Goniometrické funkce

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

GONIOMETRICKÉ FUNKCE

20

Vydal ÚV Matematické olympiády a ÚV ČSM v nakladatelství Mladá fronta

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

STANISLAV ŠMAKAL - BRUNO BUDINSKÝ

goniometrické funkce

PRAHA 1968
VYDAL ÚV MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY
A ÚV ČSM V NAKLADATELSTVÍ
MLADÁ FRONTA

Recenzovali prof. Jiří Kůst a prof. dr. Karel Havlíček

PŘEDMLUVA

S problémy, které vyžadují znalost trigonometrie, se setkáváme na každém kroku. I když hlavní význam trigonometrie spočívá především v její praktické upotřebitelnosti, přesto — nebo snad právě proto — je nutná hlubší teoretická znalost trigonometrických funkcí. Znalost základních vlastností a vztahů mezi goniometrickými funkcemi dává střední škola. Upevnění a prohloubení těchto znalostí je hlavním posláním naší publikace. Její první kapitola, která ukazuje jeden ze způsobů zavedení goniometrických funkcí, má převážně teoretický ráz. Těžiště této kapitoly je v Moivreově větě a v důsledcích, které z ní vyplývají. Další tři kapitoly jsou věnovány postupně goniometrickým rovnicím, grafům goniometrických funkcí a goniometrickým nerovnostem. Domníváme se, že obsahují dostatek řešených úloh, aby čtenář bez větších potíží mohl řešit připojená cvičení na konci každé kapitoly. Radíme čtenáři, aby si příklady ze cvičení opravdu vyřešil, neboť jen tak získá praktickou zkušenost, tolik potřebnou právě při úpravě goniometrických závislostí. Zároveň se přesvědčí, zda jeho znalosti nejsou formální. Pro kontrolu jsou v závěru připojeny výsledky jednotlivých cvičení.

Rozvoj každé vědy souvisí vždy s daným stupněm rozvoje a potřebami lidské společnosti. Tak je tomu i v matematice. Zatímco některá její odvětví mají přímou souvislost s bouřlivým technickým rozvojem našeho století (kybernetika, teorie grafů apod.), zrod trigonometrie si vyžádal vývoj společnosti již před 2000 lety. Její počátky sahají až ke starým Egypťanům, Babylóňanům a Číňanům. Upřesnění goniometrických pojmů souvisí se vznikem alexandrijské university a je přímým důsledkem požadavků astronomie a mořeplavectví. Tato etapa se pojí hlavně ke jménům *Archimédes ze Syrakus* (287—212 před n. l.) a *Hipparchos* (žil kolem roku 150 před n. l.). *Archimédes* první ukázal možnost určení čísla π s libovolnou přesností a pravděpodobně jako první použil úhlových tabulek. Alexandrijský hvězdář *Hipparchos* sestavil tabulky pro hodnoty sinu a použil jich v astronomii. Právem je často nazýván otcem trigonometrie. Dnešní podobu dal však trigonometrii teprve *Leonhard Euler* (1707—1783 n. l.).

Goniometrické funkce definujeme v naší publikaci pomocí vektorů v Gaussově rovině, tedy na základě komplexních čísel. V této souvislosti bychom rádi upozornili, že to není postup shodný s historií, neboť komplexní čísla byla poprvé užita teprve v 16. století n. l. Sama tato skutečnost by v nás mohla vyvolat jistě dojem zdánlivé odlehlosti komplexních čísel a trigonometrie. Že tomu tak není, svědčí o kráse a vnitřní jednotné dokonalosti matematických úvah.

Na konci publikace uvádíme seznam doporučené literatury. V těchto knížkách se čtenář setká také s aplikacemi goniometrických funkcí a příslušnými numerickými výpočty, zatímco v naší knížce se věnujeme jen teoretickým vlastnostem goniometrických funkcí.

Přejeme všem čtenářům, zvláště pak účastníkům matematických olympiád, kterým je publikace především určena, aby měli po přečtení pocit, že knížka splnila své poslání a je pro ně dobrou pomůckou při řešení všech otázek, které mají nějaký vztah k trigonometrii.

1. kapitola

GONIOMETRICKÉ FUNKCE

1.1. Orientovaný úhel a komplexní číslo. V řadě otázek praktického i teoretického charakteru se setkáváme s goniometrickými funkcemi. Elementární výklad o těchto funkcích je předmětem naší knížky. V úvodní kapitole si nejprve tyto funkce zavedeme a odvodíme si jejich důležité vlastnosti, které budeme potřebovat v dalších kapitolách.

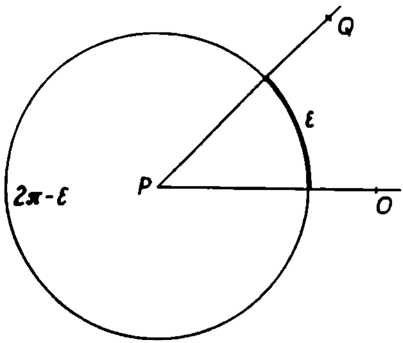
Základním pojmem, o který se bude opírat definice goniometrických funkcí, je pojem *orientovaného úhlu* a *komplexního čísla*. Předpokládáme, že oba pojmy zná čtenář ze školy. Přesto však bude jistě účelné stručně zopakovat základní vlastnosti obou výchozích pojmů. Učiníme tak nyní.

Pojem orientovaného úhlu je možno zavést následující definicí:

Orientovaný úhel je uspořádaná dvojice polopřímek o společném počátku.

Definici, kterou jsme vyslovili, si objasníme na konkrétním příkladě. V obr. 1 jsou sestrojeny dvě polopřímky PO, PQ o společném počátku P. Jestliže obě polopřímky zapíšeme v pořadí (PO, PQ), určili jsme orientovaný úhel, který označujeme $\widehat{OPQ}$. Polopřímku PO nazýváme *počátečním ramenem*, polopřímku PQ *koncovým* *ramenem* a bod P *vrcholem* orientovaného úhlu $\widehat{OPQ}$. Uvedené pořadí (PO, PQ) má svůj důležitý význam. Kdybychom toto pořadí zaměnili a psali (PQ, PO), dostali bychom orientovaný úhel $\widehat{QPO}$, který je jiným úhlem než úhel $\widehat{OPQ}$.

V dalších úvahách bude hrát důležitou roli *velikost* orientovaného úhlu. Ukážeme si cestu, která vede k definici tohoto pojmu.



Obr. 1. Velikosti neorientovaných úhlů, určených polopřímkami PO, PQ.

Mějme orientovaný úhel $\widehat{OPQ}$. Polopřímky PO, PQ dělí rovinu na dva *neorientované úhly* o velikostech ε, $2\pi - \varepsilon$ (obr. 1). Oba neorientované úhly si můžeme představit tak, že vznikly otočením počátečního ramene PO kolem bodu P do koncového ramene PQ. Upřesníme předcházející označení obou neorientovaných úhlů. Označme ε velikost toho neorientovaného úhlu, který vznikne při otáčení počátečního ramene PO do polohy PQ v kladném smyslu (tj. otáčení proběhne proti směru pohybu hodinových ručiček). Číslo $2\pi - \varepsilon$ je samozřejmě velikostí druhého neorientovaného úhlu. Tento úhel vznikne otočením ramene PO do polohy PQ v záporném smyslu (tj. ve směru pohybu hodinových ručiček). Předcházející úvahy nám dovolují definovat:

Číslo ε nazýváme *základní velikostí* orientovaného úhlu $\widehat{OPQ}$.

POZNÁMKA 1.1. Základní velikost úhlu $\widehat{QPO}$ je zřejmě rovna číslu $2\pi - \varepsilon$. Musíme však připustit jednu výjimku. Jestliže obě polopřímky PO, PQ splynou, pokládáme základní velikost obou orientovaných úhlů $\widehat{OPQ}$, $\widehat{QPO}$ rovnou nule. Vyhovuje tedy číslo ε vždy podmínce $0 \leqq \varepsilon < 2\pi$.

POZNÁMKA 1.2. Velikost úhlů (orientovaných i neorientovaných) budeme v celém svazku udávat v obloukové míře.

V dalším výkladu bychom úplně vystačili při měření orientovaných úhlů s pojmem základní velikosti orientovaného úhlu. Celý výklad se však stane podstatně jednodušší a přehlednější, zavedeme-li si obecnější pojem, totiž tzv. *velikost* orientovaného úhlu. Učiňme tak pomocí této definice:

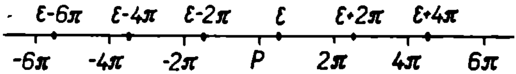
Jestliže je ε základní velikost daného orientovaného úhlu $\widehat{OPQ}$, nazýváme každé číslo φ, které lze zapsat ve tvaru

$$\varphi = \varepsilon + 2k\pi \, , \tag{1,1}$$

kde k je libovolné celé číslo, *velikostí* orientovaného úhlu $\widehat{OPQ}$.

Pro velikost orientovaného úhlu se běžně užívá označení *argument* nebo *amplituda*, někdy také *azimut*. Názvu *argument* budeme často užívat.

Z definice, kterou jsme vyslovili, vyplývá, že daný orientovaný úhel má nekonečně mnoho velikostí. Znázornění velikostí orientovaného úhlu o základní velikosti ε na číselné ose je provedeno v obr. 2. Budeme-li v dalších úvahách mluvit o velikosti orientovaného



Obr. 2. Znázornění velikostí orientovaného úhlu o základní velikosti ε na číselné ose.

úhlu, budeme tím mít zpravidla na mysli jednu libovolně, ale pevně zvolenou velikost. Nebudeme tedy u daného orientovaného úhlu dávat přednost některé z jeho možných velikostí. Z tohoto hlediska nemá číslo k ze vzorce (1,1) žádný hlubší geometrický význam. Uvedený postup má své výhody při výpočtu velikosti součtu dvou orientovaných úhlů. Než se o této okolnosti zmíníme podrobněji, připomeňme definici součtu dvou orientovaných úhlů. Pro naši potřebu vystačíme s definicí, která je zvláštním případem definice obecnější:

Jsou-li $\widehat{OPQ}$, $\widehat{QPR}$ dva orientované úhly (koncové rameno PQ prvního úhlu je počátečním ramenem druhého úhlu), potom orientovaný úhel $\widehat{OPR}$ nazýváme *součtem* orientovaných úhlů $\widehat{OPQ}$, $\widehat{QPR}$.

Připomeňme si bez důkazu známou větu:

Buďte α, β velikosti dvou orientovaných úhlů $\widehat{OPQ}$, $\widehat{QPR}$. Potom $\alpha + \beta$ je velikost orientovaného úhlu $\widehat{OPR}$, který je součtem orientovaných úhlů $\widehat{OPQ}$, $\widehat{QPR}$.

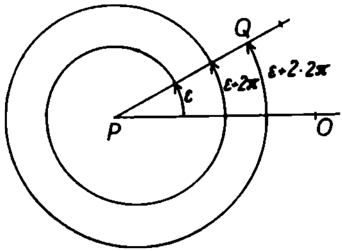
Předcházející úvahy doplníme několika poznámkami.

POZNÁMKA 1.3. Jestliže v poslední větě α, β jsou základní velikosti orientovaných úhlů, neznamená to, že $\alpha + \beta$ je základní velikostí orientovaného úhlu $\widehat{OPR}$.

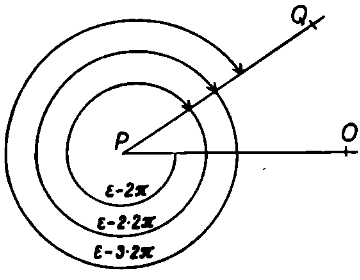
POZNÁMKA 1.4. Jak jsme se již zmínili, nepřisoudili jsme číslu k ze vzorce (1,1) žádný konkrétní geometrický význam. Bude však užitečné zmínit se alespoň stručně o významu čísla k při studiu rotačního pohybu. Předpokládejme opět, že je v rovině dán orientovaný úhel OPQ o základní velikosti ε. Počáteční rameno PO nechť se otáčí v kladném smyslu kolem bodu P. Jestliže při tomto pohybu splyne poprvé rameno PO s ramenem PQ, které je pevné, můžeme říci (ve shodě s terminologií běžnou v mechanice), že rameno PO opsalo orientovaný úhel $\widehat{OPQ}$ o velikosti ε. Jestliže při popsané rotaci splyne rameno PO podruhé s pevným ramenem PQ, můžeme říci, že pohybující se rameno PO opsalo orientovaný úhel $\widehat{OPQ}$ o velikosti $\varepsilon + 2\pi$. Zřejmě při našem označení opíše počáteční rameno v tomto pojetí (viz obr. 3a) postupně orientované úhly o velikostech

$$\varepsilon, \varepsilon + 2\pi, \varepsilon + 2.2\pi, \varepsilon + 3.2\pi, \ldots .$$

Pozorujme tentýž proces při otáčení ramene PO v záporném smyslu (obr. 3b). Jestliže rameno PO poprvé splyne s koncovým ramenem PQ, opíše tak neorientovaný úhel velikosti $2\pi - \varepsilon$. Jelikož rotační pohyb probíhá v záporném smyslu, dohodněme se, že v tomto případě přiřadíme orientovanému úhlu $\widehat{OPQ}$ velikost $-(2\pi - \varepsilon)$, tj. $\varepsilon - 2\pi$. Při druhém splynutí ramene PO s ramenem PQ můžeme přiřadit orientovanému úhlu



Obr. 3a. Velikosti orientovaného úhlu při otáčení ve smyslu kladném.



Obr. 3b. Velikosti orientovaného úhlu při otáčení ve smyslu záporném.

$\widehat{OPQ}$ velikost $\varepsilon - 2 . 2\pi$. Postupně tak získáme čísla:

$$\varepsilon - 2\pi,\ \varepsilon - 2 . 2\pi,\ \varepsilon - 3 . 2\pi,\ \ldots .$$

Souhrnný zápis všech hodnot v obou směrech vede ke vztahu

$$\varphi = \varepsilon + 2k\pi$$

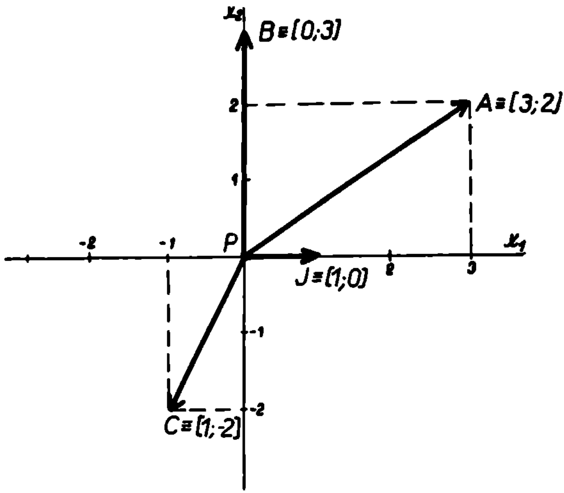
(k je libovolné celé číslo), který je samozřejmě shodný se vzorcem (1,1).

Abychom nemuseli u každého početního výrazu opakovat, že číslo k znamená libovolné číslo celé, zavádíme tuto úmluvu:

Písmeno k, užité ve významu čísla, bude v dalším textu probíhat vždy množinu všech čísel celých. V jiném významu nebudeme v dalším výkladu čísla k používat.

POZNÁMKA 1.5. V dalších úvahách budeme občas potřebovat pojem intervalu. Upřesníme si proto tento pojem a zavedeme běžná označení, kterým čtenář stejně neunikne, má-li rozumět matematickým textům. Množinu všech reálných čísel x, která vyhovují nerovnostem $a \leqq x \leqq b$, nazýváme *uzavřeným intervalem* a zapisujeme znakem $\langle a, b\rangle$; podobně množinu všech reálných čísel x, která vyhovují nerovnostem $a < x < b$, nazýváme *otevřeným intervalem* a zapisujeme (a, b). Závorky zde tedy hrají důležitou roli. Kromě intervalů otevřených a uzavřených zavádíme ještě název *polouzavřený interval*. Značíme: $(a, b\rangle$, $\langle a, b)$. Prvý znak znamená souhrn všech reálných čísel x, která vyhovují nerovnosti $a < x \leqq b$; podobně pak druhý znak je určen nerovností $a \leqq x < b$. Zápis $(-\infty, \infty)$ znamená všechna reálná čísla.

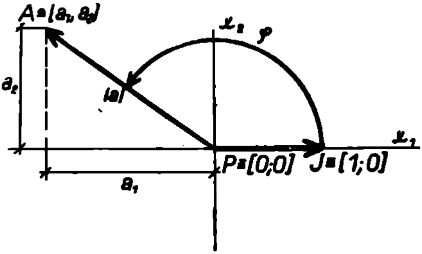
Řekli jsme si již, že dalším základním pojmem, o který se budeme opírat, je *komplexní číslo*. Zápis $a = a_1 + a_2 i$, kterému říkáme algebraický tvar komplexního čísla, je čtenáři jistě známý. Komplexní čísla zobrazujeme v rovině komplexních čísel, které říkáme také *Gaussova rovina*. V této rovině si zvolíme dvě vzájemně kolmé přímky x_1, x_2, které nazveme *osami*. Přímku x_1 nazveme *reálnou osou*, x_2 *osou imaginární*. Jejich průsečík je tzv. *počátek*. Označíme jej P. Víme, že komplexní číslo je jednoznačně určeno svými složkami. Každému komplexnímu číslu $a = a_1 + a_2 i$ můžeme přiřadit vektor $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ vázaný v počátku soustavy souřadnic. To znamená, že počáteční bod vektoru $\mathbf{a}$ je bod $P \equiv [0, 0]$, souřadnice koncového bodu A jsou



Obr. 4. Znázornění komplexních čísel v Gaussově rovině.

shodné se složkami komplexního čísla. Tedy $A \equiv [a_1, a_2]$. Je přirozené hovořit o vektoru a jako o obrazu komplexního čísla a. Na obr. 4 jsou zobrazena komplexní čísla $a = 3 + 2i$, $b = 3i$, $c = -1 - 2i$, $j = 1$.

Naopak každému vektoru a $= (a_1, a_2)$, který je vázán v počátku soustavy souřadnic, odpovídá jediné komplexní číslo. Jde tedy o vzájemně jednoznačné přiřazení.



Obr. 5. Obraz komplexního čísla a určeného veličinami $|a|, \varphi$.

Velikost vektoru a $= (a_1, a_2)$ je dána vzorcem

$$|\mathrm{a}| = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2}\,.$$

Způsob, jakým je možno určit směr vektoru, si objasníme podrobněji. Vektor a určuje polopřímku PA. Směrem vektoru a budeme rozumět množinu všech polopřímek, které lze rovnoběžným posunutím přemístit tak, aby splynuly s polopřímkou PA. Řekneme, že dva vektory mají týž směr, jestliže příslušné polopřímky PA, PB patří do téhož směru. Polopřímku je možné zadat velikostí úhlu $\widehat{JPA}$ ($J \equiv [1, 0]$ je tzv. *jednotkový bod*), který nazýváme orientovaným úhlem v *základní poloze* (viz obr. 5). Odtud plyne, že vektor je určen velikostí a orientovaným úhlem v základní poloze.

Jelikož komplexní čísla a vektory jsou si vzájemně jednoznačně přiřazeny, můžeme tvrdit:

Každému nenulovému komplexnímu číslu je přiřazen jediný orientovaný úhel v základní poloze. Obráceně každým takovým úhlem a absolutní hodnotou je určeno jediné komplexní číslo.

1.2. Zavedení funkcí sinus a kosinus. Úvodní úvahy, které se opírají o základní znalosti z oboru komplexních čísel, nám již dovolují přistoupit k definici funkcí *sinus*, *kosinus*, *tangens* a *kotangens*, kterým souhrnně říkáme *funkce goniometrické*. V tomto odstavci vyslovíme definici prvých dvou.

Definice 1.1. Je-li $a = a_1 + a_2\mathrm{i}$ nějaké nenulové komplexní číslo a φ je libovolná velikost orientovaného úhlu, který je komplexnímu číslu a přiřazen, potom podíl

$$\frac{a_2}{|a|} \text{ nazveme } \textit{sinus } \varphi,$$

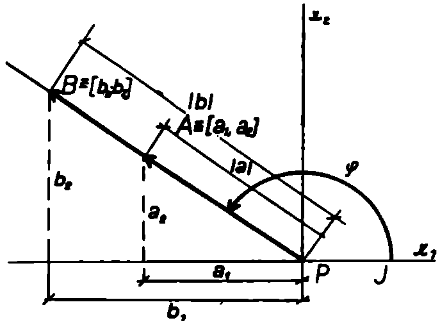
$$\frac{a_1}{|a|} \text{ nazveme } \textit{kosinus } \varphi.$$

Symbolické zkratky jsou čtenáři jistě známy. Píšeme:

$$\sin\varphi = \frac{a_2}{|a|}, \quad \cos\varphi = \frac{a_1}{|a|}. \tag{1,4}$$

Ukažme si nejdříve, že hodnoty $\sin\varphi$ a $\cos\varphi$ závisí pouze na velikosti φ orientovaného úhlu. Zvolme za tím účelem jiné nenulové komplexní číslo $b = b_1 + b_2\mathrm{i}$, které je určeno orientovaným úhlem $\widehat{JPB}$, jehož velikost je rovněž φ (obr. 6). Vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, které odpovídají komplexním číslům a, b, mají zde týž směr. Parametrická rovnice polopřímky PA má tvar

$$X = P + t\mathbf{a}\,,$$



Obr. 6. Obrazy komplexních čísel a, b, která jsou určena tímtéž orientovaným úhlem φ.

kde t je libovolné nezáporné číslo. Tato rovnice je stručným zápisem parametrické soustavy rovnic

$$x_1 = ta_1\,,$$
$$x_2 = ta_2\,, \quad (t \geqq 0)\,.$$

Jelikož bod B leží na polopřímce PA, musí jeho souřadnice splňovat napsanou soustavu. Jinými slovy musí existovat pevné kladné číslo $t = c$ tak, že platí

$$\begin{aligned} b_1 &= ca_1\,, \\ b_2 &= ca_2\,. \end{aligned} \tag{1,5}$$

Na základě (1,5) určíme ještě $|b|$. Snadno zjistíme, že

$$|b| = \sqrt{(b_1)^2 + (b_2)^2} = \sqrt{c^2(a_1)^2 + c^2(a_2)^2} =$$
$$= c\sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2} = c\,|a|\,. \tag{1,6}$$

Vyjádříme-li nyní $\sin\varphi$ a $\cos\varphi$ podle (1,4) pomocí komplexního čísla b a použijeme výsledky (1,5) a (1,6), dostaneme:

$$\begin{aligned} \sin\varphi &= \frac{b_2}{|b|} = \frac{ca_2}{c|a|} = \frac{a_2}{|a|}\,, \\ \cos\varphi &= \frac{b_1}{|b|} = \frac{ca_1}{c|a|} = \frac{a_1}{|a|}\,. \end{aligned} \tag{1,7}$$

Předpokládali jsme, že $b \neq a$ a že orientovaný úhel přiřazený oběma číslům byl týž. Srovnáme-li (1,4) a (1,7), vidíme, že číselná hodnota $\sin\varphi$ a $\cos\varphi$ je stejná jak v případě čísla a, tak v případě čísla b. Můžeme proto říci, že hodnoty goniometrických funkcí $\sin\varphi$ a $\cos\varphi$ závisí pouze na velikosti úhlu φ. Jelikož komplexních čísel, kterým je přiřazen úhel o velikosti φ, je nekonečně mnoho (všechna vyplní otevřenou polopřímku PA), můžeme použít kteréhokoliv z nich.

Zvolme si proto takové komplexní číslo $r = r_1 + r_2\mathrm{i}$, aby platilo $|r| = 1$ a jeho obraz ležel na polopřímce PA. Takovému komplexnímu číslu říkáme *komplexní jednotka*. V obr. 7 je číslo r znázorněno orientovanou úsečkou PR. Potom

$$\begin{aligned} \sin\varphi &= \frac{r_2}{|r|} = \frac{r_2}{1} = r_2\,, \\ \cos\varphi &= \frac{r_1}{|r|} = \frac{r_1}{1} = r_1\,. \end{aligned} \tag{1,8}$$

Reálná složka každé komplexní jednotky je tedy rovna kosinu k ní příslušného orientovaného úhlu, imaginární pak sinu tohoto úhlu. Získáváme tak důležitý výsledek, že každou komplexní jednotku je možno (podle 1,8) zapsat ve tvaru

$$r = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi\,. \tag{1,9}$$

Tvaru (1,9) říkáme goniometrický tvar komplexní jednotky. Vzniká přirozeně otázka, zda podobným způsobem můžeme vyjádřit každé komplexní číslo. Čtenář pravděpodobně ví, že takové vyjádření existuje. Výjimku činí pouze číslo $a = 0$. Goniometrický tvar komplexního čísla obdržíme přímo z definičních vztahů (1,4). Plyne odtud

$$a_1 = |a|\cos\varphi\,, \quad a_2 = |a|\sin\varphi\,.$$

Proto komplexní číslo $a = a_1 + a_2\mathrm{i}$ můžeme psát ve tvaru

$$a = |a|\cos\varphi + \mathrm{i}|a|\sin\varphi\,.$$

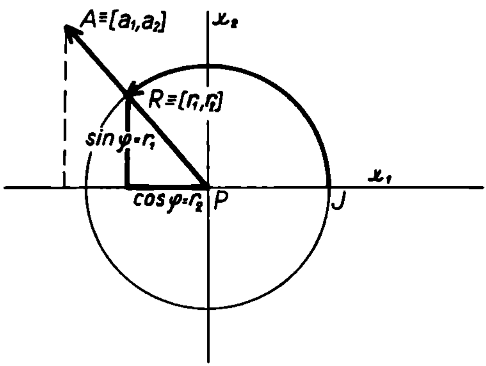
Vytkneme-li ještě na pravé straně $|a|$, máme žádaný vzorec

$$a = |a|\,(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)\,. \tag{1,10}$$

Pozornější čtenář si jistě všiml, že číslo v závorce má tvar (1,9) a je to tedy komplexní jednotka. Každé komplexní číslo můžeme tedy psát ve tvaru součinu $a = |a|\,r$, kde r je příslušná komplexní jednotka. Tento výsledek však nepřekvapí, uvědomíme-li si souvislost mezi komplexním číslem a vektorem.

Vraťme se však k rovnicím (1,8) a všimněme si blíže jejich názorného významu. Často se žáci učí zpaměti, jaká znamení mají goniometrické funkce v jednotlivých kvadrantech. Jednotková kružnice nám dá vždy bezpečnou odpověď na tuto otázku a navíc nezatěžuje paměť čistě mechanickými prvky, které v sobě skrývají vždy větší riziko zapomenutí. Stačí sestrojit příslušný jednotkový vektor a všimnout si, jaká znamení mají jeho souřadnice. Uvědomíme si dále jednou provždy, že všechna komplexní čísla, jejichž obrazy pokrývají kupř. 2. kvadrant, mají reálnou složku stále zápornou a imaginární kladnou (a podobně je tomu ve všech kvadrantech). Proto, chceme-li rozhodnout pouze o znamení, nemusíme dbát v náčrtku žádné velké přesnosti. Základním kritériem je totiž kvadrant, a ne velikost úhlu.

