva $n_1^2 \geqq pn_1 = n$, $n_1 \geqq \sqrt{n}$. Pre $n = p^2$ (p je prvočíslo) je $\sigma(n) = 1 + p + p^2 = 1 + \sqrt{n} + n$.

Pre $n = p^3$ (p je prvočíslo) dostanete $\sigma(n) > 1 + \sqrt{n} + n$.

P21. Nájdite všetky tie prvočísla p, pre ktoré $\sigma(p)$ je druhou mocninou prirodzeného čísla!

P22. Dokážte, že rovnica s neznámou x : $\sigma(x) = x + 1$ má nekonečne mnoho riešení a rovnica $\sigma(x) = x + k$ (k je pevne zvolené prirodzené číslo > 1) má len konečný počet riešení v prirodzených x.

Návod. Použite $\mathbf{P}_{19}$, $\mathbf{P}_{20}$.

2. kapitola

DOKONALÉ A SPRIATELENÉ ČÍSLA

DOKONOLÉ ČÍSLA (PRVÉHO DRUHU)

Každé číslo $n > 1$ má aspoň dvoch deliteľov, a to čísla 1 a n, preto $\sigma(n) \geq n + 1$. Ak skúmame veľkosť $\sigma(n)$ v porovnaní s dvojnásobkom čísla n, môžeme všetky prirodzené čísla $n > 1$ rozdeliť do troch množín, z ktorých žiadne dve nemajú spoločné prvky. Prvú množinu tvoria tie čísla $n > 1$, pre ktoré $\sigma(n) < 2n$. Tieto čísla nazývame *číslami deficientnými* (numeri deficientes). Sem patria všetky prvočísla, teda nekonečne veľa čísel patrí do tejto množiny. Druhú množinu tvoria tie čísla $n > 1$, pre ktoré $\sigma(n) > 2n$. Tieto čísla nazývame *číslami abundantnými* (numeri abundantes). Sem patria napr. všetky čísla tvaru $2^k.3$, kde $k > 1$. Naozaj, ak $n = 2^k.3$, $k > 1$, potom na základe $\mathbf{V}_{11}$

$$\sigma(n) = \frac{2^{k+1} - 1}{2 - 1} \frac{3^2 - 1}{3 - 1} = (2^{k+1} - 1).4 > 2.(2^k.3) = 2n.$$

Teda aj táto množina obsahuje nekonečne mnoho čísel. Konečne tretiu množinu tvoria tie čísla $n > 1$, pre ktoré $\sigma(n) = 2n$. Tieto čísla nazývame dokonalými, *perfektnými* (numeri perfecti), niekedy aj podrobnejšie *dokonalými číslami prvého druhu.*

Preskúmajme podrobnejšie podmienku $\sigma(n) = 2n$. Z tejto

rovnosti dostávame $\sigma(n) - n = n$. Číslo $\sigma(n) - n$ sa zrejme rovná súčtu všetkých tých prirodzených deliteľov čísla $n > 1$, ktoré sú menšie než n. Takýchto deliteľov nazývame pravými deliteľmi čísla n. Teda ak $n > 1$ je dokonalé, potom sa rovná súčtu všetkých svojich pravých deliteľov. Obrátene, ak $n > 1$ je rovné súčtu všetkých svojich pravých deliteľov, potom $\sigma(n) - n = n$, odtiaľ $\sigma(n) = 2n$, teda n je dokonalé. Tým sme dokázali poučku.

V_{12}. Číslo $n > 1$ je dokonalé (prvého druhu) vtedy a len vtedy, keď sa rovná súčtu všetkých svojich pravých deliteľov.

Na základe V_{12} možno teda dokonalé čísla (prvého druhu) definovať aj tak, že sú to tie čísla $n > 1$, ktoré sa rovnajú súčtu všetkých svojich pravých deliteľov.

Videli sme, že aj množina všetkých deficientných, aj množina všetkých abundantných čísel je nekonečná. Podobný výsledok nevieme dokázať o dokonalých číslach a nevieme ani dokázať, že všetkých dokonalých čísel je len konečne mnoho. Hoci pojem dokonalého čísla bol známy už *matematikom Pythagorovej školy* (6. st. pred n. l.) a *Euklidovi* (4. st. pred n. l.), dodnes poznáme len 23 dokonalých čísel. Najmenším z nich je číslo 6 ($= 1 + 2 + 3$). Najväčšie známe dokonalé číslo je $2^{11\,212}.(2^{11\,213} - 1)$. Toto číslo napísané v desiatkovej sústave má 6751 cifier.

Všetky dodnes známe dokonalé čísla sú párne, nepoznáme ani jedno nepárne dokonalé číslo a ani nevieme dokázať existenciu alebo neexistenciu takého čísla. Existuje početná skupina matematických viet, ktoré udávajú nutné podmienky k tomu, aby nepárne číslo bolo dokonalým. Ak ovšem nejaké nepárne číslo tieto podmienky spĺňa, ešte nemusí byť dokonalým. Už od *L. Eulera* (1707—1783) pochádza nasledujúca veta o nepárnych dokonalých číslach.

V_{13}. Ak $n > 1$ je nepárne dokonalé číslo, potom n musí

mať tvar: $n = p^{4k+1}.N^2$, kde k je celé, $k \geq 0$, p je prvočíslo tvaru $4s + 1$ ($s \geq 1$) a N nie je deliteľné číslom p.

Dôkaz. Nech n je nepárne číslo > 1, nech n je dokonalé. Ak $n = p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}$ je kanonický rozklad čísla n, potom v dôsledku $\mathbf{V}_{3c}$ sú všetky prvočísla p_i ($i = 1, 2, \ldots r$) nepárne. Keďže n je dokonalé, dostávame na základe vety $\mathbf{V}_{11}$

$$(14') \quad \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} \cdot \ldots \cdot \frac{p_r^{\alpha_r+1} - 1}{p_r - 1} = 2n.$$

Uvážme, že čísla $\frac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1}$ ($i = 1, 2, \ldots r$) sú celé. Keďže $2n$ je párne číslo, je aj súčin vľavo v (14′) párnym číslom a tak v dôsledku $\mathbf{V}_9$ existuje j tak, že $2 \mid \frac{p_j^{\alpha_j+1} - 1}{p_j - 1}$. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $j = 1$. Ak by $2n$ bolo deliteľné číslom 4, vyplývala by odtiaľ deliteľnosť čísla n číslom 2. Preto $2n$ nie je deliteľné číslom 4 a tak ani ľavá strana v (14′) nie je deliteľná číslom 4. Z toho ľahko vyplýva, že čísla $\frac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1}$ ($i = 2, 3, \ldots r$) musia byť nepárne. Uvážme, že $\frac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1} = 1 + p_i + p_i^2 + \ldots + p_i^{\alpha_i}$.

Pretože p_i ($i = 2, 3, \ldots r$) je nepárne, je aj každé z čísel p_i^n (n je prirodzené) nepárne a tak vpravo máme súčet $\alpha_i + 1$ nepárnych čísel. Pretože tento súčet je nepárnym číslom, musí byť počet sčítancov v ňom nepárny (pozri $\mathbf{V}_{3b}$) a tak $\alpha_i + 1 = 2l_i + 1$, odtiaľ $\alpha_i = 2l_i (i = 2, 3, \ldots r)$. Položme $N = p_2^{l_2}.p_3^{l_3} \ldots p_r^{l_r}$, potom N je zrejme nesúdeliteľné s $p_1^{\alpha_1}$ a $n = p_1^{\alpha_1}.N^2$.

Keďže $\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1} = 1 + p_1 + p_1^2 + \ldots + p_1^{\alpha_1}$ je párne, podobnou úvahou predošlej zistíme, že α_1 musí byť nepárne. Položme $\alpha_1 = 2l + 1$. Potom na základe známej už použitej identity $x^n - 1 = (x-1).(1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1})$ dostaneme $\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1} = \frac{p_1^{2(l+1)}-1}{p_1-1} =$

$$= \frac{(p_1^2)^{l+1}-1}{p_1-1} = \frac{(p_1^2-1).(1+p_1^2+p_1^4+\ldots+p_1^{2l})}{p_1-1} =$$

$$= (p_1+1).(1+p_1^2+p_1^4+\ldots+p_1^{2l}).$$

Keďže p_1 je nepárne, vyplýva z V_3 ľahko, že p_1 musí mať tvar $4s + 1$ alebo $4s + 3$. Ak $p_1 = 4s + 3$ $(s \geqq 0)$, potom $p_1 + 1 = 4.(s + 1)$ je deliteľné číslom 4 a tak na základe (14″) aj $\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}$ a potom aj $2n$ je deliteľné číslom 4. Musí teda p_1 mať tvar $p_1 = 4s + 1 (s \geqq 1)$.

