Determinanty a matice v theorii a praxi

DETERMINANTY A MATICE

v theorii i v praxi

VÁCLAV VODIČKA

Část druhá

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

$$A = \begin{Vmatrix} a_1, & b_1, & c_1, & d_1 \\ a_2, & b_2, & c_2, & d_2 \\ a_3, & b_3, & c_3, & d_3 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{Vmatrix}$$

$$x = B_x : B$$

CESTA K VĚDĚNÍ SVAZEK 56

RNDr VÁCLAV VODIČKA

DETERMINANTY A MATICE

v theorii i v praxi

ČÁST DRUHÁ

(UŽITÍ V ALGEBŘE)

PŘÍRODOVĚDECKÉ NAKLADATELSTVÍ

ÚVODNÍ SLOVO.

Když jsme se v prvé části seznámili po theoretické stránce se základními vlastnostmi determinantů a probrali řadu speciálních případů, ukážeme si nyní na typických problémech mnohostranné použití získaných poznatků v různých odvětvích matematiky a přírodních věd vůbec.

Tento druhý svazek jest věnován aplikacím determinantů v algebře, použití jiného druhu bude probráno v částech dalších.

O tom, jak je nauka o determinantech důležitá, svědčí ta skutečnost, že na příklad tak fundamentální otázka, jako jest řešení soustavy lineárních rovnic s více neznámými, zůstávala v podstatě nerozřešena, dokud nebyla theorie determinantů postavena na pevné základy. Tak zvaná „algebra bez determinantů“ nebyla prostě s to zvládnout tento problém a stěžejní práce Toeplitzovy, sem patřící, jest hodnotiti jen jako existenční důkazy, které sice (za určitých výminek) zaručují existenci řešení, avšak nepodávají návod k jeho skutečnému sestrojení.

K theoretickým výkladům připojujeme ve většině případů praktické příklady s numerickými výpočty — obvykle dosti jednoduché, aby měly určitou pedagogickou hodnotu, nikoli však zase tak snadné, aby se tím staly triviálními. Není ani možno dostatečně zdůrazniti důležitost numerického propočítávání výsledků podaných theorií. Teprve tím se objeví v patřičném světle všechny jemnosti a často i značné komplikace, které s sebou nese praktické zpracování a užití theoreticky získaných poznatků. Je jistě mnoho pravdy na tvrzení inženýrů, že tam kde úloha matematikova končí, tam technikova teprve začíná.

Pochopitelně nebylo možno vyhnouti se při výběru látky, probírané v následujících odstavcích, jisté libovůli. Přece však se autor snažil uvésti alespoň v hlavních rysech to, co jest důležité nejen při studiu věd matematických po stránce theoretické, ale také pro jejich aplikace ve fysice a vědách technických.

Nejdůležitější použití theorie determinantů v algebře se týká řešení soustavy lineárních rovnic o více neznámých. Uvidíme však, že i v mnoha jiných algebraických otázkách se tato nauka osvědčuje jako vydatný a účinný prostředek k jejich zvládnutí.

1. LINEÁRNÍ ZÁVISLOST ČÍSELNÝCH SOUSTAV.

Definice 1. Číselné soustavy v počtu $m(\geqq 1)$ po n číslech

$$a_{\mu 1}, a_{\mu 2}, \ldots, a_{\mu n}, \ (\mu = 1, 2, \ldots, m) \tag{1}$$

nazýváme lineárně závislými, existují-li čísla c_μ, která nejsou všechna rovna nule tak, že platí n rovnic

$$\sum_{\mu=1}^{m} c_\mu a_{\mu\nu} = 0; \ \nu = 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

Je-li možno rovnice (2) splniti jenom tím, že položíme $c_1 = c_2 = \ldots = c_m = 0$, říkáme, že jsou soustavy (1) navzájem lineárně nezávislé.

Příklady. 1. Soustavy

$$\begin{array}{rrrr} 5, & -2, & 0, & 3 \\ 7, & 6, & -4, & 7 \\ -1, & -4, & 2, & -2 \end{array} \tag{3}$$

jsou navzájem lineárně závislé. Za čísla c_μ stačí zde vzíti: $c_1 = -1, c_2 = 1, c_3 = 2$.

2. Soustavy

$$\begin{array}{rrr} 8, & -2, & 3 \\ 0, & 1, & -5 \end{array} \tag{4}$$

jsou lineárně nezávislé. Z rovnic

$$8c_1 + 0 \,.\, c_2 = 0, \ -2c_1 + 1 \,.\, c_2 = 0, \ 3c_1 - 5c_2 = 0$$

totiž nutně vyplývá $c_1 = c_2 = 0$.

V dalších úvahách poznáme, že bývá často velmi důležité rozhodnouti o závislosti či nezávislosti předložených číselných soustav. Na druhé straně však není takovéto rozhodnutí vždy zcela jednoduché — to nahlédneme ostatně již z případu soustav uvedených v prvém příkladě. Zvláště tehdy, když jde o veliký počet soustav s mnoha čísly, byla by tato úloha prakticky vůbec neřešitelná. A právě v tomto bodě nám prokáže theorie determinantů a matic po prvé neocenitelnou službu, podávajíc spolehlivý a poměrně jednoduchý prostředek, jak o závislosti či nezávislosti soustav rozhodnouti.

Věta 1. Má-li matice $\|a_{ik}\|$, $(i, k = 1, 2, \ldots, m)$ hodnost h, lze v ní nalézti h řádků navzájem lineárně nezávislých. Všechny ostatní řádky jsou pak lineárními kombinacemi oněch h navzájem nezávislých.

Důkaz. Majíce zřetel k definici 1. nahlédneme, že jsou-li soustavy (1) navzájem lineárně závislé, lze mezi nimi jistě nalézti takovou, jež jest lineární kombinací všech ostatních (pojem lineární kombinace byl vysvětlen v poznámce 3, str. 14, části I). V případě závislosti soustav jest totiž v rovnicích (2) alespoň jeden z koeficientů $c_1, c_2, \ldots, c_m$ různý od nuly; budiž to na př. c_i. Rovnice (2) lze pak psáti ve tvaru

$$a_{i\nu} = -\sum_{\mu \neq i}^{1,m} \frac{c_\mu}{c_i} a_{\mu\nu},\ \nu = 1, 2, \ldots, n;$$

z něho je patrno, že i-tá ze soustav (1) jest lineární kombinací ostatních.

Obráceně soustavy (1) jsou lineárně závislé, je-li mezi nimi některá lineární kombinací všech ostatních.

Toto majíce na paměti, obrátíme se nyní k vlastnímu důkazu věty 1. Budeme při tom předpokládati, že determinant h-řadový, jehož různost od nuly je zaručena hodností h dané matice, je vytvořen z prvních h řádků a z prvních h sloupců; toho lze vždycky dosáhnouti eventuelní změnou pořadí řádek a sloupců, t. j. výkonem, který nemá na hodnost matice žádného vlivu. Je tedy

$$A_h = \begin{vmatrix} a_{11}, \ldots, a_{1h} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{h1}, \ldots, a_{hh} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{5}$$

avšak

$$\begin{vmatrix} a_{11}, \ldots, a_{1h}, & a_{1k} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{h1}, \ldots, a_{hh}, & a_{hk} \\ a_{i1}, \ldots, a_{ih}, & a_{ik} \end{vmatrix} = 0 \tag{6}$$

pro $i = h + 1, h + 2, \ldots, m$; $k = 1, 2, \ldots, h, h + 1, \ldots, m$.

Platnost právě napsaného vztahu je pro i, $k \geqq h + 1$ zřejmá, protože na levé straně stojí v tomto případě $h + 1$-řadový determinant matice o hodnosti h, pro $k \leqq h$ pak je onen vztah také správný, protože jde v těchto případech o determinant se dvěma sloupci navzájem stejnými.

Rozvedeme-li determinant na levé straně naší rovnice (6) podle elementů posledního sloupce, dostaneme

$$a_{ik} = -\sum_{\varrho=1}^{h} \frac{c_\varrho}{A_h} a_{\varrho k}, \quad k = 1, 2, \ldots, m.$$

Těchto m rovnic však vyjadřuje, že je i-tý řádek dané matice lineární kombinací prvních h jejích řádků. Protože pak takovéto rovnice platí pro všechna $i \geqq h + 1$ a protože prvních h řádků dané matice je zcela jistě navzájem nezávislých (jinak by se z nich nedal utvořiti nenulový determinant A_h — rozvažte si to podrobně pomocí toho, co bylo předesláno důkazu věty 1. o vzájemném vztahu mezi pojmem lineární závislosti soustav číselných a pojmem lineární kombinace a pak pomocí pozn. 2. a 3. na str. 13 a 14 části I), je platnost věty 1. dokázána.

Téměř samozřejmý je také opak právě dokázané věty. Vyslovíme jej *větou* 2.

Je-li možno v matici $\|a_{ik}\|$ $(i, k = 1, 2, \ldots, m)$ nalézti h řádků lineárně nezávislých tak, že všechny ostatní jsou jejich lineárními kombinacemi, má tato matice hodnost h.

Důkaz. Budiž p hodnost matice M; podle věty 11 svazku I je tato hodnost táž, jako u matice M_1 vzniklší z M vynecháním oněch řádků, jež nejsou navzájem nezávislé. Tato matice je však h-řádková a její řádky jsou podle předpokladu navzájem nezávislé, takže má (v důsledku právě dokázané věty 1.) hodnost h. Je tedy opravdu $p = h$, jak věta 2. tvrdí.

Výsledky podané větami 1. a 2. nám dávají možnost rozhodnouti zcela obecně otázku závislosti či nezávislosti soustav (1). Příslušné kriterium vyslovíme větou.

Věta 3. Nutná a postačující podmínka, aby m soustav (1) bylo navzájem lineárně nezávislých, je ta, aby matice oněch soustav měla hodnost právě m.

Na základě všech uvedených poznatků nahlédneme snadno správnost věty důležité pro určování hodnosti dané matice. Jest to

věta 4. Je-li některý h-řadový determinant dané matice různý od nuly, jsou-li však rovny nule všechny jeho superdeterminanty $h + 1$-řadové, má matice hodnost h.

Důkaz. Bez újmy obecnosti lze opět předpokládati, že nenulový determinant je právě A_h z věty 1. Z faktu, že všechny jeho superdeterminanty (jsou to zase právě determinanty (6) z věty 1.) jsou rovny nule, bylo odvozeno, že každý z posledních $m - h$ řádků matice je lineární kombinací prvních h navzájem nezávislých řádků. Podle věty 2. je tudíž hodnost matice skutečně h a věta 4. je tím dokázána.

Poznámka. Ve stejném smyslu, jako jsme to učinili pro číselné soustavy a řádky matic, budeme mluviti také o vzájemné lineární závislosti řad v determinantech. Věty 1., 2. a 4. se dají bezprostředně přenésti na případ determinantu.

Příklady.