Z obr. 7 je vidět, že $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$; $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, $\cos \frac{\pi}{2} = 0$; $\sin \pi = 0$, $\cos \pi = -1$; $\sin \frac{3}{2}\pi = -1$, $\cos \frac{3}{2}\pi = 0$; $\sin 2\pi = 0$, $\cos 2\pi = 1$.



Obr. 7. Obrazy sinu a kosinu na jednotkové kružnici.

Dříve než přistoupíme k definici dalších dvou goniometrických funkcí, musíme ještě upozornit na dvě důležité vlastnosti sinu a kosinu.

Věta 1.1. *Pro libovolnou hodnotu φ platí:*

$$\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1 .$$

Důkaz. Podle (1,9) víme, že každou komplexní jednotku můžeme psát ve tvaru

$$r = \cos \varphi + \mathrm{i} \sin \varphi .$$

Odtud plyne, že

$$|r|^2 = \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi .$$

Poněvadž jde o komplexní jednotku, platí $|r| = 1$. To však znamená, že $1 = \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi$. Tím je důkaz věty proveden.

Věta 1.2. *Funkce* $\sin \varphi$ *a* $\cos \varphi$ *nabývají pro libovolné* φ *pouze hodnot z intervalu* $\langle -1, 1\rangle$.

Důkaz. Vezmeme opět komplexní jednotku $r = r_1 + r_2 \mathrm{i}$. Víme, že platí $r_2 = \sin \varphi$ [srovnejte (1,8) resp. (1,9)]. Vyjdeme z nerovnosti, která je zřejmě pravdivá

$$0 \leqq (r_1)^2 .$$

K oběma stranám přičteme $(r_2)^2$ a použijeme rovnosti

$$(r_1)^2 + (r_2)^2 = |r|^2 = 1 .$$

Zkoumanou nerovnost uvedeme tak na tvar

$$(r_2)^2 \leqq 1 .$$

Ekvivalentní úpravy vedou již k žádanému výsledku

$$|r_2| \leqq 1 ,$$

$$-1 \leqq r_2 \leqq 1 ,$$

$$-1 \leqq \sin \varphi \leqq 1 .$$

Důkaz pro $\cos \varphi$ by byl obdobný a čtenář se s ním setká ve cvičení (cv. 1,5).

1.3. Zavedení funkcí tangens a kotangens. Přejdeme nyní k dalším dvěma goniometrickým funkcím.

Definice 1.2. Podíl $\dfrac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$, pokud má smysl, nazýváme *tangens* φ, podíl $\dfrac{\cos \varphi}{\sin \varphi}$, pokud má smysl, nazýváme *kotangens* φ.

Čtenáři jistě znají symbolické výrazy, kterých používáme. Píšeme totiž

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} , \quad \operatorname{cotg} \varphi = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} .$$

Upřesníme si nejprve existenční obor výrazů, o nichž mluví definice 1.2.

Zlomek $\dfrac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$ má smysl, pokud $\cos \varphi \neq 0$. To znamená, že pro příslušnou komplexní jednotku $r = r_1 + r_2 i$ platí vztah $r_1 \neq 0$. Existují však pouze dvě komplexní jednotky, pro které $r_1 = 0$. Jsou to čísla i a —i. Velikost k nim příslušných orientovaných úhlů musíme proto vyloučit. Jelikož se jedná o liché násobky čísla $\frac{\pi}{2}$, můžeme podmínku zapsat souhrnně ve tvaru

$$\varphi \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2},$$

kde k je libovolné číslo celé.

Podobně zlomek $\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$ má smysl, pokud $\sin\varphi \neq 0$, neboli $r_2 \neq 0$ ($r = r_1 + r_2$i je opět příslušná komplexní jednotka). Komplexní jednotky, pro které $r_2 = 0$, jsou reálná čísla, jejich obrazy leží proto na reálné ose. Tyto jednotky mají hodnotu 1 a —1. Jsme tedy nuceni vyloučit velikosti k nim příslušných orientovaných úhlů. V prvém případě jde o úhel velikosti $\varphi = 2k\pi$, v druhém $\varphi = \pi + 2k\pi = (2k + 1)\pi$. Vidíme, že se jedná jak o sudé, tak o liché násobky čísla π, to znamená o všechny celočíselné násobky π. Podmínka, aby zlomek $\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$ měl smysl, má tudíž jednoduchý tvar $\varphi \neq k\pi$ (k je libovolné celé číslo).

Výsledky rozboru, který jsme provedli, nemají jen bezprostřední význam pro stanovení existenčních oborů funkcí tangens a kotangens. Budeme je v dalším často potřebovat.

Shrneme-li předcházející úvahy, můžeme říci, že

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\varphi &= \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}, \quad \text{pokud} \quad \varphi \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, \\ \operatorname{cotg}\varphi &= \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}, \quad \text{pokud} \quad \varphi \neq k\pi. \end{aligned} \tag{1,11}$$

Závěrem odstavce dokážeme jednoduchý, ale pro výpočty a úpravy často užitečný vzorec.

Věta 1.3. *Pro každé* $\varphi \neq k\frac{\pi}{2}$ *platí*

$$\operatorname{tg}\varphi \operatorname{cotg}\varphi = 1\,.$$

D ů k a z. Podmínka $\varphi \neq k\frac{\pi}{2}$ zahrnuje v sobě obě podmínky pro $\operatorname{tg}\varphi$ i $\operatorname{cotg}\varphi$ z definičních vztahů (1,11). Důkaz sám je zřejmý. Úpravou dostaneme

$$\operatorname{tg}\varphi \operatorname{cotg}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\,\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = 1.$$

Příklad 1.1. Dokažme, že pro přípustná x platí:

$$\text{a) } 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}\,,$$

$$\text{b) } 1 + \operatorname{cotg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}\,.$$

Jestliže $x \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}$, potom

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}\,.$$

Při přechodu k poslední rovnosti jsme užili věty 1.1. Důkaz druhé identity je analogický.

1.4. Moivreova věta. Další část této kapitoly věnujeme elegantní větě, které říkáme Moivreova věta podle jejího autora ABRAHAMA DE MOIVRE (1667—1754). Tato věta bude mít pro nás zásadní důležitost. Upozorňujeme předem, že k jejímu důkazu použijeme vzorce pro úhel dvou vektorů, který najdete v učebnici matematiky pro III. ročník středních všeobecně vzdělávacích škol (str. 167). Vzorec má tvar

$$\cos \omega = \frac{\mathbf{a} \, . \, \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| \, |\mathbf{b}|} \, . \qquad (1,12)$$

Symbol $\mathbf{a} \, . \, \mathbf{b}$ nazýváme skalárním součinem vektorů $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$. Hodnota skalárního součinu je definována takto: $\mathbf{a} \, . \, \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$. Předpokládáme, že vzorec (1,12) zná čtenář ze školy. K jeho důkazu by nám stačily goniometrické funkce, definované na pravoúhlém trojúhelníku, a naše dosavadní znalosti.

Věta 1.4. (Moivreova věta). *Součin dvou komplexních jednotek je opět komplexní jednotka, jejíž argument je roven součtu argumentů obou činitelů.*

Větu zapíšeme následovně:

$$(\cos \alpha + \mathrm{i} \sin \alpha)(\cos \beta + \mathrm{i} \sin \beta) = \cos (\alpha + \beta) + \\ + \mathrm{i} \sin (\alpha + \beta) \, .$$

Důkaz. Komplexní jednotky s příslušnými úhly α, β označíme r_α, r_β. Budeme tedy psát

$$r_\alpha = \cos \alpha + \mathrm{i} \sin \alpha \, , \quad r_\beta = \cos \beta + \mathrm{i} \sin \beta \, .$$

Komplexní číslo, které je jejich součinem, označíme r. Platí tedy $r = r_\alpha \, r_\beta$. Chceme dokázat:

1. $r = r_\alpha \, r_\beta$ je opět komplexní jednotka,

2. jednotka r je určena orientovaným úhlem o velikosti $\alpha + \beta$.

Víme, že absolutní hodnota součinu je rovna součinu absolutních hodnot. Proto

$$|r| = |r_\alpha \, r_\beta| = |r_\alpha| \, |r_\beta| = 1 . 1 = 1 .$$

Tím je prvá část tvrzení dokázána. Druhá část důkazu bude poněkud obtížnější. Doporučujeme čtenáři, aby se nedal odradit délkou. Výslednou jednotku r můžeme podle (1,9) psát ve tvaru

$$r = \cos \varphi + \mathrm{i} \sin \varphi , \qquad (1,13)$$

kde

$$\left.\begin{aligned} \cos \varphi &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta , \\ \sin \varphi &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta . \end{aligned}\right. \qquad (1,14)$$

Výsledky (1,14) dostaneme snadno, jestliže provedeme naznačené násobení na pravé straně rovnosti

$$r = (\cos \alpha + \mathrm{i} \sin \alpha) (\cos \beta + \mathrm{i} \sin \beta)$$

a porovnáme reálné a imaginární složky.

Chceme dokázat, že φ ve vzorci (1,13) má velikost $\alpha + \beta$. Hledejme proto složky komplexní jednotky

$$x = x_1 + x_2 \mathrm{i} ,$$

která je určena orientovaným úhlem o velikosti $\alpha + \beta$. Budou-li mít tvar (1,14), potom vzhledem k určenosti komplexního čísla budeme s důkazem u konce. Vektory $\mathbf{r}_\beta$, $\mathbf{x}$ (obr. 8) svírají neorientovaný úhel o velikosti $\bar{\alpha}$. Podle vzorce (1,12) můžeme psát

$$\cos \bar{\alpha} = \mathbf{x} . \mathbf{r}_\beta \quad (\text{neboť } |\mathbf{r}_\beta| = 1, \ |\mathbf{x}| = 1) \, {}^{*})$$

---

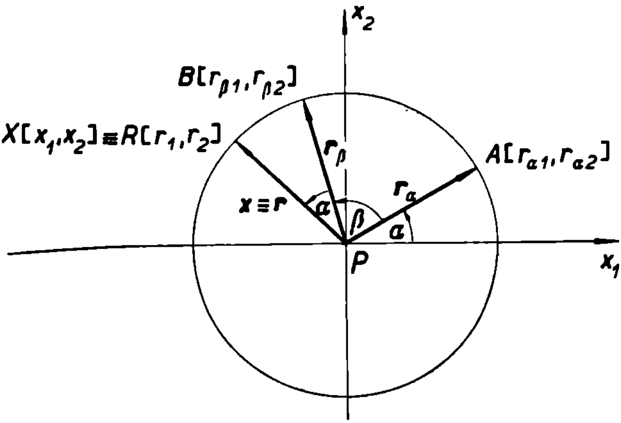
*) Hodnota goniometrické funkce, která přísluší neorientovanému úhlu o velikosti $\bar{\alpha}$, se rovná hodnotě goniometrické funkce orientovaného úhlu o základní velikosti $\bar{\alpha}$.

Vektory $\mathbf{r}_\beta$, $\mathbf{x}$ v uvedeném pořadí určují orientovaný úhel $\widehat{BPX}$, jehož velikost je rovna číslu α. Označíme-li základní velikost orientovaného úhlu $\widehat{BPX}$ znakem ε, můžeme zřejmě psát

$$\bar{\alpha} = \varepsilon \quad \text{nebo} \quad \bar{\alpha} = 2\pi - \varepsilon .$$

Je proto správná jedna z těchto dvou rovností

$$\alpha = \bar{\alpha} + 2k\pi \quad \text{nebo} \quad \alpha = (2\pi - \bar{\alpha}) + 2k\pi .$$



Obr. 8. Grafický součin komplexních jednotek.

Odtud a z definice 1.1. bychom snadno dokázali, že

$$\cos \alpha = \cos \bar{\alpha} .$$

Rovnici $\cos \bar{\alpha} = \mathbf{x} . \mathbf{r}_\beta$ můžeme proto psát ve tvaru

$$\cos \alpha = \mathbf{x} . \mathbf{r}_\beta .$$

Provedeme-li skalární součin vektorů na pravé straně, dostaneme

$$\cos\alpha = x_1 \cos\beta + x_2 \sin\beta\,,$$

kde složky x_1, x_2 jsou vázány vztahem $(x_1)^2 + (x_2)^2 = 1$. Máme tak soustavu pro neznámé x_1, x_2:

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= x_1 \cos\beta + x_2 \sin\beta\,, \\ (x_1)^2 &+ (x_2)^2 = 1\,. \end{aligned} \qquad (1,15)$$

Z první rovnice soustavy (1,15) vyjádříme x_2:

$$x_2 = \frac{\cos\alpha - x_1 \cos\beta}{\sin\beta}\,, \quad \beta \neq k\pi\,. \qquad (1,16)$$

Po dosazení x_2 do druhé rovnice a snadné úpravě dostaneme kvadratickou rovnici pro neznámou x_1:

$$(x_1)^2 - 2x_1 \cos\alpha \cos\beta + \cos^2\alpha - \sin^2\beta = 0\,. \qquad (1,17)$$

Rovnice (1,17) má vždy řešení, neboť její diskriminant $D \geqq 0$. Má totiž tvar $D = 4\sin^2\alpha \sin^2\beta$. S podrobným důkazem se setkáte ve cvičení 1.6 na str. 40. Kořeny rovnice (1,17) označíme x_1, x_1'. Jsou to čísla

$$\begin{aligned} x_1 &= \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta\,, \\ x_1' &= \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta\,. \end{aligned}$$

Dosadíme-li do (1,16), získáme x_2, x_2':

$$\begin{aligned} x_2 &= \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta, \\ x_2' &= \cos\alpha \sin\beta - \sin\alpha \cos\beta\,. \end{aligned}$$

Zapišme přehledně dvojice kořenů, které jsou řešením soustavy (1,15). Dostáváme tak

$$\begin{aligned} x_1 &= \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta\,, \\ x_2 &= \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta\,, \end{aligned} \qquad (1,18)$$

$$\begin{aligned} x_1' &= \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta\,, \\ x_2' &= \cos\alpha \sin\beta - \sin\alpha \cos\beta\,. \end{aligned} \tag{1,19}$$

Každé komplexní číslo je svými složkami jednoznačně určeno. Jednotka x je proto dána pouze jednou dvojicí čísel, tudíž čísly (1,18) nebo (1,19). Snadno se totiž ukáže, že neplatí identicky $x_1 = x_1'$, $x_2 = x_2'$. Abychom určili jednotku x, stačí aplikovat náš postup na vektory $\mathbf{x}$, $\mathbf{r}_\alpha$. Tyto vektory svírají úhel $\overline{\beta}$ (obr. 8), proto dostaneme zcela obdobně jako v prvém případě soustavu

$$\begin{aligned} \cos\beta &= x_1 \cos\alpha + x_2 \sin\alpha\,, \\ (x_1)^2 + (x_2)^2 &= 1\,. \end{aligned} \tag{1,20}$$

Soustava (1,20) má stejný tvar jako soustava (1,15). Nemusíme ji tedy řešit. Stačí, jestliže ve výsledku zaměníme α a β. Také podmínka z (1,16) má tvar $\alpha \neq k\pi$. Řešením jsou proto dvojice čísel:

$$\begin{aligned} x_1 &= \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta\,, \\ x_2 &= \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta\,, \end{aligned} \tag{1,21}$$

$$\begin{aligned} x_1'' &= \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta\,, \\ x_2'' &= \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta\,. \end{aligned} \tag{1,22}$$

Jelikož složky jednotky x musí vyhovovat jak soustavě (1,15), tak soustavě (1,20), máme jedinou možnost. Jsou to čísla (1,18) resp. (1,21). Srovnáme-li nyní jednotku x s jednotkou r ze vzorců (1,13) a (1,14), vidíme, že $x = r$, tedy $\varphi = \alpha + \beta$. Je tedy jednotka určená orientovaným úhlem $\alpha + \beta$ právě ta jednotka, která je výsledkem součinu jednotek s orientovanými úhly α, β. Tím je důkaz věty proveden pro $\alpha \neq k\pi$, $\beta \neq k\pi$.

Důkaz zbývá doplnit v případech, že některá z jednotek, které vystupují v součinu, je určena orientovaným úhlem $k\pi$. Jde tedy o jednotky 1, —1. Snadno se ukáže, že podmínka souvisí pouze s početním postupem. Kdybychom v rovnicích (1,15) nebo (1,20) vyjádřili místo x_2 neznámou x_1 a tu dosazovali do rovnice $(x_1)^2 + (x_2)^2 = 1$, museli bychom vyloučit úhel $(2k + 1)\dfrac{\pi}{2}$. Jednotku x bychom dostali zřejmě ve stejném tvaru, vyloučené jednotky by však byly i a —i, zatímco s jednotkami 1, —1 by bylo všechno v pořádku. Podrobný výpočet si již čtenář snadno provede sám a tím důkaz Moivreovy věty ukončí.

Nyní dokážeme vzorec, který úzce souvisí s Moivreovou větou.

Věta 1.5. *Pro každou komplexní jednotku a každé přirozené číslo n platí:*

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha\,.$$

Důkaz provedeme úplnou indukcí.

a) Vzorec zřejmě platí pro $n = 1$.

b) Předpokládejme platnost vzorce pro nějaké pevné číslo $n = k$:

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^k = \cos k\alpha + i\sin k\alpha\,. \qquad (1,23)$$

c) Na základě předpokladu (1,23) dokážeme, že vzorec platí také pro $n = k + 1$. Zřejmě

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^{k+1} = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^k\,(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

Za $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^k$ dosadíme podle (1,23). Potom

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^{k+1} = (\cos k\alpha + i\sin k\alpha)\,(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

Pravá strana je součin dvou komplexních jednotek a můžeme na ni užít Moivreovu větu. Dostaneme

$$(\cos \alpha + \mathrm{i} \sin \alpha)^{k+1} = \cos (k\alpha + \alpha) + \mathrm{i} \sin (k\alpha + \alpha)$$

a konečně po úpravě

$$(\cos \alpha + \mathrm{i} \sin \alpha)^{k+1} = \cos (k + 1) \alpha + \mathrm{i} \sin (k + 1) \alpha.$$

Tím je důkaz věty proveden. Dokázali jsme totiž: Jestliže vzorec platí pro $n = k$, platí také pro přirozené číslo o 1 větší. Podle a) platí však vzorec pro $n = k = 1$, proto platí také pro $n = 2, 3$, atd. Vzorec proto platí pro každé přirozené n.

POZNÁMKA 1.6. Věta 1.5 je velmi užitečná. Umožňuje nám úsporný výpočet n-té mocniny komplexního čísla, vede ke vzorci pro n-tou odmocninu, je základem při řešení tzv. *binomických rovnic* a konečně dovoluje nám vyjádřit snadno goniometrické funkce vícenásobných úhlů pomocí funkcí úhlů jednoduchých (cv. 1.10).

1.5. Důsledky Moivreovy věty. Moivreova věta nás bohatě odmění za námahu spojenou s důkazem pravdy, která je v ní obsažena. Na základě této věty můžeme totiž odvodit většinu goniometrických vzorců a vztahů. Pro přehlednost budeme důsledky, které uvedeme, číslovat.

DŮSLEDEK 1. GONIOMETRICKÉ FUNKCE ZÁPORNÉHO ARGUMENTU.

Připomeňme si, že velikosti orientovaného úhlu říkáme také *argument*. Vezmeme-li dvě komplexní jednotky o argumentech α, $-\alpha$ (obrazy obou jednotek leží souměrně podle osy x_1) a vynásobíme je, pak podle Moivreovy věty platí rovnost

$$[\cos\alpha + i\sin\alpha][\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha)] = \cos 0 + \\ + i\sin 0 = 1 + 0\,i\,.$$

Součin na levé straně má tvar

$$\cos\alpha\cos(-\alpha) - \sin\alpha\sin(-\alpha) + i\,[\sin\alpha\cos(-\alpha) + \\ + \cos\alpha\sin(-\alpha)]\,.$$

Na základě definice rovnosti komplexních čísel můžeme psát

$$\cos\alpha\cos(-\alpha) - \sin\alpha\sin(-\alpha) = 1\,,$$

$$\sin\alpha\cos(-\alpha) + \cos\alpha\sin(-\alpha) = 0\,.$$

Považujeme-li obě rovnice za soustavu pro neznámé $\cos(-\alpha)$, $\sin(-\alpha)$, snadno zjistíme, že

$$\begin{aligned}\sin(-\alpha) &= -\sin\alpha\,,\\ \cos(-\alpha) &= \cos\alpha\,.\end{aligned} \qquad (1{,}24a)$$

Zkouška nás přesvědčí, že nalezená čísla jsou opravdu kořeny soustavy.

Dosadíme-li (1,24a) do vzorce pro $\mathrm{tg}(-\alpha)$ a $\mathrm{cotg}(-\alpha)$, dostaneme pro přípustná α vzorce

$$\begin{aligned}\mathrm{tg}(-\alpha) &= -\mathrm{tg}\,\alpha\,,\\ \mathrm{cotg}(-\alpha) &= -\mathrm{cotg}\,\alpha\,.\end{aligned} \qquad (1{,}24b)$$

DŮSLEDEK 2. SOUČTOVÉ VZORCE.

Použijeme-li rovnosti $\varphi = \alpha + \beta$ k úpravě rovnic

(1,14), získáme bezprostředně důležité vzorce, kterým říkáme součtové a které platí pro libovolná α, β:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\,, \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\,. \end{aligned} \tag{1,25a}$$

Jestliže ve vzorcích (1,25a) položíme místo β argument $(-\beta)$ a použijeme výsledků (1,24a), máme další dva součtové vzorce:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha - \beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta\,, \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\,. \end{aligned} \tag{1,25b}$$

DŮSLEDEK 3. DALŠÍ SOUČTOVÉ VZORCE.

Podobné součtové vzorce platí také pro $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta)$ a $\operatorname{cotg}(\alpha \pm \beta)$. Ukážeme si odvození prvého, druhý pouze zapíšeme. Zřejmě můžeme psát

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos(\alpha \pm \beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta}\,.$$

Poslední zlomek zjednodušíme tím, že dělíme čitatele i jmenovatele $\cos\alpha\cos\beta$. Po krácení dostaneme

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}\,. \tag{1,26a}$$

Podle (1,11) má ovšem odvozený vzorec smysl jen v tom případě, že

$$\alpha + \beta \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2} \quad \left[\text{resp. } \alpha - \beta \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}\right],$$

$$\alpha \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}\,, \ \beta \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}\,.$$

Podmínky není však třeba znát zpaměti, stačí znalost existenčních předpokladů z definičních vztahů (1,11).

Obdobným způsobem bychom získali vzorec

$$\operatorname{cotg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{cotg}\alpha \operatorname{cotg}\beta \mp 1}{\operatorname{cotg}\alpha \pm \operatorname{cotg}\beta}. \qquad (1,26\text{b})$$

Ve vzorcích (1,26a) a (1,26b) platí vždy současně všechna horní nebo všechna dolní znamení.

DŮSLEDEK 4. Dosadíme-li ve vzorcích (1,25a) a (1,25b) $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\beta = x$ a pak $\alpha = \pi$, $\beta = x$, obdržíme vztahy:

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= \cos x\,, \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= -\sin x\,, \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \cos x\,, \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \sin x\,, \end{aligned} \qquad (1,27\text{a})$$

$$\begin{aligned} \sin(\pi + x) &= -\sin x\,, \\ \cos(\pi + x) &= -\cos x\,, \\ \sin(\pi - x) &= \sin x\,, \\ \cos(\pi - x) &= -\cos x\,. \end{aligned} \qquad (1,27\text{b})$$

DŮSLEDEK 5. PERIODIČNOST GONIOMETRICKÝCH FUNKCÍ.

Funkci $y = f(x)$ nazýváme *periodickou*, jestliže existuje nějaké pevné číslo p tak, že pro každé x platí $f(x + p) = f(x)$.

Ve cvičení (cv. 1.9) si můžete dokázat, že pro každou periodickou funkci platí: *Je-li k libovolné celé číslo, $f(x)$ periodická funkce, pro níž platí* $f(x + p) = f(x)$, *potom také* $f(x + kp) = f(x)$.

Definiční vztah, který charakterizuje periodickou funkci, říká, že funkční hodnoty v bodech x a $(x + p)$ jsou si rovny. *Nejmenší kladné číslo p*, pro které platí $f(x + p) = f(x)$, nazýváme *periodou.*

Věta 1.6. *Všechny goniometrické funkce jsou periodické. Přitom perioda funkcí* $\sin x$ *a* $\cos x$ *je* 2π, *perioda funkcí* $\operatorname{tg} x$ *a* $\operatorname{cotg} x$ *je* π.

Důkaz. Je-li funkce $\sin x$ periodická, potom existuje pro všechna x číslo p (které nezávisí na x) tak, že $\sin (x + p) = \sin x$. Jestliže rozvedeme levou stranu podle příslušného vzorce (1,25a) a upravíme, dostaneme rovnici

$$\sin x (\cos p - 1) + \cos x \sin p = 0 \,,$$

která je splněna pro všechna x tehdy a jen tehdy, jestliže $\cos p = 1$, $\sin p = 0$ (cv. 1.7). Čísla $\cos p$ a $\sin p$ jsou složky téže komplexní jednotky s argumentem $2k\pi$, který nabývá nejmenší kladné hodnoty pro $k = 1$. Funkce je proto periodická a její periodou je číslo 2π. Důkaz pro funkci $\cos x$ by byl obdobný.

Také důkazy pro $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$ jsou téměř stejné, omezíme se proto na $\operatorname{tg} x$. Ptejme se, zda existuje pro všechna přípustná x takové číslo $p \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}$, aby platilo $\operatorname{tg}(x + p) = \operatorname{tg} x$, $\left[(x + p) \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}\right]$. Rozvedeme-li levou stranu podle vzorce (1,26a) a upravíme, dospějeme k rovnici

$$\operatorname{tg} p\,(1 + \operatorname{tg}^2 x) = 0\,.$$

Ta je zřejmě splněna tehdy a jen tehdy, jestliže $\operatorname{tg} p = 0$, to znamená $p = k\pi$. Poslední výsledek plyne ze skutečnosti, že rovnice $\operatorname{tg} p = 0$ je ekvivalentní s rovnicí $\sin p = 0$ a tou jsme se již zabývali v rozboru, který vedl k definičním vztahům (1,11). Číslo p existuje a jeho nejmenší kladná hodnota je π. Dokázali jsme tím, že funkce $\operatorname{tg} x$ je periodická s periodou π.

DŮSLEDEK 6. VZORCE PRO DVOJNÁSOBNÉ VELIKOSTI ÚHLU.

Položíme-li ve vzorcích (1,25a) $\alpha = \beta = x$, dostaneme ihned

$$\begin{aligned} \sin 2x &= 2 \sin x \cos x\,, \\ \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x\,. \end{aligned} \qquad (1,28a)$$

Učiníme-li totéž se vzorci pro $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ a $\operatorname{cotg}(\alpha + \beta)$, získáme další vzorce

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2x &= \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}\,, \\ \operatorname{cotg} 2x &= \frac{\operatorname{cotg}^2 x - 1}{2 \operatorname{cotg} x}\,. \end{aligned} \qquad (1,28b)$$

První vzorec (1,28b) platí za předpokladu, že $x \neq$

$\neq (2k + 1)\dfrac{\pi}{2}$ a $x \neq (2k + 1)\dfrac{\pi}{4}$, druhý, jestliže $x \neq$ $\neq k\dfrac{\pi}{2}$.