Ďalej

$$(14''') \qquad 1 + p_1^2 + p_1^4 + \ldots + p_1^{2l}$$

musí byť nepárne (inak by pravá a potom aj ľavá strana v (14″) bola deliteľná číslom 4). Keďže každý zpomedzi sčítancov v (14‴) je nepárny, musí byť počet sčítancov v (14‴) nepárne číslo (pozri V_{3b}). Teda $l + 1 = 2k + 1$, $1 + \frac{\alpha_1 - 1}{2} = 2k + 1$, $\alpha_1 = 4k + 1$, $k \geqq 0$. Tým je dôkaz vety skončený.

Dnes je už známe, že nepárne dokonalé čísla, ak vôbec existujú, majú tvar $12k + 1$ alebo $36k + 9$ $(k \geqq 1)$ a žiadne nepárne číslo menšie než 10^{20} nie je dokonalé.

Vráťme sa k párnym dokonalým číslam. Medzi klasické výsledky teorie čísel patrí nasledujúca veta, podľa ktorej

možno rozhodovať, či dané párne číslo je dokonalé alebo nie.

V$_{14}$. Párne číslo $n > 1$ je dokonalé vtedy a len vtedy, keď má tvar $n = 2^{s-1}.(2^s - 1)$, kde s je prirodzené, $s > 1$ a $2^s - 1$ je prvočíslo.

Dôkaz. Nech n má uvedený tvar. Označme $p = 2^s - 1$. Potom $n = 2^{s-1}.p$ je kanonický rozklad čísla n a tak na základe $\mathbf{V}_{11}$ $\sigma(n) = \dfrac{2^s - 1}{2 - 1} \dfrac{p^2 - 1}{p - 1} =$

$$= (2^s - 1) \frac{(p - 1)(p + 1)}{p - 1} = (2^s - 1).(p + 1) =$$

$= 2^s.p - p + 2^s - 1 = 2^s.p$, teda $\sigma(n) = 2(2^{s-1}.p) =$ $= 2n$, n je dokonalé.

Nech teraz obrátene, $n > 1$ je párne dokonalé číslo. Napred ľahko nahliadneme, že v kanonickom rozklade čísla n musí okrem prvočísla 2 vystupovať aj nejaké iné (teda nepárne) prvočíslo. Ak by tomu tak nebolo, potom by n malo tvar $n = 2^\alpha$, $\alpha \geqq 1$ a z predpokladu, že n je dokonalé, dostávame na základe $\mathbf{V}_{11}$

$$\sigma(n) = \frac{2^{\alpha+1} - 1}{2 - 1} = 2n = 2^{\alpha+1},$$

odtiaľ $2^{\alpha+1} - 1 = 2^{\alpha+1}$ a to je zrejme nesprávna rovnosť. Teda kanonický rozklad čísla n musí mať tvar $n = 2^\alpha.p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$, $k \geqq 1$, α, $\alpha_i (i = 1, 2, \ldots k)$ sú prirodzené čísla, $p_i (i = 1, 2, \ldots k)$ sú nepárne prvočísla.

Položme $l = p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$, potom $l > 1$, l je nepárne číslo. Ďalej položme $\alpha = s - 1$, potom $s = \alpha + 1 > 1$. Keďže n je dokonalé, pomocou $\mathbf{V}_{11}$ dostávame

$$\sigma(n) = \frac{2^s - 1}{2 - 1} \cdot \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdots \frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1} =$$
$$= (2^s - 1).\sigma(l) = 2^s.l,$$
keďže $\sigma(l) = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdots \frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1}$. Rovnosť

$$(2^s - 1).\sigma(l) = 2^s.l \tag{17}$$

ukazuje, že 2^s delí súčin $(2^s - 1).\sigma(l)$. Z vety $\mathbf{V}_1$ vyplýva, že číslo 2^s je deliteľné len číslami $1, -1, \pm 2^r$, $1 \leqq r \leqq s$. Pretože $2^s - 1$ je nepárne, ľahko odtiaľ vyplýva, že čísla 2^s a $2^s - 1$ sú nesúdeliteľné. Z fundamentálnej vety aritmetiky $\mathbf{V}_6$ vyplýva, že $2^s \mid \sigma(l)$. Preto existuje $q \geqq 1$ tak, že $\sigma(l) = 2^s.q$. Dosaďme za $\sigma(l)$ z poslednej rovnosti do (17), dostaneme po vykrátení číslom 2^s

$$(2^s - 1).q = l. \tag{18}$$

Odtiaľ ľahkou úpravou dostaneme

$$2^s.q = l + q, \tag{19}$$

teda

$$\sigma(l) = l + q. \tag{20}$$

Číslo $l > 1$ je deliteľné číslom l a na základe (18) aj číslom q. Z rovnosti (19) vyplýva ($s > 1$!) $l \neq q$. (20) ukazuje, že číslo l nemôže mať iných prirodzených deliteľov, než sú l a q. Ak by totiž nejaké $d \geqq 1$, $d \neq l, q$, delilo l, potom by súčet všetkých prirodzených deliteľov čísla l bol aspoň rovný súčtu $l + q + d$ a to by viedlo ku sporu s (20). Teda l, q sú jedinými prirodzenými deliteľmi čísla l a tak l má práve dvoch rôznych prirodzených deliteľov. Preto l musí byť prvočíslo a $q = 1$. Z (18) potom dostávame $l = 2^s - 1$ a $n = 2^{s-1}.l = 2^{s-1}.(2^s - 1)$, kde $l = 2^s - 1$

je prvočíslo. Tým sme dokázali, že ak n je párne dokonalé číslo, potom n má tvar $2^{s-1}.(2^s - 1)$, kde $s > 1$ a $2^s - 1$ je prvočíslo. Tým je dôkaz vety skončený.

Na prvý pohľad sa zdá, že $\mathbf{V}_{14}$ nám umožňuje pohodlne hľadať párne dokonalé čísla. No nie je tomu tak, celá ťažkosť spočíva v tom, že v poučke $\mathbf{V}_{14}$ sa vyžaduje, aby $2^s - 1$ bolo prvočíslo. Použiteľnosť vety $\mathbf{V}_{14}$ vyžaduje riešiť túto otázku: Pre aké hodnoty $s > 1$ je $2^s - 1$ prvočíslo? Riešenie tejto otázky je veľmi ťažké, dodnes neuskutočnené. Čísla $M_s = 2^s - 1$ ($s = 1, 2, \ldots$) nazývame *Mersennovými číslami* (M. Mersenne (1588—1648) bol francúzskym matematikom). Prvočísla tohoto tvaru nazývame Mersennovými prvočíslami. Ak s je zložené a napr. $s = k.l$, $1 < k < s$, $1 < l < s$, potom $2^s - 1 = 2^{kl} - 1 = (2^k)^l - 1$ odtiaľ vidieť, že $M_s = 2^s - 1$ je deliteľné číslom $a = 2^k - 1$, $1 < a < M_s$, takže M_s je zložené.

Teda M_s môže byť prvočíslom, len ak s je prvočíslo. Ale ani skutočnosť, že s je prvočíslo, nezaručuje, že M_s je prvočíslo. Tak pre $s = 2, 3, 5, 7$ je M_s prvočíslo (o tom sa čitateľ ľahko presvedčí), no $M_{11} = 2^{11} - 1 = 2047$ je zložené číslo, ako ukazuje rovnosť $2047 = 23.89$.

Teda problém hľadania párnych dokonalých čísel je v dôsledku $\mathbf{V}_{14}$ prevedený na veľmi ťažký problém hľadania Mersennových prvočísel. Dodnes poznáme len 23 Mersennových prvočísel a teda aj práve toľko párnych dokonalých čísel. Najväčšie známe Mersennovo prvočíslo je $M_{11\,213} = 2^{11\,213} - 1$ a to je aj súčasne najväčšie známe prvočíslo vôbec.

