O rovnicích s parametry

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

O ROVNICÍCH S PARAMETRY

8

Vydal Matematický ústav ČSAV a ÚV ČSM v nakladatelství Mladá fronta

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

JIŘÍ VÁŇA

O ROVNICÍCH *s parametry*

●

PRAHA 1964

VYDAL MATEMATICKÝ ÚSTAV ČSAV A ÚV ČSM
V NAKLADATELSTVÍ MLADÁ FRONTA

PŘEDMLUVA

Tato knížka je věnována tzv. rovnicím s parametry a jejich soustavám; jsou to úlohy, které znáte ze střední školy. V matematických olympiádách patří tyto úlohy k nejzajímavějším a nejcennějším, neboť řešitelé při nich mohou uplatnit svůj vtip, znalost školské algebry i preciznost myšlení. Je samozřejmé, že tato knížka nenaučí čtenáře řešit kteroukoli rovnici nebo soustavu rovnic s parametry; uvádí jen vybrané úlohy a snaží se předvést a osvětlit *metody*, kterých se užívá.

Jak jistě všichni víte, je rovnice s parametry taková úloha, kde mimo neznámé se vyskytují ještě další písmena — proměnné, která se nazývají *parametry*. Rovnice s parametry je vlastně *množina úloh:* jednotlivé úlohy dostaneme, dosazujeme-li za proměnné parametry určitá čísla. Obor proměnnosti parametrů *musí* být v úloze udán právě tak, jako musí být udán obor řešení rovnice; těchto zásad dbá naše knížka důsledně.

Rovnici s parametry nebo soustavu takových rovnic řešíme obdobným postupem jako rovnice bez parametrů (jejichž koeficienty jsou určitá čísla). Ze školy znáte tzv. metodu *ekvivalentních úprav;* je to takové přetvořování původní rovnice, kterým se nemění kořeny rovnice (zejména žádný nový kořen nepřibude). Takovým postupem se nedají řešit všecky rovnice; např. to není možné u rovnic s odmocninami. Značné potíže působí metoda ekvivalence právě u některých rovnic s parametry. Proto se naše knížka přidržuje spíše metody jiné.

„Řešíme“ rovnici (soustavu rovnic) bez ohledu na ekvivalentnost úprav. Provádíme úpravy tak, aby každá další rovnice měla zaručeně tytéž kořeny jako předchozí (ale možná i nějaké další). Tento postup, který je v podstatě totožný s obvyklým „počítáním“, jímž „řešíme“ rovnici, se má správně nazývat *rozbor* neboli *analýza.* Na konci rozboru dostaneme jistá čísla, vyjádřená třeba vzorci, která udávají *všecka možná řešení* dané rovnice, tj. mezi nimi jsou jistě všechna řešení dané rovnice, avšak některá ze získaných čísel nemusí danou rovnici splňovat. Nyní je třeba přezkoušet, která z těchto čísel jsou skutečně kořeny dané rovnice; to zjistíme *zkouškou.* Zkouška tedy nemá jen význam kontroly správnosti numerického výpočtu, ale je *podstatnou částí řešení.*

U rovnic s parametry a jejich soustav se při řešení objevuje ještě jedna část — zvaná *diskuse.* Řekli jsme, že rovnice s parametry je vlastně množina úloh; při diskusi jde o to *roztřídit* tuto množinu, tj. zjistit, pro které hodnoty parametru dostaneme úlohy neřešitelné, pro které dostaneme úlohy s jedním, dvěma,..., nekonečně mnoha řešeními. Výsledek diskuse je u každé úlohy v naší knížce upraven do přehledné tabulky.

Za zmínku ještě stojí, že řešení rovnice s parametry (nebo soustavy takových rovnic) je *zpravidla* dáno vzorcem (vzorci), kde neznámá je vyjádřena jako *funkce* parametrů; některá řešení však nelze vyjádřit v této formě, jak sami uvidíte v příkladech.

Možná, že někteří z vás nerozuměli všemu, co je v této předmluvě. Doporučuji vám, abyste si předmluvu přečetli znovu, až rozřešíte několik vzorových úloh, a abyste ji po případě přečetli ještě jednou po prostudování celé knížky; pak určitě všemu porozumíte.

Při výběru zařazených úloh byly mírou obtížnosti úlohy dosavadních ročníků MO; některých z nich jsem v textu přímo užil. Hodně jsem čerpal ze sovětské sbírky P. S. Moděnova „Sbornik zadač po specialnomu kursu elementarnoj matěmatiki“ a z časopiseckých článků. Vzorová řešení dalších úloh s parametry lze najít v brožurách o jednotlivých ročnících MO. Také v neřešených úlohách připojených k textu najdete další materiál ke cvičení.

Doporučuji vám, abyste všecky úlohy podrobně řešili a promýšleli, a přeji vám hodně úspěchů při čtení knížky.

Autor

1. kapitola

LINEÁRNÍ ROVNICE O JEDNÉ NEZNÁMÉ

●

V této kapitole se budeme zabývat úlohami, které budou vyjádřeny lineárními rovnicemi o jedné neznámé s jedním parametrem. Poznamenejme na začátku, že o parametrech v rovnici hovoříme tehdy, obsahuje-li rovnice kromě neznámé x ještě proměnnou, kterou budeme obvykle označovat písmenem a nebo b; té budeme říkat *parametr.*

Úloha 1. V oboru přirozených čísel x řešte rovnici

$$2ax = (a + 1)\,x + 18, \tag{1}$$

kde a je přirozené číslo.

Předpokládejme, že rovnice (1) má řešení. Potom pro každé x, které rovnici (1) splňuje, musí platit též rovnice

$$(a - 1)\,x = 18. \tag{2}$$

Nyní musíme rozbor štěpit ve dva případy. Je-li $a - 1 \neq 0$, je každé číslo x, které může být řešením rovnice (1), nutně dáno vzorcem

$$x = \frac{18}{a - 1}. \tag{2a}$$

Je-li $a - 1 = 0$, pak nemá rovnice (2), a tedy ani rovnice (1) zřejmě žádné řešení.

Protože každé řešení rovnice (1) musí být vyjádřeno vzorcem (2a) a protože hledáme pouze přirozená čísla x, musí být číslo $a - 1$ dělitelem čísla 18.

Výsledek můžeme shrnout do tabulky:

Parametr a	Příslušné řešení
$a = 2$	$x = 18$
$a = 3$	$x = 9$
$a = 4$	$x = 6$
$a = 7$	$x = 3$
$a = 10$	$x = 2$
$a = 19$	$x = 1$

Pro jiné hodnoty parametru a nemá úloha řešení.

Úloha 2. V oboru reálných čísel x řešte rovnici

$$a(x - 1) = x + a, \tag{3}$$

kde a je reálné číslo.

Každé reálné číslo x, které vyhovuje rovnici (3), vyhovuje též rovnici

$$x(a - 1) = 2a, \tag{4}$$

která vznikne z rovnice (3) snadnými úpravami, při nichž nezáleží na hodnotě parametru a. Podobně jako v úloze 1 provádíme rozbor souhrnně, tj. řešíme vlastně najednou nekonečně mnoho úloh. Pomocí rovnice (4) nalezneme řešení rovnice (3). Rozbor ovšem musíme štěpit ve dva případy:

Je-li $a - 1 \neq 0$, je reálné řešení rovnice (3) dáno vzorcem

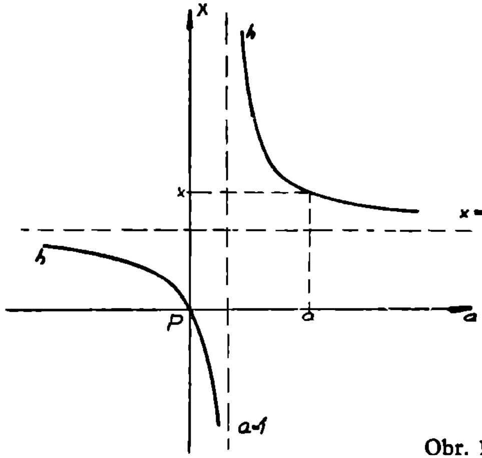
$$x = \frac{2a}{a - 1}. \tag{4a}$$

Je-li $a - 1 = 0$, tj. $a = 1$, má rovnice (3) tvar $x - 1 = x + 1$ a nevyhovuje jí žádné reálné číslo x. Zkoušku provedeme dosazením x z formule (4a) do rovnice (3). Na základě rozboru a zkoušky provedeme diskusi a výsledek shrneme do přehledné tabulky:

Parametr a	Počet řešení
$a = 1$	žádné
$a \neq 1$	jedno, viz (4a)

Všimněme si, že pro $a \neq 1$ je řešení rovnice (3) dáno formulí (4a). Řešení x rovnice (3) je funkcí parametru a. Sestrojíme graf této funkce pomocí jednotlivých funkčních hodnot (obr. 1). Upravíme-li rovnici (3) na tvar $(x - 2)(a - 1) = 2$, zjistíme, že je v pravoúhlých souřadnicích a, x početním vyjádřením rovnoosé hyperboly h; asymptotami jsou přímky o početním vyjádření $x = 2$, $a = 1$.

Každému reálnému číslu $a \neq 1$ odpovídá jediný bod $[a, x]$ hyperboly h; z předchozí diskuse víme, že rovnice (3) má skutečně pro každé $a \neq 1$ jediné řešení x. Asymptota o rovnici $a = 1$ neprotne hyperbolu h v žádném bodě; rovnice (3) — jak víme z předchozího výkladu — nemá pro $a = 1$ žádné řešení.



Obr. 1.

Každá přímka rovnoběžná s osou a, vyjma přímku o rovnici $x = 2$, protne hyperbolu h v jediném bodě; to znamená, že každé reálné číslo $x \neq 2$ je kořenem rovnice (3) při vhodně zvoleném parametru a. Číslo $x = 2$ není kořenem rovnice (3) pro žádné a; přesvědčte se.

Jednu nebo více neznámých funkcí nalezneme při řešení mnoha dalších rovnic s parametrem; nezávisle proměnnou bude parametr rovnice. Je samozřejmé, že jednotlivé funkce budou podstatně záviset na tom, jakých číselných hodnot může nabývat parametr a a do jakého číselného oboru má náležet řešení rovnice. Předpokládáme-li např., že v rovnici (3) je parametr a přirozené číslo, a chceme-li, aby též řešení této rovnice náleželo do oboru přirozených čísel, zjistíme, že daná rovnice má řešení pouze pro dvě hodnoty parametru a. Hodnotě $a = 2$ odpovídá $x = 4$, hodnotě $a = 3$ odpovídá $x = 3$. Dokažte užitím vztahu (4a), že jiné dvojice čísel a, x nesplňují požadované podmínky.

