Co víme o přirozených číslech

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

CO VÍME O PŘIROZENÝCH ČÍSLECH

Vydal matematický ústav ČSAV a ÚV ČSM v nakladatelství Mladá fronta

JIŘÍ SEDLÁČEK

co víme O PŘIROZENÝCH ČÍSLECH

●

PRAHA 1961

VYDAL ÚV MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY A ÚV ČSM
V NAKLADATELSTVÍ MLADÁ FRONTA

PŘEDMLUVA

•

V každém ročníku naší matematické olympiády bývá zařazeno několik úloh z teorie čísel, a také v mezinárodních matematických olympiádách najdeme příklady na dělitelnost přirozených čísel. Tato část středoškolské matematiky je celkem jednoduchá a velmi zajímavá a může tedy dobře sloužit k výcviku v přesném matematickém usuzování. To jsou zhruba důvody, proč jsme v této knižnici připravili jako druhý svazek brožurku s názvem „Co víme o přirozených číslech".

Přáli bychom si, aby se mladí čtenáři naučili samostatně řešit jednoduché matematické úlohy a problémy — a z tohoto hlediska je právě veden výklad na stránkách našeho sešitu. Převážná většina základních pojmů, které se zde vyskytují, je našim studentům dobře známá ze školy, takže jistě v mnohých případech stačí jen letmá připomínka. Nebudeme si tu vykládat samoúčelnou teorii, nýbrž všechny vlastnosti přirozených čísel budeme studovat tak, že spolu se čtenářem rozřešíme řadu příkladů. Každý z pěti paragrafů, které v knížce budete číst, je pak zakončen několika úlohami. V nich najdete jak cvičení k numerickému počítání, tak i úlohy s jednoduchým matematickým vtipem, a můžete si zde tedy ověřit svou schopnost samostatného uvažování. V závěru knížky jsme sice uvedli výsledky některých úloh, návody nebo stručná řešení, používejte jich však ve svém vlastním zájmu až pro srovnání se svým výsledkem nebo řešením.

Teorie čísel má velmi starou historii a také v současné době je horlivě pěstována na celém světě. Domníval jsem se, že čte-

náře tohoto pojednání budou zajímat rovněž historické poznámky z doby starší i nedávné, a zařadil jsem do knížky také několik zcela nových údajů, k nimž došlo současné bádání o prvočíslech.

V závěru spisku najdete několik odkazů na další literaturu z elementární teorie číselné, s kterou by se mohl seznámit čtenář po prostudování našeho sešitu.

Děkuji srdečně Dr. Karlu Čulíkovi, Vladimíru Doležalovi, doc. Janu Vyšínovi a Rudolfu Zelinkovi, kteří obětavě četli rukopis této brožurky a řadou připomínek přispěli k jeho zlepšení.

J. S.

1.

ZOPAKUJME SI ZÁKLADNÍ POJMY

•

V této knížce budeme předpokládat, že čtenář umí počítat s *přirozenými* čísly

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \ldots$$

Základy této znalosti si každý z nás přináší už z předškolního věku: Takřka souběžně s tím, jak si dítě osvojuje mateřský jazyk, seznamuje se i s významem malých přirozených čísel. Počítání s přirozenými čísly nás učí ovšem až národní škola. Přirozená čísla sčítáme, odčítáme, násobíme a dělíme a později se seznámíme i s umocňováním a odmocňováním. Všechny tyto početní výkony se řídí určitými pravidly; tak např. pro sčítání platí zákon komutativní $a + b = b + a$ a zákon asociativní $(a + b) + c = a + (b + c)$ apod. Budeme zde předpokládat, že jsou čtenáři ze školy známy i všechny tyto aritmetické zákony.

V této knížce si budeme všímat dělitelnosti přirozených čísel; je však účelné rozšířit obor všech přirozených čísel ještě o číslo 0. Čísla 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,... se stručně nazývají *celá nezáporná* čísla.

Ve škole i v praxi zapisujeme čísla obvykle v tzv. *desítkové* (*dekadické*) soustavě, přičemž používáme deseti *číslic* (*cifer*) 0, 1,2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. V této knížce budeme mluvit vesměs jen o číslech vyjádřených v desítkové soustavě a nebude tedy nutné, abychom v jednotlivých případech zvlášť zdůrazňovali, že se jedná o soustavu desítkovou.

V řadě školských i olympijských úloh je třeba dobře znát různé vlastnosti čísel vyplývající z vyjádření v desítkové soustavě. Zopakujme si proto tuto školskou partii na příkladech 1 a 2.

Příklad 1. Dvojciferné číslo má ciferný součet rovný číslu 9. Jestliže vzájemně vyměníme obě číslice, dostaneme nové číslo, které je o 45 větší než číslo původní. Určete původní číslo.

Řešení. Jestliže hledané dvojciferné číslo má první číslici x a druhou y, potom toto číslo má ciferný součet $x + y = 9$. Ze školy víme, že hledané číslo je možno vyjádřit ve tvaru $10x + y$. Vyměníme-li vzájemně obě číslice, dostaneme nové číslo, které má první číslici y a druhou x; toto nové číslo je možno tedy psát ve tvaru $10y + x$. Podle podmínek uvedených v textu příkladu je číslo $10y + x$ o 45 větší než číslo $10x + y$, což můžeme vyjádřit rovnicí $10y + x = 10x + y + 45$. Tuto rovnici už snadno upravíme na tvar $9y - 9x = 45$ čili $y - x = 5$.

Zatím jsme tedy našli soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých

$$\begin{aligned} x + y &= 9, \\ y - x &= 5. \end{aligned}$$

Sečtením dostaneme $2y = 14$ čili $y = 7$, odečtením vychází $2x = 4$ čili $x = 2$.

Odpověď. Hledané dvojciferné číslo je číslo 27.*)

Další příklad, kterým se zde budeme zabývat, je zajímavý tím, že vede k sestavení jedné lineární rovnice o dvou neznámých. To vypadá na první pohled jako nedostatečně určená úloha, neboť ze školy víme, že rovnice tohoto druhu má nekonečně mnoho řešení. Náš příklad je však zvláštním

*) Přenecháváme čtenáři, aby se zkouškou přesvědčil, že číslo 27 skutečně vyhovuje podmínkám popsaným v příkladě 1.

případem takovéto rovnice a touto zvláštností je právě zajímavý.

Příklad 2. Trojciferné číslo je zakončeno číslicí 4. Přesuneme-li tuto číslici na první místo (a ostatní dvě číslice ponecháme beze změny), dostaneme číslo, které je o 81 menší než číslo původní. Určete původní číslo.

Řešení. První číslici hledaného čísla označme x a druhou číslici y. Hledané číslo má tedy tvar $100x + 10y + 4$. Přesuneme-li číslici 4 na první místo, vznikne nové číslo $400 + 10x + y$, které je o 81 menší než číslo původní. Tuto okolnost můžeme nyní vyjádřit rovnicí

$$400 + 10x + y = 100x + 10y + 4 - 81.$$

Sestavili jsme tedy jednu lineární rovnici o dvou neznámých a v našem příkladě nejsou již pro hledané číslo popsány žádné další podmínky, kterých bychom při řešení mohli využít. To však nevadí, neboť naše rovnice se snadnou úpravou převede na tvar $90x + 9y = 477$. Dělíme-li obě strany této rovnice devíti, vychází $10x + y = 53$. Na levé straně této rovnice máme vlastně vyjádřeno dvojciferné číslo, jehož první číslice je x a druhá y, na druhé straně této rovnice je pak napsáno dvojciferné číslo 53. Z této úvahy vyplývá, že platí $x = 5$, $y = 3$.

Odpověď. Našli jsme číslo 534.*)

Úlohy

1. Které n-ciferné číslo ($n \geq 2$) má první číslici x, druhou číslici y a ostatní číslice rovné nule?

*) Zkoušku zde opět přenecháváme čtenáři.

2. Které dvojciferné číslo se po vzájemné výměně obou číslic zvětší o 37?

3. Je-li číslo zakončeno číslicí 5, pak jeho druhá mocnina je zakončena dvojčíslím 25. Dokažte!

4. Čtyřciferné číslo je zakončeno číslicí 2. Přesuneme-li tuto číslici na první místo (a ostatní tři číslice ponecháme beze změny), dostaneme číslo, které je o 234 větší než číslo původní. Určete původní číslo.

2.

DĚLENÍ SE ZBYTKEM A DĚLENÍ BEZE ZBYTKU

●

Ve středoškolské aritmetice můžeme sledovat dva směry: můžeme buď více zdůrazňovat numerické počítání, nebo se více přiklonit k teorii. Než přikročíme k numerickým příkladům na dělení dvou přirozených čísel, připomeňme si přesný matematický význam tohoto početního výkonu. Jsou-li dána libovolná dvě přirozená čísla a, b, potom vždycky je možno najít dvě celá nezáporná čísla k, r tak, že platí

$$a = bk + r\,, \qquad 0 \leqq r < b\,. \qquad (1)$$

Dvojice čísel k, r je čísly a, b určena jednoznačně. Úloze, ve které se má k dané dvojici přirozených čísel a, b najít dvojice celých nezáporných čísel k, r splňujících vztahy (1), se říká *dělení;* číslo a je dělenec, číslo b je dělitel. Všimněme si nyní podrobněji čísla r. Je-li $r > 0$, mluvíme o *dělení se zbytkem.* V tomto případě se číslo k nazývá *částečný podíl* a číslo r je *zbytek.* Jestliže je $r = 0$, mluvíme o *dělení beze zbytku*; číslo k se pak nazývá *podíl.*

Příklad 3. Vypočtěte částečný podíl a zbytek, je-li dělenec $a = 100$, dělitel $b = 27$.