Existujú viaceré matematické postupy, ktoré slúžia k overovaniu toho, či $M_p = 2^p - 1$ (p je prvočíslo) je prvočíslo. Tieto postupy kladú obyčajne veľké nároky na zdĺhavé výpočty a preto predtým, než boli skonštruované moderné matematické počítacie stroje, nenachádzali väčšie uplatnenie. Pomocou niektorých týchto postupov možno

vypracovať pre elektronkové počítacie stroje programy na overovanie prvočíselnosti čísel M_p, p je prvočíslo. Medzi takéto postupy patrí aj postup na overovanie prvočíselnosti Mersennových čísel, založený na tejto poučke, ktorú uvedieme bez dôkazu.

V15. Nech p je nepárne prvočíslo. Potom M_p je prvočíslom vtedy a len vtedy, keď M_p je deliteľom čísla μ_{p-1}, ktoré vypočítame pomocou tohoto (rekurentného) postupu: kladieme $\mu_1 = 4$,

$$\mu_2 = \mu_1^2 - 2, \mu_3 = \mu_2^2 - 2, \ldots \mu_{p-1}^2 = \mu_{p-2} - 2.$$

Použitím matematických počítacích strojov bolo pomocou $\mathbf{V}_{15}$ zistené, že zpomedzi čísel M_p (p prvočíslo), $p < 12\,000$ sú prvočíslami tie a len tie čísla M_p, kde $p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127, 521, 607, 1279, 2203, 2281, 3217, 4253, 4423, 9689, 9941, 11\,213$. To je spolu 23 Mersennových prvočísel.

Existuje veľa hypotéz, ktoré sa týkajú dokonalých čísel. Väčšina z nich je doteraz nerozriešená. Tak napr. nie je ani dokázaná ani vyvrátená hypotéza, podľa ktorej existuje nekonečne mnoho dokonalých čísel. Iná taká hypotéza tvrdí, že ak $M_p = 2^p - 1$ je prvočíslo, potom aj $M_{M_p} = 2^{M_p} - 1 = 2^{2^p - 1} - 1$ je tiež prvočíslo. Bolo dokázané, že táto hypotéza je nesprávna. Číslo $M_{13} = 8191$ je totiž prvočíslo, no $M_{M_{13}} = 2^{8191} - 1$ je zložené. Dôkaz uvedeného tvrdenia o čísle $M_{M_{13}}$ bol uskutočnený na matematickom počítacom stroji pomocou poučky $\mathbf{V}_{15}$ a celý výpočet na stroji trval vyše 100 hodín. Poznamenajme, že i keď vieme, že $2^{8191} - 1$ je zložené číslo, nepoznáme doteraz žiadneho jeho netriviálneho deliteľa.

Pojem dokonalého čísla možno zovšeobecniť, ako ukazuje nasledujúca definícia.

D5. Nech $m > 1$. Hovoríme, že číslo $n > 1$ je m-násobne dokonalé, ak $\sigma(n) = mn$.

Teda dokonalé čísla sú práve tie čísla $n > 1$, ktoré sú dvojnásobne dokonalé.

Označme v ďalšom znakom Q_m množinu všetkých m-násobne dokonalých čísel. Je už známe, že ku každému m, $1 < m \leqq 8$ existuje aspoň jedno m-násobne dokonalé číslo. Teda každá z množín Q_m, $1 < m \leqq 8$ je neprázdna. Nie je známe, či podobné platí aj o množinách Q_m, $m > 8$.

K pojmu dokonalého čísla sa primyká aj pojem kvazi-dokonalého čísla.

D6. Číslo $n > 1$ sa nazýva kvazi-dokonalým, ak $\sigma(n) = 2n + 1$.

Poznamenajme, že dodnes nepoznáme ani jedno kvazi-dokonalé číslo.

P23. Dokážte, že $n > 1$ je kvazi-dokonalé vtedy a len vtedy, keď sa rovná súčtu všetkých svojich netriviálnych deliteľov.

P24. Nech $d_1, d_2, \ldots d_s$ sú všetky delitele čísla $n > 1$, väčšie než 1. Dokážte, že n je dokonalé vtedy a len vtedy, keď

$$1 = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \ldots + \frac{1}{d_s}.$$

Návod. Uvážte, že ak d delí n, potom aj prirodzené číslo $\frac{n}{d}$ delí n.

P25. Dokážte: ak $n \in Q_3$ a $3 \nmid n$, potom $3n \in Q_4$.

Návod. Použite $\mathbf{P}_{18}$!

P26. Nech n, k sú prirodzené čísla. Nech $3n \in Q_{4k}$, $3 \nmid n$. Potom $n \in Q_{3k}$. Dokažte to!

Návod. Ako v $\mathbf{P}_{25}$.

P27. Dokážte: $120 \in Q_3$, $2^5.3^2.5.7 \in Q_4$.

P28. Ak $n \in Q_5$, potom n musí mať viac než päť roznych prvočíselných deliteľov. Dokážte to!

Riešenie. Ak $n = p_1^{\alpha_1} . p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ (kanonický rozklad), potom

$$\sigma(n) = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \dots \frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1} < \frac{p_1^{\alpha_1+1}}{p_1 - 1} \dots$$

$$\dots \frac{p_k^{\alpha_k+1}}{p_k - 1} = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k} \frac{p_1}{p_1 - 1} \dots \frac{p_k}{p_k - 1}. \tag{21}$$

Nech $p_1 < p_2 < \dots < p_k$. Pretože $\frac{a}{a-1}$ sa zmenší, ak zväčšíme a a pretože $p_1 \geqq 2$, $p_2 \geqq 3$, $p_3 \geqq 5$, $p_4 \geqq 7$, $p_5 \geqq 11$, dostávame pri $k \geqq 5$ z (21)

$$\sigma(n) \leqq n \frac{2}{2-1} \frac{3}{3-1} \frac{5}{5-1} \frac{7}{7-1} \frac{11}{11-1} = \frac{77}{16} n < 5n.$$

DOKONALÉ ČÍSLA DRUHÉHO DRUHU

Dokonalými číslami (prvého druhu) sme nazvali tie čísla $n > 1$, ktoré sa rovnajú súčtu všetkých svojich pravých deliteľov. Nahradením slova „súčet" slovom „súčin" dochádzame k pojmu dokonalého čísla druhého druhu.

D7. Číslo $n > 1$ sa nazýva dokonalým číslom druhého druhu, ak sa rovná súčinu všetkých svojich pravých deliteľov.

Príkladom dokonalého čísla druhého druhu je číslo 6 (= 1. 2. 3.). Teda 6 je dokonalé číslo prvého i druhého druhu.

Zatiaľ čo dodnes nevieme, či množina všetkých dokonalých čísel prvého druhu je konečná a či nekonečná, je

podobná otázka pre dokonalé čísla druhého druhu úplne zodpovedaná v nasledujúcej poučke.

V16. Číslo $n > 1$ je dokonalé číslo druhého druhu vtedy a len vtedy, keď je buď treťou mocninou prvočísla alebo súčinom dvoch rôznych prvočísel.

Dôkaz. Ak $n = p^3$ alebo $n = p_1 . p_2$ (p, p_1, p_2 sú prvočísla, $p_1 \neq p_2$), potom v prípade $n = p^3$ sú pravými deliteľmi n čísla 1, p, p^2, v prípade $n = p_1 . p_2$ čísla 1, p_1, p_2, v oboch prípadoch vidieť, že n sa rovná súčinu všetkých svojich pravých deliteľov, teda n je dokonalé druhého druhu.