Dva příklady byly již uvedeny při definici lineární závislosti číselných soustav. Je dobře všimnouti si ještě jedenkráte ve světle nových poznatků soustav (3). Protože jest determinant elementů společných prvním dvěma řádkům a prvním dvěma sloupcům matice určené soustavami (3) různý od nuly (má hodnotu 44), má tato matice hodnost alespoň 2. Počítáme nyní hodnotu třířadového determinantu

$$\begin{vmatrix} 5, & -2, & 0 \\ 7, & 6, & -4 \\ -1, & -4, & 2 \end{vmatrix}.$$

Odečteme-li první řádek od druhého, vidíme ihned, že pozměněný druhý řádek 2, 8, —4 jest roven poslednímu, násobenému číslem — 2, takže determinant má nulovou hodnotu. Zkoumáme proto ještě druhý superdeterminant výše uvedeného nenulového dvouřadového determinantu; tento nový superdeterminant se liší od právě uvažovaného pouze tím, že jeho poslední sloupec je tvořen čísly 3, 7, — 2. Stejným způsobem jako výše poznáme, že má i tento determinant hodnotu nulovou, takže je podle věty 4. hodnost matice určené soustavami (3) rovna 2 a soustavy samy podle věty 3. lineárně závislé a to (na příklad) tak, že prvé dvě z nich jsou navzájem nezávislé, třetí pak je jejich lineární kombinací. Existují tedy čísla γ_1, γ_2 taková, že platí rovnice

$$5\gamma_1 + 7\gamma_2 = -1, \ -2\gamma_1 + 6\gamma_2 = -4,$$
$$0 \,.\, \gamma_1 - 4\gamma_2 = 2, \ 3\gamma_1 + 7\gamma_2 = -2;$$

třetí z nich přímo udává hodnotu $\gamma_2 = -\frac{1}{2}$ a z druhé pak vychází $\gamma_1 = \frac{1}{2}$. Koeficienty c_1, c_2, c_3, o nichž mluví definice 1., jsou pak $\varrho\gamma_1, \varrho\gamma_2, \varrho$, při čemž je ϱ libovolný od nuly různý faktor úměrnosti. Volíme-li na př. $\varrho = 2$, dostáváme $c_1 = -1$, $c_2 = 1, c_3 = 2$, tedy tytéž hodnoty, jež byly uvedeny výše.

3. Co značí lineární závislost soustav

$$\begin{matrix} a_{11}, \ a_{12}, \ldots, a_{1n} \\ a_{21}, \ a_{22}, \ldots, a_{2n}? \end{matrix} \tag{7}$$

Ježto soustavy jsou lineárně závislé, existují ve smyslu definice 1. čísla c_1, c_2 (která nejsou obě rovna nule) tak, že platí n rovnic

$$c_1 a_{1\nu} + c_2 a_{2\nu} = 0,\ \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

Je-li na př. $c_2 \neq 0$, položíme $\varrho c_2 = -c_1$ a dostáváme

$$a_{2\nu} = \varrho a_{1\nu},\ \nu = 1, 2, \ldots, n. \qquad (8)$$

Znamená tedy lineární závislost dvou číselných soustav, že jejich stejnolehlé členy jsou navzájem úměrné.

4. Rozhodnouti otázku závislosti či nezávislosti soustav

$$\begin{matrix} 3, & 2, & 4, & 2, & 4, & 3 \\ 1, & 3, & 1, & 4, & 3, & 4 \\ 3, & 3, & 3, & 3, & 3, & 3 \\ 3, & 3, & 2, & 2, & 1, & 1\,. \end{matrix} \qquad (9)$$

Determinant elementů společných prvým dvěma řádkům a prvým dvěma sloupcům má hodnotu 7; protože pak jest

$$\begin{vmatrix} 3, & 2, & 4 \\ 1, & 3, & 1 \\ 3, & 3, & 3 \end{vmatrix} = 3 \, . \begin{vmatrix} 3, & 2, & 4 \\ 1, & 3, & 1 \\ 1, & 1, & 1 \end{vmatrix} = 3 \, . \begin{vmatrix} 1, & 0, & 2 \\ 0, & 2, & 0 \\ 1, & 1, & 1 \end{vmatrix} = 3 \, . \, 2 \, .$$

$$. \begin{vmatrix} 1, & 2 \\ 1, & 1 \end{vmatrix} = -6,$$

vypočteme ještě čtyřřadový superdeterminant determinantu právě uvažovaného. Dostáváme

$$\begin{vmatrix} 3, & 2, & 4, & 2 \\ 1, & 3, & 1, & 4 \\ 3, & 3, & 3, & 3 \\ 3, & 3, & 2, & 2 \end{vmatrix} = 3 \, . \begin{vmatrix} 1, & 0, & 2, & 0 \\ 0, & 2, & 0, & 3 \\ 1, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & 1, & 0, & 0 \end{vmatrix} = 3 \, . \begin{vmatrix} 0, & -1, & 2, & 0 \\ 0, & 2, & 0, & 3 \\ 0, & 0, & 1, & 1 \\ 1, & 1, & 0, & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-3) \, . \begin{vmatrix} -1, & 2, & 0 \\ 2, & 0, & 3 \\ 0, & 1, & 1 \end{vmatrix} = (-3) \, . \begin{vmatrix} -1, & 2, & 0 \\ 0, & 4, & 3 \\ 0, & 1, & 1 \end{vmatrix} = 3,$$

takže je hodnost matice soustav (9) rovna 4 a soustavy jsou podle věty 3. lineárně nezávislé.

5. Je-li daných soustav více, než čísel v každé z nich (t. j. $m > n$), jsou vždycky navzájem lineárně závislé.

D ů k a z. Hodnost matice vytvořené danými soustavami může totiž býti za daných okolností nejvýše rovna číslu n, takže je vždycky menší než m a nikdy tedy nemůže býti splněna nutná a postačující podmínka pro nezávislost soustav, jak ji vyjadřuje věta 3.

2. PRAVIDLO CRAMEROVO.

Budiž dána soustava n lineárních rovnic s n neznámými $x_1, x_2, \ldots, x_n$, jiež píšeme ve tvaru

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} x_\nu = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{10}$$

a předpokládáme, že jest její determinant $A = |a_{ik}|$, $i, k = 1, 2, \ldots, n$ různý od nuly.

Násobme rovnice (10) po řadě čísly $A_{1k}, A_{2k}, \ldots, A_{nk}$ (jsou to doplňky prvků $a_{1k}, a_{2k}, \ldots, a_{nk}$ v A) a sečtěme. Dostaneme (viz vzorec (12,2) dílu prvého)

$$\sum_{i=1}^{n} b_i A_{ik} = \sum_{i=1}^{n} A_{ik} \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} x_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu \sum_{i=1}^{n} a_{i\nu} A_{ik} = x_k . A = A x_k.$$

Protože však jest $\sum_{i=1}^{n} b_i A_{ik}$ rovno determinantu — označme jej A_k — který vznikne z A tím, že k-tý sloupec nahradíme čísly $b_1, b_2, \ldots, b_n$ a protože jest podle předpokladu $A \neq 0$, nacházíme — provedouce právě naznačený postup po řadě pro všechna $k = 1, 2, \ldots, n$ — tento důsledek rovnic (10):

$$x_k = \frac{A_k}{A}, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{11}$$

Rovnice (10) lze však obráceně pokládati za důsledek vztahů (11). Násobíme-li totiž ν-tý z nich číslem $a_{i\nu}$ a sečteme přes všechna $\nu = 1, 2, \ldots, n$, dostaneme postupně

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} x_\nu = \frac{1}{A} \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} A_\nu = \frac{1}{A} \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} \sum_{l=1}^{n} b_l A_{l\nu} = \frac{1}{A} \sum_{l=1}^{n} b_l \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} A_{l\nu} =$$
$$= \frac{1}{A} . b_i A = b_i,$$

tedy právě i-tou rovnici ze soustavy (10). Provedeme-li tento postup pro $i = 1, 2, \ldots, n$, máme celou soustavu (10) jako důsledek vztahů (11).

Tento poznatek, který má velkou důležitost, vyjádříme *větou* 5. (t. zv. věta Cramerova):

Soustava n lineárních rovnic o n neznámých s nenulovým determinantem má jediné řešení. Dostaneme je tak, že v determinantu soustavy nahradíme postupně všechny sloupce absolutními členy (t. j. koeficienty bez neznámých) *stojícími na pravé straně rovnic soustavy a determinanty takto vzniklé pak dělíme determinantem soustavy.*

Příklady.

6. Řešiti soustavu

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 &= 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Determinant A této soustavy má podle příkladu 4. hodnotu 3; determinanty A_1, A_2, A_3, A_4 se zde dají v důsledku jednoduchých pravých stran rovnic (12) snadno vypočísti. Dostaneme

$$A_1 = 18,\ A_2 = -20,\ A_3 = -10,\ A_4 = 13;\ A = 3,$$

takže jest jediné řešení soustavy (12) dáno čísly

$$x_1 = 6,\ x_2 = -\tfrac{20}{3},\ x_3 = -\tfrac{10}{3},\ x_4 = \tfrac{13}{3}. \tag{12,1}$$

7. Derivace funkcí implicitních.

Buďtež proměnné $y_1, y_2, \ldots, y_n$ dány jako derivabilní funkce nezávisle proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_m$ soustavou n implicitních vztahů

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m; y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, n, \tag{13}$$

v nichž má každá z funkcí f_i spojité parciální derivace podle $x_1, x_2, \ldots, y_n$.

Úlohou jest určiti parciální derivace funkcí $y_1, y_2, \ldots, y_n$ podle $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Provedeme to tak, že každou z rovnic (13) derivujeme parciálně postupně podle všech proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Derivujeme-li na př. podle x_k, dostaneme soustavu n rovnic

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial y_\nu} \cdot \frac{\partial y_\nu}{\partial x_k} = -\frac{\partial f_i}{\partial x_k}, \; i = 1, 2, \ldots, n \tag{14}$$

o n neznámých $\frac{\partial y_1}{\partial x_k}, \frac{\partial y_2}{\partial x_k}, \ldots, \frac{\partial y_n}{\partial x_k}$. Za předpokladu, že determinant $\left|\frac{\partial f_i}{\partial y_\nu}\right| \neq 0$, $i, \nu = 1, 2, \ldots, n$ této soustavy — budeme jej také označovati symbolem

$$\frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}$$

a nazývati funkcionálním (nebo Jacobiho) determinantem funkcí $f_1, f_2, \ldots, f_n$ podle proměnných $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — není roven nule, lze podle věty Cramerovy rovnice (14) řešiti a formule pro hledané parciální derivace se dají psáti ve tvaru

$$\frac{\partial y_\nu}{\partial x_k} = -\frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{D(y_1, \ldots, y_{\nu-1}, x_k, y_{\nu+1}, \ldots, y_n)} : \tag{15}$$

$$: \frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}, \; \nu = 1, 2, \ldots, n, \; k = 1, 2, \ldots, m;$$

$$\frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}, & \frac{\partial f_1}{\partial y_2}, & \ldots, & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1}, & \frac{\partial f_2}{\partial y_2}, & \ldots, & \frac{\partial f_2}{\partial y_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1}, & \frac{\partial f_n}{\partial y_2}, & \ldots, & \frac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}. \tag{16}$$

U prostorové čáry $F(x, y, z) = 0$, $G(x, y, z) = 0$ máme na př.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{D(F, G)}{D(x, z)} : \frac{D(F, G)}{D(y, z)}, \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -\frac{D(F, G)}{D(y, x)} : \frac{D(F, G)}{D(y, z)} \tag{17}$$

za předpokladu, že jest $\dfrac{D(F, G)}{D(y, z)} \neq 0$.