Řešení. Pro $a = 100$, $b = 27$ snadno nalezneme, že je $k = 3$, $r = 19$. Platí totiž $100 = 27.3 + 19$, přičemž $0 < 19 < 27$. Numerický výpočet jsme ze školy zvyklí vyjadřovat např. ve tvaru $100 : 27 \;|\; \underline{3}$,

19

z něhož je též patrno, jak vyšel částečný podíl a jak zbytek.

Dále si všimněme podrobněji dělení beze zbytku. Jestliže platí $a = b.k$, pak říkáme, že číslo b *dělí* číslo a nebo že číslo b je *dělitelem**) čísla a nebo že číslo a je *dělitelné* číslem b nebo konečně též, že číslo a je *násobkem* čísla b. Pro stručnost vyjadřování je účelné rozšířit dělitelnost i na číslo nula: podle této rozšířené definice platí, že každé přirozené číslo dělí číslo 0.

Příklad 4. Které z čísel 1352 a 1757 je dělitelné sedmi?

Řešení. Číslo 1352 není dělitelné sedmi; platí totiž $1352 = 7.193 + 1$. Číslo 1757 je sedmi dělitelné, neboť $1757 = 7.251$.

Vyjádření čísla pomocí částečného podílu a zbytku můžeme někdy s výhodou užít pro zkrácení numerického výpočtu, jak si to ukážeme v dalším příkladě.

Příklad 5. Ukažte, že číslo $2^{100} + 10$ je dělitelné třinácti.

Řešení. Nejprve budeme upravovat mocninu 2^{100}. Platí $2^{100} = (2^4)^{25} = 16^{25} = (13.1 + 3)^{25}$. Další umocňování zde nemusíme až do konce provádět. Podle binomické věty**) je totiž $(13 + 3)^{25} = \binom{25}{0}.13^{25} + \binom{25}{1}.13^{24}.3 + \binom{25}{2}.13^{23}.$ $.3^2 + \ldots + \binom{25}{24}.13^1.3^{24} + \binom{25}{25}.3^{25}$.

*) Prosím čtenáře, aby si uvědomil, že samotné slovo „dělitel" má v našich úvahách dva odlišné významy. Záleží ovšem vždy na spojení, v jakém toto slovo užijeme. To ostatně není celkem nic divného, vždyť i slova „dělení" zde užíváme rovněž ve dvou různých významech.

**) Připomeňme si definici kombinačního čísla. Platí

$$\binom{n}{k} = \frac{n.(n-1).(n-2)\ldots(n-k+1)}{1\;.\;2\;.\;3\;\ldots\;k}.$$

Posledního členu na pravé straně si na okamžik nevšímejme. Vidíme, že ze všech zbývajících členů na straně pravé je možno vytknout číslo 13, platí tedy $(13 + 3)^{25} = 13a + 3^{25}$, kde a je vhodné přirozené číslo*).

Dále si všimněme mocniny 3^{25}, která se vyskytuje ve výsledku dosud nalezeném. Platí $3^{25} = 3^{24}.3^1 = (3^3)^8.3 = 27^8.3 = (13.2 + 1)^8.3$. Opět budeme používat binomické poučky a užijeme obdobného obratu jako při úpravě mocniny 16^{25}. Výraz $(13.2 + 1)^8$ můžeme vyjádřit ve tvaru $13b + 1^8$, kde b je vhodné přirozené číslo (jehož výpočtem se zde opět nemusíme zabývat). Dostali jsme tedy, že $3^{25} = (13b + 1).3 = 13.3b + 3$. Vrátíme-li se k původně danému číslu $2^{100} + 10$ a použijeme-li všech dílčích výsledků, máme

$$2^{100} + 10 = 13a + (13.3b + 3) + 10 = 13(a + 3b + 1)\,.$$

Odpověď. Číslo $2^{100} + 10$ je skutečně dělitelné třinácti.

Často se vyskytuje úloha, ve které se má dokázat, že daný mnohočlen $f(n)$ je pro všechna přirozená čísla n dělitelný některým pevně daným přirozeným číslem. Tuto problematiku si ukážeme na příkladech 6 a 7.

Příklad 6. Je-li n libovolné přirozené číslo, pak číslo $n^3 - n$ je dělitelné šesti. Dokažte.

Řešení. Dokážeme nejprve, že číslo $n^3 - n$ je dělitelné třemi. Dvojčlen $n^3 - n$ upravujeme postupně takto

$$n^3 - n = n.(n^2-1) = n.(n - 1).(n + 1) = \\ = (n - 1).n.(n + 1)\,.$$

Rozložili jsme tedy výraz $n^3 - n$ v součin tří činitelů;

*) Nebudeme se zde zabývat přesným výpočtem čísla a, neboť to je pro naše účely zbytečné.

tito činitelé jsou tři po sobě jdoucí celá nezáporná čísla $n - 1, n, n + 1$. Probíráme-li po řadě všechna celá nezáporná čísla, je známo, že každé třetí z nich je dělitelné třemi. Protože čísla $n - 1, n, n + 1$ tvoří trojici po sobě jdoucích celých nezáporných čísel, musí být jedno z nich dělitelné třemi a proto také jejich součin $n^3 - n$ je dělitelný třemi.

Dále dokážeme, že číslo $n^3 - n$ je dělitelné dvěma. Probíráme-li po řadě všechna celá nezáporná čísla, střídá se vždy číslo sudé s číslem lichým.*) Z toho plyne, že alespoň jedno z čísel $n - 1, n, n + 1$ je sudé, a tedy také součin těchto čísel je sudý.

Protože pro libovolné číslo n je rozdíl $n^3 - n$ dělitelný jednak třemi, jednak dvěma, je tento rozdíl (jak jistě víte ze školy) nutně dělitelný šesti. To je právě tvrzení, které jsme měli dokázat.

Jiné řešení. Čtenář, který zná princip matematické indukce,**) může naši úlohu řešit takto:

Pro $n = 1$ platí $n^3 - n = 1^3 - 1 = 0$; číslo 0 je dělitelné šesti, takže tvrzení v tomto případě platí.

Předpokládejme, že tvrzení, které máme dokázat, platí pro některé přirozené číslo n, a budeme je dokazovat pro přirozené číslo $n + 1$. Jestliže ve výrazu $n^3 - n$ místo n píšeme $n + 1$, dostáváme $(n + 1)^3 - (n + 1)$. Upravujeme tento výsledek takto:

$$(n + 1)^3 - (n + 1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 =$$
$$= (n^3 - n) + (3n^2 + 3n) = (n^3 - n) + 3n.(n + 1)\,.$$

Výraz $3n.(n + 1)$ je dělitelný třemi, snadno však na-

*) Ze školy víme, že číslo *sudé* je to, které je dělitelné dvěma, a číslo *liché* to, které není dělitelné dvěma.

**) Poučení o matematické indukci najdete např. v knížce I. S. Sominského „Metoda matematické indukce“ (1. sv. Populárních přednášek o matematice, SNTL).

hlédneme, že je dělitelný také dvěma. Je dělitelný tedy šesti. Výraz $n^3 - n$ je dělitelný šesti, neboť to je předpoklad, ze kterého jsme vyšli. Je tedy také součet těchto dvou výrazů dělitelný šesti. Tento součet je však (jak víme) roven $(n + 1)^3 - (n + 1)$. Z předpokladu, že naše tvrzení platí pro některé přirozené číslo n, plyne, že toto tvrzení platí též pro přirozené číslo $n + 1$. Důkaz matematickou indukcí je tím podán.

Příklad 7. je obdobný tomu, který jsme právě rozřešili, avšak při jeho řešení budeme potřebovat složitějších matematických obratů.

Příklad 7. Je-li n libovolné přirozené číslo, pak číslo $n^5 - n$ je dělitelné pěti. Dokažte.

Řešení. Rozdíl $n^5 - n$ upravujme takto: $n^5 - n = n.(n^4 - 1) = n.(n^2 - 1).(n^2 + 1) = n.(n - 1).(n + 1).(n^2 + 1)$. Nepodařilo se nám zde rozložit uvažované číslo v součin pěti po sobě jdoucích celých čísel (pak bychom totiž tvrzení snadno dokázali obdobným postupem, jak to bylo provedeno v předcházejícím příkladě). Pomůžeme si však tímto obratem:

Uvažme, jak se liší součin $(n - 1).n.(n + 1).(n + 2).(n + 3)$ od našeho součinu $(n - 1).n.(n + 1).(n^2 + 1)$. Jejich rozdíl je

$$(n - 1).n.(n + 1).[(n + 2).(n + 3) - (n^2 + 1)] =$$
$$= (n - 1).n.(n + 1).[n^2 + 5n + 6 - n^2 - 1] =$$
$$= (n - 1).n.(n + 1).(5n + 5) = 5.(n - 1).n.(n + 1)^2.$$

Je vidět, že tento rozdíl je dělitelný pěti. Součin $(n - 1).n.(n + 1).(n + 2).(n + 3)$ je však zřejmě dělitelný pěti, neboť je to součin pěti po sobě jdoucích celých nezáporných čísel. Z úvahy o rozdílu proto vyplývá, že také náš součin $(n-1).n.(n+1).(n^2+1)$ je dělitelný pěti. Tím je důkaz proveden.

Přenecháváme čtenáři, aby i v tomto příkladě podal jiné řešení, při kterém se používá principu matematické indukce.