Úloha 3. V oboru reálných čísel x řešte rovnici

$$\frac{x - a}{1 - a} = \frac{x + a}{1 + a}, \tag{5}$$

kde a je reálné číslo.

Z rovnice (5) vyplývá, že parametr a nesmí nabýt hodnot $a = 1$ a $a = -1$, pro něž by úloha neměla význam. Použijeme-li jiného vyjádření, řekneme, že oborem proměnnosti parametru a jsou všechna reálná čísla s výjimkou čísel 1 a -1.

Pro každé reálné číslo x, které vyhovuje rovnici (5), musí platit rovnice

$$(x - a)(1 + a) = (x + a)(1 - a)$$

a po její úpravě rovnice

$$ax = a. \tag{6}$$

Nyní musíme rozbor štěpit. Je-li $a \neq 0$, dostáváme jediné řešení $x = 1$, a to pro jakoukoliv hodnotu parametru a s výjimkou hodnot již vyloučených. Je-li $a = 0$, má rovnice (5) tvar $x = x$ a vyhovuje jí libovolné reálné číslo x.

Provedeme zkoušku dosazením $x = 1$ do rovnice (5) a výsledek shrneme v tabulce:

Parametr a	Počet řešení
$a \neq -1, a \neq 0, a \neq 1$	jedno, $x = 1$
$a = 0$	nekonečně mnoho

Při rozboru jsme byli nuceni zabývat se vymezením oboru proměnnosti parametru a. V úlohách bývá často toto vymezení provedeno již v zadání. Naše úloha by zněla takto:

V oboru reálných čísel x řešte rovnici (5), kde a je reálné číslo, $a \neq 1, a \neq -1$.

Výsledná tabulka by se ovšem změnila:

Parametr a	Počet řešení
$a \neq 0$	jedno, $x = 1$
$a = 0$	nekonečně mnoho

Řešení rovnice (5) můžeme vyložit geometricky dvojím způsobem. První způsob známe již z úlohy 2: Považujme a, x za pravoúhlé souřadnice v rovině a rovnici (6) upravíme na tvar $a(x - 1) = 0$. Grafem této rovnice je dvojice různoběžek, skládající se z osy x a z přímky $x = 1$, rovnoběžné s osou a. Načrtněte graf rovnice (6) a proveďte znovu diskusi jako v úloze 2.

Druhý způsob geometrického výkladu diskuse se opírá o obvyklou metodu grafického řešení rovnice o jedné neznámé. V rovnici (5) položíme

$$y_1 = \frac{x - a}{1 - a}, \qquad y_2 = \frac{x + a}{1 + a}. \tag{7}$$

Při pevně zvoleném čísle a vyjadřují rovnice (7) dvě lineární funkce nezávisle proměnné x; grafem každé z funkcí (7) je přímka. Řešení x rovnice (5) je pak souřadnice x společného bodu (průsečíku) obou těchto přímek.

Při pevně zvoleném parametru a vyjadřuje každá z rovnic (7) přímku; mění-li se a, vyjadřuje každá z rovnic (7) množinu přímek. Zkoumejme např. množinu přímek vyjádřenou první rovnicí (7), tj. rovnicí

$$y_1 = \frac{x - a}{1 - a}. \tag{7a}$$

Každá přímka množiny obsahuje zřejmě bod $S \equiv$ $\equiv [1,1]$ (proč?); do množiny patří všecky přímky procházející bodem S s výjimkou přímky $x = 1$ (obr. 2). Množina přímek vyjádřených rovnicí (7a) při měnícím se parametru a je tedy svazek přímek se středem S s vyloučením přímky $x = 1$.

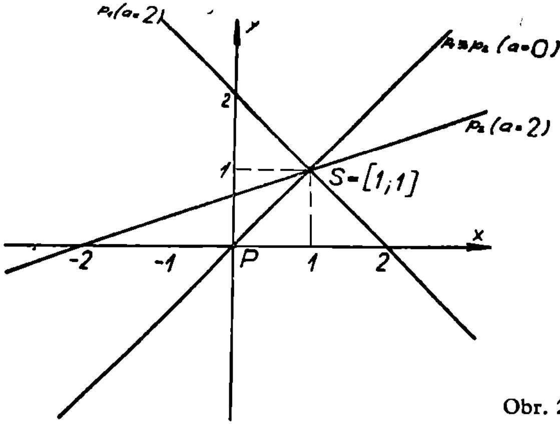
Obdobně zjistíme, že množina přímek vyjádřených rovnicí

$$y_2 = \frac{x + a}{1 + a} \tag{7b}$$

je týž svazek se středem S opět s vyloučením přímky $x = 1$.

Zvolíme-li určité číslo $a \neq 1, -1$, vyjadřují rovnice (7a), (7b) dvě přímky p_1, p_2 svazku. Přímky p_1, p_2 jsou navzájem různé, je-li $a \neq 0$ (proč?); proto mají společný jediný bod S. Přímky p_1, p_2 splynou, je-li $a = 0$. Vyložte pomocí toho geometricky diskusi rovnice (5).

Vraťte se nyní k rovnici (3) z úlohy 2 a užijte téhož způsobu pro geometrické provedení diskuse; přitom budete vyšetřovat dvě množiny přímek dané rovnicemi $y_1 = a(x - 1), y_2 = x + a$.



Obr. 2.

Úloha 4. Pro která reálná čísla a má rovnice

$$\frac{x}{x - a} = a + 1 \tag{8}$$

aspoň jedno záporné řešení x?

Při řešení úlohy 4 jde o řešení soustavy

$$\frac{x}{x - a} = a + 1, \quad x < 0. \tag{9}$$

Každé x, které splňuje soustavu (9), splňuje i soustavu

$$x = (a + 1)(x - a),\ x < 0,$$

neboli

$$ax = a(a + 1),\ x < 0. \qquad (10)$$

Je-li $a = 0$, splňují soustavu (10) všechna reálná $x < 0$; zkouška ukáže, že splňují také rovnici (8).

Je-li $a \neq 0$, musí platit

$$x = a + 1,\ x < 0,$$

což znamená, že musí být $a + 1 < 0$, tj. $a < -1$. Zkouškou se přesvědčíme, že řešení $x = a + 1$ rovnici (8) opravdu vyhovuje.

Shrneme-li dosavadní výsledky, dostaneme, že požadavky úlohy splňují čísla $a < -1$ a $a = 0$.

Úloha 5. V oboru reálných čísel x řešte rovnici

$$|x| + |a| = 1, \qquad (11)$$

kde a je reálné číslo.

Při řešení rovnice (11) je třeba rozbor rozdělit do dvou částí (viz definici absolutní hodnoty reálného čísla).

1. Je-li $a \geqq 0$, musí pro každé x splňující rovnici (11) platit též rovnice

$$|x| = 1 - a. \qquad (12)$$

Protože absolutní hodnota reálného čísla je vždy číslo nezáporné, má rovnice (12) řešení jen tehdy, je-li $1 - a \geqq 0$, tj. $a \leqq 1$. Potom platí buď $x = 1 - a$, nebo $x = -(1 - a) = a - 1$ pro každé a, pro něž je $0 \leqq a \leqq 1$.

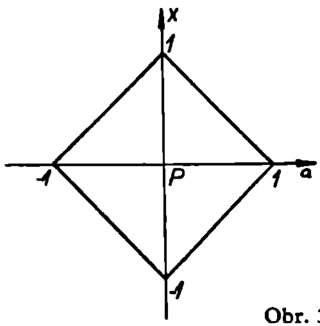
2. Je-li $a < 0$, musí pro každé x splňující rovnici (11) platit rovnice

$$|x| = 1 + a. \qquad (13)$$

Opět snadno usoudíme, že rovnice (13) má řešení jen tehdy, je-li $1 + a \geqq 0$, tj. $a \geqq -1$. Potom platí buď $x = 1 + a$, nebo $x = -(1 + a)$ pro každé a, pro něž je $-1 \leqq a < 0$. Snadno zjistíme, jaký útvar je grafem rovnice (11); je to obvod čtverce (viz obr. 3).

Diskusi úlohy shrneme do přehledné tabulky:

Parametr a	Počet řešení
$a < -1, a > 1$	žádné
$a = -1, a = 1$	jedno, $x = 0$
$-1 < a < 1$	dvě, viz rozbor



Obr. 3.

Úloha 6. V oboru reálných čísel x řešte rovnici

$$|x - 2| - |x + 2| = |a + 2| - |a - 2|, \qquad (14)$$

kde a je reálné číslo.

Protože v rovnici (14) se vyskytují absolutní hodnoty $|a + 2|$, $|a - 2|$, rozdělíme obor proměnnosti parametru a na tři části, z nichž každou se budeme zabývat zvlášť. Budeme vyšetřovat intervaly:

1) $a \geq 2$,
2) $-2 \leq a < 2$,
3) $a < -2$.

1. Pro každé x, které splňuje rovnici (14), musí platit

$$|x - 2| - |x + 2| = a + 2 - a + 2,$$

a tedy rovnice

$$|x - 2| - |x + 2| = 4. \tag{15}$$

Každé x, které splňuje rovnici (15), musí splňovat aspoň jednu ze soustav

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & x - 2 - (x + 2) = 4, & x \geq 2, \\ \text{(b)} & -(x - 2) - (x + 2) = 4, & -2 \leq x < 2, \\ \text{(c)} & -(x - 2) + (x + 2) = 4, & x < -2. \end{array}$$

Snadným výpočtem zjistíme, že soustava (a) není splněna pro žádné x, soustava (b) je splněna pro $x = -2$, soustava (c) je splněna pro každé $x < -2$.

2. Pro každé x, které splňuje rovnici (14), musí být splněna obdobně rovnice

$$|x - 2| - |x + 2| = 2a. \tag{16}$$

Každé x, které splňuje rovnici (16), musí splňovat aspoň jednu ze soustav

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & x - 2 - (x + 2) = 2a, & x \geq 2, \\ \text{(b)} & -(x - 2) - (x + 2) = 2a, & -2 \leq x < 2, \\ \text{(c)} & -(x - 2) + (x + 2) = 2a, & x < -2. \end{array}$$

Řešíme-li každou z uvedených soustav zvlášť, zjistíme, že soustava (a) má pro $a = -2$ nekonečně mnoho řešení

$x \geqq 2$ a pro $a > -2$ žádné řešení, soustava (b) má jedno řešení $x = -a$, soustava (c) nemá žádné řešení.