8. Provésti dělení polynomu

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^{n-\nu} \tag{a}$$

binomem $x - x_1$, t. j. určiti koeficienty $q_0, q_1, \ldots, q_{n-1}, q_n$ tak, aby platilo identicky

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^{n-\nu} = (x - x_1)\sum_{\varrho=0}^{n-1} q_\varrho x^{n-\varrho-1} + q_n. \tag{b}$$

Rovnici (b) upravíme na tvar

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^{n-\nu} = \sum_{\varrho=0}^{n-1} q_\varrho x^{n-\varrho} - \sum_{\varrho=0}^{n-1} x_1 q_\varrho x^{n-\varrho-1} + q_n = \sum_{\varrho=0}^{n-1} q_\varrho x^{n-\varrho} -$$

$$- \sum_{\varkappa=1}^{n} x_1 q_{\varkappa-1} x^{n-\varkappa} + q_n = \sum_{\varrho=0}^{n} (q_\varrho - x_1 q_{\varrho-1})\, x^{n-\varrho}, \quad q_{-1} = 0$$

a z něho dostáváme ve smyslu methody neurčitých součinitelů systém $n + 1$ rovnic pro neznámé koeficienty $q_0, q_1, q_2, \ldots, q_n$:

$$- x_1 q_{\nu-1} + q_\nu = a_\nu, \ \nu = 0, 1, 2, \ldots, n; \ q_{-1} = 0. \tag{c}$$

Snadno nahlédneme, že má determinant této soustavy hodnotu 1, takže se při jejím řešení nemohou vyskytnouti žádné nesnáze. Toto řešení je potom podle Cramerovy věty dáno vzorci

$$q_\nu = A_\nu, \ \nu = 0, 1, 2, \ldots, n; \tag{d}$$

označíme-li v determinantu soustavy (c) sloupce pořadovými čísly $0, 1, 2, \ldots n$, znamená A_ν determinant vzniklý z něho tím, že sloupec s pořadovým číslem ν nahradíme novým s elementy $a_0, a_1, a_2 \ldots, a_n$. Rozvedením podle prvých $\nu + 1$ řádků dostaneme pak A_ν ve tvaru

$$A_\nu = \begin{vmatrix} 1 & 0, 0, \ldots, & 0, a_0 \\ -x_1, & 1, 0, \ldots, & 0, a_1 \\ 0, & -x_1, 1, \ldots, & 1, a_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, 0, \ldots, & 1, a_{\nu-1} \\ 0, & 0, 0, \ldots, & -x_1, a_\nu \end{vmatrix},$$

t. j. podle vzorců (13), (13′) dílu prvého

$$A_\nu = a_0 x_1{}^\nu + a_1 x_1{}^{\nu-1} + \ldots + a_\nu.$$

Máme tedy definitivní řešení soustavy (c):

$$q_\nu = a_0 x_1{}^\nu + a_1 x_1{}^{\nu-1} + \ldots + a_\nu,\ \nu = 0, 1, 2, .,,, n. \qquad \text{(d1)}$$

Podle této formule je tudíž možno přímo vypočítati koeficienty $q_0, q_1, \ldots, q_{n-1}$ podílu, jakož i zbytek q_n při dělení výše uvedeném; tento zbytek má ovšem hodnotu $q_n = f(x_1)$, jak vychází také přímo ze vzorce (d1).

Velmi pohodlný výpočet koeficientů $q_0, q_1, \ldots, q_n$ se opírá o relace (c) a uspořádává do t. zv. *schematu Hornerova*:

$$\begin{array}{c|llllll} & a_0, a_1, & a_2, & a_3, & \ldots, a_{n-1}, & a_n \\ x_1 & \quad x_1 a_0, & x_1 q_1, & x_1 q_2, & \ldots, x_1 q_{n-2}, & x_1 q_{n-1} \\ \hline & a_0, q_1, & q_2, & q_3, & \ldots, q_{n-1}, & q_n = f(x_1). \end{array} \qquad \text{(e)}$$

9. Jako další příklad provedeme určení koeficientů $c_1, c_2, \ldots, c_m$, které vystupovaly v prvém dílu při stanovení hodnoty determinantu *Sternova* (vztah 66). Mají se nalézti c_i tak, aby platilo identicky v x

$$f_m(x) \equiv x^m + \sum_{\nu=1}^{m} a_\nu{}^{(m)} x^{m-\nu} = x^m + \sum_{\varrho=1}^{m} c_\varrho f_{m-\varrho}(x) =$$

$$= x^m + \sum_{\varrho=1}^{m} c_\varrho \sum_{\varkappa=0}^{m-\varrho} a_\varkappa{}^{(m-\varrho)} x^{m-\varkappa-\varrho} = x^m + \sum_{\varrho=1}^{m} c_\varrho \sum_{\nu=\varrho}^{m} a_{\nu-\varrho}^{(m-\varrho)} x^{m-\nu} =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{m} x^{m-\nu} \sum_{\varrho=1}^{\nu} c_\varrho a_{\nu-\varrho}^{(m-\varrho)},\ a_0{}^{(m-\varrho)} = 1.$$

Tento požadavek vede ve smyslu methody neurčitých součinitelů k systému rovnic pro neznámé c_ϱ

$$\sum_{\varrho=1}^{\nu} a_{\nu-\varrho}^{(m-\varrho)} c_\varrho = a_\nu^{(m)}, \ \nu = 1, 2, \ldots, m.$$

Determinant D tohoto systému má hodnotu

$$D = a_0^{(0)} \cdot a_0^{(1)} \cdot a_0^{(2)} \cdot \ldots \cdot a_0^{(m-1)} = 1,$$

determinant D_k, vzniklý z D tím, že k-tý sloupec nahradíme soustavou čísel $a_1^{(m)}, a_2^{(m)}, \ldots, a_m^{(m)}$ pak rozvedeme podle prvních k řádků a dostaneme pro něj výraz

$$D_k = \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & \ldots, a_1^{(m)} \\ a_1^{(m-1)}, & 1, & 0, & \ldots, a_2^{(m)} \\ a_2^{(m-1)}, & a_1^{(m-2)}, & 1, & \ldots, a_3^{(m)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k-1}^{(m-1)}, & a_{k-2}^{(m-2)}, & a_{k-3}^{(m-3)}, & \ldots, a_k^{(m)} \end{vmatrix}.$$

Podle Cramerova pravidla tedy máme pro c_k hodnoty

$$c_k = D_k, \ k = 1, 2, \ldots, m;$$

to jsou koeficienty oné lineární kombinace, které jsme použili při výpočtu hodnoty determinantu Sternova.

3. SOUSTAVA HOMOGENNÍCH LINEÁRNÍCH ROVNIC.

Budiž dána soustava m *homogenních* lineárních rovnic o n neznámých

$$f_i \equiv \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} x_\nu = 0, \ i = 1, 2, \ldots, m. \tag{18}$$

Rovnice tohoto systému nazýváme nezávislými, jsou-li nezávislé soustavy (1), t. j. soustavy jejich koeficientů; obecně nazýváme hodnost h matice koeficientů rovnic (18) hodností soustavy (18).

Budiž hodnost této soustavy h a ptejme se, jaký má tento fakt důsledek pro rovnice samotné. Podle věty 1. lze v matici $\|a_{ik}\|$ soustavy nalézti h řádků lineárně nezávislých, jichž jsou všechny ostatní lineárními kombinacemi. Upravíme-li pořadí rovnic (18) a neznámých v nich tak, aby h-řadový nenulový determinant, který v matici $\|a_{ik}\|$ jistě existuje, byl determinant A_h daný vztahem (5), existují tedy čísla $c_{l1}, c_{l2}, \ldots, c_{lh}$, která nejsou všechna rovna nule, tak, že platí rovnice

$$a_{l\nu} = \sum_{k=1}^{h} c_{lk} a_{k\nu}, \ \nu = 1, 2, \ldots, n, \ l = h + 1, \ldots, m. \tag{a}$$

Násobíme-li je po řadě $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a sečteme, dostáváme

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{l\nu} x_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu \sum_{k=1}^{h} c_{lk} a_{k\nu} = \sum_{k=1}^{h} c_{lk} \sum_{\nu=1}^{n} a_{k\nu} x_\nu = \sum_{k=1}^{h} c_{lk} f_k,$$

t. j. rovnice

$$f_l = c_{l1} f_1 + c_{l2} f_2 + \ldots + c_{lh} f_h, \ l = h + 1, \ldots, m. \tag{b}$$

Je-li tedy hodnost soustavy (18) h, lze v ní nalézti (alespoň jedním způsobem) h rovnic navzájem lineárně nezávislých;

levé strany zbývajících $m - h$ rovnic jsou lineárními kombinacemi levých stran oněch prvých h rovnic. Každou soustavu h navzájem nezávislých rovnic nazýváme redukovanou. Je pak zřejmo, že se při vyhledávání řešení systému rovnic (18) můžeme omeziti na řešení soustavy redukované, t. j. v našem případě soustavy

$$f_1 = 0, f_2 = 0, \ldots, f_h = 0. \tag{19}$$

Frobenius konstruoval systém $n - h$ navzájem nezávislých řešení soustavy (19), z nichž lze každé jiné řešení této soustavy — a tedy také systému (18) — lineárně zkombinovati. Tento „*fundamentální systém*“ řešení najdeme tím, že v n-řadovém determinantu

$$D = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1h}, & a_{1,h+1}, & \ldots, & a_{1n} \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ a_{h1}, & a_{h2}, & \ldots, & a_{hh}, & a_{h,h+1}, & \ldots, & a_{hn} \\ 0, & 0, & \ldots, & 0, & 1, & \ldots, & 0 \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ 0, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & \ldots, & 1 \end{vmatrix}, \tag{20}$$

který má hodnotu $A_h \neq 0$, napíšeme $n - h$ soustav doplňků prvků posledních $n - h$ řádků:

$$D_{\varrho 1}, D_{\varrho 2}, \ldots, D_{\varrho n}, \quad \varrho = h + 1, \ldots, n. \tag{20'}$$

Každá z těchto soustav je řešením rovnic (19). Je totiž skutečně

$$f_k(D_{\varrho 1}, \ldots, D_{\varrho n}) = \sum_{\nu=1}^{n} a_{k\nu} D_{\varrho\nu} = 0$$

$$\text{pro } k = 1, 2, \ldots, h, \ \varrho = h + 1, \ldots, n;$$

to plyne z formulí (12) v prvém dílu. Téměř na první pohled je patrno, že i každá lineární kombinace soustav (20′) je řešením rovnic (19).

Dále jsou řešení (20′) navzájem nezávislá v tom smyslu, jak jsme tento pojem definovali v odst. 1. Rovnice

$$\sum_{\varrho=h+1}^{n} c_\varrho D_{\varrho\nu} = 0,\ \nu = 1, 2, \ldots, n \tag{a}$$

lze totiž splniti pouze tím, že položíme $c_{h+1} = c_{h+2} = \ldots = c_n = 0$. Označíme-li totiž σ-tou ($\sigma = h + 1, \ldots, n$) řádku determinantu D řadou $d_{\sigma 1}, d_{\sigma 2}, \ldots, d_{\sigma n}$ (jsou to samé nuly, až na jediný prvek rovný 1) a sečteme rovnice (a) znásobené po řadě těmito čísly $d_{\sigma\nu}$, najdeme

$$0 = \sum_{\nu=1}^{n} d_{\sigma\nu} \sum_{\varrho=h+1}^{n} c_\varrho D_{\varrho\nu} = \sum_{\varrho=h+1}^{n} c_\varrho \sum_{\nu=1}^{n} d_{\sigma\nu} D_{\varrho\nu} = c_\sigma D = c_\sigma A_h,$$

tedy (protože je $A_h \neq 0$) nutně

$$c_\sigma = 0,\ \sigma = h + 1, \ldots, n. \tag{b}$$

Zbývá ještě ukázati, že libovolné řešení $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ systému (19) lze z lineárně nezávislých řešení (20′) lineárně zkombinovati, t. j., že lze nalézt konstanty λ_ϱ ($\varrho = h + 1, \ldots, n$) tak, že platí rovnice

$$\xi_\nu = \sum_{\varrho=h+1}^{n} \lambda_\varrho D_{\varrho\nu},\ \nu = 1, 2, \ldots, n. \tag{c}$$

Tyto konstanty určíme z požadavku, aby výrazy $\xi_\nu - \sum\limits_{\varrho=h+1}^{n} \lambda_\varrho D_{\varrho\nu}$ byly všechny (t. j. pro $\nu = 1, 2, \ldots, n$) řešením oněch $n - h$ homogenních rovnic, které mají posledních $n - h$ řádků determinantu (20) za matici svých koeficientů, tedy rovnic

$$d_{\sigma 1} x_1 + d_{\sigma 2} x_2 + \ldots + d_{\sigma n} x_n = 0,\ \sigma = h + 1, \ldots, n. \tag{d}$$

Musí tudíž platit

$$0 = \sum_{\nu=1}^{n} d_{\sigma\nu} \Big(\xi_\nu - \sum_{\varrho=h+1}^{n} \lambda_\varrho D_{\varrho\nu}\Big) = \sum_{\nu=1}^{n} d_{\sigma\nu} \xi_\nu - \sum_{\varrho=h+1}^{n} \lambda_\varrho \sum_{\nu=1}^{n} d_{\sigma\nu} D_{\varrho\nu} = \xi_\sigma - \lambda_\sigma D,$$

t. j. pro λ_σ máme vztahy

$$\lambda_\sigma = \frac{\xi_\sigma}{D} = \frac{\xi_\sigma}{A_h},\ \sigma = h + 1, \ldots, n. \tag{e}$$

Výsledky, k nimž jsme tu dospěli, vyslovíme souborně větou 6. *Soustavu m lineárních homogenních rovnic o n neznámých a hodnosti h řešíme tak, že vyhledáme h rovnic lineárně nezávislých a podle vzorce (20') stanovíme fundamentální systém řešení. Z nich pak lze všechna řešení dané soustavy lineárně zkombinovati.*

Příklady.