DŮSLEDEK 6. VZORCE PRO POLOVIČNÍ VELIKOST ÚHLU.

Ve druhém vzorci, který je uveden pod číslem (1,28a), můžeme pomocí věty 1.1 vyjádřit pravou stranu pouze pomocí $\sin x$ nebo $\cos x$. Platí totiž, že

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x\,,$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1\,.$$

Odtud dostaneme další dva vzorce

$$\begin{aligned}\sin^2 x &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)\,,\\ \cos^2 x &= \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)\,.\end{aligned} \qquad (1{,}29\text{a})$$

Položíme-li zde $\alpha = 2x$, potom $x = \dfrac{\alpha}{2}$ a vzorce (1,29a) přejdou na tvar

$$\begin{aligned}\sin^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{1}{2}(1 - \cos \alpha)\,,\\ \cos^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{1}{2}(1 + \cos \alpha)\,.\end{aligned} \qquad (1{,}29\text{b})$$

Vzorce (1,29a) i (1,29b) vyjadřují samozřejmě tytéž vztahy. Jde pouze o jinou formu zápisu. Z nich obdržíme bezprostředně vyjádření pro $\operatorname{tg}^2 x$ nebo $\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}$. Snadno si můžeme ověřit, že

$$
\begin{aligned}
\operatorname{tg}^2 x &= \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}, \quad x \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2} \\
\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}, \quad \alpha \neq (2k + 1)\pi .
\end{aligned}
\tag{1,30a}
$$

DŮSLEDEK 7. *Za příslušných existenčních předpokladů můžeme každou goniometrickou funkci vyjádřit racionálně pouze pomocí funkce* $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Označme $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = t$. Použijeme-li ve vzorcích (1,28b) substituce $2x = \alpha$ potom

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}, \quad \alpha \neq (2k + 1)\pi .$$

Na podkladě naší počáteční dohody můžeme psát

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2t}{1 - t^2} . \tag{1,31}$$

Jelikož $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{cotg} \alpha = 1$, plyne odtud a ze vzorce (1,31), že

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{1 - t^2}{2t}, \quad \alpha \neq k\pi .$$

Ve vzorcích (1,28a) položíme opět $2x = \alpha$ neboli $x = \frac{\alpha}{2}$.
Dostaneme tak vztahy:

$$\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} . \cos \frac{\alpha}{2} = 2 \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} . \cos^2 \frac{\alpha}{2} =$$

$$= 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} . \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} .$$

Podle příkladu 1.1 jsme použili identity

$$1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} .$$

Jelikož podle dohody píšeme $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = t$, můžeme $\sin \alpha$ vyjádřit pomocí vztahu

$$\sin \alpha = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad \alpha \neq (2k + 1) \pi . \tag{1,32}$$

Počítejme při stejném označení ze vzorců (1,28a) $\cos \alpha$:

$$\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \cos^2 \frac{\alpha}{2} \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \right) =$$

$$= \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} . \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} .$$

Odsud plyne výsledek

$$\cos \alpha = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad \alpha \neq (2k + 1)\,\pi\,. \qquad (1{,}33)$$

Čtenáře, pro které je tento svazek prvním hlubším pohledem do světa goniometrických funkcí obecného úhlu, chceme upozornit, které vzorce je dobré znát zpaměti. Jsou to samozřejmě všechny věty, definiční vztahy (1,1), (1,4) a (1,11), dále pak všechny vzorce číslem (1,24a) počínaje a (1,34b) konče. Výjimku mohou činit pouze vzorce (1,27a), (1,27b). Ze vzorců (1,29a), (1,29b) a (1,30a), (1,30b) stačí pamatovat jednu variantu. Vzorce (1,34) probereme nyní.

DŮSLEDEK 8. SOUČTOVÉ VZORCE PRO $\sin x \pm \sin y$ A $\cos x \pm \cos y$.

Užijeme-li na vzorce (1,25a) a (1,25b) substituce

$\alpha + \beta = x, \alpha - \beta = y$, potom $\alpha = \dfrac{x + y}{2}$, $\beta = \dfrac{x - y}{2}$

a vzorce přejdou na tvar:

$$\sin x = \sin \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2} + \cos \frac{x + y}{2} \sin \frac{x - y}{2},$$

$$\sin y = \sin \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2} - \cos \frac{x + y}{2} \sin \frac{x - y}{2},$$

$$\cos x = \cos \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2} - \sin \frac{x + y}{2} \sin \frac{x - y}{2},$$

$$\cos y = \cos \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2} + \sin \frac{x + y}{2} \sin \frac{x - y}{2}.$$

Sečtení a odečtení prvých dvou rovnic vede ke vztahům:

$$\begin{aligned} \sin x + \sin y &= 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \\ \sin x - \sin y &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}. \end{aligned} \qquad (1,34\text{a})$$

Podobně součet a rozdíl druhých dvou rovnic vede k výsledku:

$$\begin{aligned} \cos x + \cos y &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \\ \cos x - \cos y &= -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}. \end{aligned} \qquad (1,34\text{b})$$

Vzorce (1,33a) a (1,33b) mají mnohostranné využití neboť převádějí součet nebo rozdíl dvou funkcí na součin. Tento proces je účelný kupř. při provádění výpočtu logaritmicky. Pro funkce $\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y$ a $\operatorname{cotg} x \pm \operatorname{cotg} y$ podobné vzorce nezavádíme. Potřebujeme-li takový vzorec, odvodíme jej pro každý případ zvlášť tak, že přejdeme k funkcím sinus a kosinus.

Cvičení

1. 1. Dokažte, že číslo $\dfrac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}} + i\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ je komplexní jednotka.

1.2. Určete hodnotu výrazu $\sqrt{3} \sin \varphi + \cos \varphi$, jestliže

$$\sin \varphi = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}, \quad \cos \varphi = \frac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}}.$$

1.3. Napište algebraický tvar komplexních jednotek bez použití tabulek hodnot goniometrických funkcí, znáte-li argumenty těchto jednotek:

$$\text{a) } \varphi = \frac{\pi}{12}, \quad \text{b) } \varphi = -\frac{\pi}{8}.$$

Návod: Užijte vzorců (1,29), znamení stanovte pomocí jednotkové kružnice.

1.4. Napište algebraický tvar komplexního čísla, jestliže

$$|a| = 2, \quad \varphi = -\frac{\pi}{6}.$$

1.5. Dokažte, že pro každé x je splněna nerovnost $|\cos x| \leqq 1$.

Návod najdete v důkazu věty 1.2.

1.6. Dokažte, že pro libovolná α, β platí identita
$\cos^2 \alpha \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha + \sin^2 \beta = \sin^2 \alpha \sin^2 \beta$.

1.7. Dokažte, že rovnice $\sin x (\cos p - 1) + \cos x \sin p = 0$ je splněna pro každé x tehdy a jen tehdy, jestliže $p = 2k\pi$. Návod: Abyste dokázali, že podmínka $p = 2k\pi$ je nutná, stačí si uvědomit, že neplatí nikdy současně $\sin p = 0$, $\cos p = 0$.

1.8. Odvoďte vzorce pro a) $\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y$,
b) $\operatorname{cotg} x \pm \operatorname{cotg} y$.

1.9. Dokažte: Je-li k libovolné celé číslo, $f(x)$ periodická funkce, pro niž platí $f(x + p) = f(x)$, potom také platí $f(x + kp) = f(x)$. Návod: Užijte matematické indukce. Jestliže $k < 0$, převedeme levou stranu na tvar

$$f[x - (-k)\, p].$$

1.10. Vyjádřete $\cos 7\alpha$ a $\sin 7\alpha$ (pomocí věty 1.5) pouze funkcemi jednoduchého argumentu α.

1.11. Ověřte si, že rovnice (1,19) plynou z rovnic (1,18), dosadíme-li tam za α hodnotu $-\alpha$.

2. kapitola

GONIOMETRICKÉ ROVNICE A ÚPRAVY GONIOMETRICKÝCH VÝRAZŮ

2.1. Základní goniometrická rovnice. Vrátíme se úvodem k jednotkové kružnici, abychom si připomněli, při kterých velikostech orientovaného úhlu nabývají funkce $\sin x$ a $\cos x$ nulové hodnoty. Touto otázkou jsme se z nutnosti zabývali už v 1. kapitole při stanovení existenčních oborů funkcí $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$ (srovnejte příslušný rozbor na str. 21, který předcházel definičním vztahům (1,11)). Dospěli jsme tam k závěru, že $\sin x$ je roven nule právě pro každý celočíselný násobek čísla π, $\cos x$ pak pro každý lichý násobek čísla $\frac{\pi}{2}$. Řešili jsme tím vlastně zvláštní případy tzv. *goniometrických rovnic*

$$\sin x = 0\,, \quad \text{respektive} \quad \cos x = 0\,,$$

a zjistili jsme, že všechna řešení těchto rovnic můžeme zapsat ve tvaru

$$x = k\pi\,, \quad \text{respektive} \quad x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}\,. \qquad (2,1)$$

Často se při řešení úloh setkáme s následujícím problémem: Známe hodnotu některé goniometrické funkce, ale neznáme velikost úhlu, pro niž příslušná funkce známé hodnoty nabývá. Takovou závislost píšeme obecně ve tvaru

$$f(x) = c\,, \qquad (2,2)$$

kde c je nějaké známé číslo a $f(x)$ je goniometrická funkce s argumentem x, jehož velikost neznáme. Kupř. $\sin x = \frac{1}{2}$, $\operatorname{cotg} x = 1$ jsou příkladem takových závislostí. Rovnice tvaru (2,2) se nazývá *základní goniometrická rovnice* nebo *goniometrická rovnice v základním tvaru*. Řešením takové rovnice rozumíme zpravidla libovolnou velikost orientovaného úhlu, která po dosazení převádí rovnici v rovnost. V praktických úlohách z planimetrie, stereometrie a podobně se přirozeně omezíme pouze na ty velikosti, které mají pro danou úlohu význam. Jestliže najdeme všechna řešení dané rovnice, potom množinu všech těchto řešení nazýváme *obecným řešením*.

Každá rovnice tvaru (2,2) nemusí mít ovšem řešení. Např. rovnice $\cos x = 2$ řešení nemá, neboť $\sin x$ a $\cos x$ nabývají (podle věty 1.2) pouze hodnot z intervalu $\langle -1, 1 \rangle$. Má-li však rovnice řešení, potom jich má nekonečně mnoho. Tato skutečnost je přímým důsledkem periodičnosti goniometrických funkcí.

Všimneme si nejprve rovnice

$$\sin x = c\,, \tag{2,3}$$

kde c je libovolné, ale pevně zvolené číslo z intervalu $\langle -1, 1 \rangle$. Předpokládejme, že jedno řešení rovnice (2,3) je α. Položme si otázku, zda existují ještě nějaká další řešení. V tom případě by muselo platit $\sin x = \sin \alpha$. Převedeme-li $\sin \alpha$ na levou stranu a použijeme vzorců (1,34a), dostaneme postupně

$$\sin x - \sin \alpha = 0\,,$$

$$2 \cos \frac{x + \alpha}{2} \sin \frac{x - \alpha}{2} = 0\,.$$

Aby byla splněna poslední rovnice, musí platit buď

$$\sin \frac{x - \alpha}{2} = 0\,, \quad \text{nebo} \quad \cos \frac{x + \alpha}{2} = 0\,.$$

Dostáváme tak nové dvě dílčí rovnice, jejichž všechna řešení nám dávají celkové řešení původní rovnice. Abychom toto řešení nalezli, upravíme obě poslední dílčí rovnice pomocí vztahu (2,1). Dostáváme tak

$$\frac{x - \alpha}{2} = k\pi\,, \quad \frac{x + \alpha}{2} = (2k + 1)\,\frac{\pi}{2}\,.$$

Odtud již snadno vypočteme konečný výsledek

$$x = \alpha + 2k\pi\,, \quad x = (\pi - \alpha) + 2k\pi\,. \qquad (2,4)$$

Všechna řešení rovnice (2,3) můžeme tedy zapsat ve tvaru (2,4). Jestliže $\alpha = \frac{\pi}{2}$ nebo $\alpha = -\frac{\pi}{2}$, říkají oba zápisy totéž a vystačíme pouze s jedním z nich.

Příklad 2.1. a) Řešme rovnici

$$\sin x = \frac{1}{2}\,.$$

Jedno řešení známe. Je to číslo $\frac{\pi}{6}$. Podle (2,4) zapíšeme obecné řešení ve tvaru

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi\,, \quad x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi\,.$$

b) Obecné řešení rovnice $\sin x = 1$ zapíšeme však takto:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\,.$$

Máme-li určit všechny kořeny rovnice

$$\cos x = c\,, \qquad (2,5)$$

kde c je libovolně, ale pevně zvolené číslo z intervalu $\langle -1, 1 \rangle$, zvolíme obdobný postup jako u rovnice (2,3). Je-li jedno známé řešení α, potom další možná řešení musí splňovat rovnici $\cos x = \cos \alpha$. Obdobnou úpravou jako u rovnice (2,3) za použití vzorců (1,34b) dostaneme postupně vztahy

$$\cos x - \cos \alpha = 0 ,$$

$$-2 \sin \frac{x + \alpha}{2} \sin \frac{x - \alpha}{2} = 0 .$$

Odtud plyne, že

$$\frac{x - \alpha}{2} = k\pi , \quad \frac{x + \alpha}{2} = k\pi .$$

Konečný výsledek můžeme zapsat ve tvaru

$$x = \alpha + 2k\pi , \quad x = -\alpha + 2k\pi , \qquad (2,6)$$

který nám představuje obecné řešení rovnice (2,5). Zápis (2,6) je jednoduchý a snadno se pamatuje.

Příklad 2.2. Řešme rovnici

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} .$$

Jak plyne z předcházejících úvah, je obecné řešení této rovnice dáno vztahem

$$x = \pm \frac{\pi}{4} + 2k\pi .$$

Rovnice

$$\operatorname{tg} x = c \qquad (2,7)$$

má řešení pro každé reálné číslo c. Jedno její známé řešení označme opět α. Případná další řešení musí vyhovovat rovnici $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \alpha$, kterou upravíme tak, že převedeme $\operatorname{tg} \alpha$ na levou stranu a nahradíme sinem a kosinem. Dostáváme tak rovnici

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} \alpha = 0 ,$$

kterou uvedeme na tvar

$$\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 0 .$$

Zde ovšem předpokládáme, že $\cos x \cos \alpha \neq 0$, neboť jinak by $\operatorname{tg} x$ neexistovala a daná rovnice by neměla smysl. Násobíme-li tedy obě strany rovnice nenulovým výrazem $\cos x \cos \alpha$, obdržíme

$$\sin x \cos \alpha - \cos x \sin \alpha = 0$$

a podle (1,25b)

$$\sin (x - \alpha) = 0 .$$

S přihlédnutím k výsledku (2,1) můžeme obecné řešení poslední rovnice a tím také obecné řešení rovnice (2,7) zapsat souhrnně

$$x = \alpha + k\pi . \tag{2,8}$$

Příklad 2.3. Všechny kořeny rovnice $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ jsou dány zápisem $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$.

POZNÁMKA 2.1. Obdobným způsobem jako u rovnice (2,7) bychom dospěli k závěru, že všechna řešení rovnice $\operatorname{cotg} x = c$ mají rovněž tvar (2,8).

Při hledání obecného řešení základních goniometrických rovnic jsme vycházeli z předpokladu, že známe jedno řešení. Jak je vidět z výsledků (2,4), (2,6), (2,8) a z poznámky 2.1, stačí nám jedno takové řešení ke znalosti všech kořenů goniometrické rovnice. Proto je dobré hodnoty goniometrických funkcí některých úhlů znát zpaměti. Uvádíme je v přehledné tabulce.*).

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0		0
$\operatorname{cotg} x$		$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0		0	

V obecných postupech jsme pro c žádali jen taková omezení, aby byla zajištěna existence řešení. Pozornému čtenáři však jistě neušlo, že v příkladech, které jsme dosud uvedli, bylo číslo c kladné. Jestliže totiž $c > 0$, leží vždy jedno řešení takové rovnice v prvém kvadrantu a k jeho určení nám poslouží buď paměť, nebo tabulky

*) Prázdná místa v tabulce odpovídají argumentu, pro který není příslušná goniometrická funkce definována.

hodnot goniometrických funkcí. Jestliže $c < 0$, pomůže nám přechod k zápornému argumentu u funkcí $\sin x$, $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$ dosáhnout toho, aby hodnotou funkce bylo číslo kladné. Poslouží nám vzorce (1,24a), (1,24b). Řešení se tedy opírá i v tomto případě o 1. kvadrant. Ukážeme si příklad.

Příklad 2.4. Rovnici $\operatorname{cotg} x = -\sqrt{3}$ násobíme číslem (-1) a použijeme vzorce $\operatorname{cotg}(-x) = -\operatorname{cotg} x$. Získáme tak rovnici $\operatorname{cotg}(-x) = \sqrt{3}$.

Tabulka na str. 47 nám říká, že funkce kotangens nabývá hodnoty $\sqrt{3}$ pro úhel velikosti $\frac{\pi}{6}$. Na základě výsledku (2,8) a poznámky 2.1 je obecné řešení dáno ve formě $-x = \frac{\pi}{6} + k\pi$, neboli $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$.

POZNÁMKA 2.2. Prakticky můžeme tedy základní goniometrické rovnice pro $\sin x$, $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$ s pravou stranou zápornou řešit jako odpovídající rovnici s pravou stranou kladnou s tím, že před výsledky připíšeme minus.

Příklad 2.5. Kořeny rovnice $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ určíme tedy následovně: V rovnici $\sin z = \frac{\sqrt{3}}{2}$ má kořen, který leží v 1. kvadrantu, hodnotu $\frac{\pi}{3}$. Poznámka 2.2. nám dovoluje zapsat kořeny dané rovnice takto:

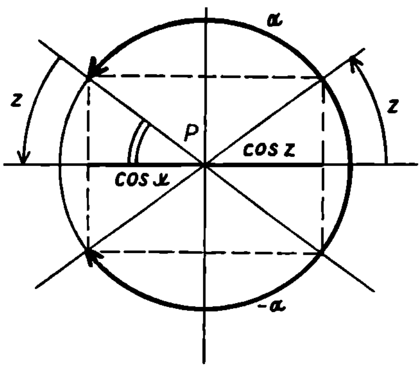
$$x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi\,, \quad x = -\frac{2}{3}\pi + 2k\pi\,.$$

Ve shodě s obecným řešením (2,4) můžeme ovšem při známé hodnotě $\alpha = -\frac{\pi}{3}$ použít jiného zápisu

$$x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi\,, \quad x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi\,.$$

Oba zápisy jsou přirozeně ekvivalentní a dají se vzájemně převést. Čtenář si jistě sám zvolí způsob, který mu lépe vyhovuje.

Uvedený postup selže v případě goniometrické rovnice $\cos x = c$, kde $c < 0$. Věnujme jí proto chvíli pozornost. Funkce $\cos x$ nabývá záporných hodnot ve 2. a 3. kvadrantu (obr. 9). Při řešení dané rovnice využijeme opět 1. kvadrant, jen cesta bude trochu jiná. Jelikož jedno řešení, které označíme opět α, leží ve 2. kvadrantu, můžeme je jistě psát ve formě $\alpha = \pi - z$, kde $z \in \langle 0, \frac{\pi}{2})$. Dále, poněvadž α je předpokládaný kořen rovnice,



Obr. 9. K řešení rovnice $\cos x = c$, $c < 0$.

musí platit $\cos(\pi - z) = c$. Úprava levé strany podle příslušného vzorce (1,25b) vede k rovnici $\cos z = -c$. Tato rovnice má pravou stranu kladnou, neboť z předpokladu $c < 0$ plyne, že $-c > 0$. Umíme proto určit z a tím i hodnotu α, pro kterou platí vztah $\alpha = \pi - z$. Ostatní kořeny rovnice vypočteme pak na základě (2,6).

Příklad 2.6. Řešme rovnici

$$\cos x = -\frac{1}{2}.$$

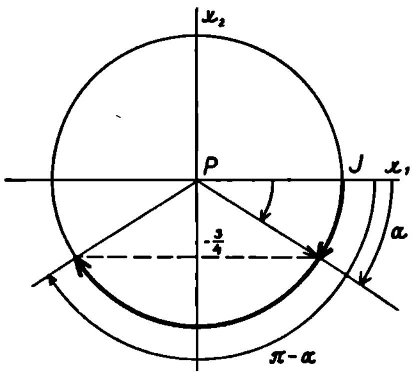
Pomocnou hodnotu z získáme řešením rovnice $\cos z = \frac{1}{2}$. Stačí, určíme-li jeden kořen, který leží v 1. kvadrantu. Tímto kořenem je zřejmě číslo $\frac{\pi}{3}$. Potom ovšem $\alpha = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$ a hledané obecné řešení je dáno podle (2,6) vztahem

$$x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi, \quad x = -\frac{2}{3}\pi + 2k\pi.$$

POZNÁMKA 2.3. Kořeny rovnic $\sin x = 0$ a $\cos x = 0$ byly uvedeny v (2,1). Stejné kořeny jako rovnice $\sin x = 0$ má také rovnice $\operatorname{tg} x = 0$, neboť zlomek $\frac{\sin x}{\cos x}$ nabývá hodnoty 0 tehdy a jen tehdy, jestliže $\sin x = 0$. Totéž platí o rovnicích $\cos x = 0$ a $\operatorname{cotg} x = 0$.

POZNÁMKA 2.4. Souvislost mezi goniometrickými funkcemi a jednotkovou kružnicí nám umožňuje bezpečnou kontrolu, zda nalezená řešení leží v příslušném kvadrantu. Podle (1,8) víme, že $\sin x$ je imaginární složka, $\cos x$ pak reálná složka komplexní jednotky s argumentem x. Je-li c libovolné číslo z intervalu $(-1, 1)$, existují vždy právě dvě různé komplexní jednotky tak, že jejich imaginární složka má hodnotu c. Jestliže $c > 0$, leží příslušné jednotkové vektory, které jsou obrazy těchto jednotek, nad osou x_1 a kořeny rovnice $\sin x = c$ musí ležet v 1. a 2. kvadrantu. Jestliže $c < 0$, obrazy obou jednotek leží pod osou x_1 a hledané kořeny se musí nacházet ve 3. a 4. kvadrantu. Obr. 10 ukazuje grafické řešení rovnice $\sin x = -\dfrac{3}{4}$.

Podobně jako se sinem je tomu i s kosinem. Naše znalosti o sinu a kosinu nám také v plné míře stačí, máme-li rozhodnout, v kterém kvadrantu leží kořeny rovnic $\operatorname{tg} x = c$ a $\operatorname{cotg} x = c$, jak plyne z definičních vztahů (1,11).



Obr. 10. Grafické řešení rovnice $\sin x = -\dfrac{3}{4}$.

Uvedeme ještě dva příklady goniometrických rovnic, v nichž argument bude mít poněkud složitější formu, než tomu bylo dosud.

Příklad 2.7. Řešme rovnici

$$\operatorname{tg} 2x = -1\,.$$

Užijeme-li substituce $y = 2x$, dostáváme novou rovnici $\operatorname{tg} y = -1$, která má kořeny $y = -\frac{\pi}{4} + k\pi$. Po návratu k neznámé x snadno určíme vztah

$$x = -\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}\,,$$

kterým je dáno obecné řešení rovnice dané.

Základní goniometrické rovnice s vícenásobným argumentem nám tedy nečiní žádné potíže. V praxi nepoužíváme zpravidla ani substituce, nýbrž výpočet provádíme přímo. Obdobný je výpočet kořenů goniometrických rovnic, v nichž argument má tvar součtu nebo rozdílu, jak ukazuje další příklad.

Příklad 2.8. Řešme rovnici

$$\cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

Substitucí $y = \frac{\pi}{6} - 2x$ ji převeďme na tvar

$$\cos y = -\frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

Podobně jako v příkladu 2.6 vypočtěme jeden kořen pomocné rovnice $\cos z = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Tímto kořenem je zřejmě číslo $\frac{\pi}{6}$. Má proto jedno řešení rovnice $\cos y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ hodnotu $\alpha = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$. Potom podle (2,6)

$$y = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi\,, \quad y = -\frac{5}{6}\pi + 2k\pi\,.$$

Vrátíme-li se k neznámé x, snadno dostaneme výsledek

$$x = -\frac{\pi}{3} + k\pi\,, \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi\,,$$

který je obecným řešením původní rovnice.

Shrneme-li dosavadní výsledky, můžeme říci:

Je-li α libovolné jedno řešení rovnice

a) $\sin x = c$,
b) $\cos x = c$,
c) $\operatorname{tg} x = c$,
d) $\operatorname{cotg} x = c$,

potom obecné řešení této rovnice můžeme zapsat ve tvaru

a) $x = \alpha + 2k\pi\,, \quad x = (\pi - \alpha) + 2k\pi$,
b) $x = \alpha + 2k\pi\,, \quad x = -\alpha + 2k\pi$,
c) $x = \alpha + k\pi$,
d) $x = \alpha + k\pi$.

Jak určíme jedno řešení goniometrické rovnice v základním tvaru, bylo vyloženo výše.

2.2. Goniometrická rovnice tvaru $af^2(x) + bf(x) + c = 0$. Často se setkáme s rovnicí, která je kvadratická vzhledem k některé funkci. Tento tvar má kupř. rovnice $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$. Obecně můžeme takovou rovnici zapsat ve tvaru

$$af^2(x) + bf(x) + c = 0\,,$$

kde $f(x)$ je některá goniometrická funkce. Rovnici rozřešíme nejprve vzhledem k příslušné funkci (v našem případě ke $\cos x$). Tím získáme základní tvar goniometrické rovnice, který již umíme řešit. Výpočet ukážeme na příkladě.

Příklad 2.9. Při řešení rovnice

$$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$$

použijeme substituce $y = \cos x$. Získáme novou rovnici $2y^2 - y - 1 = 0$. Jejími kořeny jsou čísla $1, -\frac{1}{2}$. Jelikož $y = \cos x$, mají obě hledané základní goniometrické rovnice tvar

$$\cos x = 1, \quad \cos x = -\frac{1}{2}.$$

Kořeny první z nich jsou $x = 2k\pi$, kořeny druhé podle příkladu 2.6

$$x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi\,, \quad x = -\frac{2}{3}\pi + 2k\pi\,.$$

Tím jsme získali všechny kořeny čili obecné řešení dané rovnice.