3. Každé x splňující rovnici (14) musí splňovat též rovnici

$$|x - 2| - |x + 2| = -(a + 2) + a - 2$$

a tedy rovnici

$$|x - 2| - |x + 2| = -4. \qquad (17)$$

Opět pro každé x, které splňuje rovnici (17), musí být splněna aspoň jedna ze soustav

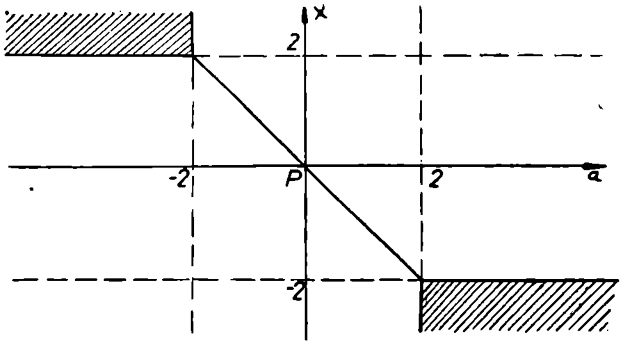
$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & x - 2 - (x + 2) = -4, \quad x \geqq 2, \\ \text{(b)} & -(x - 2) - (x + 2) = -4, \quad -2 \leqq x < 2, \\ \text{(c)} & -(x - 2) + (x + 2) = -4, \quad x < -2. \end{array}$$

Zjistíme, že soustava (a) je splněna pro každé $x \geqq 2$, soustava (b) a soustava (c) nemá žádné řešení.

Zkoušku provádíme po dosažení každého částečného výsledku.

V této úloze má grafické řešení ještě větší význam než v úlohách předcházejících, protože algebraické řešení je dosti nepřehledné. Užijeme pravoúhlého systému souřadnic s osami a, x. V obr. 4 jsou části roviny, jejichž souřadnice a, x vyhovují rovnici (14) vytaženy silněji nebo vyšrafovány. Prověřte podrobně, že je grafické zobrazení provedeno správně. Výsledek diskuse zkontrolované geometrickým znázorněním shrneme do tabulky:

Parametr a	Počet řešení
$-2 < a < 2$	jedno
$a \leqq -2, 2 \leqq a$	nekonečně mnoho



Obr. 4.

Několik neřešených úloh

1. Řešte v oboru celých čísel x rovnici

$$x\,(a + 4) + a\,(x + 2) = 2,$$

kde a je celé číslo.

2. Řešte v oboru reálných čísel x rovnici

$$\frac{ax - 6}{ax + 6a} = \frac{1}{a},$$

kde a je reálné číslo.

3. Řešte v oboru přirozených čísel x rovnici

$$\frac{a}{3 + x} = \frac{5}{x},$$

kde a je přirozené číslo.

4. Pro která reálná čísla a má rovnice

$$\frac{8x - 1}{x - 2} - 2 = a$$

aspoň jeden kladný kořen?

5. Pro která reálná čísla a má rovnice

$$\frac{a(x - 1)}{x + 1} = 5$$

aspoň jeden záporný kořen?

6. Řešte v oboru reálných čísel x rovnici

a) $|x| - |a| = 2$,

b) $|x| + |a| + \frac{1}{\sqrt{2}}(|x - a| + |x + a|) = \sqrt{2} + 1$,

c) $||x| - |a|| = 1$,

d) $||x| + ||a| - 3| - 3| = 1$,

e) $\frac{\sqrt{3}}{2}(|x| - x) = a$,

kde a je reálné číslo. Znázorněte geometricky!

7. Řešte v oboru reálných čísel x rovnici

$$|x| - |x - 8| = |a + 4| + |4 - a|,$$

kde a je reálné číslo. Geometricky znázorněte!

Vytvářejte si sami podobné úlohy a řešte je!

2. kapitola

SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC

Zabývejme se nyní soustavami lineárních rovnic s parametrem. Při jejich řešení uplatníme znalosti získané řešením lineárních rovnic o jedné neznámé. Diskusí budeme i zde rozumět zjištění, za jakých podmínek je soustava řešitelná a kolik má řešení.

Úloha 1. Řešte v oboru reálných čísel soustavu rovnic

$$\begin{aligned} ax + y &= 1, \\ x + ay &= 1 \end{aligned} \tag{1}$$

o neznámých x, y, přičemž a je reálné číslo.

Předpokládejme, že soustava (1) má řešení. Potom musí platit

$$y = 1 - ax. \tag{2}$$

Dosadíme-li y ze vztahu (2) do druhé rovnice soustavy (1), obdržíme pro x rovnici

$$x + a - a^2x = 1$$

a tedy rovnici

$$(1 - a^2)\, x = 1 - a. \tag{3}$$

Nyní musíme rozbor štěpit.

1. Je-li $1 - a^2 \neq 0$, plyne z rovnice (3) po úpravě

$$x = \frac{1}{1 + a} \tag{4a}$$

a z rovnice (2) po úpravě

$$y = \frac{1}{1 + a}. \tag{4b}$$

2. Je-li $1 - a^2 = 0$, musíme rozbor dále štěpit, a to na dva případy: $a = 1$, $a = -1$.

a) Je-li $a = 1$, má soustava (1) tvar

$$\begin{aligned} x + y &= 1, \\ x + y &= 1 \end{aligned}$$

a je splněna pro každé reálné číslo x a $y = 1 - x$.

b) Je-li $a = -1$, má soustava (1) tvar

$$\begin{aligned} -x + y &= 1, \\ x - y &= 1. \end{aligned}$$

Tato soustava je neřešitelná, tj. soustava (1) je pro $a = -1$ neřešitelná.

Zkouška. Dosadíme-li x, y ze vztahů (4a) a (4b) do rovnic soustavy (1), jsou rovnice splněny.

Z rozboru a zkoušky vyplývá výsledek diskuse, který shrneme do přehledné tabulky:

Parametr a	Počet řešení
$a = -1$	žádné
$a \neq -1$, $a \neq 1$	jedno, viz (4a), (4b)
$a = 1$	nekonečně mnoho, x libovolné, $y = 1 - x$

Poznámky. Vyšetřování zvláštních případů (zde např. $a = 1$ nebo $a = -1$) provádíme nejčastěji tak, že parametr dosadíme do rovnic soustavy a vzniklou soustavu řešíme. Všimněte si ještě, že do vzorců (4a), (4b) můžeme dosadit $a = 1$ a dostaneme řešení $x = y = \frac{1}{2}$; totéž řešení dostaneme, zvolíme-li $x = \frac{1}{2}$ a vypočteme $y = 1 - x$. V případě $a = 1$ nám dávají tedy vzorce (4a), (4b) jen jedno z nekonečně mnoha řešení, a to proto, že byly odvozeny za jiného předpokladu ($a^2 \neq \neq 1$).

Při grafickém řešení uvážíme, že každá z obou rovnic vyjadřuje jistou množinu přímek. Tyto množiny budeme zkoumat obdobně jako v úloze 3 kapitoly 1. Zjistíme, že rovnice $ax + y = 1$ vyjadřuje svazek přímek se středem $S_1 \equiv [0,1]$; z něho je vyloučena přímka $x = 0$, tj. osa y. Rovnice $x + ay = 1$ vyjadřuje svazek přímek, jehož střed je bod $S_2 \equiv [1,0]$; ze svazku je vyloučena přímka $y = 0$, tj. osa x.

Zvolíme-li určité číslo a, dostaneme v každém svazku jednu přímku — tyto přímky jsou si přiřaděny; souřadnice x, y jejich společného bodu (průsečíku) jsou řešením soustavy (1) pro zvolenou hodnotu a. Je otázka, jaký útvar **U** vyplní společné body (průsečíky) přímek, které jsou si přiřaděny. Analytické vyjádření tohoto útvaru dostaneme, když vyloučíme (eliminujeme) parametr a z obou rovnic (1). Z první rovnice (1) dostaneme po znásobení číslem y

$$axy = (1 - y)y;$$

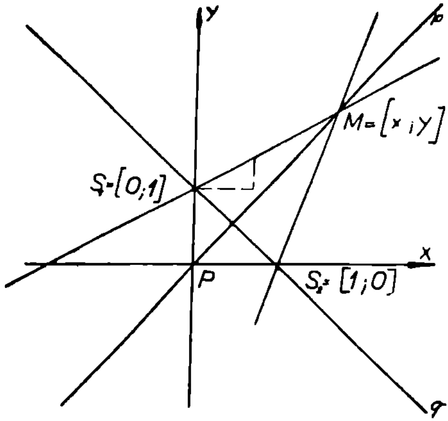
obdobně dostaneme z druhé rovnice (1)

$$axy = (1 - x)x.$$

Po porovnání a úpravě vyjde

$$(x - y)(x + y - 1) = 0. \tag{5}$$

Rovnice (5) vyjadřuje dvě různoběžky (viz obr. 5): je to přímka p o rovnici $y = x$ a přímka q o rovnici $x + y = 1$. Přímka q je spojnicí obou středů S_1, S_2.



Obr. 5.

Z předcházejícího výpočtu vyplývá, že každý společný bod sobě přiřaděných přímek obou svazků náleží útvaru **U** o rovnici (5). Obráceně, kterýkoli bod $[x, y]$ útvaru **U** různý od počátku P, je společným bodem některé dvojice přiřaděných přímek obou svazků; toto tvrzení lze dokázat obrácením předchozího postupu.

Útvar **U** je tedy dvojice různoběžek p, q s vyloučením počátku P souřadnic.

Chceme-li nyní graficky řešit soustavu (1), postupujeme takto: Pro $a = 1$ splynou obě navzájem přiřaděné přímky obou svazků s přímkou $q \equiv S_1S_2$; její body dávají v tomto případě všecka řešení soustavy (1).

Je-li $a = -1$, jsou navzájem přiřaděné přímky obou svazků rovnoběžné a bez společného bodu: soustava (1) je neřešitelná.

Je-li $a \neq 1, -1$, protnou se přiřaděné přímky obou svazků na přímce p; jejich průsečík je sestrojen na obr. 5 pro $a = -\frac{1}{2}$, kdy přímka prvního svazku má směrnici $\frac{1}{2}$. Souřadnice průsečíku M udávají řešení soustavy (1).

Úloha 2. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} ax - y + 2 &= 0, \\ x + y - b &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

o neznámých x, y, přičemž a, b jsou reálná čísla.