10. Řešte soustavu

$$\begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 \phantom{{}- 4x_3} + 3x_4 &= 0 \\ 7x_1 + 6x_2 - 4x_3 + 7x_4 &= 0 \\ -x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= 0. \end{aligned} \tag{21}$$

Hodnost soustavy jest (v. př. 1.) rovna $h = 2$. Redukovaná soustava jest

$$\begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 \phantom{{}- 4x_3} + 3x_4 &= 0 \\ 7x_1 + 6x_2 - 4x_3 + 7x_4 &= 0 \end{aligned}$$

a determinant D pak:

$$D = \begin{vmatrix} 5, & -2, & 0, & 3 \\ 7, & 6, & -4, & 7 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{vmatrix}.$$

Jednoduchý výpočet vede k hodnotám

$$D_{31} = 8,\ D_{32} = 20,\ D_{33} = 44,\ D_{34} = 0;$$
$$D_{41} = -32,\ D_{42} = -14,\ D_{43} = 0,\ D_{44} = 44.$$

Fundamentální systém se skládá ze dvou lineárně nezávislých řešení

$$\begin{aligned} x_1 &= 8, & x_2 &= 20, & x_3 &= 44, & x_4 &= 0 \\ x_1 &= -32, & x_2 &= -14, & x_3 &= 0, & x_4 &= 44, \end{aligned} \tag{21'}$$

z nichž lze každé jiné řešení soustavy (21) lineárně zkombinovati. Má tedy soustava (21) nekonečně mnoho řešení, jež lze všechna vyjádřiti vzorci

$$x_1 = 8(\lambda_3 - 4\lambda_4),\ x_2 = 2(10\lambda_3 - 7\lambda_4),\ x_3 = 44\lambda_3, \quad x_4 = 44\lambda_4; \tag{21''}$$

v nich jsou λ_3, λ_4 libovolná čísla reálná.

11. Případ $n - 1$ homogenních rovnic o n neznámých a hodnosti $h = n - 1$.

Rovnice tvoří zřejmě redukovanou soustavu. Označíme-li znakem A_ν determinant matice, která vznikne z matice soustavy vynecháním ν-tého sloupce, má fundamentální systém (20′) tvar

$$D_{n\nu} = (-1)^{n+\nu} A_\nu,\ \nu = 1, 2, \ldots, n,$$

takže lze řešení psáti ve tvaru

$$x_1 : x_2 : \ldots : x_n = A_1 : -A_2 : \ldots : (-1)^{n+1} A_n. \tag{22}$$

4. SOUSTAVA m LINEÁRNÍCH ROVNIC O n NEZNÁMÝCH.

Soustavu m rovnic pro neznámé $x_1, x_2, \ldots, x_n$ píšeme ve tvaru

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} x_\nu = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m \tag{23}$$

a předpokládáme, že *není homogenní*, t. j., že aspoň jedno z čísel $b_1, b_2, \ldots, b_m$ je různé od nuly.

Připojíme-li k matici soustavy ještě $(n+1)$-ní sloupec tvořený čísly $b_1, b_2, \ldots, b_m$, dostaneme t. zv. matici rozšířenou a platí pak o řešitelnosti soustavy (23) tato všeobecná

věta 7. (Frobeniova): *Nutná a postačující podmínka pro řešitelnost soustavy* (23) *je ta, aby matice soustavy a matice rozšířená měly stejnou hodnost.*

Důkaz. Je-li soustava řešitelná, ukazují rovnice (23), že $(n + 1)$-ní sloupec rozšířené matice je lineární kombinací prvých n jejích sloupců, takže jsou opravdu hodnosti obou matic, o nichž věta Frobeniova mluví, stejné (v. věta 11, část prvá).

Mají-li naopak obě matice stejnou hodnost h, pak také matice

$$\left\| \begin{matrix} a_{11}, & a_{21}, & \ldots & a_{m1} \\ a_{12}, & a_{22}, & \ldots, & a_{m2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n}, & a_{2n}, & \ldots, & a_{mn} \end{matrix} \right\| \quad \text{a} \quad \left\| \begin{matrix} a_{11}, & a_{21}, & \ldots, & a_{m1} \\ a_{12}, & a_{22}, & \ldots, & a_{m2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n}, & a_{2n}, & \ldots, & a_{mn} \\ b_1, & b_2 & \ldots, & b_m \end{matrix} \right\|$$

mají tutéž hodnost h a v prvé z nich lze nalézti podle věty 1. právě h nezávislých řádků, jichž jsou všechny její ostatní řádky lineárními kombinacemi. Těchto h řádků je ovšem nezávislých také, když je počítáme k matici druhé a ježto také tato má hodnost h, je každý její další řádek lineární kombinací oněch h spolu nezávislých. Také řádek $b_1, b_2, \ldots, b_m$ je tedy jejich lineární kombinací a tudíž také lineární kombinací všech řádků matice prvé. To však značí (v. definici lineární kombinace, vzorec v prvém (11) dílu), že je soustava (23) řešitelná.

Případ, kdy soustava (23) nemá řešení, necháváme stranou a obrátíme se k tomu, kdy obě matice, o nichž mluví věta 7., mají stejnou hodnost h, takže rovnice (23) jsou řešitelné. Jak určíme jejich řešení?

Zavedeme-li si také pro soustavu (23) pojem redukované soustavy — děje se to doslova tak, jako při systému rovnic homogenních — můžeme ihned udati jedno řešení rovnic (23) a to tímto způsobem: V redukované soustavě změníme pořadí neznámých tak, aby byl splněn předpoklad (5) (označíme je v tomto pořadí opět znaky $x_1, x_2, \ldots, x_n$), neznámým $x_{h+1}, \ldots, x_n$ přidělíme zcela libovolné číselné hodnoty a vypočítáme pak Cramerovým pravidlem hodnoty zbylých neznámých $x_1, x_2, \ldots, x_h$. Soustava

$$x_1, x_2, \ldots, x_h \tag{24}$$

vypočteno při libovolně zvolených $x_{h+1}, \ldots, x_n$ je pak řešením také oněch rovnic (23), které nepatří k uvažovanému redukovanému systému, protože je každá z nich lineární kombinací rovnic soustavy redukované.

Lze nyní ukázat, že všechna možná řešení systému (23) vůbec lze zbudovati z čísel (24) a z řešení homogenního systému, vzniklého tím, že v rovnicích (23) položíme všechna b_i, $(i = 1, 2, \ldots, m)$ rovna nule. Dokážeme si totiž

větu 8. Obecné řešení systému (23) získáme, když k obecnému řešení příslušné soustavy homogenní přičteme nějaké speciální řešení rovnic (23).

D ů k a z. Budiž $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ obecné řešení homogenní soustavy, o níž mluví věta 8. a položme $X_1 = \xi_1 + x_1$,

$X_2 = \xi_2 + x_2, \ldots, X_n = \xi_n + x_n$, kde je $x_1, x_2, \ldots, x_n$ speciální řešení rovnic (23), na př. řešení (24). Pak jest

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} X_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu}(\xi_\nu + x_\nu) = \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu}\xi_\nu + \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} x_\nu = 0 + b_i = b_i,$$
$$i = 1, 2, \ldots, m,$$

takže je $X_1, X_2, \ldots, X_n$ řešením systému (23). Zbývá ještě dokázati, že vůbec každé řešení rovnic (23) lze takto vyjádřiti. Je-li však $\overline{X}_1, \overline{X}_2, \ldots, \overline{X}_n$ zcela libovolné řešení těchto rovnic, položme $\overline{X}_1 - x_1 = \overline{\xi}_1, \overline{X}_2 - x_2 = \overline{\xi}_2, \ldots, \overline{X}_n - x_n = \overline{\xi}_n$. Potom platí

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} \overline{\xi}_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu}(\overline{X}_\nu - x_\nu) = \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu}\overline{X}_\nu - \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} x_\nu = b_i - b_i = 0,$$
$$i = 1, 2, \ldots, m,$$

takže je $\overline{\xi}_1, \overline{\xi}_2, \ldots, \overline{\xi}_n$ řešením homogenní soustavy příslušné k rovnicím (23) a jest $\overline{X}_1 = \overline{\xi}_1 + x_1, \overline{X}_2 = \overline{\xi}_2 + x_2, \ldots, \overline{X}_n = \overline{\xi}_n + x_n$.

Příklady.

12. Řešte, je-li to možno, rovnice

$$\begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 \phantom{{}- 4x_3} + 3x_4 &= 2 \\ 7x_1 + 6x_2 - 4x_3 + 7x_4 &= -1 \\ -x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= \varrho. \end{aligned} \tag{25}$$

Aby soustava byla řešitelná, je nutno a stačí, aby matice soustavy a matice rozšířená měly stejnou hodnost. Protože však má matice soustavy hodnost $h = 2$ (v. př. 1.), musí také matice rozšířená míti hodnost 2 a to také stačí. Prvé dva řádky této matice jsou lineárně nezávislé, takže je nutno určit ϱ tak, aby poslední řádek byl lineární kombinací prvých dvou. Z příkladu 1. však už známe koeficienty této lineární kombinace — jsou to čísla $-1, 1, 2$ — a proto je nutno, aby $(-1) \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + 2\varrho = 0$, t. j. $\varrho = \frac{3}{2}$.

Redukovaná soustava je

$$\begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 \phantom{{}- 4x_3} + 3x_4 &= 2 \\ 7x_1 + 6x_2 - 4x_3 + 7x_4 &= -1; \end{aligned}$$

x_3, x_4 jsou zcela libovolná, takže je obecně

$$\begin{aligned} 44x_1 &= 10 + 8x_3 - 32x_4 \\ 44x_2 &= -19 + 20x_3 - 14x_4. \end{aligned}$$

Zvolíme-li si ku př. $x_3 = x_4 = 0$, dostáváme jedno řešení rovnic (25), ve kterých ovšem je $\varrho = \frac{3}{2}$, ve tvaru:

$$x_1 = \tfrac{5}{22},\ x_2 = -\tfrac{19}{44},\ x_3 = x_4 = 0. \tag{25'}$$

Obecné řešení homogenní soustavy příslušné k soustavě (25) jsme už nalezli v příkladě 10., vzorce (21″) a proto mají rovnice (25) podle věty 8. obecné řešení

$$\begin{aligned} x_1 = \tfrac{5}{22} + 8(\lambda_3 - 4\lambda_4),\ x_2 &= -\tfrac{19}{44} + 2(10\lambda_3 - 7\lambda_4), \\ x_3 &= 44\lambda_3,\ x_4 = 44\lambda_4; \end{aligned} \tag{25''}$$

λ_3, λ_4 jsou libovolná reálná čísla.

13. Provedeme výpočet hodnoty determinantu reciprokého k nulovému. V oddílu prvém jsme bez důkazu vyslovili poznatek, že i v tomto případě je v platnosti vzorec (33); přihlédneme nyní blíže k poměrům, které zde mohou nastati.