Příklad 2.10. Podobně řešíme rovnici

$$\operatorname{tg}^2 x = \sqrt{3} \operatorname{tg} x .$$

Jde o kvadratickou rovnici bez absolutního členu. Řešení je patrné ze zápisu:

$$\operatorname{tg}^2 x - \sqrt{3} \operatorname{tg} x = 0 ,$$

$$\operatorname{tg} x(\operatorname{tg} x - \sqrt{3}) = 0 .$$

Odtud plyne, že $\operatorname{tg} x = 0$ nebo $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$. Obecné řešení původní rovnice můžeme psát ve tvaru

$$x = k\pi , \quad x = \frac{\pi}{3} + k\pi .$$

2.3. Úpravy goniometrických výrazů. V další části této kapitoly se věnujeme úpravám goniometrických výrazů. Víme, že mezi goniometrickými funkcemi platí celá řada vztahů. Budeme se o ně přirozeně opírat. Čtenář si jistě právem položí otázku, k čemu je dobré zabývat se úpravou goniometrických výrazů. Pro odpověď nemusíme daleko. Při výpočtech, v nichž se vyskytují goniometrické funkce, dospějeme obvykle k výrazům, které jsou značně složité a nepřehledné a vhodnou úpravou je můžeme často zjednodušit. Případný rozbor jednoduššího výrazu je vždycky přehlednější a hlavně bezpečnější. Úpravy nám také umožňují převést složitější goniometrické rovnice na základní tvar.

Příklad 2.11. Máme upravit výraz

$$\frac{\cos^2 2\alpha + 1}{\cos 2\alpha + 1} - \cos 2\alpha$$

a stanovit, pro které hodnoty α má smysl.

Jmenovatel zlomku, který se v daném výraze vyskytuje, musí být rozdílný od nuly. Jinak řečeno, musíme vyloučit všechny kořeny rovnice $\cos 2\alpha = -1$. Výpočet kořenů ponecháme čtenáři, zapíšeme pouze výsledek $\alpha = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$. Daný výraz má proto smysl, jestliže $\alpha \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}$. Prvním krokem při úpravě bude převod na společného jmenovatele. Sloučíme-li poté členy v čitateli, můžeme s přihlédnutím k vzorci (1,30) psát

$$\frac{\cos^2 2\alpha + 1}{\cos 2\alpha + 1} - \cos 2\alpha =$$

$$= \frac{\cos^2 2\alpha + 1 - \cos^2 2\alpha - \cos 2\alpha}{\cos 2\alpha + 1} =$$

$$= \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha \, .$$

Potíž při úpravě goniometrických výrazů spočívá jednak v tom, že způsobů, které vedou k cíli, je zpravidla několik a nevíme předem, který z nich je nejvýhodnější, dále pak v tom, že vztahů, které platí mezi goniometrickými funkcemi, je značné množství a je proto nutná jejich bezpečná znalost.

Příklad 2.12. Máme zjednodušit výraz

$$\frac{\operatorname{tg}^3 x}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos^3 x} + \operatorname{tg} x \, .$$

Daný výraz má smysl, jestliže $\cos x \neq 0$, to znamená, jestliže $x \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}$. To však není žádná nová podmínka, neboť zjištěným omezením je už vázána funkce tg x.

Uvědomíme-li si, že $\dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$ můžeme psát ve tvaru tg x $\dfrac{1}{\cos^2 x}$, je potom možno z celého výrazu vytknout tg x. Dostaneme tak vztah

$$\frac{\operatorname{tg}^3 x}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos^3 x} + \operatorname{tg} x =$$

$$= \operatorname{tg} x \left[\operatorname{tg}^2 x \, \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} + 1\right].$$

Jelikož (podle př. 1.1) platí identita $\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ pro $x \neq (2k + 1)\dfrac{\pi}{2}$, můžeme pokračovat v úpravě s tou výhodou, že daný výraz bude vyjádřen jedinou funkcí:

$$\operatorname{tg} x \left[\operatorname{tg}^2 x \, \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} + 1\right] =$$

$$= \operatorname{tg} x \left[\operatorname{tg}^2 x (1 + \operatorname{tg}^2 x) - (1 + \operatorname{tg}^2 x) + 1\right] =$$

$$= \operatorname{tg} x [\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x - 1 - \operatorname{tg}^2 x + 1] = \operatorname{tg}^5 x .$$

Postup, kterým jsme výraz zjednodušili, není však typický. Častěji totiž postupujeme tak, že výraz, v němž se kromě funkcí sin x a cos x vyskytuje také funkce tg x nebo cotg x (případně obě), vyjádříme pomocí sin x a cos x. To je vždycky možné, někdy však zdlouhavé. Zkuste tímto způsobem upravit výraz z př. 2.12.

Pro součet sin x $\pm$ sin y a cos x $\pm$ cos y jsme odvodili vzorce (1,34a), (1,34b). Výrazy tvaru $\sin x \pm \cos y$ nebo $\cos x \pm \sin y$ převádíme, pokud je to účelné, na vzorce (1,34a), (1,34b) pomocí vztahů (1,27). Významný je případ, kdy $y = x$.

Příklad 2.13. Vyjádřete pomocí jediné goniometrické funkce výraz $\sin x + \cos x$. Jelikož podle (1,27) platí identita $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ pro každé x, můžeme výraz $\sin x + \cos x$ upravit takto:

$$\sin x + \cos x = \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) =$$

$$= 2 \sin\frac{\pi}{4} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Chceme-li mít ve výsledku funkci sinus, použijeme při úpravě vzorce $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. Analogickým způsobem pak snadno zjistíme, že

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

Poznamenejme ještě, že užitím vzorců (1,34a), (1,34b) můžeme upravit také výrazy $1 \pm \sin x$, $1 \pm \cos x$ a to tak, že použijeme vztahů $1 = \sin\frac{\pi}{2}$, $1 = \cos 0$.

Příklad 2.14. Upravme zmíněným způsobem rozdíl $1 - \cos x$. Zřejmě můžeme psát

$$1 - \cos x = \cos 0 - \cos x =$$

$$= -2 \sin\frac{x}{2} \sin\left(-\frac{x}{2}\right) = 2 \sin^2\frac{x}{2}.$$

Stejný výsledek dostaneme bezprostředně ze vzorce (1,29b).

Příklad 2.15. Podobně

$$1 + \sin x = \sin \frac{\pi}{2} + \sin x =$$

$$= 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) =$$

$$= 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) = 2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right).$$

Při úpravě jsme použili identity

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right).$$

Někdy jsme naopak nuceni převést na součet součiny tvaru $\sin \alpha \sin \beta$, $\sin \alpha \cos \beta$, $\cos \alpha \cos \beta$. To nám umožní vzorce (1,25a) a (1,25b).

Příklad 2.16. Platí vztahy:

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta)] ,$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta)] ,$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta)] .$$

Ověření těchto identit je snadné. Ponecháme je čtenáři.

Pokud výraz obsahuje vedle funkcí s jednoduchým argumentem také funkce s argumentem vícenásobným nebo lomeným, upravíme jej zpravidla nejdříve tak, aby obsahoval jen funkce téhož argumentu.

Příklad 2.17. Upravme výraz

$$\left(1 - \frac{\cos x}{1 + \cos x} - 2 \sin^2 \frac{x}{2}\right) \frac{\cos 2x - 1}{2 \cos^2 x} .$$

Vyšetřit existenční podmínky je snadné. Aby měl uvedený výraz smysl, musí platit, že

$$x \neq (2k + 1)\, \pi, \ x \neq (2k + 1) \frac{\pi}{2} .$$

Funkce $\sin^2 \frac{x}{2}$ a $\cos 2x$ vyjádříme nejprve jako funkce jednoduchého argumentu. Stačí si uvědomit, že platí

$$1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} = 1 - \sin^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} =$$
$$= \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \cos x .$$

Použili jsme příslušný vzorec (1,28a). Tentýž vzorec nám poslouží také při úpravě čitatele zlomku, který stojí za závorkou.

$$\cos 2x - 1 = \cos^2 x - \sin^2 x - 1 =$$
$$= -(1 - \cos^2 x) - \sin^2 x = -2 \sin^2 x .$$

Po dosazení do výrazu máme

$$\left(\cos x - \frac{\cos x}{1 + \cos x}\right) \frac{-\sin^2 x}{\cos^2 x} .$$

Jelikož se v celém výrazu vyskytuje téměř výhradně funkce $\cos x$, vyjádříme $\sin x$ pomocí $\cos x$ a rozložíme. Další ekvivalentní úpravy jsou zřejmé:

$$\left(\cos x - \frac{\cos x}{1 + \cos x}\right) \frac{-(1 + \cos x)(1 - \cos x)}{\cos^2 x} =$$

$$= -\frac{\cos x + \cos^2 x - \cos x}{1 + \cos x} \frac{(1 + \cos x)(1 - \cos x)}{\cos^2 x} =$$

$$= 1 - \cos x .$$

Jiný tvar výsledku udává příklad 2.14.

Příklad 2.18. Upravme výraz

$$\frac{-\cos^2 x}{\sin x - \cos^2 x - 1} \frac{\sin x + 2}{2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)} .$$

Jmenovatele prvého zlomku můžeme uvést na kvadratický trojčlen $\sin^2 x + \sin x - 2$, který je rozložitelný na součin $(\sin x - 1)(\sin x + 2)$. Výraz $2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$ můžeme pak nahradit ekvivalentním výrazem $1 + \sin x$ podle př. 2.15. Odtud dostáváme hledané existenční podmínky

$$\sin x \neq 1 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi ,$$

$$\sin x \neq -1 \Rightarrow x \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi ,$$

$$\sin x \neq -2 \quad \text{(splněno pro všechna } x\text{)}.$$

Podmínky můžeme zapsat jednoduše ve tvaru $x \neq$ $\neq (2k + 1) \frac{\pi}{2}$. Úprava sama je poměrně jednoduchá:

$$\frac{-\cos^2 x}{\sin x - \cos^2 x - 1} \cdot \frac{\sin x + 2}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)} =$$

$$= \frac{-\cos^2 x}{(\sin x + 2)(\sin x - 1)} \cdot \frac{\sin x + 2}{\sin x + 1} =$$

$$= \frac{-\cos^2 x}{\sin^2 x - 1} = \frac{\cos^2 x}{1 - \sin^2 x} = 1\,.$$

V další části knížky na mnoha místech s výhodou použijeme možnosti vhodně upravit goniometrický výraz. Tyto úpravy jsou však běžné nejenom v goniometrii, ale i v jiných partiích matematiky a v některých jejích aplikacích. Můžeme se s nimi setkat v integrálním počtu, v klasické mechanice, v geodézii atd.

2.4. Další goniometrické rovnice. V odstavci 2.3 jsme si ukázali některé způsoby, jak postupovat při úpravě goniometrických výrazů. Přesvědčili jsme se, že i výrazy značně složité vedou často k jednoduchému výsledku, který je udán jedinou funkcí. Takových úprav užijeme s výhodou při řešení goniometrických rovnic.

Než tak učiníme, zavedeme si tuto užitečnou úmluvu:

Mějme dány dvě goniometrické rovnice I, II. Jestliže každé řešení rovnice I je zároveň řešením rovnice II a obráceně každé řešení rovnice II je řešením rovnice I, potom říkáme, že rovnice I a II jsou dvě navzájem ekvivalentní rovnice.

K naší úmluvě ještě poznamenejme, že úpravu, která převádí danou rovnici v ekvivalentní rovnici, nazýváme *ekvivalentní úpravou.* V odstavci 2.4, který právě probíráme, budeme řešit goniometrické rovnice tak, že je budeme převádět na ekvivalentní rovnice v základním tvaru. Půjde zvláště o tyto dva případy, kterých si všimneme blíže:

a) Obsahuje-li goniometrická rovnice několik funkcí neznámého argumentu, vyjádříme všechny funkce funkcí jedinou — v krajním případě podle vzorců (1,31), (1,32), (1,33) pomocí funkce $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

b) Obsahuje-li goniometrická rovnice kromě funkcí neznámého argumentu také funkce jeho násobků nebo dílů, upravíme rovnici tak, aby obsahovala výhradně funkce téhož argumentu.

Příklad 2.19. Řešme rovnici

$$\left(1 - \frac{\cos x}{1 + \cos x} - 2 \sin^2 \frac{x}{2}\right) \frac{\cos 2x - 1}{2\cos^2 x} = 0 .$$

Upravme levou stranu této rovnice podle příkladu 2.17. Dostaneme tak novou rovnici

$$1 - \cos x = 0 ,$$

jejíž obecné řešení je možné zapsat ve tvaru $x = 2k\pi$. Obě zkoumané rovnice jsou zřejmě navzájem ekvivalentní, pokud vyloučíme ta x, pro něž některá z obou rovnic nemá smyslu. Jde zřejmě o x, jež jsou určena vztahy $x \neq (2k + 1) \frac{\pi}{2}$ a $x \neq (2k + 1) \pi$. Jelikož zmíněné obecné řešení $x = 2k\pi$ druhé z obou rovnic není ve sporu s existenčními podmínkami, které jsme uvedli, je $x = 2k\pi$ zároveň obecným řešením původní rovnice. Tím je příklad vyřešen.

Příklad 2.20. Řešme rovnici

$$\frac{\sin^2 2x - 4\sin^4 x}{\cos 2x} = 1\,.$$

Zřejmě musíme předpokládat, že $\cos 2x \neq 0$, čili $x \neq (2k + 1)\,\frac{\pi}{4}$. Upravíme nejprve levou stranu rovnice. Platí zde, že

$$\frac{\sin^2 2x - 4\sin^4 x}{\cos 2x} = \frac{4\sin^2 x\cos^2 x - 4\sin^4 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} =$$

$$= \frac{4\sin^2 x\,(\cos^2 x - \sin^2 x)}{\cos^2 x - \sin^2 x} = 4\sin^2 x\,.$$

Použijeme-li předcházejícího výpočtu k úpravě dané rovnice, dostaneme za předpokladu, že $x \neq (2k + 1)\,\frac{\pi}{4}$ ekvivalentní rovnici

$$4\sin^2 x = 1\,.$$

Není obtížné se přesvědčit, že

$$x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi\,,\quad x = \pm\frac{5}{6}\pi + 2k\pi$$

je obecným řešením jak poslední rovnice, tak rovnice původně dané.

Někdy se podaří uvést rovnici na tvar součinu; druhá strana je při tom rovna nule. Tohoto postupu jsme vlastně užili při obecném řešení základních goniometrických rovnic. Často se zde uplatní vzorce (1,34a),(1,34b).

Příklad 2.21. Užijeme-li vzorce (1,34a) v rovnici

$$\sin x + \sin 3x = \sin 2x + \sin 4x ,$$

dostaneme

$$2 \sin 2x \cos x = 2 \sin 3x \cos x .$$

Dělíme rovnici dvěma, převedeme oba výrazy na jednu stranu a vytkneme $\cos x$. Rovnice pak má tvar

$$\cos x (\sin 2x - \sin 3x) = 0 .$$

Užijeme-li na výraz v závorce opět vzorce (1,34a), dostaneme

$$2 \cos x \cos \frac{5x}{2} \sin \left(- \frac{x}{2} \right) = 0 ,$$

která je zřejmě ekvivalentní s původní danou rovnicí.

Rovnice bude splněna, bude-li roven nule kterýkoliv činitel součinu. Hledané obecné řešení můžeme proto zapsat ve tvaru

$$x = (2k + 1) \frac{\pi}{2} , \quad x = (2k + 1) \frac{\pi}{5} , \quad x = 2k\pi .$$

Příklad 2.22. V rovnici

$$2 \sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} = 1 - \sin x$$

vyjádříme nejprve $\sin x$ podle vzorce (1,28a) pro dvojnásobný úhel. Další úprava je zřejmá. Můžeme zřejmě psát, že

$$2 \sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} = 1 - 2 \sin \frac{x}{2} . \cos \frac{x}{2} ,$$

$$2 \sin \frac{x}{2}\left(1+\cos \frac{x}{2}\right)-\left(1+\cos \frac{x}{2}\right)=0 ,$$

$$\left(2 \sin \frac{x}{2}-1\right)\left(\cos \frac{x}{2}+1\right)=0 .$$

Dostali jsme tak dvě základní goniometrické rovnice, z nichž snadno určíme všechny kořeny dané rovnice. Platí totiž, že

$$x=\frac{\pi}{3}+4k\pi ,$$

$$x=\frac{5}{3}\pi+4k\pi ,$$

$$x=(2k+1)\,2\pi .$$

2.5. Goniometrická rovnice tvaru $a \sin x + b \cos x = c$.

Rovnice tvaru

$$a \sin x + b \cos x = c , \tag{2,9}$$

kde a, b, c jsou reálná čísla, si zaslouží zvláštní pozornosti. Předpokládejme, že součin $a.b.c \neq 0$, to znamená $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$.

POZNÁMKA 2.5. a) Případ $a = 0$, $b \neq 0$ vede na rovnici

$$b \cos x = c .$$

b) Případ $a \neq 0$, $b = 0$ vede na rovnici

$$a \sin x = c .$$

c) Konečně případ $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c = 0$ vede na tvar $a \sin x + b \cos x = 0$. Této rovnici nevyhovuje množina čísel $x = k\pi$, pro které je sin x roven nule. Dosazením se o tom můžeme snadno přesvědčit. Můžeme proto dělit rovnici nenulovou funkcí sin x a uvést ji tak na tvar $b \operatorname{cotg} x + a = 0$.

Ve všech těchto případech jsme došli ke známým goniometrickým rovnicím v základním tvaru. Jejich řešení známe.

Vraťme se k našemu případu, kdy je u rovnice (2,9) splněna podmínka $a.b.c \neq 0$. Ukážeme si nejdůležitější způsoby jejího řešení.

1. ZPŮSOB. ŘEŠENÍ ZAVEDENÍM POMOCNÉHO ÚHLU. Můžeme klidně předpokládat, že $a > 0$. (V opačném případě lze toho snadno dosáhnout vynásobením obou stran rovnice číslem -1.) Dělme rovnici číslem a. Dostáváme tak

$$\sin x + \frac{b}{a} \cos x = \frac{c}{a}.$$

Jelikož funkce tangens nabývá každé hodnoty z intervalu $(-\infty, \infty)$, existuje vždy číslo $\varphi \neq (2k + 1)\dfrac{\pi}{2}$ tak, že platí

$$\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \varphi\,. \tag{2,10}$$

Substituce (2,10) vede k rovnici $\sin x + \operatorname{tg} \varphi \cos x = \dfrac{c}{a}$, kterou upravíme na základě definičního vztahu (1,11). Po násobení číslem $\cos \varphi$ dostaneme

$$\sin x \cos \varphi + \cos x \sin \varphi = \frac{c}{a} \cos \varphi$$

a konečně podle příslušného vzorce (1,25a)

$$\sin(x + \varphi) = \frac{c}{a} \cos \varphi . \tag{2,11}$$

Číslo φ určíme z rovnice (2,10). Omezíme-li se přitom na tu hodnotu φ, která leží v intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, což je vždy možné, potom $\cos \varphi > 0$. Hodnotu $\cos \varphi$ můžeme pak určit z tabulek nebo řešením soustavy rovnic $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$, $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$. Snadný výpočet vede k výsledku

$$\cos \varphi = \sqrt{\frac{a^2}{a^2 + b^2}} .$$

Podle předpokladu $a > 0$, můžeme proto částečně odmocnit. Po dosazení tohoto výsledku do rovnice (2,11) a krácení číslem a dostaneme rovnici

$$\sin(x + \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} , \tag{2,12}$$

ze které již snadno vypočteme $x + \varphi$ a tedy i všechna x, která jsou obecným řešení rovnice (2,12).

Ekvivalence rovnic (2,9) a (2,12) je zřejmá. Dostáváme tak současně i obecné řešení původní rovnice $a \sin x + b \cos x = c$. Poznamenejme ještě, že podle věty (1,2) s přihlédnutím ke tvaru (2,12) má tato rovnice řešení tehdy a jen tehdy, jestliže platí

$$c^2 \leqq a^2 + b^2 .$$

Příklad 2.23. Uvedeným způsobem vyřešíme rovnici

$$\cos x - \sqrt{3} \sin x = -\sqrt{2} .$$

Násobme obě strany rovnice číslem —1, aby koeficient u $\sin x$ byl kladný. Upravenou rovnici napišme ve tvaru

$$\sqrt{3} \sin x - \cos x = \sqrt{2} .$$

Podle (2,10) $\operatorname{tg} \varphi = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ čili $\varphi = -\frac{\pi}{6}$.

Dále podle (2,12)

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} .$$

Konečně podle (2,4) určíme všechny kořeny:

$$x = \frac{5}{12}\pi + 2k\pi , \quad x = \frac{11}{12}\pi + 2k\pi .$$

2. ZPŮSOB. ŘEŠENÍ POMOCÍ POLOVIČNÍCH ÚHLŮ.

Na základě vzorců (1,28a) nahradíme rovnici (2,9) ekvivalentní rovnicí

$$2a \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + b \cos^2 \frac{x}{2} - b \sin^2 \frac{x}{2} = c . \quad (2,13)$$

Další krok spočívá v tom, že dělíme rovnici (2,13) činitelem $\cos^2 \frac{x}{2}$. K tomu je nutný předpoklad, že $\cos \frac{x}{2} \neq \neq 0$, což můžeme vyjádřit ekvivalentním požadavkem, že $x \neq (2k + 1)\pi$. Zde si musíme uvědomit, že kořeny x teprve hledáme a formální vyslovení požadavku vůbec nezaručuje, že rovnice (2,9) požadovanou vlastnost opravdu splňuje. Má-li však rovnice (2,9) kořeny ve tvaru $x = (2k + 1)\pi$, jsou koeficienty této rovnice vázány nutně podmínkou $b = -c$. Čtenář se o tom přesvědčí snadno přímým dosazením kořenů do rovnice (2,9).

V tomto případě by dělení rovnice (2,13) činitelem $\cos^2 \frac{x}{2}$ nevedlo k ekvivalentní rovnici a nelze této úpravy použít.

Pokud $b \neq -c$, hledané řešení $x \neq (2k + 1)\pi$, to znamená $\cos \frac{x}{2} \neq 0$ a ekvivalence rovnic při úpravě je zaručena. Dělíme proto rovnici (2,13) číslem $\cos^2 \frac{x}{2}$ a na pravé straně užijeme známé identity podle př. 1.1. Dostaneme tak kvadratickou rovnici pro neznámou $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$

$$(b + c) \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 2a \operatorname{tg} \frac{x}{2} + (c - b) = 0 \,, \qquad (2,14)$$

kterou umíme řešit.

Jestliže $b = -c$, dělíme rovnici (2,13) činitelem $\sin^2 \frac{x}{2}$, který je z hlediska kořenů rovnice (2,9) různý od nuly (neboť rovnice $\sin \frac{x}{2} = 0$ dává kořeny $x = 2k\pi$ a jejich dosazení do rovnice (2,9) váže koeficienty nutně podmínkou $b = c$, tedy nikoliv $b = -c$). Místo (2,14) dostaneme tak rovnici

$$(c - b) \operatorname{cotg}^2 \frac{x}{2} - 2a \operatorname{cotg} \frac{x}{2} + (b + c) = 0 \,,$$

jejíž řešení je rovněž snadné.

Podmínka řešitelnosti $c^2 \leqq a^2 + b^2$ nezávisí přirozeně na způsobu, jakým rovnici (2,9) řešíme a plyne v tomto případě z požadavku, aby diskriminant rovnice (2,14) byl nezáporné číslo.

3. ZPŮSOB. ŘEŠENÍ POMOCÍ SOUSTAVY ROVNIC.

Jelikož pro každé x platí $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, zavedeme-li substituci $\sin x = u$, $\cos x = v$, můžeme rovnici (2,9) řešit pomocí soustavy rovnic

$$\begin{aligned} au + bv &= c\,, \\ u^2 + v^2 &= 1\,. \end{aligned} \tag{2,15}$$

Jestliže $a^2 + b^2 > c^2$, má soustava (2,15) za řešení dvě dvojice čísel u, v, jestliže $a^2 + b^2 = c^2$, existuje jediná taková dvojice. Pro $a^2 + b^2 < c^2$ soustava nemá reálné kořeny.

Každá dvojice čísel

$$v = \cos x\,, \quad u = \sin x\,, \tag{2,16}$$

která je řešením soustavy (2,15), tvoří složky téže komplexní jednotky. Je jimi proto jednoznačně určen kvadrant, v němž leží kořeny (2,9). K jejich určení nám potom stačí řešit jedinou z rovnic (2,16).

Příklad 2.24. Řešení 2. i 3. způsobem si ukážeme na rovnici

$$3 \sin x + \cos x = 3\,.$$

a) Zavedením polovičních úhlů dostaneme

$$6 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = 3\,.$$

Jelikož $b \neq -c$, dělíme obě strany rovnice $\cos^2 \frac{x}{2}$ a uspořádáme. Dostáváme tak

$$2 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 3 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 = 0\,.$$

Kořeny této rovnice jsou čísla $1, \frac{1}{2}$. Kořeny rovnic

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1 \quad \text{a} \quad \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 0{,}5$$

jsou zároveň kořeny dané rovnice. Jsou to čísla

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \,, \quad x = \frac{53{,}13\,\pi}{180} + 2k\pi \,.$$

b) Podle (2,15) řešíme soustavu

$$3u + v = 3 \,,$$
$$u^2 + v^2 = 1 \,,$$

kde $u = \sin x$, $v = \cos x$.

Dosadíme-li z první rovnice do druhé $v = 3 - 3u$, dostaneme kvadratickou rovnici $5u^2 - 9u + 4 = 0$ s kořeny 1; 0,8. Řešením soustavy jsou dvě dvojice čísel

$$\sin x = 1, \cos x = 0 \quad \text{a} \quad \sin x = 0{,}8, \cos x = 0{,}6.$$

Prvá dvojice určuje jednotku s argumentem $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$. Mezi kořeny rovnice $\sin x = 0{,}8$ (nebo $\cos x = 0{,}6$) jsou řešením dané rovnice pouze ty velikosti úhlů, které leží v 1. kvadrantu, neboť jednotka $r = 0{,}6 + \mathrm{i}\, 0{,}8$ je z 1. kvadrantu.

2.6. Soustavy goniometrických rovnic. Poznamenejme hned v úvodu tohoto odstavce, že neexistuje nějaký ucelený systém, který by vyčerpávajícím způsobem podával přehled o řešení soustav goniometrických rovnic, jak tomu bylo kupř. v případě základních goniometrických rovnic. V praxi však obvykle vystačíme s tím, co bude uvedeno. V celém odstavci 2.6 budou ω, c, d reálná čísla.

a) Je-li soustava dána ve tvaru

$$f(x \pm y) = c\,, \quad g(x \pm y) = d\,,$$

kde f a g jsou libovolné goniometrické funkce, řešíme každou rovnici vzhledem k argumentu $x \pm y$.

Získáme tak novou soustavu pro neznámé x, y. Upustíme v tomto případě od podrobné diskuse a raději si ukážeme příklad.