Předpokládejme, že soustava (6) má řešení. Potom pro každé x, které danou soustavu splňuje, musí platit rovnice, kterou dostaneme sečtením obou rovnic (6):

$$ax + x + 2 - b = 0,$$

neboli

$$x\,(a + 1) = b - 2. \tag{7}$$

Je třeba vyšetřit tyto případy:

1. Je-li $a + 1 \neq 0$, tj. $a \neq -1$, je

$$x = \frac{b-2}{a+1}, \tag{8}$$

a dále snadno vypočteme

$$y = \frac{ab+2}{a+1}. \tag{9}$$

2. Je-li $a = -1$, má rovnice (7) tvar $0 . x = b - 2$.

Při $b = 2$ je tato rovnice splněna pro libovolné reálné číslo x. Soustava (6) má pak tvar

$$\begin{aligned} -x - y + 2 &= 0, \\ x + y - 2 &= 0 \end{aligned}$$

a zřejmě jí vyhovuje libovolné číslo x a $y = 2 - x$. Je-li $b \neq 2$, nemá rovnice (7) řešení, a tedy ani soustava (6) nemá řešení. Zkoušku vykonáme dosazením vypočtených hodnot do rovnic soustavy (6). Diskusi shrneme do tabulky:

Parametry a, b	Počet řešení
$a = -1, b \neq 2$	žádné
$a \neq -1$, b libovolné	jedno, viz (8), (9)
$a = -1, b = 2$	nekonečně mnoho, x libovolné, $y = 2 - x$

Všimněme si rovnic soustavy (6). Prvá rovnice je analytickým vyjádřením svazku přímek procházejících bodem [0,2] s vyloučením osy y. Druhá rovnice je analytickým vyjádřením množiny přímek rovnoběžných s osou 2. a 4. kvadrantu ($y = -x$), tzv. osnovy přímek. Při řešení soustavy (6) hledáme souřadnice průsečíku jedné přímky svazku a jedné přímky osnovy. Zakreslete v pravoúhlém systému souřadnic x, y.

Volba parametru b v druhé rovnici soustavy (6) nezávisí na volbě parametru a v prvé rovnici. Je ovšem možné stanovit pro ně další podmínky, např. $b = 2a - 1$. Geometricky to znamená přiřadění mezi přímkami svazku a osnovy. Sestrojte pomocí jednotlivých bodů křivku, na níž leží průsečíky přímek odpovídajících téže hodnotě parametru, předpokládáte-li $a \gtrless -1$. Volte jiný vztah mezi a, b. Prozkoumejte podobně úlohu 1a z neřešených úloh v této kapitole.

Úloha 3. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} (a^2+1)\,x - a\,(a+1)\,y &= -(a^2+1), \\ (a^2+1)\,x - (a+1)\,y &= a^2+1 \end{aligned} \tag{10}$$

o neznámých x, y, kde a je reálné číslo.

Pro každé x, y splňující soustavu (10), musí platit soustava rovnic

$$\begin{aligned} 2(a^2+1)x - (a+1)^2 y &= 0, \\ (a^2-1)y &= 2\,(a^2+1), \end{aligned} \tag{11}$$

které vznikly sečtením a odečtením rovnic soustavy (10).

Všimněme si druhé rovnice soustavy (11).

Je-li $a^2 - 1 \neq 0$, tj. $a \neq 1$, $a \neq -1$, je

$$y = \frac{2(a^2+1)}{a^2-1}. \tag{12}$$

Dosazením do první rovnice soustavy (11) zjistíme, že je pak

$$x = \frac{a+1}{a-1}. \tag{13}$$

Je-li $a = 1$, má soustava (10) tvar

$$\begin{aligned} 2x - 2y &= -2, \\ 2x - 2y &= 2 \end{aligned}$$

a zřejmě nemá řešení.

Je-li $a = -1$, má soustava (10) tvar

$$2x = -2,\ 2x = 2$$

a nesplňuje ji žádná dvojice reálných čísel x, y.

Provedeme zkoušku a výsledek diskuse zapíšeme do tabulky:

Parametr a	Počet řešení
$a = 1, a = -1$	žádné
$a^2 \neq 1$	jedno, viz (12), (13)

Pokusíte-li se řešit soustavu (10) graficky, setkáte se s čímsi novým. Probíhá-li parametr a všecka reálná čísla, vyjadřuje např. první rovnice (10) jakousi množinu **M** přímek. Snadno nahlédneme, že všecky přímky této množiny obsahují bod $S_1 \equiv [-1; 0]$; mohlo by se tedy zdát, že tato množina **M** je svazek přímek se středem S_1. Ale není tomu tak. Upravíme-li rovnici libovolné přímky množiny **M** do tvaru

$$a^2(x - y + 1) - ay + x + 1 = 0, \qquad (14)$$

můžeme snadno zjistit podmínku pro to, aby bodem $[x, y]$ procházela přímka množiny **M**. Jsou-li čísla x, y pevně zvolena tak, že je $x - y + 1 \neq 0$, pak rovnice (14) je kvadratická rovnice pro neznámou a. Tato rovnice má aspoň jedno reálné řešení právě tehdy, je-li její diskriminant D nezáporný. Diskriminant

$$D = y^2 - 4\,(x + 1)(x - y + 1)$$

lze uvést na tvar

$$D = y^2 + 4y(x + 1) - 4(x + 1)^2$$

a dále rozložit:

$$D = [y + 2(1 + \sqrt{2})(x + 1)]\,[y + 2(1 - \sqrt{2})(x + 1)].$$

Podmínka $D \geqq 0$ je splněna právě tehdy, platí-li buď zároveň nerovnosti

$$\begin{aligned} y + 2(1 + \sqrt{2})(x + 1) &\geqq 0, \\ y + 2(1 - \sqrt{2})(x + 1) &\geqq 0, \end{aligned} \tag{14a}$$

nebo když platí současně nerovnosti

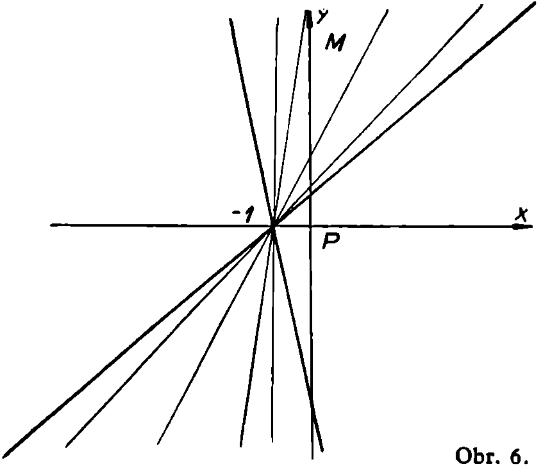
$$\begin{aligned} y + 2(1 + \sqrt{2})(x + 1) &\leqq 0, \\ y + 2(1 - \sqrt{2})(x + 1) &\leqq 0. \end{aligned} \tag{14b}$$

Nerovnosti (14a) jsou splněny právě pro všecky body $[x, y]$ určitého úhlu sevřeného přímkami

$$\begin{aligned} y + 2(1 + \sqrt{2})(x + 1) &= 0, \\ y + 2(1 - \sqrt{2})(x + 1) &= 0, \end{aligned} \tag{14c}$$

nerovnosti (14b) jsou splněny právě pro všecky body úhlu k němu vrcholového. Podmínka $D \geqq 0$ vyjadřuje tedy analyticky dvojici vrcholových úhlů, jejichž společný vrchol je průsečík přímek (14c), tj. bod $[-1,0]$. To znamená, že první rovnice (10) nevyjadřuje svazek přímek, ale jen jeho část — množinu přímek, vyplňujících dva vrcholové úhly (obr. 6). Obdobně tomu je s druhou rovnicí (10).

Z těchto úvah je patrné, že geometrické řešení soustavy (10) je složitější než v předchozích úlohách; to proto, že parametr a se vyskytuje v rovnicích ve vyšších mocninách než první. Pokuste se provést grafické řešení podrobně.



Obr. 6.

Úloha 4. Řešte v oboru reálných čísel soustavu rovnic

$$\begin{aligned} ax + y - z &= 1, \\ x + ay - z &= 1, \\ -x + y + az &= 1, \end{aligned} \tag{15}$$

o neznámých x, y, z, přičemž a je reálné číslo.

Zabývejme se nejprve soustavou rovnic

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 1, \\ x + 2y - z &= 1, \\ -x + y + 2z &= 1, \end{aligned} \tag{16}$$

která vznikne ze soustavy (15) volbou $a = 2$.

Předpokládejme, že soustava (16) má řešení. Potom čísla x, y, z, která jsou řešením soustavy (16), musí splňovat rovnici

$$x - y = 0,$$

která vznikne odečtením druhé rovnice soustavy od první, tj. rovnici

$$x = y. \tag{17}$$

Užijeme-li vztahu (17) a dosadíme-li do třetí rovnice soustavy (16), zjistíme, že musí platit

$$2z = 1,$$

tj.

$$z = \frac{1}{2}. \tag{18}$$

Užijeme-li vztahů (17) a (18) a dosadíme-li např. do prvé rovnice soustavy (16), vypočteme $x = \frac{1}{2}$. Podobně vypočteme $y = \frac{1}{2}$.

Zkoušku provedeme dosazením vypočtených hodnot $x = y = z = \frac{1}{2}$ do rovnic soustavy (16).

Nyní budeme řešit týmž postupem soustavu (15). Pro čísla x, y, z, která jsou jejím řešením, musí platit rovnice, která vznikne odečtením druhé rovnice soustavy od první; po úpravě zní:

$$(a - 1)\,x + (1 - a)\,y = 0. \tag{19}$$

Nyní musíme rozbor štěpit.

1. Je-li $a - 1 \neq 0$, plyne z rovnice (19) vztah $x = y$. Dosadíme-li do třetí rovnice soustavy (15), zjistíme, že pro z musí platit

$$az = 1. \tag{20}$$

Nyní musíme rozbor štěpit znovu. Je-li $a \neq 0$, plyne z (20), že je

$$z = \frac{1}{a}. \tag{21}$$

Užijeme-li vztahu (21) a vztahu $x = y$ k dosazení do první rovnice soustavy (15), dostaneme po úpravě

$$(a + 1)x = \frac{a + 1}{a}. \qquad (22)$$

Je-li nyní $a + 1 \neq 0$, plyne z (22), že je $x = \frac{1}{a}$. Obdobně vypočteme, že pro $a \neq -1$, $a \neq 0$, $a \neq 1$ platí $y = \frac{1}{a}$.