Nech obrátene $n > 1$ je dokonalé číslo druhého druhu. Ukážeme, že potom $n = p_1^3$ alebo $n = p_1 . p_2$, p_1, p_2 sú prvočísla, $p_1 \neq p_2$. Nech $n = p_1^{\alpha_1} . p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$ je kanonický rozklad čísla n. Položme $s = \tau(n)$, nech $d_1, d_2, \ldots d_s$ sú všetky prirodzené delitele čísla n, nech $1 = d_1 < d_2 < \ldots$ $\ldots < d_s = n$. Pretože n je dokonalé druhého druhu, je $n = d_1 . d_2 \ldots d_{s-1}$. Ak násobíme túto rovnosť na oboch stranách číslom $n = d_s$, dostaneme

$$n^2 = d_1 . d_2 \ldots d_s. \tag{22}$$

Uvážme, že spolu s číslom d, $d \mid n$ aj číslo $\frac{n}{d}$ delí n, preto $n = \frac{n}{d_1}, \frac{n}{d_2}, \ldots \frac{n}{d_s} = 1$ sú (všetky) prirodzené delitele čísla n. Preto

$$n^2 = \frac{n}{d_1} \cdot \frac{n}{d_2} \ldots \frac{n}{d_s}. \tag{23}$$

Ak vynásobíme (22), (23) dostaneme $n^4 = n^s$, odtiaľ $s = 4$. Teda ak n je dokonalé číslo druhého druhu, potom $\tau(n) = 4$. Vieme, že $\tau(n) = (\alpha_1 + 1) \ldots (\alpha_k + 1)$ (pozri V_{11}). V každej zátvorke vpravo sa nachádza číslo ≥ 2. Ak by

bolo $k > 2$, potom z predošlého by vyplývalo $\tau(n) \geq 2^3 = 8$. Keďže je $\tau(n) = 4 < 8$, musí byť $k \leq 2$, takže kanonickým rozkladom čísla n je buď $n = p_1^{\alpha_1} . p_2^{\alpha_2}$ alebo $n = p_1^{\alpha_1}$. Ak $n = p_1^{\alpha_1}$, potom z $\tau(n) = \alpha_1 + 1 = 4$ vyplýva $\alpha_1 = 3$, teda $n = p_1^3$. Ak $n = p_1^{\alpha_1} . p_2^{\alpha_2}$, potom z rovnosti $\tau(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) = 4$ vyplýva $\alpha_1 + 1 = 2$, $\alpha_2 + 1 = 2$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, teda $n = p_1 . p_2$. Tým je dôkaz vety skončený.

P29. Dokážte: Číslo $n > 1$ sa rovná súčinu všetkých svojich prirodzených deliteľov vtedy a len vtedy, keď n je prvočíslo.

P30. Ak n je zložené, potom súčin všetkých jeho prirodzených deliteľov je $\geq n^{\frac{3}{2}}$. Dokážte to!

Návod. Použite $\mathbf{P}_{20}$!

P31a). Nájdite také dokonalé číslo druhého druhu, ktoré je deliteľné číslom 7 a pre ktoré $\sigma(n) = 32$!

b) Dokážte, že 6 je jediné párne číslo, ktoré je dokonalým číslom prvého i druhého druhu!

Návod. Použite $\mathbf{V}_{14}$ a $\mathbf{V}_{16}$!

c) Dokážte, že neexistujú nepárne čísla, ktoré by boli súčasne dokonalé prvého i druhého druhu!

Návod. Použite $\mathbf{V}_{13}$ a $\mathbf{V}_{16}$!

SPRIATELENÉ ČÍSLA

D8. Dve prirodzené čísla $a, b, a \neq b$ nazývame spriatelenými, ak súčet všetkých pravých deliteľov čísla a sa rovná číslu b a súčet všetkých pravých deliteľov čísla b sa rovná číslu a.

Keďže súčet všetkých pravých deliteľov čísla $m > 0$

je $\sigma(m) - m$, sú a, b spriatelené, vtedy a len vtedy, keď $\sigma(a) - a = b$, $\sigma(b) - b = a$, teda vtedy a len vtedy, keď $\sigma(a) = \sigma(b) = a + b$.

Ak a, b sú spriatelené, potom množinu $\{a, b\}$ nazývame *dvojicou spriatelených čísel* a čísla a, b nazývame členmi tejto dvojice.

Už *Pythagorovi* (6. st. pred n. l.) bola známa dvojica $\{220, 284\}$ spriatelených čísel. Všetkými pravými deliteľmi čísla 220 sú čísla 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110 — ich súčet je 284 a všetkými pravými deliteľmi čísla 284 sú čísla 1, 2, 4, 7, 142 — ich súčet je 220.

Ďalšiu dvojicu spriatelených čísel objavil *P. Fermat* (1601—1665). Bola to dvojica $\{2^4.23.47, 2^4.1151\}$. Dvojicu $\{2^7.191.383, 2^7.73727\}$ spriatelených čísel objavil *R. Descartes* (1596—1650). Viac než 59 dvojíc spriatelených čísel našiel *L. Euler*. V 19. storočí bolo známych 66 dvojíc spriatelených čísel. Dnes poznáme už asi 390 takých dvojíc. Z najmenších členov pozostáva už uvedená dvojica $\{220, 284\}$.

Dodnes nevieme, či všetkých dvojic spriatelených čísel je konečne a či nekonečne mnoho. Dodnes nepoznáme ani jednu takú dvojicu spriatelených čísel, ktorej jedným členom by bolo párne a druhým nepárne číslo. Doteraz uvedené príklady dvojíc spriatelených čísel sú také, že oba ich členy sú párne čísla. Poznáme dnes aj takú dvojicu spriatelených čísel, ktorej oba členy sú nepárne. Je to napr. dvojica $\{3^3.5.7.11, 3.5.7.139\}$. Dodnes nie je známa dvojica spriatelených čísel, ktorej členy by boli nesúdeliteľné. Bolo dokázané, že ak taká dvojica existuje, potom každý jej člen musí byť väčší než 10^{23} a súčin jej členov musí byť deliteľný viac než dvadsiatimi rôznymi prvočíslami.

V 9 st. n. l. udal arabský matematik *Thâbit ben Korrah* túto formulu pre hľadanie dvojíc spriatelených čísel.

V17. Ak $p = 3.2^{n-1} - 1$, $q = 3.2^n - 1$, $r = 9.2^{2n-1} - 1$

$(n > 1)$ sú prvočísla, potom $2^n.pq$ a $2^n.r$ sú spriatelené čísla.

Dôkaz. Za predpokladov vety na základe $\mathbf{V}_{11}$ dostávame

$$\sigma(2^n.pq) = (2^{n+1} - 1).(p + 1)(q + 1) = (2^{n+1} - 1).$$
$$.3.2^{n-1}.3.2^n = (2^{n+1} - 1).9.2^{2n-1}, \sigma(2^n.r) =$$
$$= (2^{n+1} - 1).(r + 1) = (2^{n+1} - 1).9.2^{2n-1},$$

$$\text{teda } \sigma(2^n.pq) = \sigma(2^n.r).$$

Ďalej

$$2^n.pq + 2^n.r = 2^n.(pq + r) = 9.2^{2n-1}.(2^{n+1} - 1),$$

teda

$$\sigma(2^n.pq) = \sigma(2^n.r) = 2^n.pq + 2^n.r.$$

Pre $n = 2$ dostávame z predošlej vety dvojicu $\{220, 284\}$ spriatelených čísel, podobne dostaneme aj pre $n = 4$ a $n = 7$ dvojice spriatelených čísel. Pre žiadne iné $n < 200$ nie je splnený predpoklad prvočíselnosti čísel p, q, r a pre žiadne $n < 200$, $n \neq 2, 4, 7$ predošlá formula nedáva dvojicu spriatelených čísel.

P_{32}. Dokážte: Ak $p \neq q$, p, q sú prvočísla, potom p^3, q^3 nie sú spriatelené čísla.

P_{33}. Pokúste sa zovšeobecniť tvrdenie z P_{32}. Na ostatné mocniny p^k, q^k $(k \neq 3)$ prvočísel p, q!

Návod. Postupujte v dôkaze nepriamo!

P_{34}. Dokážte, že dve rôzne dokonalé čísla druhého druhu, obe tvaru $p.q$, $p \neq q, p, q$ nepárne prvočísla, nie sú spriatelené.