Příklad 2.25. Řešme soustavu rovnic

$$\sin(x + y) = \frac{\sqrt{3}}{2}\,,$$

$$\cos(x - y) = \frac{1}{2}.$$

Z první rovnice plyne

$$x + y = \frac{\pi}{3} + 2k_1\pi\,, \quad x + y = \frac{2}{3}\pi + 2k_1\pi\,,$$

z druhé

$$x - y = \frac{\pi}{3} + 2k_2\pi\,, \quad x - y = -\frac{\pi}{3} + 2k_2\pi\,.$$

Rozlišení indexů u čísel k_1, k_2 jsme použili proto, že v obou rovnicích nemusí jít o tentýž násobek. Je zapotřebí, abychom uvážili každou možnost rovnice prvé s každou možností rovnice druhé. Máme tak celkem 4 soustavy rovnic:

$$1.\ x + y = \frac{\pi}{3} + 2k_1\pi\,, \qquad 2.\ x + y = \frac{\pi}{3} + 2k_1\pi\,,$$

$$x - y = \frac{\pi}{3} + 2k_2\pi\,; \qquad x - y = -\frac{\pi}{3} + 2k_2\pi\,;$$

$$3.\ x + y = \frac{2}{3}\pi + 2k_1\pi\,, \qquad 4.\ x + y = \frac{2}{3}\pi + 2k_1\pi\,,$$

$$x - y = \frac{\pi}{3} + 2k_2\pi\,; \qquad x - y = -\frac{\pi}{3} + 2k_2\pi\,.$$

Položíme-li $k_1 + k_2 = l_1$, $k_1 - k_2 = l_2$, dostaneme postupně z jednotlivých soustav tato řešení:

$$1.\ x = \frac{\pi}{3} + l_1\pi\,, \qquad 2.\ x = l_1\pi\,,$$

$$y = l_2\pi\,; \qquad y = \frac{\pi}{3} + l_2\pi\,;$$

$$3.\ x = \frac{\pi}{2} + l_1\pi\,, \qquad 4.\ x = \frac{\pi}{6} + l_1\pi\,,$$

$$y = \frac{\pi}{6} + l_2\pi\,; \qquad y = \frac{\pi}{2} + l_2\pi\,.$$

Jelikož $l_1 + l_2 = 2k_1$, $l_1 - l_2 = 2k_2$, vidíme, že čísla l_1, l_2 nemůžeme volit zcela libovolně, nýbrž tak, aby byla obě současně sudá nebo lichá. Za zmínku ještě stojí, že kořeny dané soustavy tvoří dvě dvojice symetrických řešení.

b) Důležité jsou soustavy typu

$$x \pm y = \omega\,, \quad \frac{f(x)}{g(y)} = d\,, \quad (d \neq 0)\,, \qquad (2,16)$$

kde $f(x)$ a $g(y)$ jsou goniometrické funkce sinus nebo kosinus. Možnost $d = 0$ jsme vyloučili, neboť řešení soustavy je v tomto případě evidentní.

Předpokládejme, že soustava (2,16) má např. tvar

$$x + y = \omega\,, \quad \frac{\sin x}{\sin y} = d\,, \quad (d \neq 0)\,. \qquad (2,17)$$

Potom za předpokladu $y \neq k\pi$ (aby druhá rovnice měla smysl) můžeme při řešení postupovat tak, že dosadíme za x z prvé rovnice do druhé. Dostaneme tak rovnici

$$\frac{\sin(\omega - y)}{\sin y} = d\,.$$

Čitatele zlomku na levé straně rozepišme podle vzorce (1,25b). Snadno zjistíme, že poslední rovnici můžeme zapsat ve tvaru

$$\sin \omega \cot y = d + \cos \omega\,, \qquad (2,18)$$

čili, jestliže $\sin \omega \neq 0$,

$$\cot y = \frac{d + \cos \omega}{\sin \omega}\,. \qquad (2,19)$$

Jsou-li kořeny rovnice (2,19) tvaru $y = \alpha + k\pi$, snadno z první rovnice soustavy (2,17) určíme, že

$$x = (\omega - \alpha) - k\pi\,.$$

Náš postup selže jedině v případě, že $\sin \omega = 0$. Bez obtíží však dospějeme až k rovnici (2,18). Čísla $\sin \omega$, $\cos \omega$ jsou složky téže komplexní jednotky. Podmínka $\sin \omega = 0$ znamená, že $\omega = 2k\pi$ nebo $\omega = (2k + 1)\,\pi$.

V prvém případě $\cos \omega = 1$, v druhém $\cos \omega = -1$. Pro $\omega = 2k\pi$ přejde proto rovnice (2,18) na tvar $0 = d + 1$, pro $\omega = (2k + 1)\pi$ na tvar $0 = d - 1$. Odtud plynou závěry:

Jestliže $\omega = 2k\pi$ a $d = -1$, má soustava (2,17) nekonečně mnoho řešení tvaru $x + y = 2k\pi$; jestliže $\omega = (2k + 1)\pi$ a $d = 1$, má soustava (2,17) rovněž nekonečně mnoho řešení a to tvaru $x + y = (2k + 1)\pi$. To znamená, že jednu neznámou můžeme volit libovolně, druhá je určena příslušnou rovnicí. Omezení volby je dáno podmínkou $y \neq k\pi$.

Jestliže naopak $\omega = 2k\pi$ a $d \neq -1$ nebo $\omega = (2k + 1)\pi$ a $d \neq 1$, nemá soustava řešení.

Podmínky si ovšem nemusíme pamatovat. Důležitý je postup řešení. O počtu a tvaru řešení rozhodneme v každém jednotlivém případě na základě rovnice (2,18).

Příklad 2.26. Řešme soustavu rovnic

$$x + y = \frac{11}{6}\pi\,, \quad \frac{\sin x}{\sin y} = -\sqrt{3}\,.$$

Použijeme-li první rovnici k úpravě druhé rovnice, snadno zjistíme, že musí platit

$$\operatorname{cotg} y = \sqrt{3}\,.$$

Odtud plyne, že $y = \frac{\pi}{6} + k\pi$, $x = \frac{5}{3}\pi - k\pi$ (k je libovolné celé číslo) je obecné řešení dané soustavy rovnic.

Jiný způsob řešení soustavy (2,17) spočívá v tom, že druhou rovnici upravíme na tvar

$$\frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} = \frac{\mathrm{d} - 1}{\mathrm{d} + 1}\,, \quad (d \neq 1)\,.$$

Na základě vzorců (1,34a) můžeme provést další její úpravu

$$\operatorname{cotg}\frac{x+y}{2}\operatorname{tg}\frac{x-y}{2}=\frac{d-1}{d+1}.$$

Dosadíme-li sem vztah $x + y = \omega$, pak za příslušných existenčních předpokladů tvoří rovnice

$$\operatorname{tg}\frac{x-y}{2}=\frac{d-1}{d+1}\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}$$

spolu s rovnicí $x + y = \omega$ soustavu ekvivalentní*) se soustavou (2,17). Podrobný rozbor ponecháme čtenáři.

c) Jestliže symboly $f(x)$ a $g(y)$ znamenají goniometrické funkce sinus nebo kosinus, potom soustavy typu

$$x \pm y = \omega\,,\quad f(x)\,g(y) = d \tag{2,20}$$

řešíme obvykle na základě identit z příkladu 2.16.

Ukážeme si jeden ze čtyř možných případů. V ostatních by byl postup obdobný.

Je-li dána soustava

$$x + y = \omega\,,\quad \sin x \sin y = d\,, \tag{2,21}$$

užijeme identity

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}\left[\cos\left(x-y\right)-\cos\left(x+y\right)\right],$$

kterou upravíme pomocí vztahu $x + y = \omega$. Druhá rovnice soustavy (2,21) přejde tak na tvar

$$\frac{1}{2}\left[\cos\left(x-y\right)-\cos\omega\right]=d\,,$$

*) Pojem ekvivalence dvou soustav je možno zavést zcela analogicky jako pojem ekvivalence dvou rovnic na str. 62.

čili

$$\cos(x - y) = 2d + \cos\omega\,.$$

Rovnice (2,22) spolu s rovnicí $x + y = \omega$ tvoří soustavu, která je ekvivalentní se soustavou (2,21). Aby rovnice (2,22) měla řešení, musí platit nerovnost

$$-1 \leqq 2d + \cos\omega \leqq 1\,,$$

neboli

$$-\frac{1 + \cos\omega}{2} \leqq d \leqq \frac{1 - \cos\omega}{2}\,,$$

kterou podle vzorců (1,29b) můžeme psát přehledněji

$$-\cos^2\frac{\omega}{2} \leqq d \leqq \sin^2\frac{\omega}{2}\,.$$

Příklad 2.27. Je-li dána soustava

$$x + y = \frac{2}{3}\pi\,, \quad \sin x \sin y = \frac{1}{2}\,,$$

upravíme ji na ekvivalentní soustavu

$$x + y = \frac{2}{3}\pi\,, \quad \cos(x - y) = 1 + \cos\frac{2}{3}\pi\,.$$

Odtud dostaneme rovnice

$$x + y = \frac{2}{3}\pi\,, \quad x - y = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

a z nich pak následující dvě dvojice vzájemně symetrických řešení:

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi\,, \quad y = \frac{\pi}{6} + k\pi\,;$$

$$x = \frac{\pi}{6} + k\pi\,, \quad y = \frac{\pi}{2} + k\pi\,.$$

d) Dále uvedeme soustavu

$$x + y = \omega\,, \quad \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y} = d\,, \quad (d \neq 0)\,. \qquad (2{,}23)$$

Aby druhá rovnice měla smysl, musíme předpokládat $x \neq (2k + 1)\,\frac{\pi}{2}$, $y \neq k\,\frac{\pi}{2}$. Pomocí definičních vztahů (1,11) dostaneme z druhé rovnice soustavy (2,23)

$$\sin x \cos y = d \sin y \cos x\,.$$

Výrazy $\sin x \cos y$ a $\sin y \cos x$ nahradíme podle identit z př. 2.16. Dostaneme tak

$$\frac{1}{2}\,[\sin(x + y) + \sin(x - y)] =$$

$$= \frac{1}{2}\,d[\sin(x + y) - \sin(x - y)]\,.$$

Poslední rovnici násobíme dvěma, dosadíme $x + y = \omega$ a upravíme. Upravená rovnice má tvar

$$(d + 1)\sin(x - y) = (d - 1)\sin\omega\,. \qquad (2{,}24)$$

Jestliže $d \neq -1$, získáme základní goniometrickou rovnici

$$\sin(x - y) = \frac{d - 1}{d + 1}\,\sin\omega\,, \qquad (2{,}25)$$

která s rovnicí $x + y = \omega$ tvoří opět soustavu, která je ekvivalentní se soustavou (2,23). Z rovnice (2,24) je vidět, že pro $d = -1$, $\omega = k\pi$ má soustava nekonečně mnoho řešení tvaru $x + y = k\pi$; jestliže $d = -1$, $\omega \neq k\pi$, nemá soustava řešení.

Vzhledem k existenčním podmínkám nemá soustava řešení také v případě, že $\omega = k\pi$, $d \neq -1$.

Kdyby druhá rovnice soustavy (2,23) měla místo podílu tvar součinu $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = d$, řešení by bylo zcela obdobné. Dále je zřejmé, že prvá rovnice soustavy může mít tvar rozdílu.

Příklad 2.28. Uvedeným způsobem vyřešíme soustavu

$$x + y = -\frac{\pi}{6},$$

$$\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y} = -3.$$

Jelikož $d \neq -1$, převedeme danou soustavu na ekvivalentní, v níž místo rovnice druhé napíšeme rovnici tvaru (2,25):

$$x + y = -\frac{\pi}{6}, \quad \sin(x - y) = -1.$$

Z ekvivalentní soustavy

$$x + y = -\frac{\pi}{6}, \quad x - y = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

plynou kořeny:

$$x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, \quad y = \frac{\pi}{6} - k\pi.$$

e) Na závěr si ukážeme řešení soustavy goniometrických rovnic typu

$$\begin{aligned} \sin x + \sin y &= a\,, \\ x \pm y \quad &= \omega\,. \end{aligned} \tag{2,26}$$

Tato úloha se vyskytuje v praxi při měření v terénu a má svou typickou metodu řešení.

Příslušný vzorec (1,34a) pro sin x + sin y nám umožňuje uvést prvou rovnici soustavy (2,26) na ekvivalentní rovnici

$$2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = a\,. \tag{2,27}$$

Další náš rozbor rozdělíme na dvě části.

1. Má-li soustava (2,26) tvar

$$\begin{aligned} \sin x + \sin y &= a\,, \\ x + y \quad &= \omega\,, \end{aligned} \tag{2,26a}$$

potom přejde po dosazení $x + y = \omega$ a snadné úpravě rovnice (2,27) v základní goniometrickou rovnici

$$\cos \frac{x-y}{2} = \frac{a}{b}\,, \tag{2,28}$$

kde $b = 2 \,.\, \sin \frac{\omega}{2}$. Při posledním kroku musíme ovšem předpokládat, že $\sin \frac{\omega}{2} \neq 0$, to znamená, že $\omega \neq 2k\pi$. Rovnice (2,28) má vždy řešení, pokud $\left|\frac{a}{b}\right| \leqq 1$. Obecné řešení vyjádříme zápisem

$$\frac{x-y}{2} = \pm\,\alpha + 2k\pi\,.$$

Pro neznámé x, y dostaneme tak soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \frac{x+y}{2} &= \frac{\omega}{2}, \\ \frac{x-y}{2} &= 2k\pi \pm \alpha, \end{aligned} \tag{2,29}$$

jejíž řešení je každému čtenáři jistě zřejmé. Z ekvivalence rovnic plyne, že každé řešení soustavy (2,29) je také řešením soustavy (2,26a).

Jestliže $\omega = 2k\pi$ a zároveň $a = 0$, je soustava (2,26a) splněna pro každou dvojici x, y, která vyhovuje rovnici $x + y = \omega$. Jestliže $\omega = 2k\pi$, a zároveň $a \neq 0$, nemá soustava (2,26a) řešení. Oba poslední závěry plynou z rovnice (2,27).

2. Má-li soustava (2,26) tvar

$$\begin{aligned} \sin x + \sin y &= a, \\ x - y &= \omega, \end{aligned} \tag{2,26b}$$

dostaneme zcela obdobným postupem z rovnice (2,27) základní goniometrickou rovnici

$$\sin \frac{x+y}{2} = \frac{a}{c}, \tag{2,30}$$

kde $c = 2 \cos \frac{\omega}{2}$. Jelikož dělíme číslem $\cos \frac{\omega}{2}$, musíme předpokládat, že $\omega \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}$. Podmínka řešitelnosti rovnice (2,30) je dána požadavkem $\left|\frac{a}{c}\right| \leqq 1$.

Obecné řešení rovnice (2,30) můžeme psát ve tvaru

$$\frac{x+y}{2} = (-1)^k \alpha + k\pi$$

(srovnej cv. 2.18). Pro neznámé x, y dostaneme pak soustavu

$$\begin{aligned} \frac{x-y}{2} &= \frac{\omega}{2}, \\ \frac{x+y}{2} &= (-1)^k \alpha + k\pi, \end{aligned} \tag{2,31}$$

kterou snadno vyřešíme. Také ekvivalence soustav (2,26b) a (2,31) je zřejmá.

Vraťme se ještě k případu, kdy $\omega = (2k+1)\pi$. Z rovnice (2,27) vyplývají dvě možnosti. Jestliže zároveň $a = 0$, má soustava (2,26b) za řešení každou dvojici čísel x, y, která jsou vázána vztahem $x - y = (2k+1)\pi$. Jestliže $a \neq 0$, nemá soustava (2,26) řešení.

Příklad 2.29. Pro ilustraci vyřešíme soustavu

$$\begin{aligned} \sin x + \sin y &= \frac{3}{2}, \\ x + y &= \frac{2}{3}\pi. \end{aligned}$$

Prvou rovnici soustavy uvedeme na tvar (2,27) a dosadíme do ní $x + y = \frac{2}{3}\pi$. Dostaneme tak

$$2 \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{x-y}{2} = \frac{3}{2}.$$

Tuto rovnici můžeme pomocí vztahu

$$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

zapsat ve tvaru

$$\cos\frac{x-y}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Odtud plyne, že

$$\frac{x-y}{2} = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi.$$

Ze soustavy pak

$$\frac{x+y}{2} = \frac{\pi}{3},$$

$$\frac{x-y}{2} = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi,$$

která je ekvivalentní dané soustavě, plyne, že

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

$$y = \frac{\pi}{6} - 2k\pi,$$

respektive

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,$$

$$y = \frac{\pi}{2} - 2k\pi.$$

Poznamenejme ještě, že k sice znamená ve výsledcích libovolné celé číslo, ovšem zásadně stejné pro oba kořeny. Jestliže kupř. položíme ve vztahu pro x za k číslo 2, jsme nuceni ve výsledku pro odpovídající kořen y užít téhož $k = 2$.

Cvičení

2.1. Dokažte, že pro přípustná x platí identita

$$\frac{1}{2}(\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{cotg}^2 x + 2) \sin 2x = \mathrm{tg}\, x + \mathrm{cotg}\, x\,.$$

2.2. Upravte:

$$\frac{\sin^3 x + \sin 3x + 3 \sin^2 x \cos x}{\cos^3 x - \cos 3x + 3 \cos^2 x \sin x}\,.$$

2.3. Pro která x, y platí

$$\sin x + \sin y = \sin (x - y)\ ?$$

Návod: Levou stranu upravte podle vzorce (1,34a), pravou podle příslušného vzorce (1,28a).

2.4. Řešte rovnici $(\mathrm{tg}^2 x - 1) \cos x = \mathrm{tg}\, x$.

2.5. Řešte rovnici

$$(\mathrm{tg}\, x - 1)(1 + \sin x \cos x) = \mathrm{tg}\, x \sin x - 1\,.$$

2.6. Řešte rovnici

$$\frac{1 + \sin x - \cos x}{1 + \sin x + \cos x} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

2.7. Řešte rovnici

$$\frac{3 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x} = \sqrt{3}.$$

Návod: Dokažte nejprve, že pro přípustná x platí

$$\frac{3 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x} = \operatorname{tg} 3x.$$

2.8. Řešte bez použití tabulek:

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = -2\sqrt{2}.$$

2.9. Řešte rovnici

$$1 - \cos 4x + \sin 2x \sin 4x = 2 \sin^2 2x.$$

2.10. Řešte rovnice:

a) $\sin 2x = \sin 3x - \sin x$,

b) $\sin x + \operatorname{tg} x = 1 + \cos x$,

c) $\dfrac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = \cos 2x$,

d) $1 - \cos x = \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$,

e) $\cos x + \operatorname{tg} x + 1 = \cos^2 \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \sin x$,

f) $\frac{\sin 3x - \sin x}{\cos 3x - \cos x} - \frac{\cos 3x + \cos x}{\sin 3x + \sin x} = 0$,

g) $\sin x - \cos x = \sin 2x - \cos 2x$,

h) $3\left(\frac{\cos^2 2x - 1}{2\cos^2 x} - \cos 2x - 3\right)\operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{tg}^2 x - 3$,

i) $\frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} = \sqrt{3}$,

j) $\frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} - \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} = -2$,

k) $\frac{\sin 3x - \sin x}{\cos 3x - \cos x} + \frac{\cos 3x + \cos x}{\sin 3x + \sin x} = 0$,

l) $\cos^2 x + \cos^2 2x - \cos^2 3x = 1$.

2.11. V intervalu $(0, 2\pi)$ řešte soustavu

$$\cos x - \cos (x + y) = 0,$$

$$\cos y - \cos (x + y) = 0.$$

2.12. Řešte soustavy rovnic:

a) $\frac{\sin x}{\cos y} = \sqrt{3}, \quad x + y = 0$,

b) $\frac{\cos x}{\cos y} = 1, \quad x + y = \frac{\pi}{2}$.

2.13. Řešte soustavy rovnic:

a) $x + y = \frac{2}{3}\pi\,, \quad \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y} = -1\,,$

b) $x + y = \frac{2}{3}\pi\,, \quad \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y} = 1\,.$

2.14. Řešte soustavu rovnic

$$\sin x \sin y = -\frac{1}{4}\,,$$

$$x + y = \frac{3}{2}\pi\,.$$

2.15. Řešte soustavu rovnic

$$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 1\,,$$

$$x - y = \frac{\pi}{6}\,.$$

2.16. Určete všechna x, y, která vyhovují soustavě

$$\sin x - \sin 2y = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x - \cos y\,,$$

$$\cos x + \sin (x - y) = \sin (x + y).$$

2.17. Určete všechna x, y, která vyhovují soustavě rovnic

$$\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} y}{\operatorname{cotg} x + \operatorname{tg} y} = \operatorname{tg} x\,,$$

$$\frac{\operatorname{tg} y + \operatorname{cotg} x}{\operatorname{cotg} y + \operatorname{tg} x} = \operatorname{tg} y\,.$$

2.18. Přesvědčte se, že řešení rovnice

$$\sin x = a \, , \quad (|a| \leqq 1) \, ,$$

která jsme psali ve tvaru

$$x = \alpha + 2k\pi \, ,$$

$$x = \pi - \alpha + 2k\pi \, ,$$

můžeme vyjádřit jediným zápisem (srovnej odstavec 2.6e):

$$x = (-1)^k \alpha + k\pi \, .$$

2.19. Řešte soustavu rovnic

$$\sin x + \sin y = 0 \, ,$$

$$x - y = -\frac{4}{3}\pi \, .$$

3. kapitola

GRAFY GONIOMETRICKÝCH FUNKCÍ

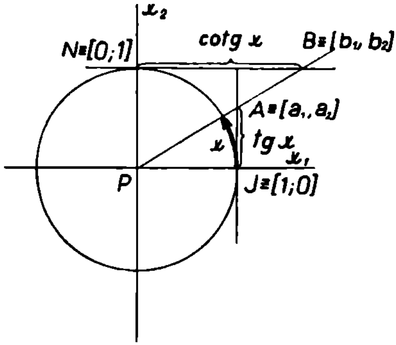
3.1. Základní grafy. V prvých dvou kapitolách jsme mluvili stále o goniometrických funkcích, aniž jsme zdůraznili, že jde skutečně o funkce, přesněji o reálné funkce jedné reálné proměnné. Nebude jistě na škodu krátké zdůvodnění.

Předpis, který každému reálnému číslu x z nějaké množiny reálných čísel M přiřazuje právě jedno reálné číslo y, nazýváme *reálnou funkcí jedné reálné proměnné.* Určité číslo y_0, které odpovídá číslu $x_0 \in M$, nazýváme *hodnotou funkce* v bodě x_0. Funkci obecně zapisujeme ve tvaru

$$y = f(x)\,, \quad x \in M\,.$$

Množinu M *nazýváme definičním oborem funkce.* Nejširší definiční obor, v němž daný funkční předpis má smysl, nazýváme obvykle *existečním oborem. Grafem funkce* rozumíme množinu všech bodů $[x, y]$ v rovině, jejichž souřadnice vyhovují rovnici $y = f(x)$, $x \in M$. Rovina, v níž provádíme grafické zobrazení funkce, je euklidovská rovina E_2 (tedy nikoliv Gaussova rovina).

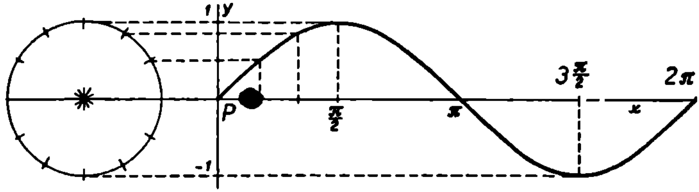
Každé reálné číslo x můžeme považovat za velikost nějakého orientovaného úhlu v základní poloze v Gaussově rovině. Na základě definice 1.1. je přiřazeno každému orientovanému úhlu o velikosti x jediné číslo $\sin x$. Ukázali jsme také, že hodnota $\sin x$ závisí pouze na velikosti argumentu x. Předpis $y = \sin x$ je tedy reálnou funkcí jedné reálné proměnné, neboť přiřazuje každému reálnému číslu x jedinou hodnotu $\sin x$. Existenčním oborem je interval $(-\infty, \infty)$. Podobným způsobem snadno ukážeme, že předpisy $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{cotg} x$ jsou reálnými funkcemi reálné proměnné. Přitom existenčním oborem funkce $y = \cos x$ je množina všech reálných čísel, existenčním oborem funkce $y = \operatorname{tg} x$



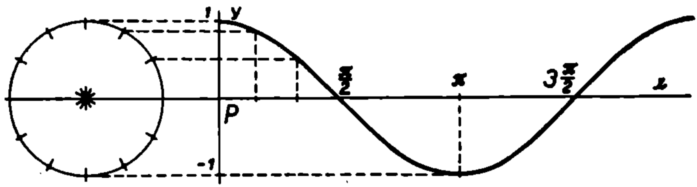
Obr. 11. Obrazy tangenty a kotangenty na jednotkové kružnici.

je množina všech reálných čísel s výjimkou čísel tvaru $(2k + 1)\dfrac{\pi}{2}$. Konečně existenčním oborem funkce $y = \operatorname{cotg} x$ je množina všech reálných čísel s výjimkou čísel tvaru $k\pi$. Dodejme ještě, že funkce $\sin x$ a $\cos x$ nabývají všech hodnot z intervalu $\langle -1, 1\rangle$, funkce $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$ pak všech hodnot z intervalu $(-\infty, \infty)$.

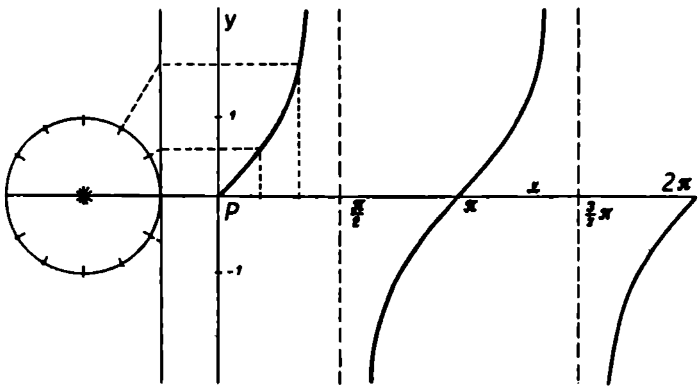
Pro úplnost ještě poznamenejme, že geometrický způsob, kterým jsme zavedli goniometrické funkce, není



Obr. 12. Graf funkce $y = \sin x$.



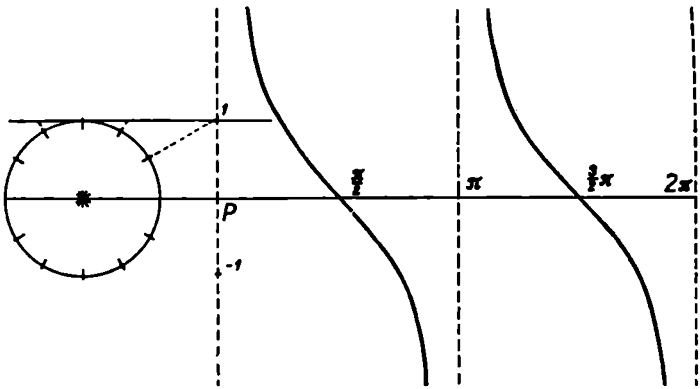
Obr. 13. Graf funkce $y = \cos x$.



Obr. 14. Graf funkce $y = \text{tg}\ x$.

jediný. Ve vyšší matematice se obvykle zavádějí pomocí tzv. *funkcionálních rovnic* nebo na podkladě *integrálního počtu*. Podrobnější výklad přesahuje rámec naší publikace.