2. Všimněme si nyní vyloučených případů.

a) Je-li $a = -1$, má soustava (15) tvar

$$\begin{aligned} -x + y - z &= 1, \\ x - y - z &= 1, \\ -x + y - z &= 1 \end{aligned}$$

a řešení je $x = y$, y libovolné reálné číslo, $z = -1$.

b) Je-li $a = 0$, není rovnice (20) splněna pro žádné reálné číslo z, a tedy ani soustava (15) nemá pro $a = 0$ žádné řešení. (Všimněme si, že jsme vlastně dospěli ke sporu s předpokladem, že soustava (15) má řešení.)

c) Je-li $a = 1$, má soustava (15) tvar

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1, \\ x + y - z &= 1, \\ -x + y + z &= 1 \end{aligned}$$

a řešení je $x = z$, $y = 1$, z libovolné reálné číslo.

Zkoušku provedeme dosazením hodnot $x = y = z = \frac{1}{a}$ do rovnic soustavy (15), které jsou jimi splněny. Pak shrneme diskusi do tabulky:

Parametr a	Počet řešení
$a = 0$	žádné
$a \neq -1, a \neq 0, a \neq 1$	jedno, $x = y = z = \frac{1}{a}$
$a = -1, a = 1$	nekonečně mnoho

Viděli jsme názorně, že je opravdu účelné rozhodovat o zvláštních případech dosazením parametru do rovnic soustavy. Rozbor je pak přehlednější a je usnadněno sledování celého myšlenkového postupu. Kromě toho se snadněji vyhneme chybám. Z rovnice (19) bychom např. mohli nesprávně soudit, že pro $a = 1$ vyhovuje soustavě (15) jakákoliv dvojice čísel x, y. Rovnice (19) je ovšem pro $a = 1$ totožností a žádný takový závěr z ní nelze učinit.

Před řešením soustavy rovnic (15) jsme vyřešili soustavu (16), která vznikla dosazením hodnoty parametru $a = 2$ do rovnic soustavy (15). Řešení soustavy (15) tím bylo usnadněno, neboť jsme v tomto zvláštním případě nalezli vhodný postup eliminace neznámých. Je možný i opačný postup. Řešíme-li soustavu rovnic s numerickými koeficienty, je možné některý z nich nahradit parametrem. Čtenáři doporučujeme, aby to několikrát provedl při řešení soustavy o dvou neznámých. Stejně cenné je malé obměňování řešené soustavy (změnou jednoho znamení, poněkud jiným umístěním parametru apod.). Např. po vyřešení soustavy rovnic (15) je možné zabývat se soustavou

$$\begin{aligned} ax + y - z &= 1, \\ x - ay + z &= 1, \\ -x + y + az &= 1. \end{aligned}$$

Úloha 5. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} ax + y + z &= 1, \\ x + ay + z &= a, \\ x + y + az &= a^2 \end{aligned} \tag{23}$$

o neznámých x, y, z, přičemž a je reálné číslo.

Předpokládejme, že soustava (23) má řešení. Pro čísla x, y, z, která jsou řešením soustavy (23), musí platit rovnice

$$(a - 1)\,x + (1 - a)\,y = 1 - a.$$

1. Je-li $a = 1$, má soustava (23) tvar

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1, \\ x + y + z &= 1, \\ x + y + z &= 1 \end{aligned}$$

a jejím řešením jsou trojice složené z libovolných reálných čísel x, y a z čísla $z = 1 - x - y$.

2. Je-li $a - 1 \neq 0$, musí platit

$$-x + y = 1,$$

tj.

$$y = 1 + x. \tag{24}$$

Pro čísla x, y, z, která jsou řešením soustavy (23), musí dále platit rovnice

$$(a - 1)\,x + (1 - a)\,z = 1 - a^2,$$

tj. po dělení číslem $1 - a$

$$-x + z = 1 + a.$$

Odtud plyne

$$z = x + a + 1. \tag{25}$$

Užijeme vztahů (24) a (25); po dosazení do první rovnice soustavy (23) a po úpravě dostaneme

$$(a + 2)\,x = -(a + 1). \tag{26}$$

a) Je-li $a + 2 \neq 0$, plyne z rovnice (26)

$$x = \frac{-(a + 1)}{a + 2}. \tag{27}$$

Dosazením do vztahů (24), (25) a po úpravě dostaneme

$$y = \frac{1}{a + 2}, \tag{28}$$

$$z = \frac{(a + 1)^2}{a + 2}. \tag{29}$$

b) Je-li $a = -2$, není rovnice (26) splněna pro žádné reálné číslo x, a tedy ani soustava (23) nemá pro $a = -2$ žádné řešení.

Zkouška. Dosadíme-li ze vzorců (27), (28), (29) do rovnic soustavy (23), zjistíme, že jsou splněny. Výsledek diskuse shrneme do tabulky:

Parametr a	Počet řešení
$a = -2$	žádné
$a \neq -2$, $a \neq 1$	jedno, viz (27), (28), (29)
$a = 1$	nekonečně mnoho

Zápis postupu řešení má být co nejpřehlednější. Závisí to do jisté míry na obratnosti a zkušenosti řešitele, záleží to však také na způsobu eliminace. Není pochyby o tom, že např. užití dosazovací metody při řešení soustavy (23) by bylo zdlouhavější než náš postup. Volba postupu řešení někdy ovlivní i štěpení rozboru. Výsledek diskuse však na způsobu řešení nezávisí. Jako příklad řešme znovu soustavu rovnic (1) ze str. 20.

Z první rovnice soustavy (1) dostaneme

$$ax = 1 - y. \tag{30}$$

Chceme-li vyjádřit neznámou x, musíme rozlišit dva případy.

1. Je-li $a = 0$, má soustava (1) tvar

$$\begin{aligned} y &= 1, \\ x &= 1, \end{aligned}$$

z něhož je řešení ihned patrno.

2. Je-li $a \neq 0$, plyne z rovnice (30)

$$x = \frac{1 - y}{a}. \tag{31}$$

Po dosazení do druhé rovnice soustavy (1) a po úpravě dostaneme rovnici

$$(1 - a^2)y = 1 - a. \tag{32}$$

Nyní provedeme štěpení rozboru znovu.

a) Je-li $|a| \neq 1$, potom z rovnice (32) plyne, že je $y = \dfrac{1}{1 + a}$, a po dosazení do (31), je $x = \dfrac{1}{1 + a}$.

b) Je-li $a = 1$, má soustava (1) tvar

$$\begin{aligned} x + y &= 1, \\ x + y &= 1 \end{aligned}$$

a vyhovuje jí každé x a $y = 1 - x$.

c) Je-li $a = -1$, má soustava (1) tvar

$$\begin{aligned} -x + y &= 1, \\ x - y &= 1 \end{aligned}$$

a nemá žádné řešení.

Po provedení zkoušky můžeme sestavit tabulku:

Parametr a	Počet řešení
$a = -1$	žádné
$a = 0$	jedno
$a \neq -1, a \neq 0, a \neq 1$	jedno
$a = 1$	nekonečně mnoho

Vidíme však, že vytčení hodnoty $a = 0$ je pro diskusi zbytečné a že tabulka může být sestavena takto:

Parametr a	Počet řešení
$a = -1$	žádné
$a \neq -1, a \neq 1$	jedno
$a = 1$	nekonečně mnoho

Shoduje se ovšem s tabulkou, kterou jsme získali při prvém řešení soustavy (1).

Úloha 6. Pro která celá čísla a má soustava rovnic

$$\begin{aligned} ax - 2y &= 3, \\ 3x + ay &= 4 \end{aligned} \tag{33}$$

řešení x, y, pro které platí $x > 0, y < 0$.

Předpokládejme, že soustava (33) má žádané řešení. Předpokládejme, že je $a \neq 0$, a vynásobme jím jednou prvou z rovnic soustavy (33), po druhé druhou z rovnic soustavy (33). Zjistíme, že každá dvojice čísel x, y, splňujících soustavu (33), splňuje též soustavu

$$\begin{aligned} a^2x - 2ay &= 3a, \\ 6x + 2ay &= 8 \end{aligned}$$

a také soustavu

$$\begin{aligned} 3ax - 6y &= 9, \\ 3ax + a^2y &= 4a \end{aligned}$$

a dále soustavu

$$\begin{aligned} (a^2 + 6)\,x &= 3a + 8, \\ (a^2 + 6)\,y &= 4a - 9. \end{aligned} \tag{34}$$

Protože číslo a je reálné, je $a^2 + 6 > 0$ a z (34) plyne

$$x = \frac{3a + 8}{a^2 + 6}, \qquad y = \frac{4a - 9}{a^2 + 6}.$$

Je-li kořen x je kladný, kořen y záporný, platí soustava nerovností

$$\frac{3a + 8}{a^2 + 6} > 0, \qquad \frac{4a - 9}{a^2 + 6} < 0.$$

Ježto je $a^2 + 6 > 0$, je nutně

$$3a + 8 > 0, \qquad 4a - 9 > 0,$$

což znamená, že pro číslo a splňující podmínky úlohy platí

$$-\frac{8}{3} < a < \frac{9}{4}, \qquad a \neq 0,$$

a protože nás zajímají pouze celá čísla, může a nabýt jen hodnot $-2, -1, 1, 2$; tyto hodnoty skutečně vyhovují, jak se přesvědčíme zkouškou.

Zbývá prozkoumat soustavu rovnic (33) pro $a = 0$. Potom jde o soustavu

$$\begin{aligned} -2y &= 3, \\ 3x &= 4, \end{aligned}$$

která má řešení $x = \frac{4}{3}$, $y = \frac{-3}{2}$. Tedy také číslo $a = 0$ podmínkám úlohy vyhovuje.

Shrneme-li dosavadní výsledky, zjistíme, že řešením úlohy jsou čísla $-2, -1, 0, 1, 2$. Zjistěte, jaký je geometrický význam úlohy 6.

Úloha 7. Pro která reálná čísla a má soustava rovnic z úlohy 5

$$\begin{aligned} ax + y + z &= 1, \\ x + ay + z &= a, \\ x + y + az &= a^2 \end{aligned} \qquad (23\text{ bis})$$

za řešení: a) aspoň jednu trojici kladných čísel,
b) aspoň jednu trojici záporných čísel?

Při řešení úlohy 7 užijeme výsledků úlohy 5.

a) Řešením soustavy nerovností

$$\frac{-(a+1)}{a+2} > 0, \qquad \frac{1}{a+2} > 0, \qquad \frac{(a+1)^2}{a+2} > 0$$

zjistíme, že musí platit nerovnosti $-2 < a < -1$.