Poznamenejme, že příklady 6 a 7 jsou vlastně speciálním tvarem jedné slavné číselněteoretické věty, která se nazývá *malá věta Fermatova.**) Francouzský právník a matematik *Pierre de Fermat* (1601—1665) si dobyl předního místa v matematice svými pracemi z teorie čísel a patří mezi první pěstitele analytické geometrie.

V dalším příkladě budeme opět používat matematické indukce.

Příklad 8. Je-li n libovolné přirozené číslo, pak číslo $6^{2n}-8$ je dělitelné sedmi. Dokažte.

Řešení. Důkaz podáme matematickou indukcí.

Pro $n=1$ dostáváme

$6^{2n}-8=6^2-8=36-8=28$,

takže v tomto případě vychází číslo dělitelné sedmi.

Předpokládejme nyní, že naše tvrzení platí pro jisté přirozené číslo n a dokážeme, že platí také pro přirozené číslo $n+1$. Jestliže ve výrazu $6^{2n}-8$ místo n píšeme $n+1$, dostáváme výraz $6^{2(n+1)}-8$. Upravme

$$6^{2(n+1)}-8=6^{2n+2}-8=6^{2n}.6^2-8=$$
$$=6^{2n}.36-8=(6^{2n}-8)+35.6^{2n}.$$

Podle předpokladu je číslo $6^{2n}-8$ dělitelné sedmi; je vidět, že také číslo 35.6^{2n} je sedmi dělitelné, takže i součet

$$(6^{2n}-8)+35.6^{2n}$$

je dělitelný sedmi. To však znamená, že jsme provedli i druhý indukční krok a důkaz tvrzení je tím podán.

*) Tato věta zní: *Je-li p libovolné prvočíslo a n libovolné přirozené číslo, pak n^p-n je dělitelné číslem p.*

Úlohy

5. Ve škole jste se učili znaky dělitelnosti dvěma, třemi, čtyřmi, pěti, osmi, devíti, desíti a jedenácti. Zopakujte si tyto poučky.

6. Určete nejmenší přirozené číslo dělitelné jedenácti, které je zapsáno číslicemi vesměs různými.

7. Určete všechna přirozená čísla, jimiž je dělitelné číslo 60.

8. Vyhledejte nejmenší přirozené číslo; které je dělitelné každým z čísel 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

9. Každé celé nezáporné číslo je možno vyjádřit v právě jednom ze tvarů $5k$, $5k + 1$, $5k + 2$, $5k + 3$, $5k + 4$, kde k je vhodné celé nezáporné číslo. Dokažte.

10. Ukažte, že číslo $172^4 + 35^{313}$ je dělitelné sedmnácti.

11. Jsou-li a, b libovolná dvě přirozená čísla, pak číslo $a^3 + b^3$ je dělitelné číslem $a + b$; dokažte.

12. Pátá mocnina libovolného přirozeného čísla je zakončena stejnou číslicí jako číslo, které se umocňovalo. Zdůvodněte, proč je tomu tak.

13. Je-li n libovolné přirozené číslo, pak číslo $n^7 - n$ je dělitelné sedmi. Dokažte.

14. Číslo $a_n = 2 . 3^{5n-4} + 5$ je dělitelné jedenácti pro každé přirozené číslo n. Dokažte.

3.

PRVOČÍSLA A ČÍSLA SLOŽENÁ

●

Číslo 1 je dělitelné jediným přirozeným číslem, totiž právě číslem 1. Zvolíme-li libovolné přirozené číslo $n > 1$, pak vždycky existují alespoň dvě přirozená čísla, která dělí číslo n. Jsou to čísla 1 a n, kterým říkáme *samozřejmí dělitelé* čísla n. Přirozené číslo $p > 1$, které kromě samozřejmých dělitelů není už dělitelné žádným jiným přirozeným číslem, se nazývá *prvočíslo*. Přirozené číslo $s > 1$, které není prvočíslo, se nazývá *složené*. Ze školy jistě znáte příklady prvočísel

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37,...

i příklady čísel složených

4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22,...

Studium prvočísel patří mezi nejstarší a také nejobtížnější otázky, jimiž se matematikové zabývají. Vždyť už starořecká matematika znala důkaz tvrzení, že prvočísel je nekonečně mnoho. Tato matematická poučka je totiž obsažena a dokázána ve známém díle starořeckého matematika *Euklida*, který žil v Alexandrii kolem roku 300 před n. l. Euklidův spis „Základy“ obsahoval 13 knih a pracovali na něm vedle Euklida už někteří jeho předchůdci (např. *Eudoxos*, *Theaitetos* aj.)*)

*) Snad vás bude zajímat tato malá historka, kterou dějepisec poznamenal o setkání Euklida s faraonem Ptolemaiem I. Farao prý požádal jednou Euklida, aby mu vyložil jednoduchým způsobem základy geometrie. Euklides odpověděl: „Není pro krále soukromé cesty ke geometrii“. Na vysvětlenou uveďme, že králové mívali ke svým komnatám v palácích soukromé schodiště, jehož nesměl nikdo jiný používat.

Hledání nepříliš velkých prvočísel se někdy provádí metodou, která se nazývá *Eratosthenovo síto.**) Chceme-li určit všechna prvočísla, která jsou menší nebo nejvýše rovna danému přirozenému číslu a (většímu než 1), postupujeme takto:

Vypíšeme nejprve po řadě všechna přirozená čísla od čísla 1 do čísla a. Číslo 1, které nepočítáme ani mezi prvočísla ani mezi čísla složená, ponecháme stranou, a další číslo, tj. číslo 2, podtrhneme. Nyní budeme v napsané posloupnosti vyškrtávat každé druhé přirozené číslo tak dlouho, dokud všechna napsaná čísla nevyčerpáme. V dalším kroku se vrátíme opět na začátek napsané posloupnosti a vyhledáme to první číslo, které není ani podtrhnuto ani vyškrtnuto; je to zřejmě číslo 3, a toto číslo tedy podtrhneme. Dále budeme vyškrtávat každé třetí číslo v napsané posloupnosti (pokud ovšem toto číslo už nevypadlo při předcházejícím vyškrtávání). Znovu se vrátíme na začátek posloupnosti, podtrhneme číslo 5 a začneme vyškrtávat každé páté (dosud nevyškrtnuté) přirozené číslo. Tyto kroky opakujeme tak dlouho, dokud je to vůbec možné, tj. dokud nejsou všechna napsaná čísla buď podtržena nebo vyškrtnuta. Dá se snadno ukázat, že tímto postupem najdeme všechna prvočísla, která jsou $\leqq a$. Pro $a = 19$ vypadá konečný zápis takto (tučně = vyškrtnuto):

1, $\underline{2}$, $\underline{3}$, **4**, $\underline{5}$, **6**, $\underline{7}$, **8**, **9**, **10**, $\underline{11}$, **12**, $\underline{13}$, **14**, **15**, **16**, $\underline{17}$, **18**, $\underline{19}$.

Je patrné, že v případě, je-li číslo a je dosti veliké, je metoda Eratosthenova síta velmi pracná. Ostatně studium velkých prvočísel patří mezi nejobtížnější otázky jak po stránce teoretické, tak i po stránce praktické. Práci si můžeme mnohdy usnadnit tím, že nahlédneme do některých

*) Tato metoda je nazvána podle řeckého matematika *Eratosthena* z Kyrene (III. stol. př. n. l.).

matematických tabulek, které obsahují též tabulku prvočísel. Tak např. ve školních matematických tabulkách je tabulka všech prvočísel menších než číslo 1000, zatímco Valouchovy Pětimístné tabulky logaritmické uvádějí všechna prvočísla $\leqq 5\,309$. Některé cizojazyčné tabulky dávají možnost seznámit se s prvočísly ještě většími. Tak např. *I. G. Popov* vydal r. 1952 v Moskvě knížku s názvem Математические таблицы, kde jsou uvedena všechna prvočísla menší než 10 000.*)

Všechny uvedené tabulky mohou dobře sloužit ke školským účelům, ale pro účely vědecké je někdy potřebí jít ještě dále. V poslední době bylo při sestavování tabulky prvočísel užito nejmodernějších technických metod. Tak švédští matematikové vypočetli roku 1957 na elektronkovém počítači BESK, že číslo $2^{3217} - 1$ je prvočíslo. Tento číselný obr, který má 969 číslic, je největším prvočíslem, které dnes známe. Pokud se týče soustavné tabulky všech prvočísel, tu nejdále sahá tabulka, kterou r. 1959 připravili *C. L. Baker* a *F. J. Gruenberger*. Tabulka těchto autorů je obsažena na mikrofilmu a je v ní systematicky vypsáno šest miliónů prvočísel. Poslední (šestimiliónté) prvočíslo, které je zde uvedeno, je číslo $p_{6\,000\,000} = 104\,395\,301$.

Nemáme-li po ruce tabulky prvočísel, musíme často výpočtem rozhodovat o tom, zda dané přirozené číslo je prvočíslo nebo číslo složené. V příkladě 9 si připomeneme jednu pomocnou metodu, která je při takových výpočtech velmi užitečná.

Příklad 9. Je-li číslo m složené, pak je vždy možno najít prvočíslo $p \leqq \sqrt{m}$, které dělí číslo m.

Řešení. Každé složené číslo m můžeme vyjádřit ve tvaru

*) Posledně jmenované tabulky jsou zajímavé také tím, že v nich najdeme rozklad v prvočinitele pro každé přirozené číslo $\leqq 4850$.