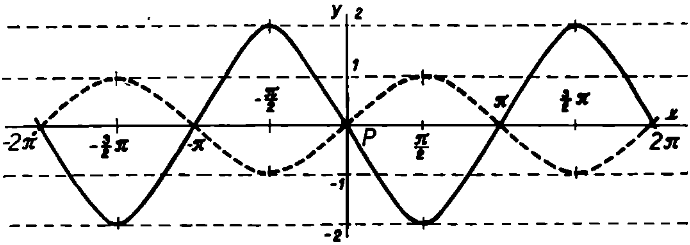
Grafy funkcí, o nichž jsme nyní hovořili, zná čtenář jistě ze školy. Jsou sestrojeny na obr. 12—15. Při sestrojení grafů funkcí se obvykle opíráme o tabulku hodnot. U goniometrických funkcí nám místo tabulky výhodně poslouží jednotková kružnice. Doplňme pouze, že hodnota tg x je pro každé přípustné x určena graficky souřadnicí a_2 průsečíku koncového ramene (nebo jeho prodloužení) s tečnou jednotkové kružnice, sestrojenou v bodě $J \equiv [1, 0]$. Podobně je pro každé x funkční hodnota cotg x dána souřadnicí b_1, průsečíku koncového ramene úhlu s tečnou jednotkové kružnice v bodě $N \equiv [0, 1]$. Srovnej obr. 11.



Obr. 15. Graf funkce $y = \text{cotg}\ x$.

3.2. Graf funkce $y = a\,f(bx + c) + d$. V obecném zápise znamená f libovolnou goniometrickou funkci, prakticky však vystačíme s funkcemi $\sin x$ a $\operatorname{tg} x$, neboť $\cos x$ a $\operatorname{cotg} x$ nahrazujeme obvykle kofunkcemi. Čísla a, b, c, d jsou reálná, $a.b \neq 0$.

Nejdříve si všimneme rozdílu mezi grafy některých funkcí.

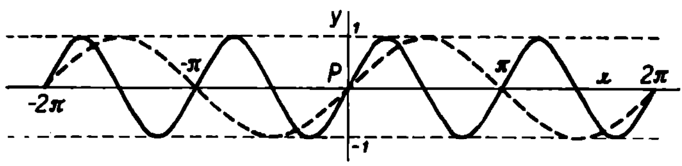


Obr. 16. Graf funkce $y = -2 \sin x$ sestrojený pomocí grafu funkce $y = \sin x$.

PŘÍPAD 1. Graf funkce $y = a\,f(x)$, kde $a \neq 0$, dostaneme z grafu funkce $y = f(x)$ zřejmě tak, že funkční hodnotu v každém bodě vynásobíme číslem a. Obě funkce mají stejné nulové body, tj. body, v nichž graf protíná osu x. Leží-li v nějakém intervalu graf funkce $y = f(x)$ nad osou (pod osou) x, pak pro $a > 0$ leží v tomto intervalu nad osou x (pod osou x) také graf funkce $y = a\,f(x)$, pro $a < 0$ leží naopak pod osou (nad osou). Na obr. 16 jsou sestrojeny grafy funkcí $y = \sin x$, $y = -2 \sin x$.

PŘÍPAD 2. Jaká je souvislost mezi grafy funkcí $y = f(x)$ a $y = f(x + c)$? Množina funkčních hodnot je v obou případech táž. Nabývá-li funkce $y = f(x)$ nějaké funkční hodnoty v bodě x_1, nabývá téže funkční hodnoty funkce $y = f(x + c)$ v bodě x_2, pro který platí $x_2 + c = x_1$, neboli $x_2 = x_1 - c$. Můžeme tedy říci, že graf funkce $y = f(x + c)$ vznikne z grafu funkce $y = f(x)$ posunutím o $|c|$ ve směru osy x. Jestliže $c > 0$, jedná se o posunutí „doleva", jestliže $c < 0$, jde o posunutí „doprava". Kupř. graf funkce $y = \cos x$ můžeme sestrojit z grafu funkce $y = \sin x$ pomocí identity $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ posunutím o $\frac{\pi}{2}$ „doleva".

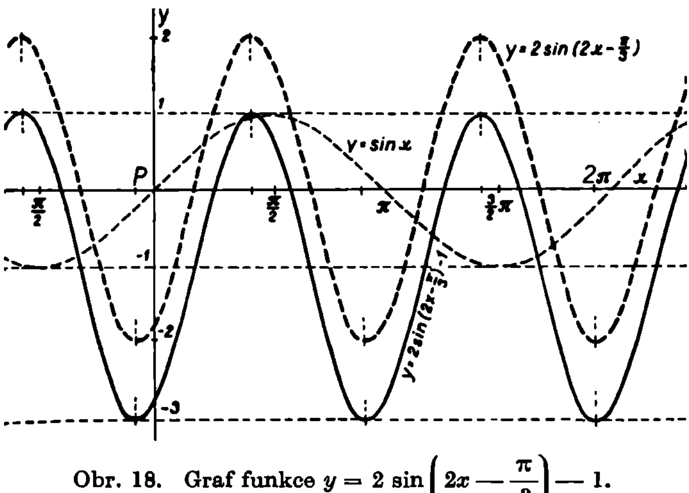
PŘÍPAD 3. Také v případě funkcí $y = f(x)$ a $y = f(bx)$, kde $b \neq 0$, je množina funkčních hodnot stejná. Nabývá-li však funkce $y = f(x)$ nějaké hodnoty v bodě x_1, nabývá téže funkční hodnoty funkce $y = f(bx)$ v bodě $x_2 = \frac{x_1}{b}$. Zatímco kupř. funkce $y = \sin x$ vyčerpá všechny své hodnoty v intervalu $\langle 0, 2\pi)$ stane se tak u funkce $y = \sin 2x$ v intervalu poloviční délky, tj. $\langle 0, \pi)$. Grafy těchto funkcí jsou na obr. 17. U funkcí periodických (jmenovitě goniometrických) má tedy číslo b vliv na zvětšení ($|b| < 1$, $b \neq 0$) nebo zmenšení ($|b| > 1$) periody.



Obr. 17. Graf funkce $y = \sin 2x$ v porovnání s grafem funkce $y = \sin x$.

PŘÍPAD 4. Graf funkce $y = f(x) + d$ vznikne zřejmě z grafu funkce $y = f(x)$ posunutím ve směru osy y o $|d|$. Číslo $d > 0$ určuje posunutí ve směru kladné poloosy y, $d < 0$ ve směru záporné poloosy y.

POZNÁMKA 3.1. Došlo by k omylu, kdybychom graf funkce $y = f(bx + c)$, kde $b \neq 1$, chtěli získat z grafu funkce $y = f(x)$ mechanickým spojením případů 2. a 3. Nabývá-li totiž funkce $y = f(x)$ nějaké hodnoty v bodě x_1, nabývá téže hodnoty funkce $f(bx + c)$ v bodě x_2, který je vázán rovnicí $bx_2 + c = x_1$, neboli $x_2 = \frac{x_1}{b} + \frac{c}{b}$. U funkcí goniometrických nejenže se změní perioda, ale v témž poměru se změní také velikost vektoru posunutí ve směru osy x.



Obr. 18. Graf funkce $y = 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - 1$.

V dosavadním rozboru jsme uvedli příklady některých funkcí, které jsou dílčím případem funkce

$$y = a\,f(bx + c) + d\,. \tag{3,1}$$

Z toho, co bylo dosud řečeno, můžeme graf funkce (3,1) sestrojit z grafu funkce $y = f(x)$ tak, že nejprve sestrojíme graf funkce $y = f(bx)$, ten posuneme o $\left|\dfrac{c}{b}\right|$ „doleva“ $\left(\dfrac{c}{b} > 0\right)$ nebo „doprava“ $\left(\dfrac{c}{b} < 0\right)$, potom provedeme graficky násobení každé funkční hodnoty číslem a (pozor na znaménko čísla a!). Dostaneme tak graf funkce $y = a\,\cancel{\sin}\,f(bx + c)$, který posunut o d ve směru kladné poloosy y pro $d > 0$ nebo ve směru záporné poloosy y pro $d < 0$ udává graf funkce (3,1). Na obr. 18 je tímto způsobem sestrojen graf funkce

$$y = 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - 1\,.$$

Graf funkce (3,1) můžeme však sestrojit přímo. V tom případě je důležitá znalost některých význačných bodů. Takovými jsou především nulové body. U funkce sinus jsou to dále body, v nichž nabývá své největší a nejmenší hodnoty, u funkce tangens pak takové body, v nichž není definována. Je-li číslo p periodou funkce, potom $f(bx + c + kp) = f(bx + c)$.

Příklad 3.1. Sestrojíme graf funkce

$$y = \frac{3}{2} \cos\left(\frac{4}{3}x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{3}{4}\,.$$

Na základě identity $\cos z = \sin\left(\frac{\pi}{2} + z\right)$ můžeme přejít ke kofunkci a danou funkci psát ve tvaru

$$y = \frac{3}{2}\sin\left(\frac{4}{3}x + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{3}{4}.$$

Nulové body určíme z rovnice

$$\frac{3}{2}\sin\left(\frac{4}{3}x + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{3}{4} = 0.$$

Dostaneme tak

$$x = -\frac{\pi}{4} + \frac{3}{2}k\pi, \quad x = -\frac{3}{4}\pi + \frac{3}{2}k\pi.$$

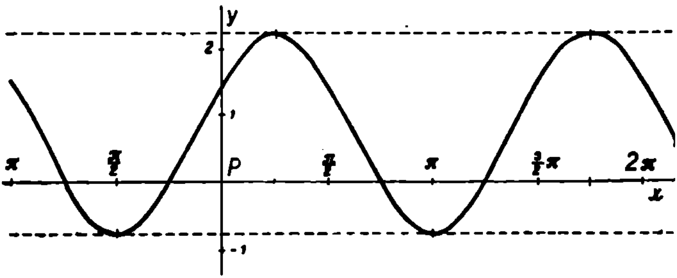
Jelikož $\sin z$ nabývá všech hodnot z intervalu $\langle -1, 1\rangle$, nabývá daná funkce všech hodnot z intervalu $\langle -\frac{3}{4}, \frac{9}{4}\rangle$, jak se snadno přesvědčíme třeba dosazením krajních bodů intervalu $\langle -1, 1\rangle$ do funkčního předpisu. Graf funkce leží proto v pásu ohraničeném přímkami o rovnicích $y = -\frac{3}{4}$, $y = \frac{9}{4}$. Své největší hodnoty nabývá funkce v těch bodech x, které vyhovují rovnici

$$\sin\left(\frac{4}{3}x + \frac{\pi}{6}\right) = 1.$$

Řešením dostaneme body $x = \frac{\pi}{4} + \frac{3}{2}k\pi$. Podobně je tomu s body, v nichž daná funkce nabývá své nejmenší hodnoty, tj. $-\frac{3}{4}$. Získáme je v tomto případě řešením rovnice

$$\sin\left(\frac{4}{3}x + \frac{\pi}{6}\right) = -1.$$

Jsou to čísla $x = -\frac{\pi}{2} + \frac{3}{2}k\pi.$



Obr. 19. Graf funkce $y = \frac{3}{2}\cos\left(\frac{4}{3}x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{3}{4}$.

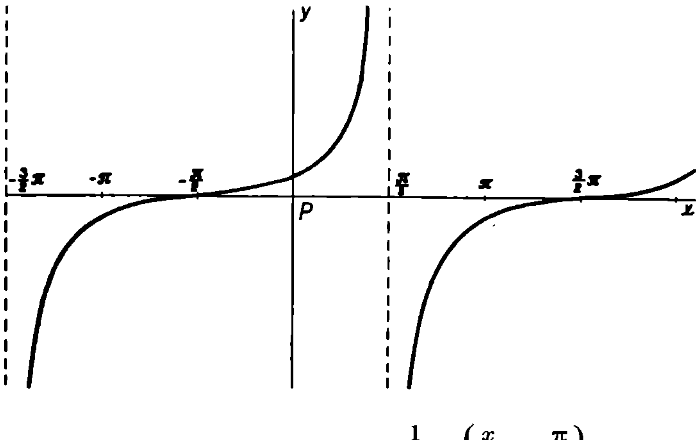
K náčrtku nám zjištěné údaje stačí. Dokonce stačí znát jediný bod, v němž funkce nabývá maximální nebo minimální hodnoty, neboť tyto hodnoty se střídají a leží vždy uprostřed mezi sousedními nulovými body.

Pro přesnější sestrojení grafu využijeme opět jednotkové kružnice. Každou hodnotu musíme však násobit číslem $\frac{3}{2}$ a zvětšit o $\frac{3}{4}$. Graf je na obr. 19.

Příklad 3.2. Máme-li sestrojit graf funkce

$$y = \frac{1}{3}\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right),$$

určíme nejprve definiční obor. Podle vzorců (1,11) $\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, neboli $x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$. Čísla $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, která jsou řešením rovnice $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 0$, dávají nulové body. V každém intervalu délky 2π má graf stejný průběh. Stačí proto sestrojit kupř. tu část grafu, která leží v intervalu $\left(-\frac{3}{2}\pi, \frac{\pi}{2}\right)$. Graf je na obr. 20.



Obr. 20. Graf funkce $y = \frac{1}{3}\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$.

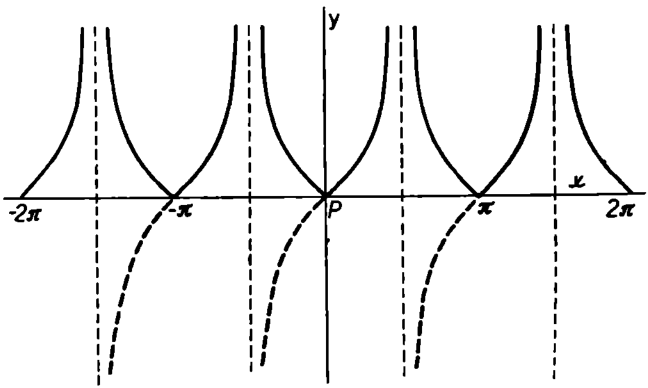
3.3. Některé další grafy. V tomto odstavci uvedeme příklady grafů některých dalších funkcí, v nichž se vyskytují funkce goniometrické. Nepůjde o žádný systém, neboť takový systém není ani možné udat. Půjde spíše o návod, jak postupovat v obdobných případech.

Příklad 3.3. Sestrojíme grafy funkcí

$$\text{a) } y = |\mathrm{tg}\, x|$$

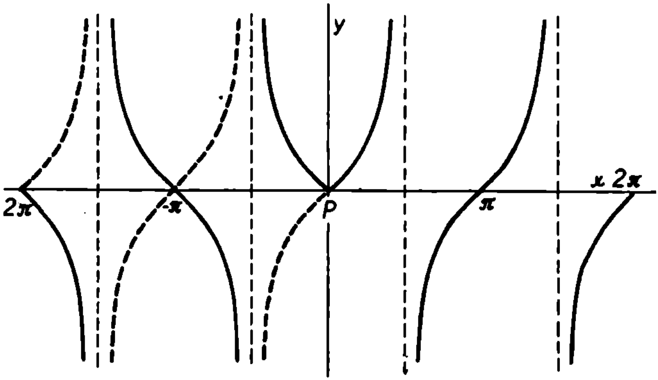
$$\text{b) } y = \mathrm{tg}\, |x| .$$

a) Graf funkce $y = |\mathrm{tg}\, x|$ je sestrojen na obr. 21.a. V intervalech $\langle k\pi, (2k+1)\frac{\pi}{2})$, v nichž je $\mathrm{tg}\, x \geqq 0$, mají funkce $y = |\mathrm{tg}\, x|$ a $y = \mathrm{tg}\, x$ stejný průběh. Množina nulových bodů je stejná, neboť $|\mathrm{tg}\, x| = 0$ tehdy



Obr. 21a. Graf funkce $y = |\mathrm{tg}\, x|$.

a jen tehdy, jestliže $\operatorname{tg} x = 0$. V intervalech $(\frac{\pi}{2} + k\pi, \pi + k\pi)$ je $\operatorname{tg} x < 0$ a proto $|\operatorname{tg} x| = -\operatorname{tg} x$. Každá funkční hodnota je tudíž číslo opačné k $\operatorname{tg} x$, grafy $\operatorname{tg} x$ a $|\operatorname{tg} x|$ jsou v těchto intervalech souměrně sdružené podle osy x (srovnejte případ 1, odst. 3.2).



Obr. 21b. Graf funkce $y = \operatorname{tg} |x|$.

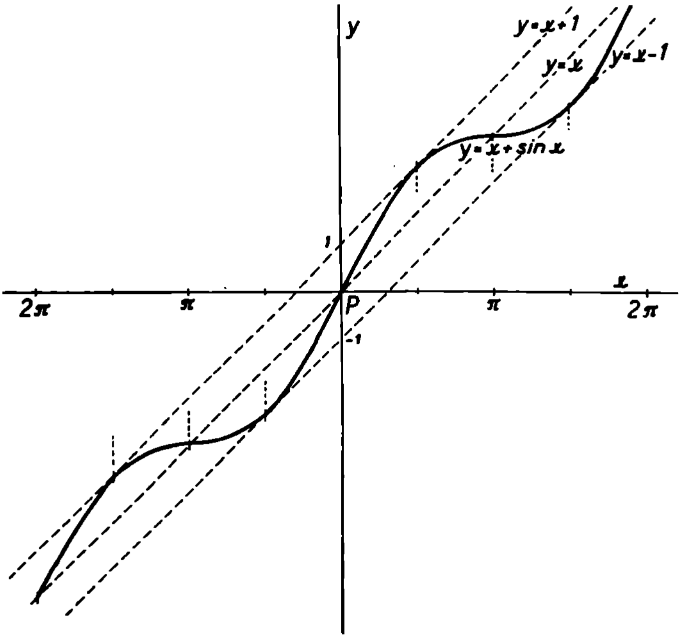
b) Funkce $y = \operatorname{tg} |x|$ nabývá stejných hodnot jako funkce $y = \operatorname{tg} x$, jestliže $x \geqq 0$. Je-li $x < 0$, potom $\operatorname{tg} |x| = \operatorname{tg} (-x) = -\operatorname{tg} x$. Pro $x < 0$ je tedy graf funkce $y = \operatorname{tg} |x|$ souměrně sdružený podle osy x s grafem funkce $y = \operatorname{tg} x$. Graf je na obr. 21b.

Příklad 3.4. Sestrojme graf funkce

$$y = x + \sin x .$$

Graf dané funkce leží v pásu určeném přímkami o rovnicích $y = x - 1$, $y = x + 1$, neboť z nerovnosti $-1 \leqq$

$\leqq \sin x \leqq 1$ plyne bezprostředně $x - 1 \leqq x + \sin x \leqq \leqq x + 1$. Přitom body grafu, jejichž x-ové souřadnice vyhovují podmínce $\sin x = -1$, leží na přímce $y = x - 1$, body, jejichž x-ové souřadnice vyhovují podmínce $\sin x = 1$, leží na přímce $y = x + 1$. V prvém případě jde o body, pro které $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, v druhém případě pak $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$. Přímku $y = x$ protíná

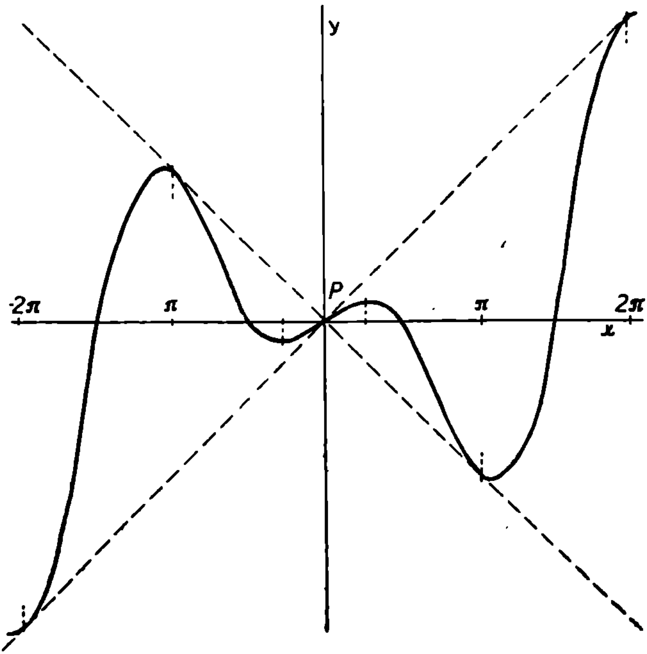


Obr. 22. Graf funkce $y = x + \sin x$.

graf dané funkce v těch bodech, jejichž x-ové souřadnice jsou kořeny rovnice $\sin x = 0$, to znamená $x = k\pi$. Další body grafu si můžeme opatřit prostým grafickým součtem s použitím jednotkové kružnice (obr. 22).

Příklad 3.5. Dále sestrojíme graf funkce

$$y = x \cos x\ .$$



Obr. 23. Graf funkce $y = x \cos x$.

Po vynásobení známé nerovnosti $-1 \leqq \cos x \leqq 1$ číslem x snadno dojdeme k těmto závěrům:

a) jestliže $x > 0$, potom $-x \leqq x \cos x \leqq x$;
b) jestliže $x < 0$, potom $x \leqq x \cos x \leqq -x$;
c) jestliže $x = 0$, potom také $x \cos x = 0$.

Graf funkce $y = x \cos x$ leží proto v obou vrcholových úhlech, sevřených přímkami o rovnicích $y = x$, $y = -x$, které obsahují osu x. Hledáme-li (podobně jako v příkladě 3.4) body grafu, které leží na přímkách $y = x$, $y = -x$, vidíme, že jde o body, jejichž x-ové souřadnice vyhovují pořadě podmínkám $x \cos x = x$, $x \cos x = -x$. Prvá rovnice má kořeny $x = 2k\pi$, druhá $x = 0$, $x = (2k + 1)\pi$. Leží tedy na přímkách $y = x$, $y = -x$ body grafu, pro které $x = k\pi$. Nulové body jsou kořeny rovnice $x \cos x = 0$, tj. $x = 0$, $x = (2k + 1)\dfrac{\pi}{2}$. Graficky můžeme získat libovolný počet dalších funkčních hodnot (obr. 23).

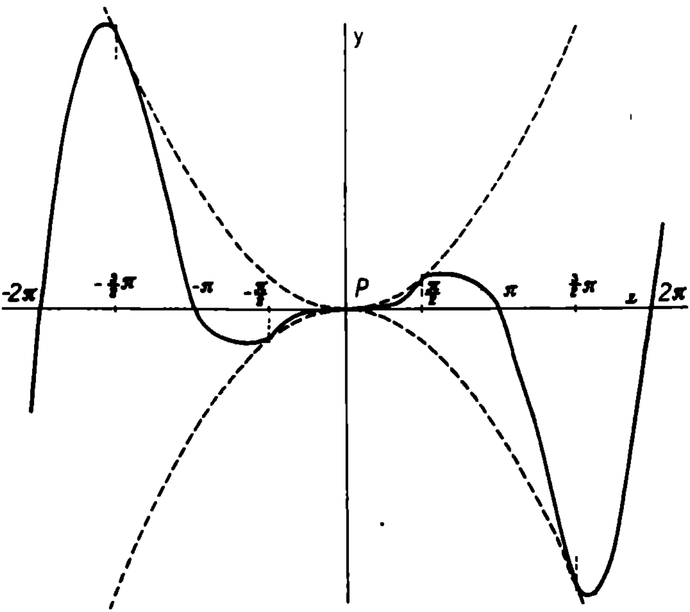
Příklad 3.6. Graf funkce

$$y = \frac{1}{4} x^2 \sin x$$

sestrojíme podobně. Z nerovnosti $-1 \leqq \sin x \leqq 1$ plyne pro každé x:

$$-\frac{1}{4} x^2 \leqq \frac{1}{4} x^2 \sin x \leqq \frac{1}{4} x^2.$$

Graf je tudíž v části roviny, která obsahuje osu x a je omezena parabolami o rovnicích $y = -\dfrac{1}{4} x^2$, $y = \dfrac{1}{4} x^2$. Nulové body obdržíme řešením rovnice $x^2 \sin x = 0$, která má kořeny $x = k\pi$ (číslo $x = 0$ je zahrnuto v zápise pro $k = 0$). Jestliže $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, nabývá funkce hodnoty $\frac{1}{4}x^2$, příslušné body grafu leží proto na parabole $y = \frac{1}{4}x^2$. Jestliže $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, leží příslušné body grafu na parabole $y = -\frac{1}{4}x^2$. (Obr. 24.)

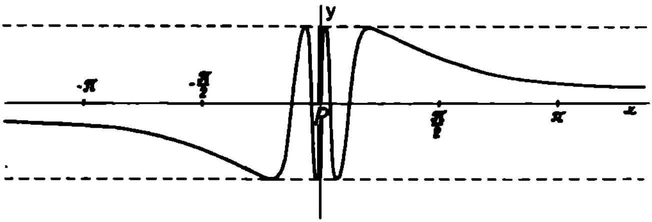


Obr. 24. Graf funkce $y = \frac{1}{4}x^2 \sin x$.

Příklad 3.7. V obr. 25 je sestrojen graf funkce

$$y = \sin \frac{1}{x}.$$

S touto funkcí se často setkáváme ve vyšší matematice. Všimněme si, že funkce je definována pro všechna $x \neq 0$. Funkční hodnoty probíhají interval $\langle -1, 1 \rangle$.



Obr. 25. Graf funkce $y = \sin \frac{1}{x}$.

Nulové body této funkce jsou řešením rovnice $\sin \frac{1}{x} = 0$. Můžeme je proto vyjádřit vztahem $\frac{1}{x} = k\pi$, čili $x = \frac{1}{k\pi}$. Odtud plyne, že zkoumaná funkce má nekonečně mnoho nulových bodů. Všechny tyto body leží v intervalu $\langle \frac{1}{\pi}, -\frac{1}{\pi} \rangle$. Přitom $-\frac{1}{\pi}$ je prvním nulovým bodem zleva, $\frac{1}{\pi}$ prvním nulovým bodem zprava.

Cvičení

3.1. Sestrojte graf funkce $y = 2 \sin \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + \sqrt{2}$.

3.2. Sestrojte grafy funkcí

a) $y = |\sin x|$,

b) $y = \sin |x|$.

3.3. Proč funkce $y = \cos x$ a $y = \cos |x|$ mají týž graf?

3.4. Sestrojte graf funkce $y = x + \cos x$.

3.5. Sestrojte graf funkce $y = x \sin x$.

3.6. Vyjádřete funkci $y = \sin x + \cos x$ ve tvaru (3,1) a sestrojte graf. (Návod: Užijte identity z příkladu 2.13.)

3.7. Sestrojte graf funkce

$$y = \sqrt{x} + \sin x .$$

4. kapitola

PŘÍKLADY GONIOMETRICKÝCH NEROVNOSTÍ

4.1. Nerovnosti o jedné neznámé. Často se při rozboru goniometrických výrazů nevyhneme nerovnostem. Máme-li kupř. stanovit, jakých hodnot nabývá funkce

$$y = \sin x + \cos x\,,$$

potom hrubý odhad dává jistě nerovnost

$$-2 \leqq \sin x + \cos x \leqq 2\,,$$

která plyne ze vztahů $|\sin x| \leqq 1$, $|\cos x| \leqq 1$. Hodnot 2 a -2 však funkce nenabývá, neboť rovnice

$$\sin x + \cos x = \pm 2$$

nemají řešení, jelikož není splněna podmínka

$$c^2 < a^2 + b^2$$

(srovnejte s odstavcem 2.5).