Kromě toho musíme zkoumat též hodnotu $a = 1$, neboť je možné volit čísla x, y, z tak, aby bylo $x > 0, y > 0$, $x + y < 1$; pak je také $z > 0$.

b) Řešením soustavy nerovností

$$\frac{-(a+1)}{a+2} < 0, \qquad \frac{1}{a+2} < 0, \qquad \frac{(a+1)^2}{a+2} < 0$$

zjistíme, že musí platit nerovnost $a < -2$. Hodnoty parametru $a = 1$ nelze použít, neboť není možné volit reálná čísla x, y, z tak, aby současně platilo $x < 0$, $y < 0$, $z = 1 - x - y < 0$. Všecky podmínky pro parametr a, které byly odvozeny jako nutné, jsou také postačující, jak se snadno přesvědčíme obrácením postupu.

Shrneme: požadavek a) je splněn pro hodnoty parametru a určené nerovnostmi $-2 < a < -1$ a pro $a = 1$;

požadavek b) pro hodnoty parametru a určené nerovností $a < -2$.

Na závěr kapitoly uveďme jednu z úloh minulých ročníků matematické olympiády.

Úloha 8. Řešte v oboru reálných čísel soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+1} + a(y-2) &= 1, \\ \frac{a}{x+1} + y - 1 &= 2a \end{aligned} \qquad (35)$$

o neznámých x, y, kde a je reálné číslo.

Předpokládejme, že soustava (35) má řešení. Zavedeme-li další neznámou z vztahem

$$z = \frac{1}{x+1}, \tag{36}$$

musí pro každá x, y, která splňují soustavu (35), být splněna soustava

$$\begin{aligned} z + a(y-2) &= 1, \\ az + y - 1 &= 2a \end{aligned} \tag{37}$$

o neznámých z, y.

Z prvé rovnice soustavy (37) dostaneme

$$z = 1 - a(y-2) \tag{38}$$

a po dosazení do druhé rovnice soustavy a po úpravě

$$y(1-a^2) = 1 + a - 2a^2. \tag{39}$$

Je-li $a^2 \neq 1$, plyne z rovnice (39)

$$y = \frac{1 + a - 2a^2}{1 - a^2},$$

neboli

$$y = \frac{(1-a)(1+2a)}{1-a^2}$$

neboli

$$y = \frac{1+2a}{1+a}. \tag{40}$$

Užijme vztahu (40) a dosaďme do rovnice (38); dostaneme

$$z = \frac{1+2a}{1+a}. \tag{40a}$$

Je-li $a \neq -\frac{1}{2}$, je podle (40a) $z \neq 0$ a ze vztahu (36) vypočteme $x = \frac{1}{z} - 1$; vyjde

$$x = \frac{1+a}{1+2a} - 1,$$

neboli

$$x = \frac{-a}{1+2a}. \qquad (41)$$

Zkoumejme nyní vyloučené případy.

a) Je-li $a = -1$, není rovnice (39) splněna pro žádné reálné číslo y, tj. soustava rovnic (35) nemá řešení.

b) Je-li $a = -\frac{1}{2}$, je $z = 0$, rovnice (36) není řešitelná podle x a soustava (35) je opět neřešitelná.

c) Je-li $a = 1$, má soustava rovnic (35) tvar

$$\frac{1}{x+1} + y - 2 = 1,$$

$$\frac{1}{x+1} + y - 1 = 2.$$

Rovnice této soustavy jsou totožné. Vypočteme, že soustava je splněna pro každé $x \neq -1$ a $y = \dfrac{3x+2}{x+1}$.

Zkouškou se přesvědčíme, že vzorce (40), (41) dávají skutečně řešení soustavy (35).

Výsledek diskuse shrneme do tabulky:

Parametr a	Počet řešení
$a = -1$, $a = -\frac{1}{2}$	žádné
$a \neq -1$, $a \neq -\frac{1}{2}$, $a \neq 1$	jedno, viz (40), (41)
$a = 1$	nekonečně mnoho

Čtenáři doporučujeme, aby stanovil podmínky pro parametr a, za kterých mají oba kořeny x, y soustavy předepsané znamení. Pokuste se řešit soustavu (35) graficky. Každá z rovnic (35) vyjadřuje množinu rovnoosých hyperbol; průsečíky sobě přiřaděných hyperbol vyplní však složitější křivku 4. stupně. Poměrně jednoduše lze však řešit graficky soustavu (35) pro některé zvláštní hodnoty parametru a, např. pro $a = 0, 1, -1$.

Několik neřešených úloh

1. Řešte v oboru reálných čísel soustavu rovnic

a) $x + y = a,$
$x + ay = 1;$

b) $|x| + |y| = a,$
$ax + 2y = 4;$

c) $ax + y = a,$
$a^2x - y = a^2 + 1$

o neznámých x, y, přičemž a je reálné číslo.

2. Jsou dány velikosti stran a, b trojúhelníka ABC, jehož těžnice příslušné k stranám a, b svírají pravý úhel. Vypočtěte velikost strany c. Stanovte podmínky řešitelnosti této úlohy.

3. Řešte v oboru reálných čísel soustavu rovnic

a) $ax + by = 0,$
$a^2x - by = ab;$

b) $(a + b)\, x + (a - b)\, y = a^2 + b^2,$
$(a - b)\, x + (a + b)\, y = a^2 - b^2$

o neznámých x, y, přičemž a, b jsou reálná čísla.

4. Řešte v oboru reálných čísel soustavu rovnic

a) $(a + 1)x + y + z = a + 1,$
$x + (a + 1)y + z = a + 3,$
$x + y + (a + 1)z = -2a - 4;$

b) $ax + y + z = 4,$
$x + by + z = 3,$
$x + 2by + z = 4$

o neznámých x, y, z, přičemž a, b jsou reálná čísla.

Vyhledejte si ve sbírkách úloh podobné úlohy a řešte je!

3. kapitola

KVADRATICKÉ ROVNICE

●

Dříve, než uvedeme několik řešených příkladů, připomeňme, že nám v této kapitole půjde především o zkoumání řešitelnosti kvadratické rovnice v oboru reálných čísel. Víme, že o řešitelnosti a počtu řešení kvadratické rovnice s reálnými koeficienty, tj. rovnice

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad (1)$$

kde je $a \neq 0$, rozhoduje její diskriminant

$$D = b^2 - 4ac.$$

Je-li $D < 0$, nemá rovnice (1) žádný reálný kořen. Je-li $D = 0$, má rovnice (1) jeden reálný kořen, tzv. dvojnásobný.

Je-li $D > 0$, má rovnice (1) dva různé reálné kořeny. Diskusi budeme provádět většinou pomocí diskriminantu.

Úloha 1. Řešte v oboru reálných čísel x rovnici

$$(a - 2)x^2 - 2ax + 2a - 3 = 0, \qquad (2)$$

kde a je reálné číslo.

Při rozboru je třeba rozlišit dva případy:

1. Je-li $a - 2 = 0$, tj. $a = 2$, má rovnice (2) tvar $-4x + 1 = 0$ a vyhovuje jí jediné číslo $x = \frac{1}{4}$.

2. Je-li $a - 2 \neq 0$, tj. $a \neq 2$, je rovnice (2) rovnicí kvadratickou a její řešitelnost závisí na diskriminantu $D = 4(-a^2 + 7a - 6)$. Podmínka řešitelnosti je $-a^2 + 7a - 6 \geqq 0$, neboli

$$-(a - 1)(a - 6) \geqq 0. \tag{3}$$

Nerovnost (3) je splněna právě tehdy, platí-li podmínka $1 \leqq a \leqq 6$.

Pro $a = 1$ nebo $a = 6$ je $D = 0$ a rovnice (2) má jediný kořen. Po dosazení těchto hodnot parametru a do rovnice (2) dostaneme rovnice

$$x^2 + 2x + 1 = 0,$$
$$4x^2 - 12x + 9 = 0,$$

z nichž první má kořen $x = -1$ a druhá $x = \dfrac{3}{2}$.

Pro $1 < a < 6$ je $D > 0$ a rovnice (2) má dva různé reálné kořeny. Jsou dány vzorci

$$x_1 = \frac{a + \sqrt{-a^2 + 7a - 6}}{a - 2}, \tag{4a}$$

$$x_2 = \frac{a - \sqrt{-a^2 + 7a - 6}}{a - 2}. \tag{4b}$$

Zkoušku provedeme dosazením do rovnice (2). Např. pro $1 < a < 6$ dostaneme pro kořen x_1:

$$(a - 2) \cdot \left(\frac{a + \sqrt{-a^2 + 7a - 6}}{a - 2}\right)^2 -$$

$$-2a\frac{a+\sqrt{-a^2+7a-6}}{a-2}+2a-3=$$
$$=\frac{a^2+2a\sqrt{-a^2+7a-6}-a^2+7a-6-2a^2}{a-2}+$$
$$+\frac{-2a\sqrt{-a^2+7a-6}+2a^2-4a-3a+6}{a-2}=0.$$

Výsledek diskuse shrneme do tabulky:

Parametr a	Počet řešení
$a < 1, a > 6$	žádné
$a = 1, a = 2, a = 6$	jedno
$1 < a < 6, a \neq 2$	dvě, viz (4a), 4b)

Graficky lze řešit úlohu 1 takto: Rovnici (2) upravíme na tvar

$$(a-2)x^2 = 2ax - 2a + 3$$

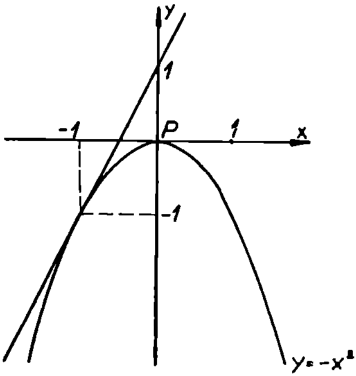
a označíme

$$y_1 = (a-2)x^2; \qquad (5a)$$
$$y_2 = 2ax - 2a + 3. \qquad (5b)$$

Rovnice (5a) je analytickým vyjádřením množiny parabol, procházejících počátkem pravoúhlé souřadnicové soustavy s osami x, y (pro $a = 2$ dostaneme přímku $y = 0$). Osou každé z těchto parabol je osa y, jejich parametry jsou čísla

$$p = \frac{1}{2\,|a-2|}.$$

Jaký je geometrický význam rovnice (5b)? Vyšetřte, jaké útvary vyjadřují rovnice (5a), (5b) pro hodnoty $a = -1$, $a = 0$, $a = 1$, $a = 2$, $a = 3$, $a = 6$, $a = 10$. (V obr. 7 je zvoleno $a = 1$.)



Obr. 7.