$m = xy$, kde $x > 1, y > 1$, $x \geqq y$. Kdyby bylo $y > \sqrt{m}$, bylo by též $x > \sqrt{m}$ a z těchto dvou nerovností by plynulo $xy > (\sqrt{m})^2 = m$ tedy $xy > m$. To však je spor s předpokladem $xy = m$, takže o čísle y platí $y \leqq \sqrt{m}$. Je-li y prvočíslo, jsme s hledáním hotovi. Je-li y číslo složené, pak je možno (jak víme ze školy) najít prvočíslo p, které dělí y; přitom je $p < y$ a tedy i $p < \sqrt{m}$. Číslo p je tedy tím prvočíslem, jehož existenci jsme měli v dané úloze prokázat.

V dalších dvou příkladech si ukážeme, jak se prakticky využije poznatku, se kterým jsme se seznámili v příkladě 9.

Příklad 10. Rozhodněte, zda číslo 827 je prvočíslo nebo číslo složené.

Řešení. Přesvědčíme se, že číslo 827 je prvočíslo. K tomu je třeba zjistit, že toto číslo není dělitelné žádným prvočíslem menším než 827. Při tomto zkoumání stačí však přezkoušet jen ta prvočísla, která jsou menší než $\sqrt{827}$, jak plyne z předcházejícího příkladu. Platí $\sqrt{827} \doteq 28{,}7$, takže budeme zde zkoušet jen dělitelnost prvočísly 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 a 23.

Prvočísly 2, 3, 5 a 11 není naše číslo dělitelné, jak plyne ze znaků dělitelnosti probíraných na střední škole. Zbývají nám prvočísla 7, 13, 17, 19 a 23, u nichž musíme dělitelnost prověřit tím, že provedeme příslušné dělení. Tak dělení 827 : 7 vychází se zbytkem 1, dělení 827 : 13 dává zbytek 8 a také zbývající tři případy ukazují, že číslo 827 není dělitelné prvočísly 17, 19, 23.

Odpověď. Číslo 827 je prvočíslo.

Příklad 11. Určete nejmenší čtyřciferné číslo, které je prvočíslem.

Řešení. Nejmenší čtyřciferné číslo vůbec je číslo 1000; je to zřejmě číslo složené. V dalších úvahách si pochopitelně nemusíme všímat čísel sudých. Číslo 1001 je dělitelné jedenácti, takže je složené. Dále platí $1003 = 17 . 59$, číslo 1005 je dělitelné pěti a $1007 = 19 . 53$. Ve všech těchto případech šlo tedy o čísla složená. Snadno se přesvědčíme, že číslo 1009 je prvočíslo. Přitom budeme postupovat obdobným způsobem, s kterým jsme se seznámili při řešení příkladu 10.

Odpověď. Nejmenší čtyřciferné prvočíslo je číslo 1009.

Ze školy jistě víte, že každé složené číslo je možno napsat jako součin několika prvočísel, a to až na pořadí činitelů jediným způsobem. Prvočísla, jejichž součinem je dané složené číslo, jsou tzv. *prvočinitelé.* Vyjádříme-li dané složené číslo jako součin mocnin prvočinitelů, říkáme, že jsme provedli jeho *rozklad v prvočinitele.*

Při řešení některých úloh je třeba nejprve provést rozklad složeného čísla v prvočinitele, jak uvidíme v dalším příkladě.

Příklad 12. Určete nejmenší přirozené číslo, kterým je třeba znásobit číslo 1224, abychom dostali druhou mocninu přirozeného čísla.

Řešení. Nejprve rozložíme číslo 1224 v prvočinitele; platí $1224 = 2^3 . 3^2 . 17$. Prvočísla 2 a 17 jsou zde umocněna lichým exponentem, proto musíme číslo 1224 znásobit alespoň součinem $2 . 17$, abychom dostali druhou mocninu přirozeného čísla. Tato mocnina je pak rovna $2^4 . 3^2 . 17^2 = (2^2 . 3 . 17)^2 = 204^2$.

Odpověď. Nejmenší přirozené číslo, kterým musíme násobit, je číslo 34.

Prvočísla jsou v posloupnosti přirozených čísel rozložena velmi nepravidelně. V některých intervalech pozorujeme, že je tu nakupeno velmi mnoho prvočísel, jinde můžeme opět najít velikou skupinu vytvořenou výhradně z čísel složených. O této otázce nás trochu poučí další příklad.

Příklad 13. Ukažte, že je možno najít tisíc po sobě jdoucích přirozených čísel, jež jsou vesměs složená.

Řešení. Příkladem takové skupiny tisíce po sobě jdoucích složených čísel je skupina*)
$1001! + 2,\ 1001! + 3,\ 1001! + 4,\ 1001! + 5, \ldots,$
$1001! + 1000, 1001! + 1001.$

Číslo $1001! + 2$ je zřejmě dělitelné dvěma, číslo $1001! + 3$ třemi a konečně číslo $1001! + 1001$ je dělitelné číslem 1001; všechna tato čísla jsou tedy složená.

Poznamenejme, že z naší úvahy nijak nevyplývá, že v posloupnosti všech přirozených čísel existuje mezi prvočísly mezera obsahující právě 1000 čísel složených. V předcházející úvaze jsme totiž nezkoumali, zda číslo $1001! + 1$ je složené nebo není, a na první pohled je patrno, že číslo $1001! + 1002$ je složené (je totiž sudé).

Závěrem tohoto paragrafu si všimněme jedné aritmetické posloupnosti, v níž po sobě následuje pět prvočísel.

Příklad 14. Pět prvočísel tvoří pět po sobě jdoucích členů aritmetické posloupnosti s diferencí $d = 6$. Určete tato prvočísla.

Řešení. Nejprve ukážeme toto: Je-li a libovolné celé nezáporné číslo, pak alespoň jedno z čísel

$$a, \quad a + 6, \quad a + 12, \quad a + 18, \quad a + 24 \qquad (1)$$

*) Připomeňme, že zápis $n!$ (čti n faktoriál) znamená součin všech přirozených čísel počínaje číslem 1 a konče číslem n; je tedy např. $4! = 1.2.3.4 = 24$.

je dělitelné pěti. Podle cvičení 9 je možno vyjádřit číslo a v právě jednom ze tvarů $5k$, $5k + 1$, $5k + 2$, $5k + 3$, $5k + 4$. Je-li $a = 5k$, pak první z čísel v řádku (1) je dělitelné pěti. Je-li $a = 5k + 1$, pak $a + 24 = 5k + 25 = 5(k + 5)$, takže poslední z čísel v (1) je pěti dělitelné. Obdobně pro $a = 5k + 2$ vychází $a + 18 = 5(k + 4)$, pro $a = 5k + 3$ je $a + 12 = 5(k + 3)$ a konečně pro $a = 5k + 4$ máme $a + 6 = 5(k + 2)$.

Ukázali jsme tedy, že v řádku (1) je jedno z čísel dělitelné pěti. Podle podmínek uvedených v textu příkladu chceme, aby všechna čísla v řádku (1) byla prvočísla. Z toho vyplývá, že číslo, pro něž jsme před chvílí prokázali dělitelnost pěti, je rovno právě číslu 5. Vzhledem k tomu, že $d = 6$, stojí číslo 5 nutně na prvním místě mezi uvažovanými prvočísly, takže $a = 5$, $a + 6 = 11$, $a + 12 = 17$, $a + 18 = 23$, $a + 24 = 29$.

Zkouška ukazuje, že všech pět nalezených čísel jsou prvočísla.

Odpověď. Úloze vyhovuje jediná pětice prvočísel, totiž 5, 11, 17, 23, 29.*)

Úlohy

15. Pomocí Eratosthenova síta určete všechna prvočísla menší než číslo 100.

16. Rozhodněte zda číslo 2437 je prvočíslo nebo číslo složené. Obdobnou otázku zodpovězte též pro číslo 2771.

17. Rozložte v prvočinitele a) 3248; b) 2418; c) 3819.

*) Čtenář se snadno přesvědčí, že šestý člen uvažované aritmetické posloupnosti již není prvočíslo.

18. Vyhledejte největší prvočíslo, jímž je dělitelné číslo 4812.

19. Určete nejmenší přirozené číslo, kterým je třeba znásobit číslo 600, abychom dostali třetí mocninu přirozeného čísla.

20. Rozhodněte, zda číslo $10! + 1$ je prvočíslo nebo číslo složené.

21. Určete největší trojciferné prvočíslo.

22. *Prvočíselnými dvojčaty* nazýváme takovou dvojici prvočísel (p, q), o nichž platí $q = p + 2$. Vyhledejte všechna prvočíselná dvojčata menší než 100.

23. V posloupnosti přirozených čísel není možno najít mezeru mezi prvočísly obsahující právě tisíc čísel složených. Dokažte.

24. Pět prvočísel tvoří pět po sobě jdoucích členů aritmetické posloupnosti s diferencí $d = 12$. Určete tato prvočísla.

25. Je možno najít pět prvočísel, která tvoří pět po sobě jdoucích členů aritmetické posloupnosti s diferencí $d = 8$?

26. Každé prvočíslo větší než 3 je možno vyjádřit buď ve tvaru $6k + 1$ nebo ve tvaru $6k + 5$, kde k je vhodné celé nezáporné číslo. Dokažte.

27. a) Rozhodněte, zda každé přirozené číslo větší než 3, které je tvaru $6k + 1$, je prvočíslem. b) Obdobnou otázku zodpovězte též pro tvar $6k + 5$.

28. Určete nejmenší složené číslo, které není možno vyjádřit jako součet dvou prvočísel.

4.