První možný případ, že je $A = 0$ a že má hodnost $h \leqq n - 2$, je triviální. V reciprokém determinantu a jsou pak všechny prvky — to jsou, nehledě k znaménkům, $(n-1)$-řadové minory determinantu A — rovny nule, tedy a samo, v souhlase se vzorcem (33) z dílu prvého, rovno nule a to tak, že je také jeho hodnost nulová.

Zajímavý je druhý možný případ, kdy nulový determinant A má hodnost $h = n - 1$. Potom je fundamentální systém soustavy

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} x_\nu = 0, \ i = 1, 2, \ldots, n$$

tvořen jediným nezávislým (t. j. nenulovým) řešením — označíme je

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n.$$

Každé jiné řešení — tedy také n řešení

$$A_{r1}, A_{r2}, \ldots, A_{rn}, \ r = 1, 2, \ldots, n$$

lze pak z onoho fundamentálního lineárně zkombinovati; existují tedy konstanty λ_r (ne všechny nulové) tak, že jest

$$A_{rs} = \lambda_r \xi_s, \ r = 1, 2, \ldots, n; \ s = 1, 2, \ldots, n. \tag{26}$$

Pak ale dostáváme pro libovolný dvouřadový minor determinantu a vztah

$$\begin{vmatrix} A_{rs}, & A_{rt} \\ A_{us}, & A_{ut} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_r \xi_s, & \lambda_r \xi_t \\ \lambda_u \xi_s, & \lambda_u \xi_t \end{vmatrix} = \lambda_r \lambda_u \xi_s \xi_t \cdot \begin{vmatrix} 1, & 1 \\ 1, & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{26'}$$

Výsledek vyslovíme takto:

Determinant reciproký k nulovému má hodnotu rovněž nulovou. Jeho hodnost je buď nula nebo 1 podle toho, zdali hodnost původního determinantu byla menší než $n - 1$ nebo rovna $n - 1$.

5. LINEÁRNÍ TRANSFORMACE A LINEÁRNÍ FORMY.

V tomto a v několika následujících paragrafech budeme často používati poznatků o počítání maticemi, z nichž nejdůležitější byly uvedeny v prvém dílu na str. 78—89.

Budiž dán určitý výraz $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a zaveďme do něho místo proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nové $X_1, X_2, \ldots, X_n$ lineárními rovnicemi

$$x_i = \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} X_\nu, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{27}$$

Říkáme pak, že jsme výraz $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ transformovali do nových proměnných lineární transformací (27). Matici $\boldsymbol{A}$ nazýváme maticí (determinant A pak modulem) dané transformace a mluvíme prostě o transformaci $\boldsymbol{A}$. Hodností transformace rozumíme hodnost její matice — v tomto smyslu také mluvíme o transformacích regulárních a singulárních.

Transformaci (27) můžeme psáti vzhledem k příkladu na str. 81 prvé části také ve tvaru maticové rovnice

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{AX}, \tag{27'}$$

z něhož můžeme činiti pohodlně různé důsledky. Je-li na příklad daná transformace regulární, existuje k ní inversní, která vyjadřuje nové proměnné původními. Násobíme-li vztah (27') zleva maticí $\boldsymbol{A}^{-1}$, dostáváme tuto inversní transformaci ve tvaru

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x} \tag{28}$$

takže její modul je (viz pojednání o reciprokých determinantech) roven výrazu A^{-1}.

Jsou-li proměnné nové $X_1, X_2, \ldots, X_n$ samy opět spjaty s jinými $y_1, y_2, \ldots, y_n$ lineární transformací

$$\mathbf{X} = \mathbf{B}\mathbf{y}, \tag{29}$$

dostáváme složením obou po sobě jdoucích transformací (27'), (29) původní proměnné $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vyjádřeny novými $y_1, y_2, \ldots, y_n$ v maticové rovnici

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{y}. \tag{30}$$

Je odtud patrno, že složení dvou lineárních transformací vede k transformaci opět lineární, která obecně závisí na pořadí, v němž byly dané transformace skládány.

Příklady.

14. Jak nutno volit substituci (29), aby byla transformace (30) unimodulární, t. j., aby byl její determinant roven 1?

Za předpokladu $A \neq 0$ má tedy býti $A \, . \, B = 1$; jsou-li c_{ik} $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ prvky libovolného determinantu o hodnotě 1 a $\mathbf{C}$ matice jimi určená, stačí, aby matice $\mathbf{B}$ splňovala vztah

$$\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{C}, \text{ t. j. } \mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}. \tag{31}$$

15. Základní vlastnosti transformace (27).

Nadrovina $(n - 1)$-rozměrného prostoru má v homogenních souřadnicích rovnici $\sum\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu x_\nu = 0$ a přejde lineární transformací (také lineární substitucí) (27) v útvar

$$0 = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \sum_{\varkappa=1}^{n} a_{\nu\varkappa} X_\varkappa = \sum_{\varkappa=1}^{n} X_\varkappa \sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu\varkappa} a_\nu = \sum_{\varkappa=1}^{n} b_\varkappa X_\varkappa,$$

tedy opět v nadrovinu onoho prostoru, pokládáme-li body $(x_1, x_2, \ldots x_n)$, $(X_1, X_2, \ldots X_n)$ za jeho dva body přiřazené sobě navzájem transformací (27). Rovnice této nové nadroviny tudíž zní

$$\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu X_\nu = 0,\ b_\nu = \sum_{\varrho=1}^{u} a_{\varrho\nu} a_\varrho,\ \nu = 1, 2, \ldots, n; \tag{32}$$

vztahy pro určení koeficientů $b_1, b_2, \ldots b_n$ je ostatně možno vyjádřiti jedinou maticovou rovnicí

$$\boldsymbol{b} = \overline{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{a}. \tag{33}$$

Útvar určený v $(n - 1)$-rozměrném prostoru body společnými $n - 2$ různým nadrovinám se jmenuje přímkou tohoto $(n - 1)$-rozměrného prostoru. Její rovnice tedy jsou

$$\sum_{\nu=1}^{n} c_{i\nu} x_\nu = 0,\ i = 1, 2, \ldots, n - 2. \tag{34}$$

Protože se transformací (27) každá z oněch $n - 2$ nadrovin přímku určujících transformuje opět v nadrovinu, převádí transformace (27) každou přímku $(n - 1)$-rozměrného prostoru opět v přímku. Rovnice této nové přímky budou podle výsledků (32) a (33)

$$\sum_{\nu=1}^{n} d_{i\nu} X_\nu = 0,\ \boldsymbol{d}_i = \overline{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{c}_i,\ i = 1, 2, \ldots, n - 2. \tag{35}$$

Specielní k-rozměrná $(0 \leqq k \leqq n - 2)$ varieta určená v $(n - 1)$-rozměrném prostoru $n - 1 - k$ nadrovinami se transformací (27) převádí zase v takovou varietu k-rozměrnou.

Transformace (27) je zobecněním kolineace známé z geometrie roviny a trojrozměrného prostoru do prostoru $(n - 1)$-rozměrného. Upozorňujeme, že $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i $X_1, X_2, \ldots, X_n$ pokládáme v tomto příkladě za homogenní bodové souřadnice.

16. Díváme-li se na soustavu n lineárních rovnic o n neznámých a s nenulovým determinantem

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} x_\nu = y_i,\ i = 1, 2, \ldots, n \tag{36}$$

jako na lineární substituci, která každé soustavě čísel y_1,

$y_2, \ldots, y_n$ přiřazuje určitou soustavu $x_1, x_2, \ldots, x_n$, lze ony rovnice psáti ve tvaru

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y} \tag{36'}$$

a jejich řešení je pak

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}. \tag{36''}$$

Vedle soustavy (36′) zavedeme ještě transponovanou

$$\bar{\mathbf{A}}\mathbf{s} = \mathbf{t} \tag{37}$$

a určíme hodnotu výrazu $\sum_{i=1}^{n} x_i t_i$. Dostáváme postupně

$$\sum_{i=1}^{n} x_i t_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{A} \sum_{\nu=1}^{n} A_{\nu i} y_\nu \sum_{\varrho=1}^{n} a_{\varrho i} s_\varrho = \frac{1}{A} \sum_{\nu,\varrho}^{1,2,\ldots,n} s_\varrho y_\nu \sum_{i=1}^{n} a_{\varrho i} A_{\nu i} =$$
$$= \sum_{\nu,\varrho}^{1,2,\ldots,n} s_\varrho y_\nu \delta_{\varrho\nu} = \sum_{\nu=1}^{n} s_\nu y_\nu.$$

Nalezli jsme tak jednoduchý a zajímavý vztah mezi řešeními $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $s_1, s_2, \ldots, s_n$ a pravými stranami $y_1, y_2, \ldots, y_n$, $t_1, t_2, \ldots, t_n$ dané soustavy (36′) a soustavy k ní transponované (37):

$$x_1 t_1 + x_2 t_2 + \ldots + x_n t_n = s_1 y_1 + s_2 y_2 + \ldots + s_n y_n. \tag{38}$$

Tak má na př. soustava (12) z př. 6. řešení (12,1) a soustava k ní transponovaná (na př.)

$$\begin{aligned}
3s_1 + s_2 + 3s_3 + 3s_4 &= -1\\
2s_1 + 3s_2 + 3s_3 + 3s_4 &= 0\\
4s_1 + s_2 + 3s_3 + 2s_4 &= 0\\
2s_1 + 4s_2 + 3s_3 + 2s_4 &= 0
\end{aligned}$$

pak řešení

$$s_1 = 3,\ s_2 = 2,\ s_3 = -6,\ s_4 = 2.$$

Máme tedy

$$\begin{array}{llll} x_1 = 6, & x_2 = -\frac{20}{3}, & x_3 = -\frac{10}{3}, & x_4 = \frac{13}{3} \\ y_1 = 0, & y_2 = 0, & y_3 = 1, & y_4 = 0 \\ s_1 = 3, & s_2 = 2, & s_3 = -6, & s_4 = 2 \\ t_1 = -1, & t_2 = 0, & t_3 = 0, & t_4 = 0 \end{array}$$

a přesvědčíme se snadno, že tyto veličiny splňují opravdu vztah (38).

* * *

Lineární forma y v n proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ má tvar

$$y = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n. \tag{39}$$

Dvě lineární formy týchž proměnných

$$y_1 = \sum_{\nu=1}^{n} a_{1\nu}x_\nu, \quad y_2 = \sum_{\nu=1}^{n} a_{2\nu}x_\nu$$

pokládáme za různé, jsou-li soustavy $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}; a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}$ jejich koeficientů lineárně nezávislé. Tak na př. jsou formy

$$y_1 = 2x_1 - 3x_2 + \tfrac{1}{2}x_3, \quad y_2 = -x_1 + \tfrac{3}{2}x_2 - \tfrac{1}{4}x_3$$

navzájem stejné. Z úvah odstavce 1. pak vyplývá poznatek, že v soustavě m lineárních forem

$$y_i = \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu}x_\nu, \quad i = 1, 2, \ldots, m \tag{40}$$

lze nalézti právě tolik navzájem různých, kolik je hodnost h matice soustavy jejich koeficientů (tuto matici ovšem doplníme ve smyslu odst. 9. části prvé na čtverečnou nulovými řadami, abychom také na systémy lineárních forem mohli užíti pravidel maticového počtu). Navzájem různé jsou pak ty formy, z jejichž matice lze vytvořiti nenulový determinant h-řadový. Soustavu (40) píšeme také zde ve známém tvaru

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}. \tag{40'}$$

Poznámka. Lineární transformace $(\bar{\mathbf{A}})^{-1}$ se nazývá kontragredientní k transformaci $\mathbf{A}$. Vzorce (93), (91) a (95) části I ukazují, že kontragredience dvou lineárních homogenních transformací je vzájemná.