Riešenie. Nech $p_1.q_1$, $p_2.q_2$ sú dve dokonalé čísla druhého druhu, uvedeného tvaru. Nech napr.

$$q_2 = \max(p_1, q_1, p_2, q_2).$$

Z predpokladu $\sigma(p_1.q_1) = \sigma(p_2.q_2) = p_1.q_1 + p_2.q_2$ vyplýva $(p_1 + 1)(q_1 + 1) = p_1.q_1 + p_2.q_2$, odtiaľ dostaneme

(25) $$p_2 q_2 = p_1 + q_1 + 1.$$

Na základe predpokladu vety je $p_1 \neq q_1$. Nech napr. $q_1 > p_1$, teda $q_1 \geqq p_1 + 2$ a tak $p_2 q_2 \geqq 3q_2 > 2q_2 \geqq 2q_1 \geqq p_1 + q_1 + 2$, teda $p_2 q_2 > p_1 + q_1 + 2$ a to je vo spore s (25).

P35. Nech $a \in Q_m$, $b \in Q_k$, $a \neq b$. Nech b, m sú nesúdeliteľné. Dokážte, že potom a, b nie sú spriatelené!

Návod. Postupujte podobne ako v riešení $\mathbf{P}_{34}$.

Už z toho, čo sme doteraz povedali o dokonalých a spriatelených číslach sa dá vytušiť, že dokonalé a spriatelené čísla sú číslami veľmi vzácnymi. Túto domnienku potvrdzuje aj nasledujúci výsledok, ktorý podáme v trochu populárnej forme: Nech A značí ktorúkoľvek z nasledujúcich troch množín: množina všetkých dokonalých čísel prvého druhu, množina všetkých dokonalých čísel druhého druhu, množina všetkých spriatelených čísel. Potom A má túto vlastnosť: ak $\{1, 2, 3, \ldots n\}$ nazveme úsekom množiny všetkých prirodzených čísel a číslo n dĺžkou tohoto úseku, potom ku každému prirodzenému číslu m existuje také prirodzené číslo n_0, že všetky úseky, ktorých dĺžka n je väčšia než n_0 obsahujú menej než $\frac{n}{m}$ čísel patriacich do A. Tak teda napr. aj k číslu $m = 10^6$ existuje také n_0, že zpomedzi čísel $\{1, 2, \ldots n\}$, $n > n_0$ patrí do množiny A menej než $\frac{n}{10^6}$, teda menej než miliontina počtu týchto čísel. Stručne rečeno, všetky dosť dlhé úseky prirodzených čísel obsahujú menej čísel z množiny A než činí miliontina počtu ich prvkov. Podrobnejšie o týchto otázkach pohovoríme v tretej kapitole.

3. kapitola

POJEM HUSTOTY MNOŽINY V TEORII ČÍSEL A DOKONALÉ ČÍSLA

POJEM HUSTOTY A HUSTOTY NIEKTORÝCH MNOŽÍN

Čitateľovi je možno známy pojem číselnej postupnosti. Tým máme na mysli funkciu definovanú na množine P všetkých prirodzených čísel. Ak označíme znakom a_n hodnotu tejto funkcie v čísle $n \in P$, potom túto funkciu (postupnosť) označujeme znakom

$$a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, \ldots$$

alebo stručnejšie znakom $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Reálne čísla a_n ($n = 1, 2, \ldots$) nazývame pritom členmi spomenutej postupnosti.

Zo strednej školy je známy pojem nulovej postupnosti (pozri učebnicu matematiky pre 3. roč. SVŠ). Pripomeňme si tento pojem. Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva nulová, ak ku každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje prirodzené číslo n_0 tak, že pre každé prirodzené číslo $n > n_0$ je $|a_n| < \varepsilon$. Na strednej škole sa dokazuje, že geometrická postupnosť $\{q^n\}_{n=1}^{\infty}$ je nulová, ak $|q| < 1$.

P36. Nech a je číslo a nech pre každé $n = 1, 2, 3, \ldots$ je $a_n = a$ (postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazývame v tomto prí-

pade štacionárnou alebo konštantnou — spomeňte si na pojem konštantnej funkcie). Takto definovaná postupnosť je nulová vtedy a len vtedy, keď $a = 0$. Dokážte to!

Návod: Jediné číslo, ktorého absolutná hodnota je menšia než ľubovoľné kladné (reálne) číslo, je 0.

V16. Ak $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú dve nulové postupnosti a c je dané číslo, potom aj postupnosti $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n - b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{ca_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú nulové.

Dôkaz. Nech $\varepsilon > 0$. K číslu $\frac{\varepsilon}{2}$ existujú prirodzené čísla n_1 a n_2 tak, že pre každé $n > n_1$ je $|a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ a pre každé $n > n_2$ je $|b_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Pre $n > n_0 = \max(n_1, n_2)$ platia obe nerovnosti $|a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|b_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ a na základe známej vlastnosti absolutnej hodnoty je $|a_n \pm b_n| \leqq |a_n| + |b_n|$. Odtiaľ pre $n > n_1$ dostávame $|a_n \pm b_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Ak $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nulová a c je číslo, potom ako vieme zo strednej školy (pozri učebnicu pre 3. roč. SVŠ), je aj $\{c\,a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nulová.

Pojem nulovej postupnosti použijeme v nasledujúcej definícii.

D9. Hovoríme, že číslo a je limitou postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ (v stručnom zápise $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ alebo $a_n \to a$), ak postupnosť $\{a_n - a\}_{n=1}^{\infty}$ je nulová.

Ak a je limitou postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, hovoríme tiež, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k číslu a.

Z definície $\mathbf{D}_9$ ihneď je zrejmý tento poznatok: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nulová vtedy a len vtedy, keď má limitu 0.

Naskytá sa prirodzená otázka, koľko limít môže mať postupnosť. O tom pojednáva nasledujúca poučka.

V$_{19}$. Každá postupnosť má najviac jednu limitu.

Dôkaz. Nech postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limity a, a'. Potom na základe definície $\mathbf{D}_9$ sú obe postupnosti $\{a_n - a\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n - a'\}_{n=1}^{\infty}$ nulové a preto v dôsledku $\mathbf{V}_{18}$ je aj postupnosť $\{a' - a\}_{n=1}^{\infty} = \{(a_n - a) - (a_n - a')\}_{n=1}^{\infty}$ nulová. To je však konštantná postupnosť (každý jej člen je rovný číslu $a' - a$). Na základe $\mathbf{P}_{36}$ je $a' - a = 0$, $a' = a$. Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nemôže mať teda dve rôzne a teda ani viac rôznych limít.

Predošlá veta nezaručuje existenciu limity (to ani nie je možné — pozri $\mathbf{P}_{37}$), zaručuje len jednoznačnosť limity, tj. ak daná postupnosť má limitu, potom má jedinú limitu. Nie každá postupnosť má limitu. Ukazuje to aj nasledujúci príklad.

P$_{37}$. Presvedčte sa, že postupnosť $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ nemá limitu.

Návod. Ukážte, že žiadne číslo a nemôže byť limitou tej postupnosti. Rozoznávajte pri tom prípady $a = 1$, $a = -1$, $a \neq 1, -1$.

P$_{38}$. Každá konštantná postupnosť má limitu, rovnú ľubovoľnému členu tej postupnosti.

P39. Dokážte, že $\left\{\frac{n}{n+3}\right\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu 1 a $\left\{\frac{2n+6)}{-3n+4}\right\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu $-\frac{2}{3}$.

V20. Ak $a_n \to a$, $b_n \to b$, potom $a_n + b_n \to a + b$, $a_n - b_n \to a - b$.

Dôkaz. Postupnosti $\{a_n - a\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n - b\}_{n=1}^{\infty}$ sú podľa predpokladu nulové. Na základe $\mathbf{V}_{18}$ sú aj $\{(a_n + b_n) - (a + b)\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{(a_n - b_n) - (a - b)\}_{n=1}^{\infty}$ nulové.

P40. Ak $a_n \to a$ a c je dané číslo, potom $ca_n \to ca$.
Návod: Použite $\mathbf{V}_{18}$!

V21. Nech $0 \leqq a_n \leqq b_n$ pre každé $n = 1, 2, 3, \ldots$ Ak $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nulová, je aj $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nulová.

Dôkaz. Dôkaz vyplýva priamo z definície nulovej postupnosti.

P41. Dokážte: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nulová vtedy a len vtedy, keď $\{|a_n|\}_{n=1}^{\infty}$ je nulová.