NEJVĚTŠÍ SPOLEČNÝ DĚLITEL A NEJMENŠÍ SPOLEČNÝ NÁSOBEK

●

Společným dělitelem přirozených čísel $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ nazýváme to přirozené číslo *d*, kterým je každé z čísel $a_1, a_2, \ldots, a_k$ dělitelné. Je-li dána skupina přirozených čísel $a_1, a_2, a_3, \ldots a_k$, je vždy možno vyhledat největší z jejich společných dělitelů. Toto číslo se nazývá *největší společný dělitel* čísel $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ a označuje se D $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k)$.

Největší společný dělitel dvou daných přirozených čísel se hledá buď rozkladem v prvočinitele nebo metodou postupného dělení, zvanou též *Euklidův algoritmus*. Oba způsoby si ukážeme v příkladech.

Příklad 15. Určete D (165, 198).

Řešení. V příkladě jsou dána malá čísla, která snadno rozložíme v prvočinitele. K určení D (165, 198) užijeme tedy metody první.

Obě daná čísla rozložíme v prvočinitele. Platí $165 = 3.5.11$, $198 = 2.3^2.11$. Ze získaných prvočinitelů vybereme všechny společné prvočinitele a každého z nich vezmeme s nejmenším mocnitelem, jaký se vyskytuje v nalezených rozkladech; výsledná čísla znásobíme. Vychází tedy D $(165, 198) = 3.11 = 33$.

Příklad 16. Určete D (9694, 4181).

Řešení. Zde je rozklad v prvočinitele dosti obtížný, proto použijeme metody postupného dělení. Nejprve dělíme větší číslo číslem menším, potom menší číslo dělíme prvním zbytkem, dále první zbytek dělíme druhým zbytkem a podobně pokračujeme tak dlouho, až dostaneme podíl beze zbytku. První dělitel, při kterém vyjde dělení beze zbytku, je hledaný největší společný dělitel.

Pro výpočet D (9694, 4181) dostáváme postupně

$$\begin{aligned} 9694 &= 4181 \, . \, 2 + 1332, \\ 4181 &= 1332 \, . \, 3 + 185, \\ 1332 &= 185 \, . \, 7 + 37, \\ 185 &= 37 \, . \, 5. \end{aligned}$$

Je tedy D (9694, 4181) = 37.

Poznamenejme ještě, že metoda postupného dělení je pro vyhledání největšího společného dělitele zvlášť vhodná, chceme-li při výpočtu použít běžných kancelářských počítacích strojů. Na těchto strojích se totiž dělení provádí velmi snadno a celý postup — i při dosti velkých číslech — provedeme tak ve velmi krátké době.

Platí-li D $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k) = 1$ říkáme, že čísla $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ jsou *nesoudělná.* I tento pojem si pocvičíme na dvou příkladech.

Příklad 17. Kolika způsoby je možno vyjádřit číslo 60 jako součin dvou nesoudělných přirozených čísel?

Řešení. Dělitelé čísla 60 jsou po řadě čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60. Platí

$60 = 1 \, . \, 60$, $\quad 60 = 2 \, . \, 30$, $\quad 60 = 3 \, . \, 20$, $\quad 60 = 4 \, . \, 15$,
$60 = 5 \, . \, 12$, $\quad 60 = 6 \, . \, 10$, $\quad 60 = 10 \, . \, 6$, $\quad 60 = 12 \, . \, 5$,
$60 = 15 \, . \, 4$, $\quad 60 = 20 \, . \, 3$, $\quad 60 = 30 \, . \, 2$, $\quad 60 = 60 \, . \, 1$.

Je patrné, že rozklady $60 = 2 \, . \, 30$, $60 = 6 \, . \, 10$, $60 =$

$= 10.6$, $60 = 30.2$ nevyhovují podmínkám naší úlohy.

Odpověď. Nehledíme-li k pořadí činitelů, je možno číslo 60 vyjádřit čtyřmi způsoby jako součin dvou nesoudělných přirozených čísel. Kdybychom ovšem k pořadí činitelů přihlíželi, měla by tato úloha celkem osm řešení.

Příklad 18. Kolika způsoby je možno vyjádřit číslo 60 jako součet dvou nesoudělných přirozených čísel?

Řešení. Máme vyjádřit číslo 60 ve tvaru $60 = x + y$, kde x, y jsou nesoudělná čísla. Z tohoto vyjádření vyplývá, že také čísla 60 a x jsou nesoudělná. Kdyby totiž nesoudělná nebyla, dělil by jejich největší společný dělitel také číslo y, takže by ani čísla x, y nebyla nesoudělná.

Vyhledáme tedy nejprve všechna přirozená čísla x, která jsou menší než 60 a nesoudělná s číslem 60. Jsou to tato čísla:

1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 49, 53, 59.

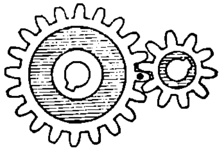
Docházíme tak k těmto součtům

$60 = 1 + 59$,	$60 = 7 + 53$,	$60 = 11 + 49$,
$60 = 13 + 47$,	$60 = 17 + 43$,	$60 = 19 + 41$,
$60 = 23 + 37$,	$60 = 29 + 31$,	$60 = 31 + 29$,
$60 = 37 + 23$,	$60 = 41 + 19$,	$60 = 43 + 17$,
$60 = 47 + 13$,	$60 = 49 + 11$,	$60 = 53 + 7$,
	$60 = 59 + 1$.	

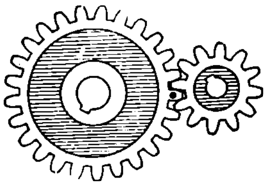
Odpověď. Nehledíme-li k pořadí sčítanců, je možno číslo 60 vyjádřit osmi způsoby jako součet dvou nesoudělných přirozených čísel. Přihlédneme-li ovšem k pořadí sčítanců, má tato úloha celkem 16 řešení.

Pojem největšího společného dělitele se často vyskytuje při numerickém počítání. Ukažme si jeden příklad, kdy se největšího společného dělitele využívá k tomu, aby se navrhl co nejvhodnější ozubený převod v určitém stroji.

Příklad 19. Na obr. 1 vidíme ozubený převod složený ze dvou kol: menší kolo má 10 zubů, kolo větší má 20 zubů. Srovnejme tento obrázek s obr. 2, který znázorňuje rovněž ozubený převod složený ze dvou kol. Kolo menší má zde 12 zubů, kolo větší 25 zubů. Který převod se méně opotřebuje při nahodilé vadě zubu?



Obr. 1.



Obr. 2.

Řešení. Abychom na danou otázku odpověděli, uvažujme takto: U první dvojice kol bude vždy týž zub většího kola (na obr. 1 jsme jej označili tečkou) zapadat do téže mezery kola menšího; nastane to totiž po každé druhé plné otáčce menšího kola, neboť D (10, 20) = 10. Bude-li tedy náhodou zub, který jsme v obr. 1 označili tečkou, nějak závadný, bude se i druhé, menší kolo, v určitém místě velmi rychle opotřebovávat.

V případě druhém je situace zcela jiná. Zub, který jsme na větším kole označili tečkou, zapadne znovu do téže mezery menšího kola teprve tehdy, až menší kolo vykoná 25 plných otáček, čísla 12 a 25 jsou totiž nesoudělná — platí D (12, 25) = 1. Nahodilá vada zubu se tak rovnoměrněji rozdělí při svém působení na všechny mezery menšího kola a soukolí se bude méně opotřebovávat. Tím jsme tedy našli odpověď na otázku, který z obou převodů je výhodnější.

Společným násobkem přirozených čísel $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ nazýváme to přirozené číslo n, které je dělitelné každým z čísel $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$. K dané skupině přirozených čísel $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ je vždy možno najít nejmenší z jejich společných násobků. Číslo, které takto nalezneme, se nazývá *nejmenší společný násobek* čísel $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ a označuje se $\mathrm{n}(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k)$.

Nejmenší společný násobek dvou přirozených čísel hledáme buď rozkladem v prvočinitele nebo pomocí jistého vztahu mezi nejmenším společným násobkem a největším společným dělitelem. Probereme si to opět na příkladech.

Příklad 20. Určete n(440, 660).

Řešení. Čísla 440 a 660 snadno rozložíme v prvočinitele; platí $440 = 2^3.5.11$, $660 = 2^2.3.5.11$. Abychom určili n(440, 660) vezmeme získané prvočinitele s největšími mocniteli, jaké se u nich v rozkladech vyskytují, a tato čísla znásobíme. Dostáváme tak $\mathrm{n}(440, 660) = 2^3.3.5.11 = 1320$.

Příklad 21. Určete n (9694, 4181).

Řešení. Určováním D (9694, 4181) jsme se už zabývali v příkladě 16. Konstatovali jsme tam, že rozklad v prvočinitele by byl pro daná čísla dosti pracný. Pro výpočet n (9694, 4181) použijeme zde této poučky:

Součin nejmenšího společného násobku a největšího společného dělitele dvou daných přirozených čísel je roven součinu těchto přirozených čísel.

Pro náš případ to znamená, že platí

$\mathrm{n}(9694, 4181) . \mathrm{D}(9694, 4181) = 9694 . 4181.$

Z příkladu 16 víme, že D (9694, 4181) = 37, takže

$$\mathrm{n}(9694, 4181) . 37 = 9694 . 4181$$

a dále

$$n(9694, 4181) = \frac{9694 . 4181}{37}.$$

Pro numerický výpočet je zbytečné provádět násobení v čitateli, platí totiž $4181 : 37 = 113$, takže
$n(9694, 4181) = 9694 . 113 = 1\,095\,422$.