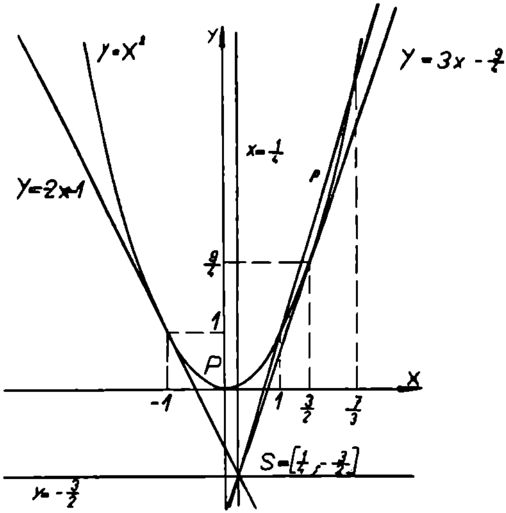
Předchozí způsob grafického řešení je nevýhodný, neboť vyžaduje rýsování množiny parabol. Výhodnější je tento způsob: Vyloučíme případ $a = 2$ a rovnici (2) uvedeme na tvar

$$x^2 - \frac{2a}{a-2}x + \frac{2a-3}{a-2} = 0.$$

Položíme

$$\begin{aligned} y &= x^2, \\ y &= \frac{2a}{a-2}x - \frac{2a-3}{a-2}. \end{aligned} \tag{6}$$

Tím jsme zavedli novou pomocnou neznámou y. Grafem první rovnice (6) je určitá parabola (nezávislá na volbě parametru a), grafem druhé rovnice (6) je množina přímek; snadno lze dokázat, že tato množina je svazkem přímek o středu $S \equiv [\frac{1}{4}, -\frac{3}{2}]$ s vyloučením přímky $x = \frac{1}{4}$. Dané hodnotě parametru a odpovídá určitá přímka p svazku; souřadnice x bodů, které má tato přímka p společné s parabolou, jsou řešením rovnice (2).



Obr. 8.

Na obr. 8 je zobrazena přímka p pro hodnotu $a = 5$; přímka p má rovnici $y = \frac{10x}{3} - \frac{7}{3}$. Z obr. 8 je zároveň vidět, že rovnice (2) není řešitelná pro každou hodnotu a; má-li být rovnice (2) řešitelná pro určitou hodnotu a, musí být příslušná přímka p sečnou nebo tečnou paraboly. Tak např. přímka $y = -\frac{3}{2}$, která odpovídá hodnotě $a = 0$, nemá s parabolou žádný společný bod. To souhlasí s výsledkem diskuse (viz tabulku), podle něhož je rovnice (2) pro $a = 0$ skutečně neřešitelná.

Úloha 2. Pro které hodnoty parametru a splňují kořeny x_1, x_2 rovnice

$$2x^2 - (a + 1)x + a + 3 = 0$$

podmínku $x_1 - x_2 = 1$?

☞ Při řešení úlohy 2 užijeme známých vztahů pro kořeny x_1, x_2 kvadratické rovnice s reálnými koeficienty $ax^2 + bx + c = 0$, a to

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a},$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

V našem případě musí platit soustava rovnic

$$x_1 + x_2 = \frac{a+1}{2},$$

$$x_1 x_2 = \frac{a+3}{2},$$

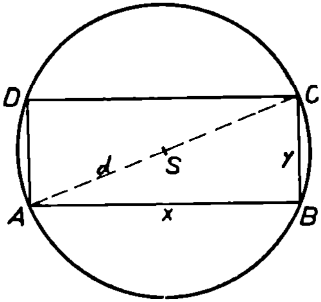
$$x_1 - x_2 = 1$$

o neznámých x_1, x_2, a. Odtud vypočteme, že podmínky úlohy 2 splňují čísla $a = -3$, $a = 9$. Proveďte zkoušku!

Úloha 3. Stanovte podmínku, která musí být splněna, aby bylo možné do kružnice o průměru d vepsat obdélník o daném obsahu $a^2 > 0$.

Podle obr. 9 označme $x = AB = CD$, $y = AD = BC$. Potom platí soustava rovnic

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= d^2, \\ xy &= a^2. \end{aligned} \tag{7}$$



Obr. 9.

Pro každou dvojici x, y, která splňuje soustavu (7), musí být splněna rovnice

$$x^2 + 2xy + y^2 = d^2 + 2a^2$$

a dále rovnice

$$(x + y)^2 = d^2 + 2a^2. \tag{8}$$

Protože x, y jsou velikostmi stran obdélníku, plyne z (8), že je

$$x + y = \sqrt{d^2 + 2a^2}. \tag{9}$$

Užijeme-li ve spojení s rovnicí (9) druhé rovnice soustavy (7), zjistíme, že každé řešení x, y soustavy (7) je také řešením soustavy

$$\begin{aligned} x + y &= \sqrt{d^2 + 2a^2}, \\ xy &= a^2, \end{aligned}$$

což znamená, že čísla x, y jsou kořeny kvadratické rovnice

$$z^2 - \sqrt{d^2 + 2a^2}\,.\,z + a^2 = 0 \qquad (10)$$

o neznámé z. Co můžeme říci o znameních kořenů?

Podmínku řešitelnosti úlohy stanovíme pomocí diskriminantu rovnice (10). Podmínka zní $D \geq 0$, tj. $d^2 + 2a^2 - 4a^2 \geq 0$. Protože je $d > 0$, $a > 0$, je podmínka řešitelnosti

$$d \geq a\sqrt{2}.$$

Úloha 4. Řešte v oboru reálných čísel x rovnici

$$2x + ax = \sqrt{x}, \qquad (11)$$

kde a je reálné číslo.

Předpokládejme, že rovnice (11) má řešení. Potom každé x, které je jejím kořenem, splňuje postupně tyto rovnice:

$$\begin{aligned} 4x^2 + 4ax^2 + a^2x^2 &= x, \\ x^2\,(a^2 + 4a + 4) &= x, \\ x^2\,(a + 2)^2 &= x. \end{aligned} \qquad (12)$$

Rovnice (12) má kořen $x = 0$, další její kořen $x \neq 0$ je kořenem rovnice

$$x(a + 2)^2 = 1,$$

která pro $a \neq -2$ má jediné řešení

$$x = \frac{1}{(a + 2)^2} \qquad (13)$$

a pro $a = -2$ nemá žádné řešení.

Provedeme zkoušku, zda nalezené výsledky vyhovují též rovnici (11). Dosadíme-li ze vztahu (13), dostaneme, že má platit rovnost

$$\frac{2}{(a+2)^2} + \frac{a}{(a+2)^2} = \frac{1}{|a+2|}. \qquad (13a)$$

Je-li $a + 2 > 0$, dá levá strana $\frac{2}{(a+2)^2} + \frac{a}{(a+2)^2} = \frac{1}{a+2}$, pravá strana $\frac{1}{|a+2|} = \frac{1}{a+2}$, což znamená, že rovnice (11) má pro $a > -2$ kořen daný vzorcem (13). Je-li $a + 2 < 0$, není rovnost (13a) splněna.

Výsledek diskuse shrneme do tabulky:

Parametr a	Počet řešení
$a \leqq -2$	jedno, $x = 0$
$a > -2$	dvě, $x = 0$, viz (13)

Úloha 5. Řešte v oboru reálných čísel x rovnici

$$\sqrt{x-3} + \sqrt{x-7} = a, \qquad (14)$$

kde a je reálné číslo.

Předpokládáme-li, že rovnice (14) má řešení, musí zřejmě být $a > 0$. Pro $a \leqq 0$ rovnice (14) nemá žádný reálný kořen x. Po umocnění a dalších úpravách rovnice (14) dostaneme, že pro každé x, které je jejím řešením, musí postupně platit

$$\sqrt{x-3} = a - \sqrt{x-7},$$
$$x - 3 = a^2 - 2a\sqrt{x-7} + x - 7,$$
$$2a\sqrt{x-7} = a^2 - 4,$$
$$4a^2x = a^4 + 20a^2 + 16. \qquad (15)$$

Protože je $a > 0$, je $a^2 > 0$ a z (15) dostaneme:

$$x = \frac{a^4 + 20a^2 + 16}{4a^2}. \tag{16}$$

Nyní provedeme zkoušku. Užijeme-li vztahu (16), zjistíme, že je $x - 3 = \frac{1}{4a^2}(a^4 + 8a^2 + 16) = \frac{(a^2 + 4)^2}{4a^2}$, $x - 7 = \frac{1}{4a^2}(a^4 - 8a^2 + 16) = \frac{(a^2 - 4)^2}{4a^2}$. Levá strana rovnice (14) je tedy $L = \sqrt{\frac{(a^2 + 4)^2}{4a^2}} + \sqrt{\frac{(a^2 - 4)^2}{4a^2}} =$ $= \frac{a^2 + 4}{2a} + \frac{|a^2 - 4|}{2a}$, neboť je $a > 0$, $a^2 + 4 > 0$. Je tedy dále buď

1. $L = a$ pro $a^2 \geqq 4$,

nebo

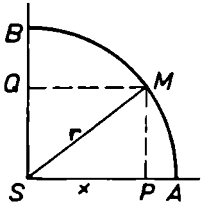
2. $L = \frac{4}{a}$ pro $a^2 \leqq 4$.

Rovnice (14) má jedno řešení pro každé $a \geqq 2$; pro $a \leqq 2$ jen tehdy, je-li $a^2 = 4$, tj. $a = 2$. Diskusi můžeme shrnout přehledněji v tabulce:

Parametr a	Počet řešení
$a < 2$	žádné
$a \geqq 2$	jedno, viz (16)

Řešte rovnici $\sqrt{x - 3} - \sqrt{x - 7} = a$, kde a je reálné číslo. Porovnejte postup řešení této rovnice a rovnice (14).

Úloha 6. Je dána čtvrtkružnice AB o poloměru r a středu S. Určete bod M této čtvrtkružnice tak, aby bylo $MP + 2MQ = l$, kde l je kladné číslo a P, Q jsou paty kolmic spuštěných z bodu M na přímky SA, SB (obr. 10). Stanovte podmínku řešitelnosti této úlohy!



Obr. 10.