Lze dokázati platnost této *věty*:

Nutná a postačující podmínka, aby byly dvě transformace $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{s} = \mathbf{B}\mathbf{t}$ navzájem kontragredientní, je vyjádřena rovnicí

$$\sum_{i=1}^{n} y_i s_i = \sum_{i=1}^{n} x_i t_i. \tag{41}$$

Jsou-li totiž kontragredientní, je $\mathbf{B} = (\bar{\mathbf{A}})^{-1}$, tedy druhá transformace má tvar $\mathbf{t} = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{s}$ a podle příkladu 16 dospíváme přímo k rovnici (41).

Je-li naopak tato rovnice splněna pro všechny systémy (x), (y), (s), (t) navzájem si odpovídající, volme systém (x) tak, že $x_i = 0$ pro $i \neq k$, $x_k = 1$. Tomuto systému odpovídá systém (y) určený vztahy $y_i = a_{ik}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Zavedeme-li tyto speciální soustavy do rovnice (41), dostáváme

$$t_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} s_i.$$

Tento vztah ovšem platí pro všechna k, t. j. pro $k = 1, 2, \ldots, n$ a ukazuje, že lze psáti

$$\mathbf{t} = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{s},$$

t. j. $\mathbf{s} = (\bar{\mathbf{A}})^{-1}\mathbf{t}$. Na druhé straně však víme, že $\mathbf{s} = \mathbf{B}\mathbf{t}$, takže je $\mathbf{B} = (\bar{\mathbf{A}})^{-1}$ a obě lineární transformace, o nichž věta mluví, jsou vskutku kontragredientní.

6. FORMY BILINEÁRNÍ.

Bilineární forma dvou řad proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_n$ je součtem n^2 sčítanců tvaru $a_{ik}x_iy_k$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n$, a_{ik} reálná), tedy

$$f = \sum_{i,k} a_{ik}x_iy_k, \quad i, k = 1, 2, \ldots, n. \tag{42}$$

Na označení proměnných ovšem nezáleží, všechny vlastnosti bilineární formy f jsou dány jedině maticí $\boldsymbol{A}$ jejich koeficientů. Proto také mluvíme někdy o bilineární formě $\boldsymbol{A}$. Hodnost h matice $\boldsymbol{A}$ je hodností formy, rozeznáváme formy regulární a singulární a vůbec přenášíme na formy bilineární (a také na kvadratické, viz odst. 7.) vyjadřování obvyklé v theorii matic. V tomto smyslu pak můžeme k formě (42) konstruovati reciprokou, transponovanou a kontragredientní.

Protože je f homogenní funkcí 1. stupně proměnných x_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$, lze na ni aplikovati známou *identitu Eulerovu* a psáti

$$f = \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu \frac{\partial f}{\partial x_\nu} = \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu \sum_{k=1}^{n} a_{\nu k}y_k.$$

Nyní však víme, že výraz $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{\nu k}y_k$ stojí na prvém místě ν-tého řádku matice $\boldsymbol{Ay}$ a že všechny ostatní elementy tohoto řádku jsou nuly. Utvoříme-li tudíž součin matice $\bar{\boldsymbol{x}}$ (tedy transponované k $\boldsymbol{x}$) a matice prve zmíněné, dostaneme matici, jež má první hlavní element rovný právě f, všechny ostatní pak nulové. Tuto matici

$$\bar{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{Ay} \tag{43}$$

budeme pokládati za maticový tvar formy (42).

Tak na př. určuje matice prvních tří sloupců soustav (3) bilineární formu

$$f = 5x_1y_1 - 2x_1y_2 + 7x_2y_1 + 6x_2y_2 - 4x_2y_3 - x_3y_1 - \\ - 4x_3y_2 + 2x_3y_3 \tag{44}$$

o hodnosti $h = 2$, tedy formu singulární. Čtenář nechť si vypočítá pro tento případ součin (43).

Doporučuji čtenáři dobře si rozvážiti fakt, že výraz (43) se nesmí žádným způsobem ztotožňovati s formou (42) — to plyne už z té okolnosti, že forma f je polynom, kdežto výraz (43) matice, tedy matematický útvar docela jiné povahy (matice nejsou veličiny, nýbrž pouhá schemata, systémy čísel). Součin (43) je spíše jakýmsi „maticovým obrazem" bilineární formy f. Pro uvedené „maticové obrazy" forem bilineárních (a také jiných; tento pojem je zřejmě schopen rozšíření a zobecnění) platí ovšem obvyklá aritmerika a algebra matic (jak jsme podali její počátky v odst. 9. prvého dílu). Zajímavá je otázka, co se děje s „maticovými obrazy" forem, transformací a pod., když s jejich „originály" $f_1, f_2, \ldots$ (a to jsou v případech, které zde máme na mysli, pouhé polynomy) provádíme různé operace matematické. Není bohužel možno zabývati se zde blíže těmito věcmi, protože by tím jednak rozsah spisku neúměrně vzrostl a za druhé nejsou zatím příslušné úvahy technicky důležité.

V každém případě je však nutno si uvědomiti, že už v celém odst. 5. vlastně pracujeme s „maticovými obrazy". Čtenář, který chce výklad dokonale pochopit, učiní dobře, když si ověří jednotlivé jeho fáze na konkretních numerických příkladech a pod.

V další úvaze se ovšem přidržíme obvyklého postupu a budeme se symbolem (43) a s příslušnou formou f (jejich vzájemné přiřadění je, theoreticky vzato, jednojednoznačné) pracovati podle pravidel již dříve odvozených (pouze pojmenování „maticový obraz", nebo „obraz" budeme občas používati).

Transformujme formu (42) transformací

$$x = C_1 X, \quad y = C_2 Y; \tag{45}$$

dostáváme její obraz ve tvaru (dokažte si napřed formuli $\overline{AB} = \bar{B}\bar{A}$)

$$\bar{X}\bar{C}_1 A C_2 Y, \tag{46}$$

z něhož je patrno, že transformovaná forma je opět bilineární v nových proměnných X_ν, Y_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$, avšak s maticí $\bar{C}_1 A C_2$. Odtud a z př. 1, str. 86 části plyne jednoduchý (avšak důležitý) důsledek, že se hodnost formy (42) nemění regulárními transformacemi proměnných.

Budiž na př. předložena úloha transformovati formu (44) do nových proměnných X_ν, Y_ν, $(\nu = 1, 2, 3)$ substitucemi (obě jsou regulární)

$$C_1 = \left\| \begin{array}{rrr} 1, & 0, & -1 \\ 1, & 0, & 2 \\ -1, & 1, & 0 \end{array} \right\|, \quad C_2 = \left\| \begin{array}{rrr} -2, & 4, & 3 \\ 5, & 1, & -1 \\ -3, & 0, & 2 \end{array} \right\|.$$

Podle vzorce (46) dostaneme novou bilineární formu s maticí

$$\bar{C}_1 A C_2 = \left\| \begin{array}{rrr} 1, & 1, & -1 \\ 0, & 0, & 1 \\ -1, & 2, & 0 \end{array} \right\| . \left\| \begin{array}{rrr} 5, & -2, & 0 \\ 7, & 6, & -4 \\ -1, & -4, & 2 \end{array} \right\| .$$

$$. \left\| \begin{array}{rrr} -2, & 4, & 3 \\ 5, & 1, & -1 \\ -3, & 0, & 2 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{rrr} 32, & 60, & 19 \\ -24, & -8, & 5 \\ 76, & 50, & -3 \end{array} \right\| ,$$

tedy formu

$$F = 32X_1Y_1 + 60X_1Y_2 + 19X_1Y_3 - 24X_2Y_1 - 8X_2Y_2 + \\ + 5X_2Y_3 + 76X_3Y_1 + 50X_3Y_2 - 3X_3Y_3. \tag{47}$$

Potvrďte si tento výsledek přímým dosazením nových proměnných do výrazu (44) a také to, že forma (47) má zase hodnost $h = 2$.

Nyní si dokážeme tuto **základní větu** o bilineárních formách:

Věta 9. Bilineární formu (42) o hodnosti $h < n$ je možno regulárními lineárními transformacemi uvésti na bilineární formu dvou řad po h proměnných.

Důkaz. Za daného předpokladu má soustava

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} x_\nu = 0, \; i = 1, 2, \ldots, n \tag{a}$$

$n - h$ nezávislých řešení. Najdeme je a označíme

$$\xi_{1\varrho}, \xi_{2\varrho}, \ldots, \xi_{n\varrho}, \; \varrho = h + 1, \ldots, n; \tag{b}$$

za dovoleného předpokladu, že $(n - h)$-řadový nenulový determinant se dá sestaviti z posledních $n - h$ sloupců soustav (b) (to znamená eventuelně jen přečíslování druhé řady proměnných v dané bilineární formě), konstruujme n-řadovou matici (dokažte, že je regulární)

$$\mathbf{B}_1 = \left\| \begin{matrix} 1, & 0, \ldots, & 0, & \xi_{1,h+1}, & \ldots, \xi_{1n} \\ 0, & 1, \ldots, & 0, & \xi_{2,h+1}, & \ldots, \xi_{2n} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0, & 0, \ldots, & 1, & \xi_{h,h+1}, & \ldots, \xi_{hn} \\ 0, & 0, \ldots, & 0, & \xi_{h+1,h+1} & \ldots, \xi_{h+1,n} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0, & 0, \ldots, & 0, & \xi_{n,h+1}, & \ldots, \xi_{nn} \end{matrix} \right\| . \tag{48}$$

Transformujeme-li pak proměnné y v dané bilineární formě lineární substitucí

$$\mathbf{y} = \mathbf{B}_1 \mathbf{Y} \tag{49}$$

dostaneme novou v proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ a s maticí $\mathbf{AB}_1$, která má obecný prvek (b_{ik}, $i, k = 1, 2, \ldots, n$ jsou prvky matice $\mathbf{B}_1$)

$$p_{ik} = \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} b_{\nu k} = a_{ik} \text{ pro } k \leqq h,$$

$$p_{ik} = \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} b_{\nu k} = \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} \xi_{\nu k} = 0 \text{ pro } k \geqq h + 1. \tag{c}$$

Má tudíž nová bilineární forma matici, jejichž prvních h sloupců je stejných, jako u matice původní, posledních pak $n - h$ sloupců je tvořeno samými nulami. Tato nová matice má ovšem stejnou hodnost h jakou měla původní.

Rovnice

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu\varkappa} x_\nu = 0, \ \varkappa = 1, 2, \ldots, h \tag{d}$$

mají fundamentální systém řešení

$$\eta_{\varrho 1}, \eta_{\varrho 2}, \ldots, \eta_{\varrho n}, \ \varrho = h + 1, \ldots, n. \tag{e}$$

Za předpokladu, že opět lze nenulový determinant sestaviti z $n - h$ posledních sloupců soustav (e) (to znamená v případě nutnosti jenom přečíslování prvé řady proměnných v původní bilineární formě), sestrojíme regulární matici

$$\mathbf{B}_2 = \left\| \begin{matrix} 1, & 0, & \ldots, & 0, & \eta_{h+1,1}, & \ldots, & \eta_{n1} \\ 0, & 1, & \ldots, & 0, & \eta_{h+1,2}, & \ldots, & \eta_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & 0, & \ldots, & 1, & \eta_{h+1,h}, & \ldots, & \eta_{nh} \\ 0, & 0, & \ldots, & 0, & \eta_{h+1,h+1}, & \ldots, & \eta_{n,h+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & 0, & \ldots, & 0, & \eta_{h+1,n}, & \ldots, & \eta_{nn} \end{matrix} \right\| \tag{50}$$

a podrobíme také ještě proměnné x lineární transformaci

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}_2 \mathbf{X}. \tag{51}$$

Tím přechází částečně již transformovaná bilineární forma v konečný tvar — bilineární formu s maticí $\overline{\mathbf{B}}_2 \mathbf{A} \mathbf{B}_1$ a s obecným prvkem (β_{ik}, $i, k = 1, 2, \ldots, n$ je obecný element matice $\mathbf{B}_2$)

$$q_{ik} = \sum_{\nu=1}^{n} \beta_{\nu i} p_{\nu k} = \sum_{\nu=1}^{n} \beta_{\nu i} a_{\nu k} = a_{ik} \text{ pro } i, k \leqq h, \ q_{ik} = 0$$
$$\text{pro } k \geqq h + 1, \ q_{ik} = 0 \text{ pro } i \geqq h + 1, \ k \leqq h. \tag{f}$$

Úhrnem tedy můžeme říci: Dvěma regulárními lineárními transformacemi (49), (51) se nám podařilo transformovati původní bilineární formu (42) na tvar

$$\sum_{i,k} a_{ik} X_i Y_k, \quad i, k = 1, 2, \ldots, h, \tag{52}$$

o němž mluví věta 9.