Odpověď. $n(9694, 4181) = 1\,095\,422$.

Věnujme nyní pozornost příkladům, ve kterých se vyskytuje jak pojem největšího společného dělitele, tak pojem nejmenšího společného násobku.

Příklad 22. Určete dvě čísla, jejichž největší společný dělitel je 2 a nejmenší společný násobek je 12.

Řešení. Označme hledaná čísla písmena x, y; označení čísel můžeme volit tak, že $x \leqq y$. Protože největší společný dělitel čísel x, y je roven číslu 2, můžeme čísla x, y vyjádřit ve tvaru $x = 2x_1$, $y = 2y_1$, kde x_1, y_1 jsou vhodná čísla navzájem nesoudělná. Nejmenší společný násobek čísel $2x_1$, $2y_1$ je zřejmě roven číslu $2x_1y_1$, takže má platit $2x_1y_1 = 12$ čili $x_1y_1 = 6$. Protože čísla x_1, y_1 mají být nesoudělná a protože má zároveň platit $x_1 \leqq y_1$, vyplývá ze vztahu $x_1y_1 = 6$ buď řešení $x_1 = 1$, $y_1 = 6$ nebo řešení $x_1 = 2$, $y_1 = 3$. Vrátíme-li se nyní k číslům x, y, dostáváme buď dvojici $x = 2$, $y = 12$ nebo dvojici $x = 4$, $y = 6$. Zkouškou se snadno přesvědčíme, že obě tyto dvojice vyhovují naší úloze.

Odpověď. Nehledíme-li na pořadí hledaných čísel, vyhovují dané úloze právě dvě dvojice $x = 2$, $y = 12$ nebo $x = 4$, $y = 6$.

Příklad 23. Určete dvě čísla, jejichž největší společný dělitel je 7 a nejmenší společný násobek je 22.

Řešení. Snadno nahlédneme, že není možno najít žádnou dvojici čísel, která by vyhovovala uvažovaným podmínkám. Nejmenší společný násobek musí být totiž vždycky násobkem největšího společného dělitele, to však není splněno v textu naší úlohy (číslo 7 nedělí číslo 22).

Příklad 24. Určete dvě čísla, jejichž nejmenší společný násobek je o 7 větší než jejich největší společný dělitel.

Řešení. Označme opět hledaná čísla písmeny x, y, při čemž volíme označení tak, aby platilo $x \leqq y$. Podle textu naší úlohy má platit

$$\mathrm{n}(x, y) - \mathrm{D}(x, y) = 7. \tag{1}$$

Protože $\mathrm{D}(x, y)$ dělí číslo $\mathrm{n}(x, y)$, dostáváme z tohoto vztahu, že $\mathrm{D}(x, y)$ dělí také číslo 7. Máme tedy dvě možnosti: buď $\mathrm{D}(x, y) = 1$ nebo $\mathrm{D}(x, y) = 7$. Probereme každý z těchto případů zvlášť.

Je-li $\mathrm{D}(x, y) = 1$, jsou čísla x, y nesoudělná. Pro nejmenší společný násobek pak máme vztah $\mathrm{n}(x, y) = xy$, takže rovnice (1) přejde na tvar $xy - 1 = 7$ čili $xy = 8$. Vzhledem k předpokladům $x \leqq y$, $\mathrm{D}(x, y) = 1$ vyplývá odtud snadno, že $x = 1$, $y = 8$.

Je-li $\mathrm{D}(x, y) = 7$, pak čísla x, y můžeme vyjádřit ve tvaru $x = 7x_1$, $y = 7y_1$, kde x_1, y_1 jsou nesoudělná čísla splňující nerovnost $x_1 \leqq y_1$. Pro $\mathrm{n}(x, y)$ dostáváme pak postupně $\mathrm{n}(x, y) = \mathrm{n}(7x_1, 7y_1) = 7\mathrm{n}(x_1, y_1) = 7x_1y_1$. Vrátíme-li se opět k rovnici (1), máme $7x_1y_1 - 7 = 7$ čili $7x_1y_1 = 14$ čili $x_1y_1 = 2$. Vzhledem k předpokladům o číslech x_1, y_1 dostáváme zde jediný výsledek totiž $x_1 = 1$, $y_1 = 2$, což pro čísla x, y znamená, že $x = 7, y = 14$.

Zkouškou se můžeme přesvědčit, že obě dvojice, ke kterým jsme dospěli, vyhovují dané úloze. Platí totiž $\mathrm{n}(1, 8) = 8$, $\mathrm{D}(1, 8) = 1$, takže rovnice (1) je skutečně splněna;

dále je $n(7, 14) = 14$, $D(7, 14) = 7$, takže opět platí rovnice (1).

Úlohy

29. Vypočtěte a) $D(396, 444)$; b) $D(3293, 3827)$; c) $D(3797, 4129)$; d) $D(396, 444, 616)$; e) $D(910, 1012, 1020, 1291)$.

30. Vypočtěte a) $n(43, 258)$; b) $n(1000, 1283)$; c) $n(12, 15, 18)$; d) $n(10, 15, 20, 25)$.

31. Jak se změní největší společný dělitel dvou přirozených čísel, jestliže každé z čísel znásobíme dvěma.

32. Jak se změní nejmenší společný násobek dvou přirozených čísel, jestliže každé z čísel znásobíme třemi.

33. Jsou-li dána libovolná dvě přirozená čísla a, b taková, že b dělí a, pak vždy je možno najít aspoň jednu dvojici přirozených čísel x, y takovou, že $n(x, y) = a$, $D(x, y) = b$. Dokažte.

34. Kolika způsoby je možno vyjádřit číslo 21 jako součet tří prvočísel?

5.

NEURČITÉ ROVNICE

●

Neurčitou (*diofantskou*) rovnicí nazýváme jednu rovnici o několika neznámých $x, y, z, \ldots$, jestliže se za tyto neznámé připouštějí výhradně jen čísla celá. Někdy se na neurčité rovnice klade omezení ještě větší a tento směr budeme sledovat i v naší knížce. Protože zde studujeme různé vlastnosti přirozených čísel a nuly, budeme i při neurčitých rovnicích připouštět jako řešení jen čísla celá nezáporná. Název „diofantská rovnice" připomíná nám jméno řeckého matematika *Diofanta*, který žil v Alexandrii ve III. století n. l. Diofantos napsal knihu s názvem „Aritmetika", ve které se takřka už moderním způsobem zabýval různými aritmetickými a algebraickými problémy. Teorie neurčitých (diofantských) rovnic je dnes velmi obsáhlá, takže ji zde nemůžeme vykládat v plné šíři. Vybrali jsme proto jen různé zajímavosti do několika příkladů.

Příklad 25. Dopis máme oznámkovat známkami v celkové ceně 1,60 Kčs. Kolika způsoby to můžeme provést, jestliže smíme použít jen známek čtyřicetihaléřových a šedesátihaléřových?*)

Řešení. Označme x počet známek čtyřicetihaléřových, y počet známek šedesátihaléřových, jichž použijeme při

*) Prosíme čtenáře, aby si uvědomil, že v příkladě 25 neklademe požadavek, aby se při každém známkování skutečně využilo obou druhů známek.

jednom oznámkování. Podle podmínek naší úlohy má platit $40x + 60y = 160$ čili po malé úpravě

$$2x + 3y = 8. \tag{1}$$

Je pochopitelné, že při řešení rovnice (1) budeme za čísla x, y připouštět jen přirozená čísla a nulu. Setkáváme se zde tedy s prvním příkladem neurčité rovnice; je to — jak vidíme — neurčitá rovnice 1. stupně o dvou neznámých x, y. Jak budeme tuto rovnici řešit? Popíšeme jednu metodu, která zde snadno povede k cíli. Abychom nemuseli zbytečně probírat příliš mnoho případů, povšimněme si, že v rovnici (1) jsou čísla $2x$ a 8 sudá, takže i číslo $3y$ musí být sudé. To znamená, že samo číslo y musí být sudé. Nyní systematicky prozkoumáme všechna sudá čísla $y = 0, 2, 4, \ldots$

Dosadíme-li $y = 0$ do rovnice (1), vychází $2x = 8$ čili $x = 4$. Dvojice $x = 4, y = 0$ vyhovuje tedy rovnici (1).

Dosadíme-li $y = 2$, vychází $2x = 8 - 6$ čili $x = 1$. Také dvojice $x = 1, y = 2$ vyhovuje.

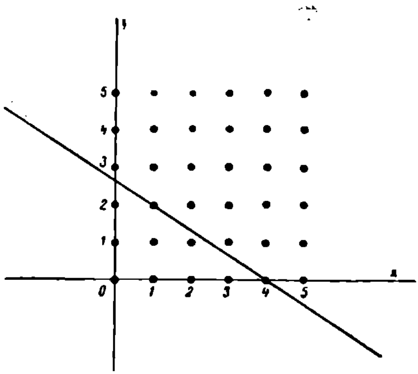
Konečně dosadíme-li do rovnice (1) za y číslo 4 nebo číslo ještě větší, dostáváme na levé straně rovnice (1) číslo větší nebo rovné dvanácti; v tomto případě nemůžeme najít žádné vyhovující číslo x.

Odpověď. Známkování můžeme provést dvěma způsoby; Použijeme buď 4 známky čtyřicetihaléřové nebo nalepíme 1 známku čtyřicetihaléřovou a 2 známky šedesátihaléřové.