Při řešení úlohy hledejme velikost x úsečky SP. Velikost úsečky MP je pak vyjádřena vztahem

$$MP = \sqrt{r^2 - x^2}. \tag{17}$$

Z geometrického významu proměnné x a ze znění textu úlohy vyplývají pro x podmínky:

$$0 \leqq x \leqq r, \quad 0 \leqq x \leqq \tfrac{1}{2}\, l. \tag{18}$$

Z podmínky $MP + 2MQ = l$ dostaneme podle (17) pro x rovnici

$$\sqrt{r^2 - x^2} + 2x = l. \tag{18a}$$

Jejím umocněním vyjde

$$r^2 - x^2 = (l - 2x)^2. \tag{19}$$

Po úpravě rovnice (19) dostaneme rovnici

$$5x^2 - 4lx + (l^2 - r^2) = 0. \tag{20}$$

Rovnice (20) má reálné kořeny právě tehdy, platí-li nerovnost

$$16l^2 - 20(l^2 - r^2) \geqq 0,$$

neboli

$$5r^2 - l^2 \geqq 0,$$

neboli

$$l \leqq r\sqrt{5}. \tag{21}$$

Kořeny rovnice (20) jsou pak dány vztahy

$$x_1 = \frac{2l + \sqrt{5r^2 - l^2}}{5}, \tag{22}$$

$$x_2 = \frac{2l - \sqrt{5r^2 - l^2}}{5}. \tag{23}$$

Nyní je třeba provést zkoušku. Oba kořeny (22), (23) vyhovují (za předpokladu (21)) rovnici (20), tudíž i rovnici (19). Budou-li splněny obě podmínky (18), bude možno obě strany (19) odmocnit a vyjde (18a), tj. příslušný kořen x bude řešením úlohy. Je tedy třeba zjistit, zda jsou splněny podmínky (18) za předpokladu (21).

Předně je patrné, že je $x_2 \leqq x_1$. Kořen x_1 je vždy kladný, kořen x_2 je nezáporný jen tehdy, je-li $2l \geqq \sqrt{5r^2 - l^2}$ neboli $l \geqq r$. Je-li $l \geqq r$, vyjde obrácením postupu nerovnost $x_2 \geqq 0$. Dále dokážeme, že je vždy $x_1 \leqq r$, a tudíž i $x_2 \leqq r$. Skutečně z nerovnosti

$$\frac{2l + \sqrt{5r^2 - l^2}}{5} \leqq r$$

plyne po úpravě

$$\sqrt{5r^2 - l^2} \leqq 5r - 2l;$$

umocněním této nerovnosti vyjde po úpravě

$$5(2r - l)^2 \geqq 0. \tag{23a}$$

Nerovnost (23a) je splněna pro každé l, r; obrácením postupu z ní dostaneme nerovnost $x_1 \leqq r$.

Shrnutí: Pro kořen x_1 platí vždy první nerovnost (18), pro kořen x_2 jen v případě, že je $l \geqq r$.

Zbývá vyšetřit druhou nerovnost (18). Je-li $x_1 \leqq \frac{l}{2}$, je $2\sqrt{5r^2 - l^2} \leqq l$ neboli $2r \leqq l$; obrácením postupu dostaneme z této nerovnosti nerovnost $x_1 \leqq \frac{l}{2}$. Je-li $x_2 \leqq \frac{l}{2}$, je $-2\sqrt{5r^2 - l^2} \leqq l$, což je splněno pro každé l, r; obrácením postupu zjistíme, že je vždy $x_2 \leqq \frac{l}{2}$.

Závěr: Pro kořen x_1 platí oba vztahy (18) jedině v případě, že je $2r \leqq l$, pro kořen x_2 jedině v případě, že je $l \geqq r$.

Výsledek diskuse zapíšeme pomocí podmínek pro poměr parametrů $\frac{l}{r}$:

Podíl parametrů $\frac{l}{r}$	Počet řešení
$\frac{l}{r} < 1$, $\frac{l}{r} > \sqrt{5}$	žádné
$1 \leqq \frac{l}{r} < 2$, $\frac{l}{r} = \sqrt{5}$	jedno
$2 \leqq \frac{l}{r} < \sqrt{5}$	dvě

Při sestavování této tabulky jsme použili ještě skutečnosti že $x_1 = x_2$ jen v tom případě, že je $\frac{l}{r} = \sqrt{5}$.

Úloha 7. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 25, \\ 2x - y + a &= 0, \end{aligned} \qquad (24)$$

o neznámých x, y, kde a je reálné číslo.

Předpokládejme, že soustava (24) má řešení. Každá dvojice x, y, která ji splňuje, vyhovuje rovnici

$$y = 2x + a \qquad (25)$$

a rovnici

$$x^2 + (2x + a)^2 = 25,$$

z níž dostaneme pro neznámou x po úpravě rovnici

$$5x^2 + 4ax + a^2 - 25 = 0. \qquad (26)$$

Podmínky řešitelnosti rovnice (26) zjistíme pomocí jejího diskriminantu. Rovnice (26) má aspoň jeden reálný kořen právě tehdy, je-li splněna podmínka

$$16a^2 - 20(a^2 - 25) \geqq 0,$$

neboli

$$125 - a^2 \geqq 0,$$

neboli

$$-5\sqrt{5} \leqq a \leqq 5\sqrt{5}. \qquad (27)$$

Pro čísla a splňující nerovnosti (27) jsou kořeny x_1, x_2 rovnice (26) dány vztahy

$$x_1 = \frac{-2a + \sqrt{125 - a^2}}{5}, \qquad (28a)$$

$$x_2 = \frac{-2a - \sqrt{125 - a^2}}{5}. \qquad (29\text{a})$$

Z nich dosadíme do (25) a zjistíme, že je

$$y_1 = \frac{a + 2\sqrt{125 - a^2}}{5}, \qquad (28\text{b})$$

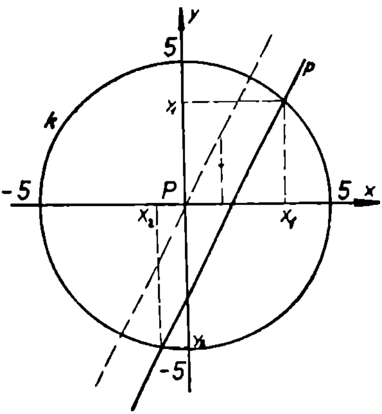
$$y_2 = \frac{a - 2\sqrt{125 - a^2}}{5}. \qquad (29\text{b})$$

Po provedení zkoušky shrneme diskusi do tabulky:

Parametr a	Počet řešení
$a < -5\sqrt{5}$, $a > 5\sqrt{5}$	žádné
$a = -5\sqrt{5}$, $a = 5\sqrt{5}$	jedno, viz (28a), (28b)
$-5\sqrt{5} < a < 5\sqrt{5}$	dvě, viz (28a), (28b), (29a), (29b)

Geometrické řešení soustavy rovnic (24) je velmi pěkné. První rovnice (24) je početním vyjádřením kružnice se středem v počátku systému souřadnic a s poloměrem $r = 5$. Druhá rovnice je početním vyjádřením osnovy přímek rovnoběžných s přímkou $y = 2x$ (obr. 11). Které přímky osnovy dostaneme, zvolíme-li hodnoty parametru $a = -5\sqrt{5}$, $a = 5\sqrt{5}$?

Touto úlohou končí naše knížka. Mohli bychom ještě pokračovat v řešení dalších a dalších úloh. Zvlášť zajímavé by bylo studium jejich grafického řešení. Ale to bychom se museli podrobněji zabývat analytickou geometrií, což přesahuje rámec naší knížky.



Obr. 11.

Několik neřešených úloh

1. Řešte v oboru reálných čísel x rovnici

a) $a\,(a + 2)\,x^2 + 2x - a^2 + 1 = 0$,

b) $\dfrac{x}{x-a} + \dfrac{2a}{x+a} = \dfrac{8a^2}{x^2 - a^2}$,

kde a je reálné číslo.

2. Řešte v oboru reálných čísel x rovnici

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b},$$

kde a, b jsou reálná čísla a platí $ab \neq 0$.

3. Pro které hodnoty parametru a platí pro kořeny x_1, x_2 kvadratické rovnice

$$2ax^2 - 2x - 3a - 2 = 0$$

podmínky $x_1 < 1$, $x_2 > 1$?

4. Pro které hodnoty parametru a jsou oba kořeny x_1, x_2 kvadratické rovnice $(2 - a)x^2 - 3ax + 2a = 0$ větší než $\frac{1}{2}$?

5. Pro které hodnoty parametru a platí pro kořeny x_1, x_2 kvadratické rovnice

$$x^2 + 2x + a = 0$$

podmínky $-1 < x_1 < x_2 < 1$?

6. Dokažte, že rovnice

a) $(x - a)(x - b) + (x - a)(x - c) +$
$+ (x - b)(x - c) = 0$;

b) $a(x - b)(x - c) + b(x - c) +$
$+ c(x - a)(x - b) = 0$

má vždy reálné kořeny.

7. V rovině je dáno několik bodů, z nichž žádné tři neleží v jedné přímce. Stanovte jejich počet, víte-li, že je jimi určeno

a) 28 přímek,

b) a přímek.

8. Řešte v oboru reálných čísel x rovnici

$$\frac{2\sqrt{a^2 + x} - a}{\sqrt{a^2 + x} + 1} = \frac{\sqrt{a^2 + x} - 1}{a},$$

kde a je reálný parametr, $a \neq 0$.

9. Pro jakou hodnotu parametru a má soustava rovnic

a) $x^2 + y^2 = 5;$
$2x - y = a,$

b) $x^2 + 4y^2 = 20,$
$x + a = 0;$

c) $4x^2 - 9y^2 = 36,$
$2x - y + a = 0$

o neznámých x, y jediné řešení? Jaký je geometrický význam těchto úloh?

10. Řešte v oboru reálných čísel soustavu rovnic

a) $x^2 + y^2 - 2x - 3y = 0,$
$ax + y - 3 = 0;$

b) $2x^2 + 8y^2 = 16,$
$ax + y + 2a = 3$

o neznámých x, y, přičemž a je reálné číslo. Jaký je geometrický význam těchto úloh?

Vyhledejte v některé učebnici analytické geometrie, jak lze početně vyjádřit kružnici, elipsu a hyperbolu.

JIŘÍ VÁŇA

O ROVNICÍCH

s parametry

●

Pro účastníky Matematické olympiády vydává
ÚV Matematické olympiády a ÚV ČSM
v nakladatelství Mladá fronta
Odbornou revizi provedl doc. Jan Vyšín
Řídí akademik Josef Novák
Odpovědný redaktor Václav Kocourek
Obálku navrhl Jaroslav Příbramský
Publikace číslo 2058
Edice Škola mladých matematiků, svazek 8
Vytiskl Mír, n. p., závod 2, provozovna 22
Praha 2, Legerova 22
2,25 AA, 2,35 VA. D-08*40055
Náklad 7500 výtisků. 1. vydání
64 stran. Praha 1964. 63/III-7

23–033–64 03-2 Cena brož. výtisku Kčs 2,–

23-033-64
03-2
Cena brož.
Kčs 2,—