Převod na identitu

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4}\right),$$

která platí pro každé x (př. 2.13), nám umožní přesné stanovení množiny funkčních hodnot. Z nerovnosti

$$-1 \leqq \cos \left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leqq 1$$

plyne nerovnost

$$-\sqrt{2} \leqq \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leqq \sqrt{2}\,,$$

neboli

$$|\sin x + \cos x| \leqq \sqrt{2}\,.$$

Jelikož funkce $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ nabývá všech hodnot z intervalu $\langle -1, 1\rangle$, tvoří množinu funkčních hodnot dané funkce interval $\langle -\sqrt{2}, \sqrt{2}.\rangle$ Odpověď na otázku, kdy daná funkce nabývá své největší nebo nejmenší hodnoty, patří již do oblasti goniometrických rovnic.

V této kapitole si ukážeme řešení nerovností s goniometrickými funkcemi na některých zajímavějších příkladech. V odstavci, který probíráme, zaměříme svou pozornost na ty nerovnosti, které obsahují pouze jednu neznámou.

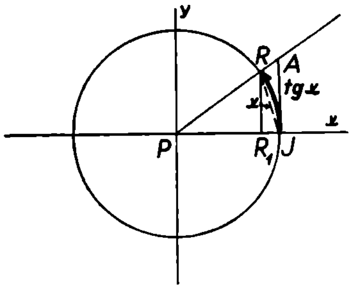
Příklad 4.1. Dokažme, že pro každé $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $x \neq 0$, platí nerovnost

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1\,.$$

D ů k a z. Vyřešíme nejprve danou nerovnost pro $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Označme (obr. 26) obsah trojúhelníka PJR, výseče PJR a trojúhelníka PJA po řadě p_1, p_2, p_3 a vypočítejme čísla p_1, p_2, p_3, pro která zřejmě platí nerovnosti

$$p_1 < p_2 < p_3\,. \tag{4,1}$$

Obsah trojúhelníka je roven polovičnímu součinu dvou stran násobenému sinem úhlu, který tyto dvě strany svírají. Proto $p_1 = \frac{1}{2} \sin x$ (neboť $PJ = PR = 1$). Podle vzorce pro obsah kruhové výseče $p = \frac{1}{2} r^2 \operatorname{arc} \alpha$ (v našem případě $\operatorname{arc} \alpha = x$, $r = 1$) máme $p_2 = \frac{x}{2}$.



Obr. 26. K důkazu nerovnosti $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$.

Pro obsah pravoúhlého trojúhelníka PJA dostaneme přímo $p_3 = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x$. Dosadíme-li do nerovnosti (4,1), dostaneme

$$\frac{1}{2} \sin x < \frac{x}{2} < \frac{1}{2} \operatorname{tg} x \,. \tag{4,2}$$

Násobíme-li nerovnost $\frac{1}{2} \sin x < \frac{x}{2}$ kladným číslem $\frac{2}{x}$, plyne odtud

$$\frac{\sin x}{x} < 1 \,. \tag{4,3}$$

Podobně z nerovnosti $\frac{x}{2} < \frac{1}{2} \operatorname{tg} x$ obdržíme násobením kladným číslem $\frac{2 \cos x}{x}$ vztah

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} \,. \tag{4,4}$$

Nerovnosti (4,3) a (4,4) dávají pro $x > 0$ žádaný výsledek

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \,. \tag{4,5}$$

Zbývá dokázat, že nerovnost platí také pro

$$x \in (-\frac{\pi}{2}, 0).$$

To je však snadné. Jestliže totiž $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ potom $-x \in (0, \frac{\pi}{2})$ a pro taková čísla je daná nerovnost dokázána. Proto

$$\cos(-x) < \frac{\sin(-x)}{-x} < 1 \,,$$

odkud podle vzorců (1,24a) dostaneme opět požadovanou nerovnost, platnou pro $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$.

Příklad 4.2. Máme určit, pro která x platí nerovnost

$$\sin x \leqq \cos x\,.$$

Řešení. Nerovnost upravíme nejprve na ekvivalentní známým způsobem:

$$\sin x - \cos x \leqq 0\,,$$

$$\sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \leqq 0\,,$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leqq 0\,.$$

Funkce $\sin z$ nabývá hodnoty 0 a záporných hodnot v intervalech $\langle -\pi + 2k\pi,\ 2k\pi\rangle$, což můžeme zapsat pomocí nerovnosti

$$-\pi + 2k\pi \leqq z \leqq 2k\pi\,.$$

Dosadíme-li $z = x - \dfrac{\pi}{4}$ a upravíme, dostaneme podmínku

$$-\frac{3}{4}\pi + 2k\pi \leqq x \leqq \frac{\pi}{4} + 2k\pi\,.$$

Daná nerovnost je tedy splněna pro všechna x z intervalů $\langle -\dfrac{3}{4}\pi + 2k\pi, \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi\rangle$, kde k je libovolné celé číslo.

POZNÁMKA 4.1. Podobně jako při řešení goniometrických rovnic užíváme také při řešení nerovností s goniometrickými funkcemi jako pomůcky jednotkové kružnice nebo se opíráme o graf příslušné goniometrické funkce.

Příklad 4.3. Určete všechna x, která vyhovují nerovnosti $|\sin x + \cos x| < 1$.

Řešení. Daná nerovnost je ekvivalentní s nerovností $-1 < \sin x + \cos x < 1$, kterou upravíme obdobným způsobem jako v příkladě 4.2. na tvar

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ta je splněna, je-li x libovolné číslo z intervalů $(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{3}{4}\pi + k\pi)$.

Příklad 4.4. Vyřešíme nerovnost

$$\left|\frac{\sin x + \sin 3x}{\cos x + \cos 3x}\right| < 1.$$

Levá strana nerovnosti má smysl, pokud $x \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}$, $x \neq (2k + 1)\frac{\pi}{4}$. Nerovnost zjednodušíme podle vzorců (1,34). Po úpravě dostaneme

$$|\mathrm{tg}\, 2x| < 1,$$

neboli

$$-1 < \mathrm{tg}\, 2x < 1.$$

Funkce tg z nabývá hodnot z intervalu $\langle -1, 1\rangle$ pro všechna z, která leží v intervalech

$$\langle -\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\rangle.$$

Proto musí platit nerovnost

$$-\frac{\pi}{4} + k\pi < 2x < \frac{\pi}{4} + k\pi\,,$$

která vede k výsledku

$$-\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}\,.$$

Daná nerovnost je tedy splněna pro všechna ta x z intervalů $\langle -\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}\rangle$, která nejsou rovna lichému násobku $\frac{\pi}{2}$. Z existenčních podmínek totiž plyne, že pro $x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$ nemá levá strana dané nerovnosti smysl.

Příklad 4.5. Dále vyřešíme nerovnost

$$\frac{\cos\alpha}{1 - \sin 2\alpha} \geqq 0\,.$$

Řešení. Existenční podmínka má tvar $\sin 2\alpha \neq 1$, tj. $\alpha \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$. Jelikož jmenovatele můžeme nahradit ekvivalentním výrazem $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 1 - \sin 2\alpha$, vidíme, že daná nerovnost je splněna jen v tom případě, jestliže $\cos\alpha \geqq 0$. To znamená, že α je libovolným číslem z intervalů $\langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\rangle$ s výjimkou těch hodnot, které jsme vyloučili z důvodů existenčních.

Pro zajímavost i poučení uvedeme nyní soutěžní úlohu

Mezinárodní matematické olympiády z roku 1965. Její účastníci dostali následující úkol:

Příklad 4.6. Určete všechna x z intervalu $\langle 0,\ 2\pi\rangle$, která vyhovují nerovnostem

$$2 \cos x \leqq \left|\sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{1 - \sin 2x}\right| \leqq \sqrt{2}\,.$$

Řešení rozdělíme na dvě části.

a) Nerovnost

$$\left|\sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{1 - \sin 2x}\right| \leqq \sqrt{2} \tag{4,6}$$

můžeme umocnit dvěma, neboť jde o nerovnost mezi nezápornými čísly. Úprava vede k nerovnosti

$$|\cos 2x| \geqq 0\,, \tag{4,7}$$

která je splněna pro všechna x z intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$. Tato čísla jsou však také řešením nerovnosti (4,6), neboť nerovnost (4,7) vznikla z nerovnosti (4,6) ekvivalentními úpravami.

b) Nerovnost

$$2 \cos x \leqq \left|\sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{1 - \sin 2x}\right| \tag{4,8}$$

je jistě pravdivá, jestliže $\cos x \leqq 0$, to znamená, je-li x libovolné číslo z intervalu

$$\langle\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\rangle\,. \tag{4,9}$$

Nerovnost (4,8) stačí proto řešit pouze v případě, že $\cos x > 0$. Této podmínce vyhovují z požadovaného intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$ všechna x, která leží v intervalech

$$\langle 0, \frac{\pi}{2})\,,\ (\frac{3}{2}\pi\,, 2\pi\rangle\,. \tag{4,10}$$

Jestliže tedy $\cos x > 0$, je (4,8) nerovností mezi kladnými čísly a umocněním převedeme (4,8) na ekvivalentní nerovnost

$$|\cos 2x| \leqq -\cos 2x\,. \tag{4,11}$$

Nerovnost je pravdivá obecně pro všechna x, která vyhovují nerovnostem

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leqq 2x \leqq \frac{3}{2}\pi + 2k\pi\,,$$

neboli

$$\frac{\pi}{4} + k\pi \leqq x \leqq \frac{3}{4}\pi + k\pi\,.$$

Nás však zajímají pouze ta řešení, která leží zároveň v některém z intervalů (4,10). Tuto vlastnost mají všechna x z intervalů

$$\left\langle\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{3}{2}\pi, \frac{7}{4}\pi\right\rangle. \tag{4,12}$$

Spojíme-li částečné výsledky (4,9), (4,12), dospějeme k závěru, že nerovnost (4,8) je splněna pro všechna x z intervalu $\left\langle\frac{\pi}{4}, \frac{7}{4}\pi\right\rangle$. Tento interval je také výsledným řešením nerovnosti dané, neboť nerovnost (4,6) je splněna pro všechna x z intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$.

Podobně si budeme počínat v následující úloze.

Příklad 4.7. Naším úkolem bude opět určení všech x z intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$, která vyhovují nerovnostem

$$\sqrt{\sqrt{2} + 2\cos x} \leqq \sqrt{\cos x - \sin x} + \sqrt{\cos x + \sin x} \leqq$$
$$\leqq 2\cos\frac{x}{2}\,.$$

Řešení.

a) V příkladě 4.6 jsme mlčky přešli existenční podmínky. Pozorný čtenář si jistě všiml, že dané výrazy tam měly smysl pro všechna x. V našem případě tomu tak není.

Výraz $\sqrt{\sqrt{2} + 2\cos x}$ má existenční oprávnění pouze tehdy, jestliže $\cos x \geqq -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Podmínce vyhovují všechna x z intervalů

$$\langle 0, \frac{3}{4}\pi\rangle, \quad \langle\frac{5}{4}\pi, 2\pi\rangle. \tag{4,13}$$

Výraz $\sqrt{\cos x - \sin x}$ má smysl, pokud $\cos x - \sin x \geqq$ $\geqq 0$. Známou úpravou převedeme podmínku na nerovnost $\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leqq 0$, které vyhovují v intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$ všechna x z intervalů

$$\langle 0, \frac{\pi}{4}\rangle, \quad \langle\frac{5}{4}\pi, 2\pi\rangle. \tag{4,14}$$

A konečně, existence výrazu $\sqrt{\cos x + \sin x}$ je zaručena podmínkou $\cos x + \sin x \geqq 0$, kterou převedeme na tvar $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geqq 0$. Té vyhovují všechna x z intervalů

$$\langle 0, \frac{3}{4}\pi\rangle, \quad \langle\frac{7}{4}\pi, 2\pi\rangle. \tag{4,15}$$

Jelikož žádáme současnou platnost podmínek (4,13), (4,14) i (4,15), může řešení dané nerovnosti ležet pouze v některém z intervalů

$$\langle 0, \frac{\pi}{4}\rangle, \quad \langle \frac{7}{4}\pi, 2\pi\rangle . \tag{4,16}$$

b) Umocníme-li nerovnost

$$\left| \sqrt{\cos x - \sin x} + \sqrt{\cos x + \sin x} \right| \leqq 2 \cos \frac{x}{2}, \tag{4,17}$$

dostaneme postupně

$$2 \cos x + 2\sqrt{\cos 2x} \leqq 4 \cos^2 \frac{x}{2},$$

$$\sqrt{\cos 2x} \leqq (1 + \cos x) - \cos x ,$$

$$\sqrt{\cos 2x} \leqq 1 .$$

Poslední nerovnost je splněna pro všechna x z intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$, pro která $\cos 2x \geqq 0$, tj. pro všechna x z intervalů $\langle 0, \frac{\pi}{4}\rangle$, $\langle \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi\rangle$, $\langle \frac{7}{4}\pi, 2\pi\rangle$. Jelikož však x musí současně ležet v některém z intervalů $\langle 4,16\rangle$, jsou řešením nerovnosti (4,17) pouze intervaly $\langle 0, \frac{\pi}{4}\rangle$, $\langle \frac{7}{4}\pi, 2\pi\rangle$.

c) Obdobným způsobem upravíme nerovnost

$$\sqrt{\sqrt{2} + 2 \cos x} \leqq \sqrt{\cos x - \sin x} + \sqrt{\cos x + \sin x} . \tag{4,18}$$

Postupná úprava, počínaje umocněním (jde opět o nerovnost mezi nezápornými čísly), dává nerovnost

$$\sqrt{\cos 2x} \geqq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Další umocnění, jehož oprávněnost si čtenář jistě zdůvodní sám, vede ke vztahu

$$\cos 2x \geqq \frac{1}{2},$$

který je pravdivý pro všechna x z intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$, pro která platí $-\frac{\pi}{6} + k\pi \leqq x \leqq \frac{\pi}{6} + k\pi$. Jde o intervaly $\langle 0, \frac{\pi}{6}\rangle$, $\langle\frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi\rangle$, $\langle\frac{11}{6}\pi, 2\pi\rangle$. Podmínce (4,16) však vyhovují pouze dva z těchto intervalů $\langle 0, \frac{\pi}{6}\rangle$, $\langle\frac{11}{6}\pi, 2\pi\rangle$, a proto řešením nerovnosti (4,18) jsou všechna čísla x z těchto dvou intervalů.

Z požadavku současné platnosti nerovností (4,17) i (4,18) plyne závěr: Dané nerovnosti vyhovují všechna x z intervalů

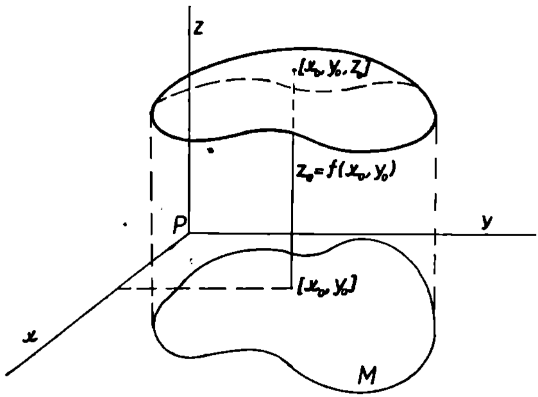
$$\langle 0, \frac{\pi}{6}\rangle, \ \langle\frac{11}{6}\pi, 2\pi\rangle.$$

4.2. Nerovnosti o dvou neznámých. Předpokládejme, že M je množina bodů, ležících v rovině, v níž je sestrojena soustava souřadnic Pxy. Mysleme si, že je dán předpis, který každému bodu $[x, y]$ z množiny M přiřazuje právě jedno reálné číslo z. Tento předpis nazýváme *funkce dvou* *proměnných*. Množina M je tzv. *definiční obor funkce;* x, y jsou tzv. *proměnné*.

Určité číslo z_0 přiřazené danému bodu $[x_0, y_0] \in M$ nazýváme *hodnotou funkce* v tomto bodě. Funkci obecně zapisujeme ve tvaru

$$z = f(x, y)\,.$$

Zvolme si v prostoru soustavu souřadnic $Pxyz$. Množina všech bodů $[x, y, f(x, y)]$, kde $[x, y] \in M$, je tzv. *graf funkce dvou proměnných* $z = f(x, y)$ (obr. 27). V obecném



Obr. 27. Graf funkce dvou proměnných $z = f(x, y)$.

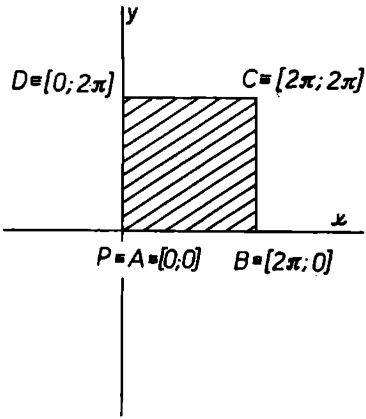
případě je grafem funkce dvou proměnných nějaká plocha.

Naše publikace nemá ani v nejmenším za úkol seznámit čtenáře s funkcemi dvou proměnných. To, co bylo řečeno, však plně stačí, abychom si uměli poradit s úlohami podobného typu, jaké budou uvedeny v dalších dvou příkladech.

Příklad 4.8. V rovině pravoúhlých souřadnic x, y zobrazíme všechna řešení, která vyhovují nerovnostem

$$\left|\cos\left(y - x + \frac{\pi}{3}\right)\right| \geqq \frac{1}{2}, \; 0 \leqq x \leqq 2\pi, \; 0 \leqq y \leqq 2\pi.$$

Řešení. Funkce $\cos u$ má smysl pro každé reálné číslo u. Je tedy zřejmé, že funkce $z = \cos\left(y - x + \frac{\pi}{3}\right)$ je definována pro každou dvojici reálných čísel x, y. Obrazy všech takových dvojic vyplní celou rovinu. Máme proto za úkol vybrat mezi všemi body roviny, v nichž $\left|\cos\left(y - x + \frac{\pi}{3}\right)\right| \geqq \frac{1}{2}$ ty body, které leží zároveň ve čtverci $ABCD$ určeném nerovnostmi $0 \leqq$



Obr. 28. Obraz množiny bodů $[x, y]$, jejichž souřadnice vyhovují nerovnostem $0 \leqq x \leqq 2\pi$, $0 \leqq y \leqq 2\pi$.

$\leqq x \leqq 2\pi$, $0 \leqq y \leqq 2\pi$ (viz obr. 28). Předcházející úvaha je návodem pro náš další postup.

Nejprve budeme hledat všechny body roviny, v nichž platí nerovnost

$$\left|\cos\left(y - x + \frac{\pi}{3}\right)\right| \geqq \frac{1}{2}. \tag{4,19}$$

a) Jestliže

$$\cos\left(y - x + \frac{\pi}{3}\right) \geqq 0\,, \tag{4,20}$$

můžeme nerovnost (4,19) psát ve tvaru

$$\cos\left(y - x + \frac{\pi}{3}\right) \geqq \frac{1}{2}. \tag{4,21}$$

Nerovnosti (4,20) a (4,21) budou zřejmě splněny pro ty dvojice x, y, které vyhovují nerovnosti (4,21). To znamená, že

$$-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leqq y - x + \frac{\pi}{3} \leqq \frac{\pi}{3} + 2k\pi\,.$$

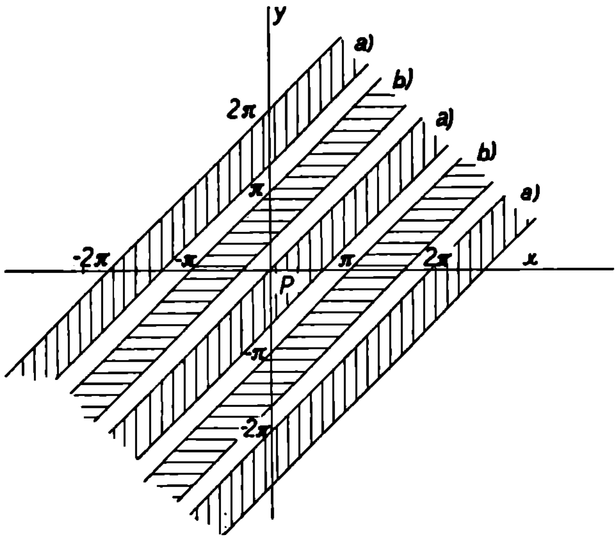
Odtud dostaneme

$$x - \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \leqq y \leqq x + 2k\pi\,. \tag{4,22}$$

Obrazem nerovnosti (4,22) jsou části rovin (rovnoběžné pásy) omezené přímkami o rovnicích $y = x - \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$, $y = x + 2k\pi$, kde k je libovolné celé číslo (v obou rovnicích stejné). V obr. 29 jsou příslušné části označeny znakem a).

b) Jestliže

$$\cos\left(y - x + \frac{\pi}{3}\right) < 0\,, \qquad (4{,}23)$$



Obr. 29. Výsledné řešení nerovnosti $\left|\cos\left(y - x + \frac{\pi}{3}\right)\right| \geqq \frac{1}{2}$.

potom má nerovnost (4,19) tvar

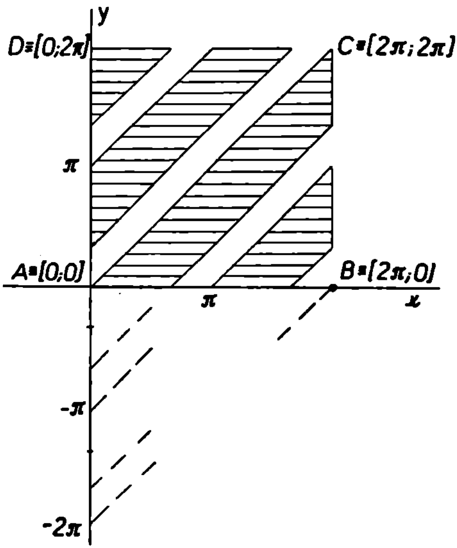
$$\cos\left(y - x + \frac{\pi}{3}\right) \leqq -\frac{1}{2}\,. \qquad (4{,}24)$$

Obdobně jako v případě a) zaručují současné splnění obou nerovností (4,23) a (4,24) ty dvojice x, y, které vyhovují nerovnosti (4,24). Dostaneme tak

$$x + \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leqq y \leqq x + \pi + 2k\pi\,. \qquad (4,25)$$

Obrazem nerovnosti (4,25) jsou opět části rovin (rovnoběžné pásy) omezené tentokrát přímkami o rovnicích $y = x + \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $y = x + \pi + 2k\pi$. V obr. 29 jsou označeny znakem b).

Všechny přímky, které omezují části roviny s přízni-



Obr. 30. Výsledné řešení příkladu 4.8.

vým řešením, jsou vesměs rovnoběžné s přímkou $y = x$, neboť mají tvar $y = x + q$. Nás zajímají pouze ty, které mají společné body se čtvercem $ABCD$, tedy ty přímky, jejichž q bude z intervalu $\langle -2\pi, 2\pi \rangle$. V systému rovnoběžek $y = x - \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$ mají proto smysl pouze ty, které obdržíme pro $k = 0,1$. Podobně je tomu se zbývajícími třemi systémy rovnoběžek. Úloze vyhovuje také bod $B \equiv [2\pi, 0]$, neboť leží na přímce $y = x - 2\pi$. Výsledné řešení získáme tak, že zjistíme, kde se překrývají části roviny s příznivým řešením se čtvercem $ABCD$ (obr. 30). Příslušné oblasti jsou na obrázku vyšrafovány.

Příklad 4.9. Nerovností $x^2 + y^2 \leqq 2\pi$ je dána v rovině pravoúhlých souřadnic x, y množina všech bodů kruhu o poloměru $r = \sqrt{2\pi}$ se středem v počátku $P \equiv [0, 0]$. Určete všechny dvojice reálných čísel x, y, které mají tu vlastnost, že jejich obrazy leží v daném kruhu a je v nich definována funkce $z = \sqrt{\sin(y - x^2)}$. Výslednou množinu zobrazte.

Řešení: Výraz $\sqrt{\sin(y - x^2)}$ má smysl, pokud $\sin(y - x^2) \geqq 0$, neboli

$$x^2 + 2k\pi \leqq y \leqq x^2 + (2k + 1)\pi\,. \qquad (4,26)$$

Rovnice $y = x^2 + 2k\pi$, $y = x^2 + (2k + 1)\pi$, kde k je libovolné celé číslo (stejné pro obě rovnice), představují soustavu parabol s vrcholy na ose y. Vzdálenost sousedních vrcholů je π. Grafickým řešením nerovnosti (4,26) jsou části roviny mezi každou dvojicí takových parabol. (Parabola o rovnici $y = x^2 + 2k\pi$ ohraničuje každou část roviny s příznivým řešením zdola, druhá parabola o rovnici $y = x^2 + (2k + 1)\pi$ shora.) Pro naši úlohu mají však význam pouze ty paraboly, které mají s danou kružnicí společný aspoň jeden bod. Rozhodneme proto nejdříve početně, které paraboly mají tuto vlastnost. Společné body získáme řešením soustav:

a)
$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 2\pi\,, \\ y &= x^2 + 2k\pi\,; \end{aligned} \tag{4,27}$$

b)
$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 2\pi\,, \\ y &= x^2 + (2k + 1)\pi\,. \end{aligned} \tag{4,28}$$

a) Soustava (4,27) vede po dosazení $x^2 = y - 2k\pi$ na kvadratickou rovnici

$$y^2 + y - 2(k + 1)\pi = 0\,. \tag{4,29}$$

Diskriminant této rovnice $D = 1 + 8(k + 1)\pi$ musí být číslo nezáporné. Tím získáme podmínku pro parametr k

$$k \geqq -1 - \frac{1}{8\pi}\,.$$

Číslo k však nabývá pouze celočíselných hodnot. Podmínku můžeme proto napsat v jednodušším tvaru

$$k \geqq -1\,. \tag{4,30}$$

Kořeny rovnice (4,29) jsou čísla

$$y_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 8(k + 1)\pi}}{2}\,,$$

$$y_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 + 8(k + 1)\pi}}{2}\,.$$

Ze vztahu $y - 2k\pi = x^2$ plyne nerovnost

$$y \geqq 2k\pi\,. \tag{4,31}$$

Podmínky (4,30) a (4,31) mají platit současně. Dosadíme-li kořen y_1 do nerovnosti (4,31), dostaneme

$$\frac{-1 + \sqrt{1 + 8(k + 1)\pi}}{2} \geqq 2k\pi ,$$

neboli

$$\sqrt{1 + 8(k + 1)\pi} \geqq 4k\pi + 1 .$$

Jestliže $k \geqq 0$, jde o nerovnost mezi kladnými čísly a můžeme tedy obě strany nerovnosti umocnit. Další úprava je zřejmá:

$$1 + 8k\pi + 8\pi \geqq 16k^2\pi^2 + 8k\pi + 1 ,$$

$$2k^2\pi - 1 \leqq 0 ,$$

$$(k\sqrt{2\pi} + 1)(k\sqrt{2\pi} - 1) \leqq 0 . \qquad (4,32)$$

V posledním kroku jsme užili vzorce pro rozdíl čtverců. Nerovnosti (4,32) vyhovují vzhledem k předpokladu $k \geqq 0$ zřejmě jen čísla z intervalu $\langle 0, \frac{\sqrt{2\pi}}{2\pi} \rangle$.
Existuje však jediné celočíselné k v tomto intervalu, totiž $k = 0$. Dosadíme-li do nerovnosti (4,31) kořen y_2, máme nerovnost

$$\frac{-1 - \sqrt{1 + 8(k + 1)\pi}}{2} \geqq 2k\pi ,$$

kterou uvedeme na tvar

$$\sqrt{1 + 8(k + 1)\pi} \leqq -(1 + 4k\pi) . \qquad (4,33)$$

Nerovnost (4,33) není však pravdivá pro žádné $k \geqq 0$, neboť levá strana je v tom případě vždy kladná, pravá záporná.