P42. Nech $a_n \to a$, $b_n \to b$, nech c_1, c_2 sú dané čísla. Dokážte, že postupnosť $\{c_1a_n + c_2b_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu $c_1a + c_2b$.
Návod: Použite $\mathbf{V}_{20}$ a $\mathbf{P}_{40}$!

P43. Dokažte, že postupnosť $\left\{\frac{1}{\sqrt[k]{n}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ (k je prirodzené, $k > 1$) je nulová.

Riešenie. K číslu $\varepsilon^k > 0$ existuje prirodzené číslo $n_0 \geq \frac{1}{\varepsilon^k}$. Potom pre $n > n_0$ je $\frac{1}{n} < \varepsilon^k$, odtiaľ $\frac{1}{\sqrt[k]{n}} < \varepsilon$.

Nasledujúcu vetu budeme často potrebovať v ďalších úvahách.

V22. Nech $a_n \to a$, $b_n \to b$ a nech pre každé n je $a_n \leqq b_n$. Potom $a \leqq b$.

Dôkaz. Postupujme nepriamo. Nech $a > b$. Potom $a - b > 0$ a tak na základe definície **D9** existuje prirodzené číslo n_1 tak, že pre všetky prirodzené čísla $n > n_1$ je

$$|a_n - a| < \frac{a-b}{2}. \tag{26}$$

Podobne existuje n_2 tak, že pre každé $n > n_2$ je

$$|b_n - b| < \frac{a-b}{2}. \tag{27}$$

Pre $n > n_0 = \max(n_1, n_2)$ platia nerovnosti (26), (27) a ovšem aj

$$a_n \leqq b_n. \tag{28}$$

Nech $n > n_0$. Keďže $a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}$, vyplýva z (26) správnosť nerovnosti $a_n > \frac{a+b}{2}$ (načrtnite si). Podobne z (27) vyplýva $b_n < \frac{a+b}{2}$ a tak $a_n > \frac{a+b}{2} > b_n$, $a_n > b_n$. To je spor s (28).

D10. Nech $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ je nejaká postupnosť prirodzených čísel. Potom postupnosť $a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots a_{n_k}, \ldots$ nazývame čiastočnou (vybranou) postupnosťou postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Tak napr. $a_2, a_4, \ldots a_{2k}, \ldots$ je čiastočnou postupnosťou postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

V23. Ak postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k číslu a, potom aj každá jej čiastočná postupnosť konverguje k číslu a.

Dôkaz. Nech $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ je nejaká čiastočná postupnosť postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, nech $\varepsilon > 0$. Keďže $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu a, existuje n_1 tak, že pre $n > n_0$ je $|a_n - a| < \varepsilon$. Ďalej existuje k_0 tak, že pre $k > k_0$ je $n_k < n_0$. Potom pre $k > k_0$ je na základe predošlého $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$. Teda predošlá nerovnosť platí pre všetky členy postupnosti $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ od istého člena počínajúc. Teda postupnosť $\{a_{n_k} - a\}_{k=1}^{\infty}$ je nulová a tak a je limitou postupnosti $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$.

P44. Dokažte pomocou vety **V23**, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ nemá limitu.

Návod: Vyšetrujte jej čiastočné postupnosti $\{a_{2k-1}\}_{k=1}^{\infty}$, $\{a_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$.

Pre ďalšie potreby bude účelné určiť limitu postupnosti $\left\{\frac{\log n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $\log n$ je dekadický logaritmus čísla n.

Ukážeme, že uvedená postupnosť je nulová.

V24. Pre každé celé $n \geqq 0$ je $2^n \geqq 1 + n$.

Dôkaz. Na základe binomickej vety je pre $n > 1$

$$2^n = (1+1)^n = 1 + n + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} \geqq 1 + n.$$

Pre $n = 0$ resp. $n = 1$ je správnosť tvrdenia zrejmá.

V25. Pre každé reálne číslo α je $2^\alpha > \alpha$.

Dôkaz. Nech n je najväčšie zpomedzi všetkých tých celých čísel k, pre ktoré $k \leqq \alpha$. Také číslo existuje na základe vlastností celých čísel spomínaných v úvode prvej kapitoly. Potom zrejme $n \geqq 0$, $n \leqq \alpha < n + 1$. Keďže funkcia $y = 2^x$ je rastúca, je $2^\alpha \geqq 2^n$ a podľa $\mathbf{V}_{24}$ je $2^n \geqq$ $\geqq 1 + n > \alpha$. Teda celkove

$$2^\alpha \geqq 2^n \geqq 1 + n > \alpha, \quad 2^\alpha > \alpha.$$

V26. Pre každé prirodzené n je $\log n < \sqrt{n}$.

Dôkaz. Na základe definície dekadického logaritmu máme $n = 10^{\log n}$, odtiaľ umocnením oboch strán na exponent $\frac{1}{2}$ dostaneme $\sqrt{n} = (\sqrt{10})^{\log n}$. Pretože $\sqrt{10} > 2$ a $\log n \geqq 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, dostávame odtiaľ $\sqrt{n} \geqq 2^{\log n}$ a tak na základe $\mathbf{V}_{25}$ je $\sqrt{n} > \log n$.

V27. Postupnosť $\left\{\frac{\log n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je nulová.

Dôkaz. Pre každé prirodzené číslo n platí na základe $\mathbf{V}_{26}$ $0 \leqq \frac{\log n}{n} \leqq \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$ a teraz stačí použiť $\mathbf{V}_{21}$ a $\mathbf{P}_{43}$.

Čitateľovi je iste dobre známy fakt, že v rovinnej geometrii možno niektorým množinám nachádzajúcim sa v rovine priradiť isté nezáporné čísla, nazývané plošné obsahy tých množín. Podľa veľkosti tohoto čísla možno usudzovať aj na „rozsiahlosť", „veľkosť" danej množiny. Pritom ak $A \subset B$ a množiny A, B majú plošný obsah, potom plošný obsah množiny A je nie väčší než plošný obsah množiny B. O niečo podobné sa pokúsime teraz v súvislosti so štúdiom podmnožín množiny P všetkých prirodzených čísel. Teda presnejšie pokúsime sa podmnožinám množiny P priradiť nezáporné čísla, ktoré budeme nazývať hustotami tých

množín. Pomocou týchto čísel možno potom usudzovať na „veľkosť" podmnožín množiny P. Uvidíme, že hustota podmnožiny nemôže presiahnuť hustotu nadmnožiny.

D11. Nech $A \subset P$, nech n je prirodzené číslo. Označme znakom $A(n)$ počet všetkých tých čísel $a \in A$, pre ktoré $a \leqq n$. Ak existuje limita postupnosti $\left\{\frac{A(n)}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$, nazývame ju hustotou množiny A a označujeme $h(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{A(n)}{n}$.

Všimnime si bližšie uvedeného pojmu hustoty. Číslo $\frac{A(n)}{n}$ udáva „relatívnu početnosť" prvkov množiny A medzi prvými n prirodzenými číslami. Má aj jednoduchý pravdepodobnostný význam. Udáva pravdepodobnosť javu, ktorý spočíva v tom, že pri náhodnom výbere jedného zpomedzi čísel $1, 2, \ldots n$ vyberieme číslo patriace do množiny A. Číslo $h(A)$ má potom význam akejsi asymptotickej pravdepodobnosti.

Keďže pre každé n je zrejme $0 \leqq A(n) \leqq n$, vyplýva odtiaľ $0 \leqq \frac{A(n)}{n} \leqq 1$ a tak na základe $\mathbf{V}_{22}$, ak A má hustotu, je $0 \leqq h(A) \leqq 1$. Teda hustota množiny je vždy číslo z intervalu $< 0, 1 >$.

D12. Ak $h(A) = 0$, potom množinu A nazývame riedkou množinou.

Poznamenajme, že nie každá podmnožina množiny P má hustotu. Ukážeme to na nasledujúcom príklade.