Proveďme tento postup numericky pro formu (44) o hodnosti $h = 2$. Systém (a) jest zde

$$\begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 \phantom{{}-4x_3} &= 0 \\ 7x_1 + 6x_2 - 4x_3 &= 0 \\ -x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

a řešení (b) — zde jediné — je podle vzorce (22) dáno úměrou

$$\xi_{13} : \xi_{23} : \xi_{33} = 8 : 20 : 44 = 2 : 5 : 11;$$

volíme

$$\xi_{13} = 2, \ \xi_{23} = 5, \ \xi_{33} = 11.$$

Matice (48) má pak tvar

$$\boldsymbol{B}_1 = \begin{Vmatrix} 1, & 0, & 2 \\ 0, & 1, & 5 \\ 0, & 0, & 11 \end{Vmatrix}.$$

Systém (d) bude:

$$\begin{aligned} 5x_1 + 7x_2 - x_3 &= 0 \\ -2x_1 + 6x_2 - 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

a jeho řešení (e)

$$\eta_{31} : \eta_{32} : \eta_{33} = -22 : 22 : 44 = -1 : 1 : 2;$$

položíme ovšem

$$\eta_{31} = -1, \ \eta_{32} = 1, \ \eta_{33} = 2.$$

Matice (50) pak jest

$$\boldsymbol{B}_2 = \begin{Vmatrix} 1, & 0, & -1 \\ 0, & 1, & 1 \\ 0, & 0, & 2 \end{Vmatrix}.$$

Transformacemi

$$\begin{aligned} x_1 &= X_1 \quad - X_3, & y_1 &= Y_1 \quad + 2Y_3 \\ x_2 &= \quad X_2 + X_3, & y_2 &= \quad Y_2 + 5Y_3 \\ x_3 &= \quad\quad 2X_3, & y_3 &= \quad\quad 11Y_3 \end{aligned}$$

musí tedy forma (44) přejíti ve tvar

$$5X_1Y_1 - 2X_1Y_2 + 7X_2Y_1 + 6X_2Y_2. \tag{53}$$

Přesvědčte se, že tomu tak skutečně jest a vypočítejte také matici $\overline{\boldsymbol{B}}_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}_1$.

Jest zřejmé, že při formě o hodnosti h je počet proměnných h (pro x i pro y) nejmenší počet, na který lze formu redukovat. Kdyby existoval počet nižší než h, musila by příslušná transformovaná forma, ježto povstala z dané regulárními transformacemi, míti hodnost opět h — to ovšem není při počtu proměnných menším než h možno.

Dále jsme získali prostředek, jak libovolnou matici $\boldsymbol{A}$ o hodnosti h převésti násobením regulárními maticemi $\boldsymbol{B}_1$ zprava a $\overline{\boldsymbol{B}}_2$ zleva na tvar, který z ní dostaneme prostě tím, že ty prvky a_{ik}, jichž aspoň jeden index je větší než h, nahradíme nulami, ostatní pak ponecháme. Nahlédneme opět snadno, že tato redukce je nejvyšší možná.

Bilineární forma (52) je už regulární s maticí $\boldsymbol{A}_1 = \|a_{ik}\|$, $i, k = 1, 2, \ldots, h$. Lineární regulární transformací (všechny matice jsou zde h-řadové, což je odchylkou od úmluvy v odst. 9. první části)

$$\boldsymbol{X} = (\overline{\boldsymbol{A}}_1)^{-1}\boldsymbol{x}', \; \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{y}' \tag{54}$$

přechází v bilineární formu s obrazem

$$\overline{\boldsymbol{x}}'\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{y}' = \overline{\boldsymbol{x}}'\boldsymbol{y}', \tag{55}$$

t. j. ve formu

$$x_1'y_1' + x_2'y_2' + \ldots + x_h'y_h'. \tag{56}$$

Toto jest t. zv. *normální tvar*, na který tedy lze každou bilineární formu o hodnosti h uvésti. Tak máme v případě formy (53):

$$\mathbf{A}_1 = \left\| \begin{matrix} 5, & -2 \\ 7, & 6 \end{matrix} \right\|, \quad \bar{\mathbf{A}}_1 = \left\| \begin{matrix} 5, & 7 \\ -2, & 6 \end{matrix} \right\|, \quad (\mathbf{A}_1)^{-1} = \left\| \begin{matrix} \frac{6}{44}, & -\frac{7}{44} \\ \frac{2}{44}, & \frac{5}{44} \end{matrix} \right\|,$$

takže zde vede k cíli substituce

$$X_1 = \tfrac{6}{44} x_1' - \tfrac{7}{44} x_2', \quad Y_1 = y_1'$$
$$X_2 = \tfrac{2}{44} x_1' + \tfrac{5}{44} x_2', \quad Y_2 = y_2'.$$

Potvrďte skutečným výpočtem, že převádí formu (53) na normální tvar

$$x_1' y_1' + x_2' y_2'.$$

Na konec se ještě zmíníme o jistém druhu vyjádření bilineárních forem, kteréžto je východiskem při studiu jejich souvislosti s **vyššími komplexními** (hyperkomplexními) **čísly**.

Budiž $\mathbf{F}_{ik}$ n-řadová matice s jediným nenulovým prvkem, který stojí v i-tém řádku na jeho k-tém místě a má hodnotu 1; ostatní elementy této matice buďtež nulové. Pro násobení takových speciálních matic platí vzorec

$$\mathbf{F}_{ik} \mathbf{F}_{lm} = \delta_{kl} \mathbf{F}_{im}, \quad i, k, l, m = 1, 2, \ldots, n. \tag{57}$$

Označíme-li totiž obecný element prvého faktoru na levé straně této rovnice znakem $f_{r\varrho}$, obecný element druhého faktoru pak symbolem $\varphi_{r\varrho}$ ($r, \varrho = 1, 2, \ldots, n$), má součin na levé straně obecný prvek

$$p_{rs} = \sum_{\varrho=1}^{n} f_{r\varrho} \varphi_{\varrho s},$$

takže je zřejmě $p_{rs} = 0$ pro $r \neq i$, $s \neq m$. Jediný úvahyhodný prvek tedy je

$$p_{im} = \sum_{\varrho=1}^{n} f_{i\varrho} \varphi_{\varrho m};$$

protože však jest $f_{i\varrho} = \delta_{k\varrho}$, $\varphi_{\varrho m} = \delta_{\varrho l}$, máme dále

$$p_{im} = \sum_{\varrho=1}^{n} \delta_{k\varrho}\delta_{\varrho l} = \delta_{kl}.$$

Je tudíž součin na levé straně rovnice (57) roven n-řadové matici s elementy p_{rs} vesměs nulovými až na prvek p_{im}, který má hodnotu δ_{kl} (δ_{kl} je stále Kroneckerův symbol). To však je právě matice stojící na pravé straně vzorce (57).

Bilineární forma s maticovým obrazem $\bar{\mathbf{x}}\mathbf{F}_{ik}\mathbf{y}$ je velmi jednoduchá, totiž $x_i y_k$, takže lze každou bilineární formu

$$\sum_{i,k} a_{ik} x_i y_k, \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

zobraziti také ve tvaru

$$\sum_{i,k} a_{ik} \mathbf{x} \mathbf{F}_{ik} \mathbf{y} \tag{58}$$

a nezáleží-li nám právě na tom, jaké má forma proměnné, lze ji zobraziti i ve tvaru

$$\sum_{i,k} a_{ik} \mathbf{F}_{ik}. \tag{58'}$$

Tento druhý způsob psaní už přímo vede k souvislosti bilineárních forem s vyššími čísly komplexními. Stačí, abychom výrazy $\mathbf{F}_{ik}$ interpretovali jako n^2 nezávislých jednotek komplexního čísla.

Funkce (85) resp. (87) prvé části se jmenuje *charakteristickou funkcí dané formy bilineární*, rovnice vzniklá tím, že tuto charakteristickou funkci položíme rovnu nule, jest pak charakteristickou rovnicí dané formy. Seznámíme se s ní blíže v pojednání o formách Hermiteových (v odst. 12.).

Poznámka. Je-li matice bilineární formy (42) *souměrná* (t. j. platí-li $a_{ik} = a_{ki}$, $i, k = 1, 2, \ldots, n$), nazýváme *formu souměrnou*. Transformujeme-li v ní obě řady proměnných toutéž lineární substitucí $\mathbf{C}$, dostaneme opět formu bilineární souměrnou. Výsledná forma bude totiž míti podle vzorce (46) matici $\bar{C}AC$, jejíž obecný prvek γ_{ik} má tvar

$$\gamma_{ik} = \sum_{\varrho=1}^{n} c_{\varrho i} \sum_{\nu=1}^{n} a_{\varrho\nu} c_{\nu k} = \sum_{\varrho,\nu} c_{\varrho i} a_{\varrho\nu} c_{\nu k} = \sum_{\nu,\varrho} c_{\nu k} a_{\nu\varrho} c_{\varrho i} = \gamma_{ki},$$

$$i, k = 1, 2, \ldots, n;$$

transformovaná forma je tedy vskutku souměrná.

Jde-li na př. o formu s maticí

$$A = \begin{Vmatrix} 0, & 3, & -1 \\ 3, & 2, & 1 \\ -1, & 1, & 0 \end{Vmatrix}$$

a je-li dále

$$C = \begin{Vmatrix} 1, & 0, & -1 \\ 1, & 0, & 2 \\ -1, & 1, & 0 \end{Vmatrix}, \quad \bar{C} = \begin{Vmatrix} 1, & 1, & -1 \\ 0, & 0, & 1 \\ -1, & 2, & 0 \end{Vmatrix},$$

dostáváme po krátkém počítání matici transformované formy

$$\bar{C}AC = \begin{Vmatrix} 8, & 0, & 4 \\ 0, & 0, & 3 \\ 4, & 3, & -4 \end{Vmatrix};$$

ta pak je vskutku souměrná.

7. FORMY KVADRATICKÉ.

Jestliže v souměrné bilineární formě položíme $y_\nu = x_\nu$ ($\nu = 1, 2, \ldots, n$), přejde tato v útvar, kterému říkáme *kvadratická forma* proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Pochopitelně na ni přenášíme všechny pojmy a úvahy, které jsme provedli v odst. 6. Zvláště je možno také pro kvadratickou formu provésti redukci, o níž mluví věta 9.; dík symetrii matice kvadratické formy stačí k této redukci jediná transformace s maticí (48) z odst. 6.