Řešení příkladu 25 si můžeme dobře přiblížit, jestliže použijeme grafického znázornění. Rovnici (1), kterou jsme se prve zabývali, uveďme nejprve na tvar.

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{8}{3}. \tag{2}$$

Pohleďme nyní na rovnici (2) ze stanoviska teorie funkcí. Ve škole jste se učili, že grafem funkce (2) je přímka p, kterou vidíte znázorněnou na obr. 3. Body, jejichž obě souřadnice jsou celá nezáporná čísla, jsou na obr. 3 vyznačeny nápadnými tečkami. Jak vidíte, prochází přímka



Obr. 3.

p dvěma tečkami, které odpovídají bodům [4, 0] a [1, 2]. Je tedy i z tohoto grafického znázornění patrno, že úloha má právě dvě řešení — totiž ta, ke kterým jsme dospěli prve výpočtem.

Příklad 26. Když se skupina cvičenců postavila do osmistupů, nedostával se v poslední řadě jeden cvičenec; když se táž skupina postavila do devítistupů, chyběli v poslední řadě cvičenci dva. Určete, kolik bylo cvičenců, víte-li, že jich bylo méně než sto.

Řešení. Označme x počet osmistupů a y počet devítistupů. Podle podmínek úlohy je počet cvičenců možno vyjádřit jednak číslem $8x - 1$, jednak číslem $9y - 2$, takže platí

$$8x - 1 = 9y - 2. \qquad (1)$$

Budeme se nyní zabývat řešením neurčité rovnice (1). Seznámíme se zde s jiným matematickým obratem, než jakého jsme použili v příkladě 25.

Rovnici (1) uvedeme na tvar $8x = 9y - 1$ a dále $x = \frac{9y - 1}{8}$ čili $x = y + \frac{y - 1}{8}$. Protože číslo x má být přirozené, je třeba, aby také číslo $\frac{y-1}{8}$ bylo přirozené. Položme pro stručnost $\frac{y-1}{8} = u$; odtud plyne $y = 8u + 1$ a dále $x = y + u = 9u + 1$.

Co jsme zatím při vyšetřování rovnice (1) nalezli? Vyhovuje-li nějaká dvojice přirozených čísel x, y rovnici (1), pak je možno čísla x, y vyjádřit ve tvaru

$$x = 9u + 1, \quad y = 8u + 1, \qquad (2)$$

kde u je nějaké přirozené číslo. Všimněme si však ještě toho, že čísla x, y jsou ještě omezena podmínkou, že počet cvičenců je menší než 100. Vyjádříme-li počet cvičenců např. tvarem $8x - 1$, máme nerovnost $8x - 1 < 100$. Dosadíme-li sem podle (2), vychází

$$8(9u + 1) - 1 < 100$$

a po další malé úpravě je $72u < 107$. Této nerovnosti vyhovuje jediné přirozené číslo u, totiž $u = 1$. Zbývá ještě vypočíst příslušná čísla x, y podle rovnic (2); vychází $x = 10$, $y = 9$. Počet cvičenců je pak $8x - 1 = 9y - 2 = 79$.

Odpověď. Ve skupině bylo 79 cvičenců.*)

V dalším příkladě se seznámíme s neurčitou rovnicí 1. stupně o třech neznámých.

Příklad 27. Kolika způsoby je možno v naší měně rozměnit desetihaléř?

Řešení. Při rozměňování můžeme používat mincí haléřových, tříhaléřových nebo pětihaléřových. Označme x počet použitých haléřů, y počet tříhaléřů a z počet pětihaléřů. Potom zřejmě platí

$$x + 3y + 5z = 10. \tag{1}$$

Při řešení rovnice (1) budeme ovšem za čísla x, y, z připouštět zase jen čísla přirozená nebo nulu. Jakým způsobem budeme při řešení postupovat? Není k tomu v podstatě potřeba žádných mimoškolských znalostí, musíme si dát jen pozor, abychom na žádnou trojici x, y, z nezapomněli.

Číslo z nemůže být zřejmě větší než číslo 2, neboť pak by bylo $5z > 10$.

Pro z máme tedy tři možnosti: buď je $z = 2$ nebo $z = 1$ nebo konečně $z = 0$. Probereme každý z těchto případů zvlášť.

Pro $z = 2$ přechází rovnice (1) na tvar $x + 3y = 0$, z čehož plyne $x = 0$ a současně $y = 0$.

Pro $z = 1$ má rovnice (1) tvar

$$x + 3y = 5. \tag{2}$$

V rovnici (2) nemůže být $y > 1$, neboť pak by bylo

*) Přenecháváme čtenáři, aby si řešení tohoto příkladu graficky znázornil obdobným způsobem, jak jsme to provedli v příkladě 25.

$3y > 5$. Zbývá tedy buď $y = 1$ nebo $y = 0$. V prvním případě nacházíme $x = 2$, v případě druhém $x = 5$.

Znova se vraťme k rovnici (1) a dosaďme do ní $z = 0$. Dostáváme tak rovnici

$$x + 3y = 10. \qquad (3)$$

Je vidět, že v rovnici (3) nemůže být $y > 3$, takže zbývá buď $y = 3$ nebo $y = 2$ nebo $y = 1$ nebo konečně $y = 0$. Těmto číslům odpovídají po řadě čísla $x = 1$, $x = 4$, $x = 7$, $x = 10$.

Výsledky, ke kterým jsme dospěli, můžeme shrnout do této tabulky.

Počet		
haléřů	tříhaléřů	pětihaléřů
0	0	2
2	1	1
5	0	1
1	3	0
4	2	0
7	1	0
10	0	0

Při sestavování této tabulky jsme vlastně současně prováděli zkoušku, zda nalezené výsledky vyhovují rovnici (1).

Odpověď. Desetihaléř je možno rozměnit sedmi způsoby.

Závěrem budeme řešit jednu neurčitou rovnici 2. stupně.

Příklad 28. Jedna odvěsna pravoúhlého trojúhelníka má velikost 5 cm. Vypočtěte velikost přepony a druhé odvěsny, víte-li, že velikost těchto stran (v centimetrech) je vyjádřena přirozenými čísly.

Řešení. Označme x velikost druhé odvěsny a y velikost přepony hledaného pravoúhlého trojúhelníka. Podle Pythagorovy věty platí $x^2 + 5^2 = y^2$ čili $y^2 - x^2 = 25$. Na levé straně této rovnice můžeme rozložit dvojčlen v součin, takže dostáváme

$$(y + x)(y - x) = 25. \qquad (1)$$

Abychom neurčitou rovnici (1) rozřešili, rozložme nejprve číslo 25 všemi možnými způsoby v součin dvou přirozených čísel. Platí $25 = 1.25$, $25 = 5.5$, $25 = 25.1$. Na levé straně rovnice (1) máme rovněž dva činitele (první je číslo $y + x$, druhý $y - x$). Podle významu čísel x, y je zřejmě činitel $y + x$ větší než činitel $y - x$. To nás vede k soustavě dvou lineárních rovnic o dvou neznámých, totiž k soustavě

$$\begin{aligned} y + x &= 25, \\ y - x &= 1. \end{aligned}$$

Snadným výpočtem nahlédneme, že tato soustava má jediné řešení $x = 12$, $y = 13$.

Odpověď. Úloze vyhovuje jediný pravoúhlý trojúhelník, jehož strany mají velikosti po řadě 5 cm, 12 cm, 13 cm.

Pravoúhlé trojúhelníky, jejichž strany mají velikosti vyjádřené přirozenými čísly, se nazývají trojúhelníky *pythagorejské*. Tento název je odvozen od jména starořeckého filosofa a matematika *Pythagora* (asi 570 až 500 před n. l.). Pythagoras založil v VI. a V. století před n. l. na ostrově Samu školu, které jsou přisuzovány velké zásluhy o rozvoj tehdejší matematiky. Pythagorovi žáci se zabývali zejména naukou o číslech a číselných posloupnostech, v geometrii pak studovali zvláště pravoúhlý trojúhelník. Nejznámějším příkladem pythagorejského trojúhelníka je pravoúhlý trojúhelník, jehož strany mají velikost po řadě 3, 4 a 5. Teorie čísel se zabývala později velmi zevrubně studiem pythagorejských trojúhelníků a našla nutné a postačující podmínky k tomu, aby trojúhelník byl pythagorejský. Zájemce o tuto problematiku musíme však odkázat na odbornější literaturu z teorie čísel, jejíž přehled najdete v závěru této knížky.

Úlohy

35. Poštovní zásilku máme známkovat známkami v celkové ceně 1,80 Kčs. Kolika způsoby to můžeme provést, smíme-li použít jen známek třicetihaléřových, čtyřicetihaléřových a šedesátihaléřových?

36. Je dána rovnice $4x + 6y + 10z = 1511$. Je možno najít tři přirozená čísla x, y, z, která této rovnici vyhovují?

37. Určete všechny dvojice přirozených čísel x, y, pro něž platí $x^2 - y^2 = 15$.

38. Přepona pravoúhlého trojúhelníka má velikost 15 cm. Vypočtěte velikost jeho odvěsen, víte-li, že tyto velikosti (v centimetrech) jsou vyjádřeny přirozenými čísly.

VÝSLEDKY ÚLOH

●

1. $10^{n-1}x + 10^{n-2}y$.

2. Úloha nemá řešení.