P45a). Množinu A_k nech tvoria všetky čísla tvaru

$$(2k-1)^{2k-1} + s, \quad s = 1, 2, \ldots (2k)^{2k} - (2k-1)^{2k-1}.$$

Znakom A označme zjednotenie všetkých množín A_k

($k = 1, 2, \ldots$). Teda množinu A tvoria práve tie prirodzené čísla a, ktoré majú tvar

$$a = (2k - 1)^{2k-1} + s,\ s = 1, 2, \ldots$$
$$\ldots (2k)^{2k} - (2k - 1)^{2k-1};\ k = 1, 2, \ldots$$

Pretože medzi číslami, patriacimi do množiny A a nepresahujúcimi číslo $(2k)^{2k}$ sa nachádzajú čísla

$$(2k - 1)^{2k-1} + s,\ s = 1, 2, \ldots (2k)^{2k} - (2k - 1)^{2k-1},$$

je $A((2k)^{2k}) \geqq (2k)^{2k} - (2k - 1)^{2k-1}$ a tak

$$1 - \frac{(2k - 1)^{2k-1}}{(2k)^{2k}} \leqq \frac{A((2k)^{2k})}{(2k)^{2k}} \leqq 1.$$

Keďže $\frac{(2k - 1)^{2k-1}}{(2k)^{2k}} \leqq \frac{(2k)^{2k-1}}{(2k)^{2k}} = \frac{1}{2k}$, je postupnosť $\left\{\frac{(2k - 1)^{2k-1}}{(2k)^{2k}}\right\}_{k=1}^{\infty}$ nulová (pozri $\mathbf{V}_{21}$) a tak v dôsledku $\mathbf{V}_{20}$ a $\mathbf{V}_{22}$ je limita postupnosti (29) $\left\{\frac{A((2k)^{2k})}{(2k)^{2k}}\right\}_{k=1}^{\infty}$ rovna 1. Keďže čísla

$$(2k)^{2k} + s,\ s = 1, 2, \ldots (2k + 1)^{2k+1} - (2k)^{2k}$$

nepatria do množiny A, je $A((2k + 1)^{2k+1}) \leqq (2k)^{2k}$, odtiaľ ľahko zistíme, že limita postupnosti

$$(30) \qquad \left\{\frac{A((2k + 1)^{2k+1})}{(2k + 1)^{2k+1}}\right\}_{k=1}^{\infty}$$

je rovna 0. No (29), (30), sú čiastočné postupnosti postupnosti $\left\{\frac{A(n)}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ a tak v dôsledku vety $\mathbf{V}_{23}$ nemôže mať táto postupnosť limitu.

$\mathbf{P}_{45}$b). Dokážte, že každá konečná množina je riedka.

Návod. Nech A je konečná a má k prvkov. Potom pre každé prirodzené n je $\frac{A(n)}{n} \leqq \frac{k}{n}$, použite teraz $\mathbf{V}_{21}$ a $\mathbf{P}_{40}$.

$\mathbf{P}_{46}$a) Nech A je množina všetkých párnych čísel. Potom $h(A) = \frac{1}{2}$.

b) Nech A je množina všetkých nepárnych čísel. Potom $h(A) = \frac{1}{2}$.

Návod. Všetkých párnych čísel neprevyšujúcich číslo n je $\frac{n}{2}$, ak n je párne a $\frac{n}{2} - \frac{1}{2}$, ak n je nepárne. Pre každé n prirodzené teda platí $\frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \leqq \frac{A(n)}{n} \leqq \frac{1}{2}$. Použite teraz vetu $\mathbf{V}_{22}$. Podobne postupujeme aj pri riešení časti b).

$\mathbf{P}_{47}$. Nech k je prirodzené, $k > 1$. Dokážte, že množina Q_k všetkých k-tych mocnín prirodzených čísel je riedka.

Návod. Nech s je najväčšie také prirodzené číslo, že s^k neprevyšuje n. Potom $Q_k(n) = s$ a z $s^k \leqq n$ vyplýva $s \leqq \sqrt[k]{n}$. Teda $\frac{Q_k(n)}{n} \leqq \frac{\sqrt[k]{n}}{n} \leqq \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Použite teraz $\mathbf{V}_{22}$.

$\mathbf{P}_{48}$. Nech a, d sú celé čísla, $a \geqq 0$, $d > 0$. Nech A je množina členov aritmetickej postupnosti $a + d$, $a + 2d$, $a + 3d$, ... $a + kd$, ... Potom $h(A) = \frac{1}{d}$ (teda hustota množiny A sa rovná prevrátenej hodnote diferencie tej aritmetickej postupnosti — porovnaj s $\mathbf{P}_{46}$).

Návod. Nech s je najväčšie také prirodzené číslo, že

$a + sd \leqq n$. Potom $n < a + (s + 1).d$ a $A(n) = s$. Odtiaľ $\frac{n-a}{d} - 1 \leqq s \leqq \frac{n-a}{d}$ a teraz použite $\mathbf{V}_{22}$ a $\mathbf{P}_{42}$.

P49. Nech $P - A$ značí komplement množiny A v množine P, tj. množinu všetkých tých prirodzených čísel, ktoré nepatria do A. Dokážte: A má hustotu vtedy a len vtedy, keď $P - A$ má hustotu. Ak A má hustotu $\delta = h(A)$, potom $h(P - A) = 1 - \delta$. Špeciálne: $h(A) = 0$ vtedy a len vtedy, keď $h(P - A) = 1$.

V28. Ak A, B majú hustotu a $A \subset B$, potom $h(A) \leqq h(B)$.

Dôkaz. Pre každé n je $A(n) \leqq B(n)$, odtiaľ $\frac{A(n)}{n} \leqq \frac{B(n)}{n}$. Tvrdenie vyplýva z vety $\mathbf{V}_{22}$ už okamžite.

P50. Ak $A \subset B$ a B je riedka, potom aj A je riedka. Návod: použite $\mathbf{V}_{28}$ a $\mathbf{V}_{21}$.

V29. Nech A, B sú riedke množiny. Potom aj množina $A \cup B$ (zjednotenie množín A, B) je riedka.

Dôkaz. Množina $A \cup B$ pozostáva, ako je známe, zo všetkých tých prirodzených čísel, ktoré patria aspoň do jednej z množín A, B. Položme $C = A \cup B$. Potom z definície množiny C dostávame pre každé prirodzené $n = 1, 2, \ldots$ $C(n) \leqq A(n) + B(n)$. Odtiaľ $\frac{C(n)}{n} \leqq \frac{A(n)}{n} + \frac{B(n)}{n}$. Na základe predpokladu vety a na základe $\mathbf{V}_{18}$ je $\frac{A(n)}{n} + \frac{B(n)}{n} \to 0$ a tak podľa $\mathbf{V}_{21}$ je $\frac{C(n)}{n} \to 0$.

Označme znakom D množinu všetkých dokonalých čísel (prvého druhu). V druhej kapitole sme uviedli, že dodnes nie je známe, či množina D je konečná a či nekonečná. V ďalšom ukážeme, že v každom prípade je D „chudobná" množina, je to totiž riedka množina.

V₃₀. Množina D je riedka.

Dôkaz. Položme $D = D_1 \cup D_2$, kde D_1 značí množinu všetkých nepárnych a D_2 množinu všetkých párnych dokonalých čísel. Na základe $\mathbf{V}_{29}$ stačí dokázať, že obe množiny D_1, D_2 sú riedke.

Dokážeme napred, že D_1 je riedka. Na základe vety $\mathbf{V}_{13}$ je D_1 obsažená v množine A všetkých čísel tvaru $p^{4k+1}.N^2$, kde p je prvočíslo tvaru $4s + 1$ ($s \geq 1$), $k \geq 0$ je celé, N prirodzené a p nedelí N. Na základe $\mathbf{P}_{50}$ stačí dokázať, že A je riedka množina. Položme $A = A_1 \cup A_2$, kde A_1 je množina všetkých tých čísel z A, ktoré majú tvar $p.N^2$ a A_2 je množina všetkých ostatných čísel množiny A. Nech teraz v_1, $v_2 \in A_1$, $v_1 = p_1.N^2$, $v_2 = p_2.N^2$ (teda obe čísla v_1, v_2 majú tú istú „kvadratickú" časť N^2). Ukážeme, že potom $p_1 = p_2$. Naozaj, na základe $\mathbf{V}_{11}$ a na základe definície dokonalého čísla je

$$\sigma(v_1) = (p_1 + 1)\,\sigma(N^2) = 2p_1N^2,$$
$$\sigma(v_2) = (p_2 + 1)\,\sigma(N^2) = 2p_2N^2,$$

odtiaľ vydelením dostávame $\frac{p_1}{p_2} = \frac{p_1+1}{p_2+1}$ a odtiaľ jednoduchou úpravou $p_1 = p_2$. Teda ku každému kvadrátu N^2 prirodzeného čísla N existuje najviac jedno prvočíslo p tak, že $pN^2 \in A_1$. Odtiaľ vyplýva, že počet $A_1(n)$ prvkov množiny A_1 neprevyšujúcich číslo n je nie väčší než počet

všetkých kvadrátov prirodzených čísel, neprevyšujúcich číslo n, teda $A_1(n) \leqq \sqrt{n}$ (pozri $\mathbf{P}_{47}$). Odtiaľ vyplýva $\frac{A_1(n)}{n} \leqq \frac{1}{\sqrt{n}}$, teda A_1 je riedka množina.