Zbývá nám ověřit, jakou polohu má parabola $y = x^2 + 2k\pi$ vůči kružnici $x^2 + y^2 = 2\pi$ pro $k = -1$. Jestliže $k = -1$, potom $y_1 = 0$, $y_2 = -1$. Nerovnost (4,31) je v obou případech pravdivá, neboť vede k nerovnostem $0 \geqq -2\pi$, $-1 \geqq -2\pi$. (První souřadnice průsečíků obou křivek určíme z rovnice $x^2 = y + 2\pi$. Máme kořeny $x_1 = \sqrt{2\pi}$, $x_1' = -\sqrt{2\pi}$, $x_2 = \sqrt{2\pi - 1}$, $x_2' = -\sqrt{2\pi - 1}$).

Shrneme-li dosavadní výsledky, vidíme, že z parabol tvaru $y = x^2 + 2k\pi$ mají s danou kružnicí společné body pouze dvě (pro $k = 0$, $k = -1$). Parabola $y = x^2$ má s kružnicí společné dva body $A \equiv [a_1, a_2 = y_1]$, $A' \equiv [-a_1, a_2 = y_1]$, přitom $a_1 = \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{1 + 8\pi}}{2}}$, $a_2 = y_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 8\pi}}{2}$. Parabola $y = x^2 - 2\pi$ má s danou kružnicí společné 4 body $B \equiv \left[\sqrt{2\pi}, 0\right]$, $B' \equiv \left[-\sqrt{2\pi}, 0\right]$, $C \equiv \left[\sqrt{2\pi - 1}, -1\right]$, $C' \equiv \left[-\sqrt{2\pi - 1}, -1\right]$.

b) Diskusi soustavy (4,28) provedeme stejným způsobem. Dosadíme-li z druhé rovnice do prvé $x^2 = y - (2k + 1)\pi$, dostaneme kvadratickou rovnici

$$y^2 + y - (2k + 3)\pi = 0 . \tag{4,34}$$

Žádáme opět, aby diskriminant $D = 1 + 4(2k + 3)\pi$ byl nezáporný. Odtud získáme podmínku (jelikož k musí být celé číslo)

$$k \geqq -1 . \tag{4,35}$$

Podobně ze vztahu $y - (2k + 1)\pi = x^2$ máme další požadavek

$$y \geqq (2k + 1)\pi . \tag{4,36}$$

Čísla y určíme z rovnice (4,34):

$$y_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4(2k + 3)\pi}}{2},$$

$$y_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 + 4(2k + 3)\pi}}{2}.$$

Dosazení $y = y_1$ do podmínky (4,36) a postupná úprava vede k nerovnosti

$$\sqrt{1 + 4(2k + 3)\pi} \geqq 2(2k + 1)\pi + 1 .$$

Pro $k \geqq 0$ jsou obě strany kladné. Umocníme je proto a nerovnost upravíme na tvar

$$(2k + 1)^2 - \frac{2}{\pi} \leqq 0 .$$

Rozložíme-li levou stranu nerovnosti v součin, můžeme dále psát

$$\left(2k + 1 - \frac{\sqrt{2\pi}}{\pi}\right)\left(2k + 1 + \frac{\sqrt{2\pi}}{\pi}\right) \leqq 0 . \quad (4,37)$$

Vzhledem k předpokladu $k \geqq 0$ nemá zřejmě nerovnost (4,37) řešení.

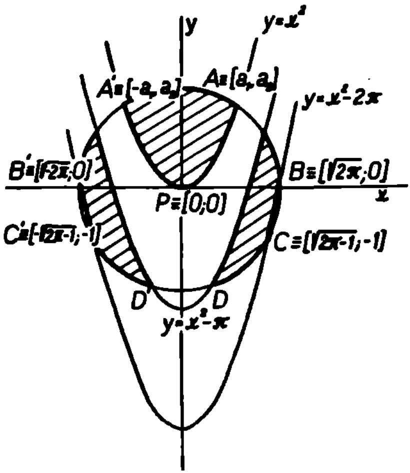
Dosadíme-li $y = y_2$ do (4,37), obdržíme nerovnost

$$-\frac{1 + \sqrt{1 + 4(2k + 3)\pi}}{2} \geqq (2k + 1)\pi , \quad (4,38)$$

které nelze vyhovět žádným nezáporným celým číslem, neboť výraz na levé straně je pro každé takové k záporný, na pravé kladný.

Zbývá tedy jediná parabola pro $k = -1$, která má rovnici $y = x^2 - \pi$. Snadno se opět přesvědčíme, že tato parabola má s kružnicí 4 body společné. Potom totiž

$$y_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\pi}}{2}, \quad y_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 + 4\pi}}{2}$$



Obr. 31. Grafické řešení soustavy nerovností z příkladu 4.9.

a nerovnost (4,36) je v obou případech pravdivá. Je zřejmé, že $y_1 > y_2$. Vzhledem k tomu stačí ověřit platnost vztahu (4,36) pouze pro y_2. Snadný výpočet nás přivádí k nerovnosti

$$\frac{-1 - \sqrt{1 + 4\pi}}{2} \geqq -\pi\,,$$

kterou ekvivalentními úpravami lze uvést na tvar

$\pi \geqq 2$. První souřadnice průsečíků určíme z rovnice $x^2 = y + \pi$.

Máme tedy konečný závěr:

Ze všech dvojic reálných čísel $[x, y]$, které vyhovují nerovnosti $x^2 + y^2 \leqq 2\pi$, je funkce $z = \sqrt{\sin (y - x^2)}$ definována pouze pro ty dvojice, které splňují buď nerovnosti (4,39), nebo nerovnost (4,40):

$$\text{a)} \qquad x^2 - 2\pi \leqq y \leqq x^2 - \pi \,, \tag{4,39}$$

$$\text{b)} \qquad y \geqq x^2 \,. \tag{4,40}$$

Grafické řešení je na obr. 31. Příslušné oblasti jsou v obrázku vyšrafovány.

Cvičení

4.1. Určete všechna x, která vyhovují nerovnostem:

a) $\left| \dfrac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} \right| \leqq 1 \,,$

b) $4 \sin^4 x + \sin^2 2x + 2 \cos 2x \leqq 2 \sin 2x \,,$

c) $\dfrac{\operatorname{tg} x + \sin x}{\operatorname{tg} x - \sin x} < 3 \,,$

d) $\dfrac{1 + \sin 2x}{\cos 2x} > -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \,,$

e) $\dfrac{\cos 2x}{1 + \cos 2x} > 0 \,,$

f) $\dfrac{\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 2x \,.\, \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x} > 0.$

4.2. Určete a zobrazte všechny dvojice reálných čísel $[x, y]$, pro které jsou definovány dané funkce:

a) $z = \sqrt{\sin (x^2 + y^2)}$,

b) $z = \sqrt{1 - \sin x} + \sqrt{1 - \sin y}$,

c) $z = \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 x} + \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 y}$.

4.3. Určete všechny dvojice reálných čísel $[x, y]$, které vyhovují nerovnostem

$$\log \sin \left(x + y - \frac{\pi}{2}\right) < 0, \quad x^2 + y^2 < 4\pi^2.$$

Potom zobrazte výslednou množinu v rovině pravoúhlých souřadnic x, y.

4.4. Zobrazte množinu dvojic reálných čísel $[x, y]$, která vyhovují nerovnostem

$$|y - \cos x| \leqq \pi, \quad |x| \leqq \pi, \quad |y| \leqq \pi.$$

4.5. V rovině pravoúhlých souřadnic x, y zobrazte všechny dvojice reálných čísel $[x, y]$, které vyhovují nerovnostem:

$$||\sin x| - y| \leqq \sin x, \quad |x| \leqq \pi.$$

4.6. Určete všechna x z intervalu $0 \leqq x \leqq 2\pi$, která vyhovují nerovnostem

a) $\sqrt{\operatorname{tg} 2x} + \sqrt{\operatorname{cotg} 2x} \leqq 2$,

b) $$\sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2}}} \leqq \sqrt{1 + \cos \frac{x}{2}} + \sqrt{1 - \cos \frac{x}{2}} \leqq \sqrt{2 + \sqrt{2}}.$$

VÝSLEDKY CVIČENÍ

1.1. Ze vzorce $|a| = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2}$ plyne $|a| = 1$.

1.2. $\sqrt{2}$. Nelekněte se, vyjde-li vám $(\sqrt{3} + 1)\sqrt{2 - \sqrt{3}}$. Upravujte dále.

1.3. a) $r = \cos\dfrac{\varphi}{2} + i\sin\dfrac{\varphi}{2}$, kde $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$,

$$r = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}.$$ b) $r = \cos\dfrac{\varphi}{2} +$ $+ i\sin\dfrac{\varphi}{2}$, kde $\varphi = -\dfrac{\pi}{4}$, $r = \dfrac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} -$ $- i\,\dfrac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$.

1.4. $a = \sqrt{3} - i$.

1.8. a) $\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = \dfrac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y}$,

b) $\operatorname{cotg} x \pm \operatorname{cotg} y = \dfrac{\sin(y \pm x)}{\sin x \sin y}$.

1.10. $\cos 7\alpha = \cos^7\alpha - 21 \cos^5\alpha \sin^2\alpha + 35 \cos^3\alpha \sin^4\alpha -$
$- 7 \cos\alpha \sin^6\alpha ,$

$\sin 7\alpha = 7 \cos^6\alpha \sin\alpha - 35 \cos^4\alpha \sin^3\alpha +$
$+ 21 \cos^2\alpha \sin^5\alpha - \sin^7\alpha .$

2.2. 1.

2.3. $x = y + (2k + 1)\pi$, dále $x = (2k + 1)\pi$, y libovolné číslo a konečně $y = 2k\pi$, x libovolné číslo.

2.4. $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi , \quad x = -\frac{5}{6}\pi + 2k\pi .$

2.5. $x = k\pi .$

2.6. $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi .$

2.7. $x = \frac{\pi}{9} + k\frac{\pi}{3} .$

2.8. $x = -\frac{\pi}{8} + k\pi , \quad x = -\frac{3}{8}\pi + k\pi .$

2.9. $x = k\frac{\pi}{4} .$

2.10. a) $x = k\pi , \quad x = \pm\frac{2}{3}\pi + k\pi ,$

b) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi , \quad x = (2k + 1)\pi ,$

c) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $x = k\pi$,

d) $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $x = 2k\pi$,

e) $x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$, $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$,

f) nemá řešení,

g) $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi$,

h) $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$,

i) $x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}$,

j) $x = -\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$,

k) pro všechna $x \neq k\frac{\pi}{2}$,

l) $x = k\pi$, $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$.

2.11. $x = y = \frac{2}{3}\pi$.

2.12. a) $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, $y = -\frac{\pi}{3} - k\pi$,

b) $x = \frac{\pi}{4} - k\pi$, $y = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

2.13. a) Nemá řešení.

b) $x = \frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2}, \quad y = \frac{\pi}{3} - k\frac{\pi}{2}.$

2.14. $x = \frac{13}{12}\pi + k\pi, \quad y = \frac{5}{12}\pi - k\pi.$

2.15. $x = \frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2}, \quad y = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}.$

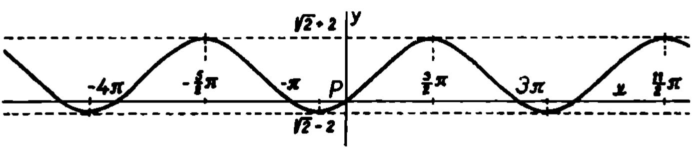
2.16. a) $x = k\pi, \quad y = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,$

b) $x = k\pi, \quad y = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi,$

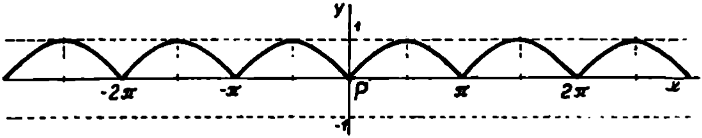
c) $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad y = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,$

d) $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad y = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi.$

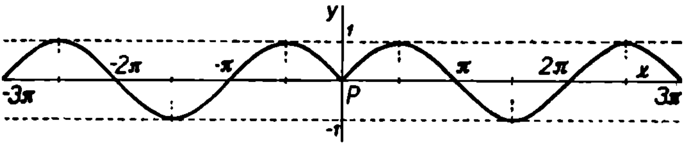
2.17. $x = y = \frac{\pi}{4} + k\pi.$



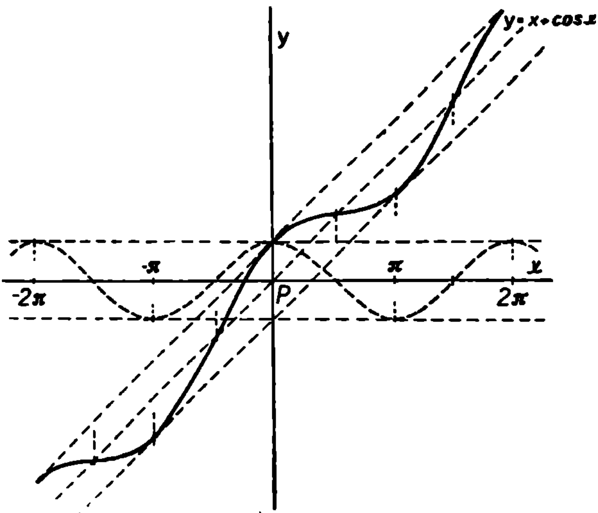
Obr. 32. Graf funkce $y = 2\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + 2.$



Obr. 33. Graf funkce $y = |\sin x|$.



Obr. 34. Graf funkce $y = \sin |x|$.



Obr. 35. Graf funkce $y = x + \cos x$.

2.19. $x = -\frac{2}{3}\pi + k\pi\,, \quad y = \frac{2}{3}\pi + k\pi\,.$

3.1. Obr. 32.

3.2. Obr. 33, 34.

3.3. Jestliže $x \geqq 0\,,\quad \cos|x| = \cos x\,;$

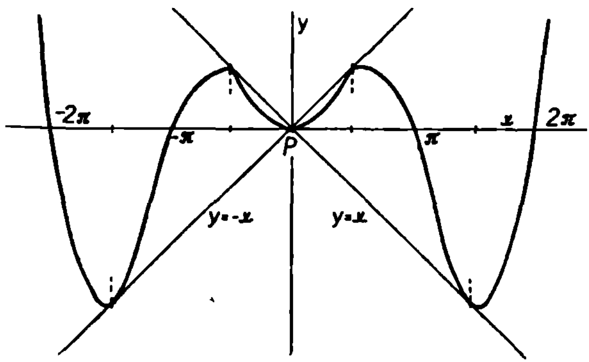
jestliže $x < 0\,,\quad \cos|x| = \cos(-x) = \cos x\,.$

3.4. Obr. 35.

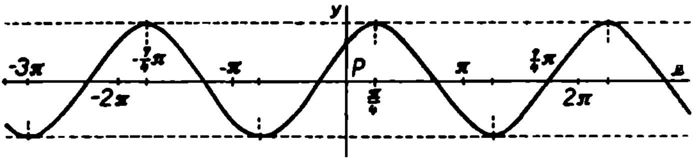
3.5. Obr. 36.

3.6. Obr. 37.

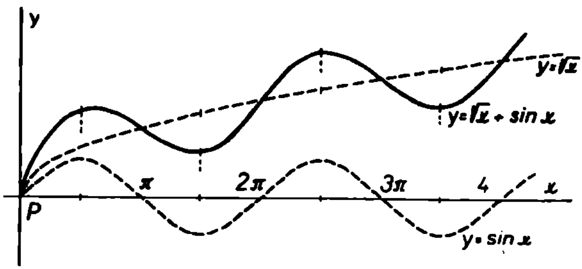
3.7. Obr. 38.



Obr. 36. Graf funkce $y = x \sin x$.



Obr. 37. Graf funkce $y = \sin x + \cos x$.



Obr. 38. Graf funkce $y = \sqrt{x} + \sin x$.

4.1. a) x je libovolné číslo z intervalů $\left\langle k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi \right\rangle$,

b) $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$,

c) x je libovolné číslo z intervalů

$(\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi, \dfrac{5}{3}\pi + 2k\pi)$ s výjimkou všech čísel tvaru

$x = \dfrac{3}{4}\pi + k\pi$,

d) x je libovolné číslo z intervalů

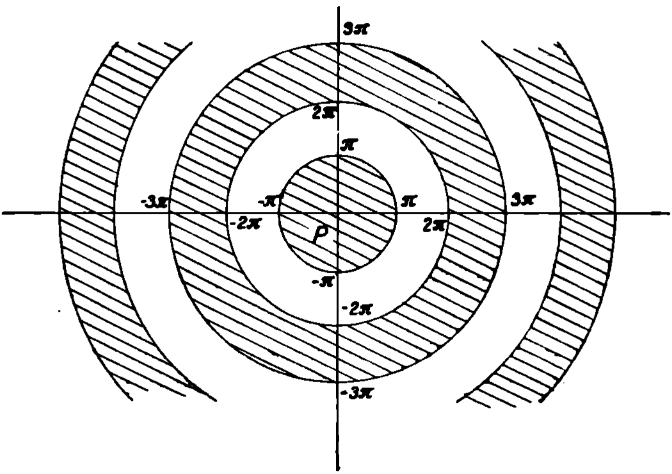
$\langle -\frac{5}{12}\pi + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\rangle$ s výjimkou všech čísel tvaru

$$x = \frac{3}{4}\pi + k\pi,$$

e) x je libovolné číslo z intervalů $\langle -\frac{\pi}{4} + k\pi,$

$\frac{\pi}{4} + k\pi\rangle$,

f) Nerovnost je splněna pro všechna $x \neq k\frac{\pi}{4}$.

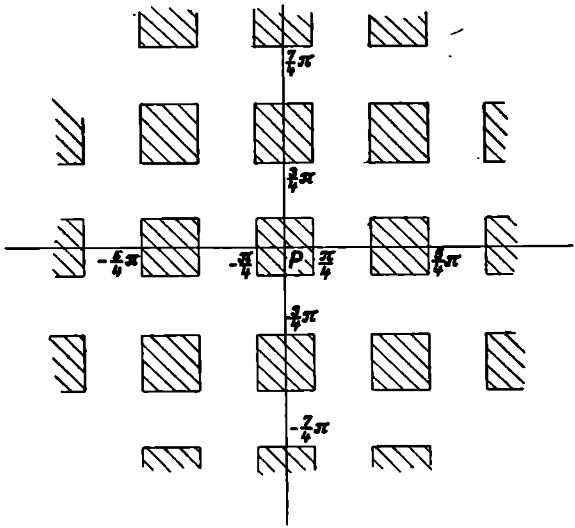


Obr. 39. Definiční obor funkce $z = \sqrt{\sin(x^2 + y^2)}$.

4.2. a) Funkce je definována pro všechny dvojice reálnýcb čísel x, y, které splňují nerovnost

$$2k \leq x^2 + y^2 \leq (2k + 1)\,\pi\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Graficky jde o soustavu mezikruží (obr. 39).



Obr. 40. Definiční obor funkce $z = \sqrt{1 - \mathrm{tg}^2\, x} + \sqrt{1 - \mathrm{tg}^2\, y}$.

b) Funkce je definována pro každou dvojici reálných čísel. Grafickým řešením je proto každý bod roviny.

c) Funkce je definována pro každou dvojici reálných čísel x, y, která vyhovují nerovnostem

$$-\frac{\pi}{4} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4} + k\pi\,,$$

$$-\frac{\pi}{4} + k\pi \leqq y \leqq \frac{\pi}{4} + k\pi .$$

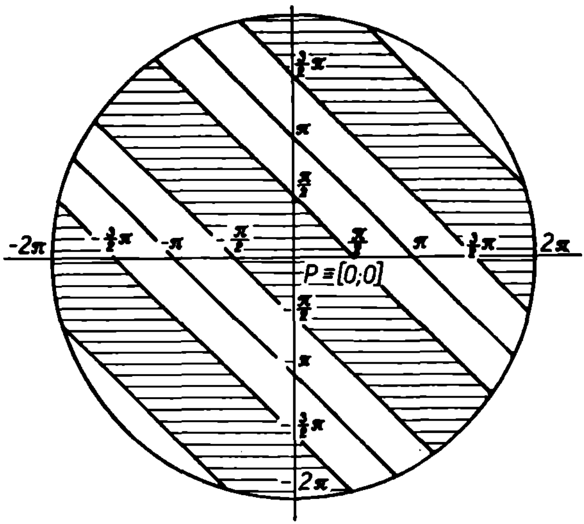
Grafické řešení ukazuje obr. 40.

4.3. Řešením je každá dvojice reálných čísel, která vyhovuje nerovnostem

$$-x + \frac{\pi}{2} + 2k\pi < y < -x + \frac{3}{2}\pi + 2k\pi, \text{ kde } k = -2, -1,$$

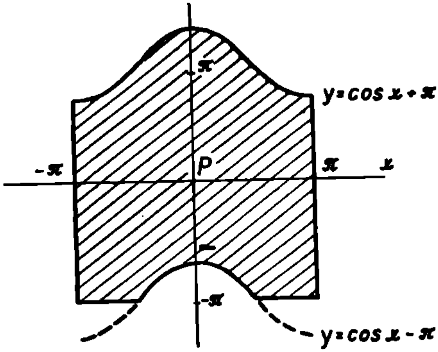
$$0, 1, \quad y \neq -x + \pi + 2k\pi .$$

Grafickým řešením jsou na obr. 41 bílé části uvnitř kruhu k $(P, 2\pi)$.



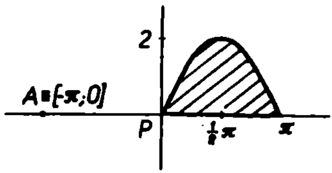
Obr. 41. Grafické řešení cvičení 4.3.

4.4. Obr. 42.



Obr. 42. Grafické řešení cvičení 4.4.

4.5. Obr. 43. K množině patří také bod $A \equiv [-\pi, 0]$.



Obr. 43. Výsledek cvičení 4.5.

4.6. a) Vyhovují všechna x z intervalů

$$\langle k\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\rangle \text{ pro } k = 0, 1, 2, 3.$$

b) Řešením jsou všechna x z intervalů

$$\langle\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\rangle, \quad \langle\frac{3}{2}\pi, \frac{7}{4}\pi\rangle.$$

LITERATURA

Hruša, Kraemer, Sedláček, Vyšín, Zelinka, Přehled elementární matematiky, SNTL, 4. vydání, Praha 1964.
J. Kůst, Sférická trigonometrie, SPN, Praha.
A. Urban, Trigonometrie, ČSAV, 3. vydání, Praha 1960.

OBSAH

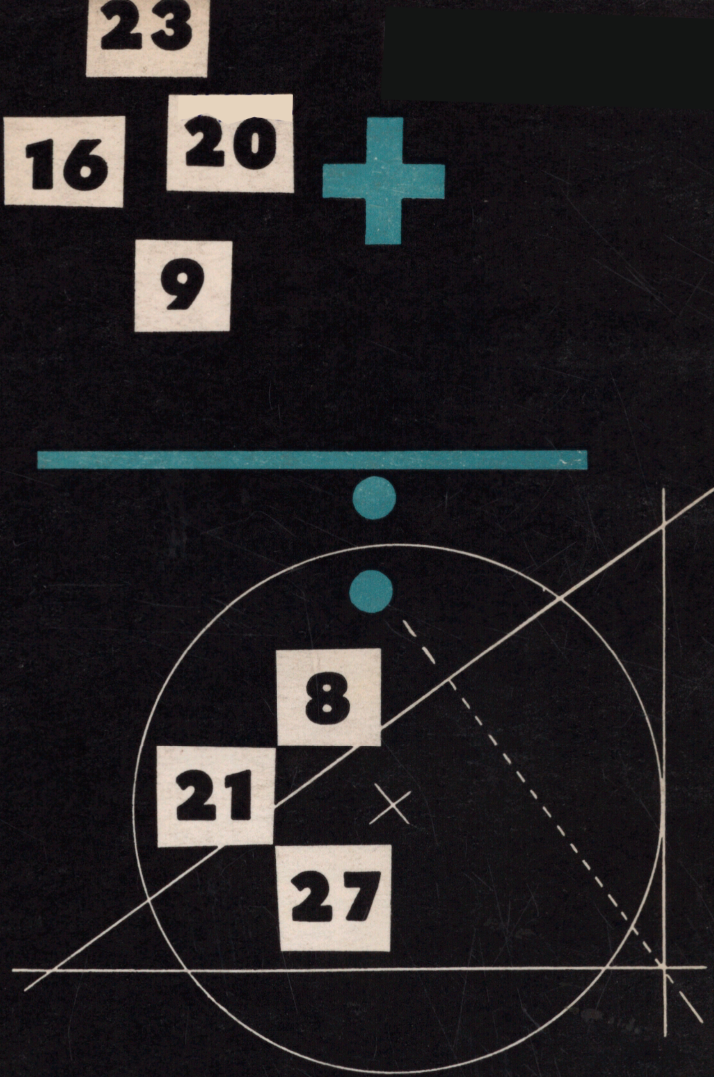
ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

STANISLAV ŠMAKAL
BRUNO BUDINSKÝ

goniometrické funkce

Pro účastníky matematické olympiády vydává
ÚV Matematické olympiády a ÚV ČSM
v nakladatelství Mladá fronta
Řídí akademik Josef Novák
Obálku navrhl Jaroslav Příbramský
Odpovědný redaktor Milan Daneš
Publikace číslo 2628
Edicę Škola mladých matematiků, svazek 20
Vytiskl Mír, novinářské závody, n. p., závod 1,
Praha 1, Václavské nám. 15.
5, 01 AA, 5, 20 VA. D - 12*80024
Náklad 6100 výtisků. 1. vydání
148 stran. 507/21/8.5 Praha 1968
23-034-68 03-2 Cena brož. výt. Kčs 4,50

[redacted]



23 - 034 - 68
03/2
Cena brož.
Kčs 4,50