3. Pro jednociferné číslo je tvrzení zřejmé, neboť $5^2 = 25$. Je-li uvažované číslo víceciferné, pak je můžeme vyjádřit ve tvaru $10p + 5$, kde p je vhodné přirozené číslo. Platí $(10p + 5)^2 = 100p^2 + 100p + 25 = 100(p^2 + p) + 25$. Číslo $100(p^2 + p)$ je zřejmě zakončeno dvěma nulami, takže součet $100(p^2 + p) + 25$ je zakončen dvojčíslím 25.

4. 1962.

6. 132.

7. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60.

8. 2520.

9. Je-li celé nezáporné číslo m dělitelné pěti, platí $m = 5k$, kde k je celé nezáporné číslo. Není-li m dělitelné pěti, můžeme najít celé nezáporné k a přirozené číslo r tak, že $m = 5k + r$, $0 < r < 5$. Odtud už plyne naše tvrzení.

10. Platí $172^4 = (17.10 + 2)^4 = 17a + 16$, kde a je jisté přirozené číslo. Podobně $35^{313} = (17.2 + 1)^{313} = 17b + 1$, kde b je též přirozené. Celkem tedy máme $172^4 + 35^{313} = 17(a + b + 1)$, takže uvažované číslo je skutečně dělitelné sedmnácti.

11. Tvrzení plyne ze vzorce

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

12. Plyne z příkladu 7.

13. Důkaz obdobný jako v příkladech 6 a 7.

14. Důkaz se podá matematickou indukcí. Pro $n = 1$

máme $a_1 = 11$. Předpokládejme, že pro některé přirozené číslo n je a_n dělitelné jedenácti; upravujeme $a_{n+1} = 2.3^{5n+1} + 5 = 2.3^{5n-4}.3^5 + 5 = 2.3^{5n-4}.243 + 5 = 2.3^{5n-4} + 5 + 2.3^{5n-4}.242 = a_n + 2^2.3^{5n-4}.11^2$. Číslo a_n je dělitelné jedenácti a číslo $2^2.3^{5n-4}.11^2$ je rovněž jedenácti dělitelné. Proto je i součet obou, tj. číslo a_{n+1} dělitelné jedenácti.

15. 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

16. Číslo 2437 je prvočíslo, číslo 2771 je složené, neboť je dělitelné sedmnácti.

17. a) $3248 = 2^4.7.29$; b) $2418 = 2.3.13.31$; c) $3819 = 3.19.67$.

18. 401.

19. 45.

20. Platí $10! + 1 = 3\,628\,801$. Toto číslo je zřejmě dělitelné jedenácti, takže je složené.

21. 997.

22. (3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19), (29, 31), (41, 43), (59, 61), (71, 73).

23. Kdyby taková mezera mezi prvočísly p, q existovala, platilo by $q - p = 1001$. Nepřichází v úvahu $p = 2$ takže obě čísla p, q by byla lichá a jejich rozdíl by byl tedy sudý. Náš rozdíl je však 1001, což je spor.

24. Vyhovuje jediná pětice prvočísel, totiž 5, 17, 29, 41, 53.

25. Není to možné.

26. Prvočísla 2 a 3 není možno v uvedeném tvaru vyjádřit. Každé větší přirozené číslo lze vyjádřit v jednom ze tvarů $6k$, $6k + 1$, $6k + 2$, $6k + 3$, $6k + 4$, $6k + 5$. Tvary $6k$, $6k + 2$, $6k + 3$, $6k + 4$ vedou zřejmě k číslům složeným, takže zbývají jen tvary $6k + 1$ a $6k + 5$.

27. a) Nikoliv. Pro $k = 4$ máme $6k + 1 = 25 = 5^2$. b) Nikoliv. Pro $k = 5$ máme $6k + 5 = 35 = 7.5$.

28. 27.
29. a) 12; b)89; c) 1; d) 4; e) 1.
30. a) 258; b) 1 283 000; c) 180; d) 300.
31. Zdvojnásobí se.
32. Ztrojnásobí se.
33. Tvrzení plyne ze vztahů $n(a, b) = a$, $D(a, b) = b$.
34. $21 = 2 + 2 + 17$, $21 = 3 + 5 + 13$,
$21 = 3 + 7 + 11$, $21 = 5 + 5 + 11$,
$21 = 7 + 7 + 7$.

35. Označíme-li x, y, z po řadě počet známek v ceně 30 h, 40 h, 60 h, docházíme po malé úpravě k neurčité rovnici $3x + 4y + 6z = 18$. Obdobně jako v příkladě 25 snadno nahlédneme, že x musí být sudé číslo. Počet řešení je pak patrný z této tabulky:

x	y	z
0	0	3
0	3	1
2	0	2
2	3	0
4	0	1
6	0	0

36. Není to možné. Dosadíme-li totiž do levé strany libovolná tři přirozená čísla, dostaneme sudé číslo; na straně pravé je však číslo liché.

37. Obdobně jako v příkladě 28 docházíme k soustavám
a) $x + y = 15$, $x - y = 1$; b) $x + y = 5$, $x - y = 3$.
Soustava a) má řešení $x = 8$, $y = 7$, soustava b) řešení $x = 4$, $y = 1$. Zkouškou se snadno přesvědčíme, že obě nalezené dvojice vyhovují dané rovnici.

38. Označme x, y velikosti odvěsen; podle Pythagorovy věty platí $x^2 + y^2 = 225$. Tuto neurčitou rovnici budeme řešit „zkusmo", ale tak, abychom na žádnou dvojici přirozených čísel x, y nezapomněli. Dostáváme buď dvojici $x = 9$, $y = 12$ nebo dvojici $x = 12$, $y = 9$. Obě tyto dvojice ovšem vedou k témuž pravoúhlému trojúhelníku o stranách 9 cm, 12 cm, 15 cm.

Další doporučená literatura

●

a) Knihy určené začátečníkům:

A. O. Gelfond: Neurčité rovnice, Populární přednášky o matematice, sv. 6, Praha 1956.

K. Hruša: Základní věty o dělitelnosti, Brána k vědění, sv. 9, Praha 1950.

J. Vyšín: Neurčité rovnice, Brána k vědění, sv. 3, Praha 1949

b) Knihy pro pokročilejší čtenáře:

V. Kořínek: Základy algebry, Praha 1953.

K. Rychlík: Úvod do elementární číselné teorie, Praha 1950.

c) Publikace cizojazyčné:

А. А. Бухштаб: Теория чисел, Москва 1960.

W. Sierpiński: Co wiemy a czego nie wiemy o liczbach pierwszych, Varšava 1961.

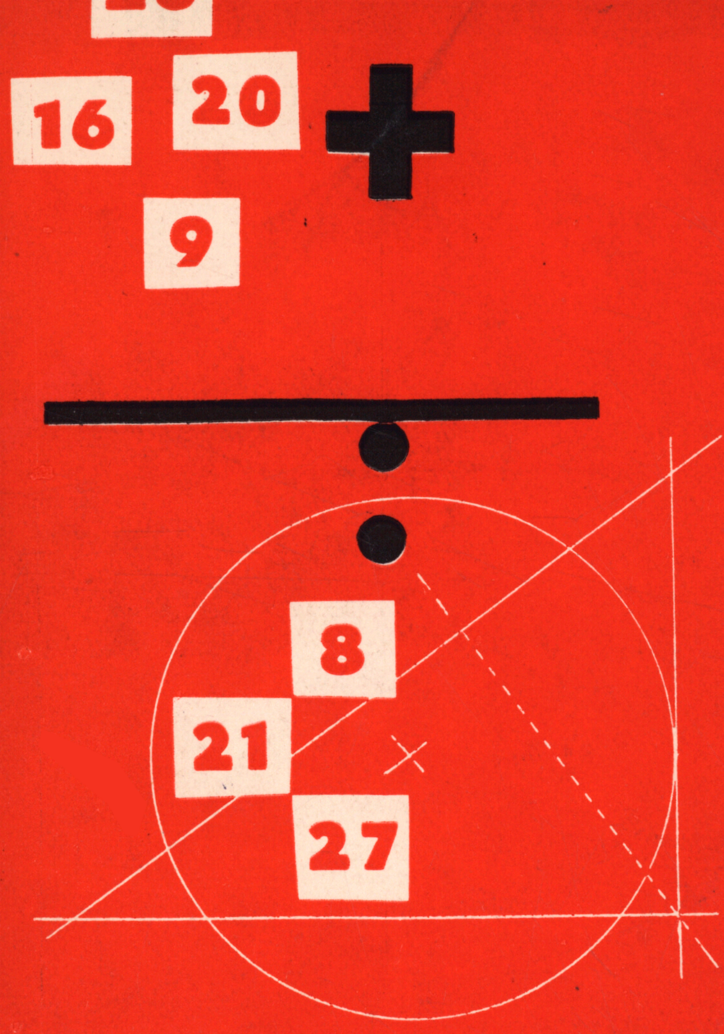
JIŘÍ SEDLÁČEK

co víme

O PŘIROZENÝCH ČÍSLECH

Pro účastníky Matematické olympiády vydává ÚV Matematické olympiády a ÚV ČSM v nakladatelství Mladá fronta. Obálku navrhl Jaroslav Příbramský. Odpovědný redaktor Květoslav Perutka. Publikace číslo 1760. Edice Škola mladých matematiků, svazek 2, stran 44.

Vytiskl Mír, novinářské závody, n. p., závod 2, provozovna 22, Praha 2, Legerova 22. 1,84 AA, 1,89 VA. D-14*10349. Náklad 5000 výtisků. Tem. skup. 03-2. 1. vydání. Praha 1961.
Cena brož. výt. Kčs 1,50
63/III-7



Cena brož.
Kčs 1,50