Číslo $A_2(n)$ je zrejme nie väčšie než $B(n)$, kde B značí množinu všetkých čísel tvaru $p^j . N^2$, $j = 4, 8, \ldots 4l \ldots$, $N = 1, 2, 3, \ldots$. No každé číslo uvedeného tvaru patrí do množiny Q_2 kvadrátov všetkých prirodzených čísel, preto $B \subset Q_2$ a keďže Q_2 je riedka (pozri $\mathbf{P}_{47}$), je aj B riedka množina. Pretože $\frac{A_2(n)}{n} \leqq \frac{B(n)}{n}$ je na základe $\mathbf{V}_{21}$ aj A_2 riedka. Z vety $\mathbf{V}_{29}$ vyplýva potom aj riedkosť množiny A a tým aj riedkosť množiny D_1.

Dokážeme teraz, že aj D_2 je riedka množina. Na základe $\mathbf{V}_{14}$ je D_2 podmnožinou množiny všetkých čísel tvaru $2^{s-1}.(2^s - 1)$, kde s je prvočíslo. Táto množina je zase podmnožinou množiny E všetkých čísel tvaru $2^{s-1}.(2^s - 1)$, $s = 1, 2, 3, \ldots$, preto $D_2 \subset E$. Stačí teda dokázať, že E je riedka množina. Označme znakom t najväčšie zpomedzi tých prirodzených čísel s, pre ktoré $2^{s-1} \leqq n$. Potom zrejme $E(n) \leqq t$ a $t - 1 \leqq \frac{\log n}{\log 2}$.

Odtiaľ $\frac{E(n)}{n} \leqq \frac{1}{n} + \frac{1}{\log 2} \frac{\log n}{n}$.

Na základe $\mathbf{V}_{27}$ je $\frac{\log n}{n} \to 0$ a tak v dôsledku $\mathbf{P}_{42}$ a $\mathbf{V}_{21}$ je $\frac{E(n)}{n} \to 0$. Teda E je riedka. Tým je dôkaz vety skončený.

Dá sa ukázať, že aj množina všetkých dokonalých čísel druhého druhu je riedka (o tejto množine vieme, že je nekonečná — pozri $\mathbf{V}_{16}$). Dôkaz tohoto výsledku však pre-

sahuje rámec možností metod použiteľných v tejto knižke.

Poznamenajme pre zaujímavosť, že aj množina všetkých prvočísel je riedka. Dôkaz tohoto faktu sa tiež vymyká našim možnostiam.

Spomeňme nakoniec, že aj množina všetkých spriatelených čísel je riedka. Zatiaľ čo riedkosť množiny všetkých dokonalých čísel prvého a dokonalých čísel druhého druhu je dávno známym faktom, je poznatok o riedkosti množiny všetkých spriatelených čísel novšieho data. Pochádza z r. 1955 od maďarského matematika *P. Erdősa* a jeho dôkaz je založený na použití istých pravdepodobných metod v teorii čísel.

LITERATÚRA

[1] W. Sierpiński: Elementary theory of numbers, Warszawa, 1964.

[2] N. N. Vorobiev: Priznaki delimosti, Moskva, 1963.

[3] H. Hasse: Vorlesungen über Zahlentheorie (ruský preklad), Moskva, 1953.

[4] T. Šalát: O dokonalých číslach, Pokroky mat. fyz. a astr. IX (1964), 1–13.

[5] E. B. Escott: Amicable numbers, Scripta math. XII (1946), 61–72.

[6] W. Sierpiński: Co osiągnięto w teorii liczb za pomocą maszyn elektronowych, Wiadom. matem. V (1962), 57–65.

[7] W. Sierpiński: Teoria liczb, Warszawa–Wroclaw, 1950.

[8] A. Hurwitz: New Mersenne primes, Math. Comput. 16 (1962), 249–251.

[9] Fr. Veselý: O dělitelnosti čísel celých, Praha, 1966.

[10] J. Sedláček: Co víme o přirozených číslech, Praha, 1965.

[11] J. Surányi: Megjegyzések a számelmélet alaptételéhez, Mat. Lap. XI (1960), 41–45.

[12] P. Erdös: On amicable numbers, Publ. Math. 4 (1955), 108–111.

[13] I. B. D. Gillies: Three new Mersenne primes and a statistical theory, Math. Comput. 18 (1964), 93–97.

[14] H. J. Kanold: Über die Dichten der Mengen der vollkommenen und der befreundeten Zahlen, Math. Zeit. 61 (1954), 180–185.

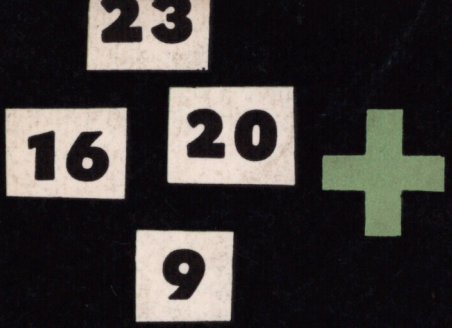
OBSAH

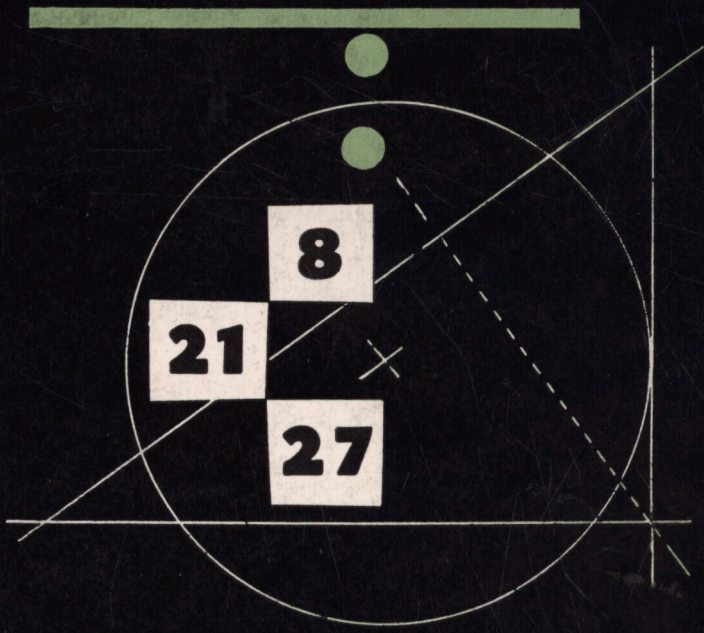
ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

TIBOR ŠALÁT

dokonalé a spriatelené čísla

Pro účastníky Matematické olympiády vydává
ÚV Matematické olympiády
v nakladatelství Mladá fronta
Řídí akademik Josef Novák
Odpovědný redaktor Milan Daneš
Obálku navrhl Jaroslav Příbramský
Publikace číslo 2742
Edice Škola mladých matematiků, svazek 22
Vytiskl Mír, novinářské závody, n. p., závod 6
Praha 2, Legerova 22
2,03 AA, 2,14 VA
Náklad 6000 výtisků. 1. vydání, 52 stran
Praha 1969. 507/21/8.5
23-013-69 03-2 Cena brož. výtisku Kčs 4,–





23-013-69
03/2
Cena brož.
Kčs 4,—