Jako příklad proveďme redukci kvadratické formy

$$\begin{aligned} f = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2 + 2x_4^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - \\ - 2x_1x_4 + 6x_2x_3 + 2x_2x_4. \end{aligned} \tag{59}$$

Matice dané formy

$$\boldsymbol{A} = \begin{Vmatrix} 2, & 1, & 3, & -1 \\ 1, & 2, & 3, & 1 \\ 3, & 3, & 6, & 0 \\ -1, & 1, & 0, & 2 \end{Vmatrix}$$

má, jak si čtenář snadno ověří, hodnost $h = 2$; postup věty 9. z odst. 6 se tedy pro náš případ utváří takto:

Redukovaná soustava příslušná k systému (a)

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

má dvě nezávislá řešení. Za ta zvolíme na příklad

$$\begin{aligned} &\xi_{13} = 1, \quad \xi_{23} = -1, \quad \xi_{33} = 0, \quad \xi_{43} = 1 \\ &\xi_{14} = -1, \quad \xi_{24} = -1, \quad \xi_{34} = 1, \quad \xi_{44} = 0 \end{aligned}$$

a sestavíme matici $\boldsymbol{B}_1$ podle vzoru (48):

$$\boldsymbol{B}_1 = \begin{Vmatrix} 1, & 0, & 1, & -1 \\ 0, & 1, & -1, & -1 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \end{Vmatrix}.$$

Danou formu (59) pak transformujeme transformací $\boldsymbol{B}_1$; pro matici $\bar{\boldsymbol{B}}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}_1$ nám po krátkém počítání vyjde

$$\bar{\boldsymbol{B}}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}_1 = \begin{Vmatrix} 2, & 1, & 0, & 0 \\ 1, & 2, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0 \end{Vmatrix}.$$

Transformací (která je regulární — ověřte si to)

$$\begin{aligned} x_1 &= X_1 \phantom{{}-X_2} + X_3 - X_4 \\ x_2 &= \phantom{X_1 +{}} X_2 - X_3 - X_4 \\ x_3 &= \phantom{X_1 + X_2 - X_3 -{}} X_4 \\ x_4 &= \phantom{X_1 + X_2 -{}} X_3 \end{aligned}$$

přejde tedy kvadratická forma (59) ve tvar

$$f_1 = 2X_1^2 + 2X_2^2 + 2X_1X_2. \tag{59'}$$

Potvrďte si tuto skutečnost přímým výpočtem.

Píšeme-li kvadratickou formu ve tvaru

$$f = \sum_{i,k} a_{ik}x_ix_k, \quad a_{ik} = a_{ki}, \quad i, k = 1, 2, \ldots, n, \tag{60}$$

nazýváme lineární formy

$$F_\nu = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_\nu} = \sum_{k=1}^{n} a_{\nu k}x_k, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n \tag{61}$$

lineárními formami k f přidruženými (adjungovanými); někdy také píšeme $F_\nu(x)$.

Protože je forma f homogenní funkcí 2. stupně svých proměnných, platí pro ni podle Eulerovy věty

$$\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu \frac{\partial f}{\partial x_\nu} = 2f, \text{ t. j. } f = \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu F_\nu; \tag{62}$$

bilineární forma

$$\sum_{\nu=1}^{n} y_\nu F_\nu(x) \tag{63}$$

se jmenuje *polárou* dané formy kvadratické.

Souměrný determinant $|a_{ik}|$, $i, k = 1, 2, \ldots, n$ matice $\mathbf{A}$ dané kvadratické formy se nazývá *diskriminantem* této formy a rozhoduje svojí hodnotou o tom, zda je forma singulární či regulární.

Kvadratickou formu (60) lze psáti také ve tvaru vroubeného determinantu. Vypočítáme-li totiž hodnotu determinantu r_1, který vznikne z determinantu R_1 (vzorec (42) dílu prvého) tím, že v něm místo každého prvku a_{ik} píšeme jeho doplněk A_{ik} v determinantu A, vypočítáme-li tuto hodnotu r_1 podle vzorce (45) dílu prvého, dostáváme (α_{ki} značí doplněk prvku A_{ki} v determinantu reciprokém k A)

$$r_1 = -\sum_{i,k} \alpha_{ki} x_i y_k = -A^{n-2} \sum_{i,k} a_{ki} x_i y_k.$$

Předpokládáme-li ještě, že je determinant A souměrný a klademe-li $y_k = x_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, dostáváme svrchu zmíněné vyjádření kvadratické formy f determinantem ve tvaru

$$-A^{n-2} \cdot f = \begin{vmatrix} A_{11}, & A_{12}, & \ldots, & A_{1n}, & x_1 \\ A_{21}, & A_{22}, & \ldots, & A_{2n}, & x_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n1}, & A_{n2}, & \ldots, & A_{nn}, & x_n \\ x_1, & x_2, & \ldots, & x_n, & 0 \end{vmatrix}. \tag{64}$$

Kvadratická forma

$$F = \sum_{i,k} A_{ik} x_i x_k$$

se nazývá *formou* k f *adjungovanou*. Je-li hodnost formy f nejvýše $n - 2$, je forma k ní adjungovaná identicky nulová; je-li však f hodnosti $h = n - 1$, lze podle př. 13. psáti $A_{ik} = \lambda_i \xi_k$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$. Vzhledem k souměrnosti původního determinantu je ovšem $A_{ki} = A_{ik}$, tedy $\lambda_k \xi_i = \lambda_i \xi_k$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ a formu adjungovanou k f lze psáti také ve tvaru

$$F = \sum_{i,k} \lambda_i \xi_k x_i x_k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i x_i^2 + 2 \sum_{i<k} \lambda_i \xi_k x_i x_k = \left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\lambda_i \xi_i}\, x_i\right)^2. \tag{65}$$

V případě, že původní forma má hodnost $h = n - 1$, je kvadratická forma k ní adjungovaná rovna úplnému čtverci formy lineární; je-li hodnost původní formy menší, než $n - 1$, je adjungovaná forma identicky nulová.

Maticový obraz kvadratické formy (60) je $\overline{\mathbf{x}}\mathbf{A}\mathbf{x}$; s výhodou ho užíváme zvláště k symbolickému znázornění transformací kvadratických forem. Polára formy (60) má za maticový obraz matici $\overline{\mathbf{y}}\mathbf{A}\mathbf{x}$, odkudž téměř okamžitě vyplývá fakt, že je polára „*kovariantem*" své formy, což značí: Přejde-li jistou transformací daná kvadratická forma v jinou, pak přechází její polára — transformujeme-li obě řady jejích proměnných právě takovou transformací — v poláru kvadratické formy transformované. Stejně jednoduchým důsledkem maticového znázornění je to, že determinant formy transformované je roven determinantu formy původní, násobenému čtvercem determinantu transformace, jíž jsme danou kvadratickou formu podrobili.

Dokážeme si nyní důležitou větu pro theorii kvadratických forem, větu o redukci kvadratické formy na lineární kombinaci čtverců n proměnných.

Věta 10. *Kvadratickou formu lze vhodnou regulární lineární transformací převésti na lineární kombinaci čtverců proměnných*, t. j. na tvar

$$c_1X_1^2 + c_2X_2^2 + \ldots + c_nX_n^2. \tag{66}$$

Je-li hodnost dané formy h, je mezi koeficienty c_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, n$) právě h nenulových.

Důkaz. Obsahuje-li daná forma (60) aspoň jeden čtverec, dosáhneme eventuelním přečíslováním proměnných toho, že bude $a_{11} \neq 0$ a píšeme formu ve tvaru

$$f = a_{11}x_1^2 + 2x_1\sum_{k=2}^{n} a_{1k}x_k + \bar{f} = \frac{1}{a_{11}}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{1k}x_k\right)^2 +$$

$$+ \bar{f} - \frac{1}{a_{11}}\left(\sum_{k=2}^{n} a_{1k}x_k\right)^2 = \frac{1}{a_{11}}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{1k}x_k\right)^2 + f^{(1)},$$

kde $f^{(1)}$ (a také ovšem $\bar{f}$) je kvadratická forma už jen proměnných $x_2, x_3, \ldots, x_n$.

Transformujeme-li danou formu (60) za předpokladu $a_{11} \neq 0$ lineární substitucí, která je inversní k regulární transformaci (rozmyslete si to)

$$X_1 = \sum_{k=1}^{n} a_{1k} x_k, \quad X_\nu = x_\nu, \; \nu = 2, 3, \ldots, n, \tag{67}$$

dostaneme ji ve tvaru

$$c_1 X_1^2 + F^{(1)}(X_2, X_3, \ldots, X_n).$$

Neobsahuje-li daná forma žádného čtverce proměnné, dosáhneme vhodným označením, že bude $a_{12} \neq 0$ (vylučujeme zde případ formy identicky nulové) a píšeme pak f takto:

$$\tfrac{1}{2} f = a_{12} x_1 x_2 + x_1 \sum_{k=3}^{n} a_{1k} x_k + x_2 \sum_{k=3}^{n} a_{2k} x_k +$$

$$+ \bar{\bar{f}} = \frac{1}{a_{12}} (a_{12} x_1 + \sum_{k=3}^{n} a_{2k} x_k)\,(a_{12} x_2 + \sum_{k=3}^{n} a_{1k} x_k) -$$

$$- \frac{1}{a_{12}} \sum_{k=3}^{n} a_{1k} x_k \sum_{k=3}^{n} a_{2k} x_k + \bar{f} = \frac{1}{a_{12}} (a_{12} x_1 + \sum_{k=3}^{n} a_{2k} x_k) \,.$$

$$.\, (a_{12} x_2 + \sum_{k=3}^{n} a_{1k} x_k) + f^{(2)};$$

$f^{(2)}$ a $\bar{\bar{f}}$ jsou kvadratické formy v proměnných $x_3, x_4, \ldots, x_n$.

Regulární transformací, která je inversní k substituci

$$\begin{aligned} X_1 &= \tfrac{1}{2}[a_{12}(x_1 + x_2) + \sum_{k=3}^{n} (a_{1k} + a_{2k})\, x_k], \\ X_2 &= \tfrac{1}{2}[a_{12}(x_2 - x_1) + \sum_{k=3}^{n} (a_{1k} - a_{2k})\, x_k], \end{aligned} \tag{68}$$

$$X_\nu = x_\nu, \; \nu = 3, \ldots, n,$$

dostaneme pak původní formu ve tvaru

$$\gamma_1 X_1^2 + \gamma_2 X_2^2 + F^{(2)}\,(X_3, X_4, \ldots, X_n).$$

Dalším odštěpováním násobků čtverců proměnných od forem $F^{(1)}$ resp. $F^{(2)}$ dospějeme posléze k tvaru (66). Transformace, jichž při tom užíváme (jsou ovšem obdobné právě provedeným) se sice týkají jen některých proměnných (vždy těch, které zbyly ve formách vzniklých tím kterým odštěpením jednoho nebo dvou čtverců), lze je však interpretovati zřejmě po každé jako transformace všech proměnných. Tyto všechny transformace jsou — právě tak jako (67) a (68) — regulární a jejich postupnou aplikaci lze nahraditi jedinou regulární transformací všech proměnných, která je z nich složena. Byla-li hodnost původní formy h, je tedy i hodnost formy transformované na tvar (66) rovna h a počet nenulových koeficientů c_ν nemůže býti menší než h (pak by hodnost transformované formy byla totiž menší než h), ani větší než h (pak by ona hodnost byla také větší než h). Tím je věta 10. dokázána.

Užitečné je pro kvadratické (a také bilineární) formy zavésti pojem *ekvivalence*.

Dvě formy kvadratické (nebo bilineární) nazýváme ekvivalentní, je-li možno jednu z nich převésti regulární transformací (u bilineárních forem dvěma takovými transformacemi) ve druhou. Tento pojem ekvivalence je zřejmě vzájemný a platí o něm:

Dvě formy kvadratické nebo bilineární jsou navzájem ekvivalentní tehdy a jen tehdy, mají-li stejnou hodnost.

Důkaz. Provedeme jen pro dvě kvadratické formy f_1, f_2. Jsou-li ekvivalentní, existuje regulární transformace lineární, která převádí formu f_1 v f_2. Protože pak při takovéto transformaci zůstává hodnost h_1 formy f_1 stále stejná, je nutně $h_1 = h_2$.

Mají-li naopak obě formy stejnou hodnost $h_1 = h_2 = h$, převedeme prvou z nich (podle věty 10. a ještě další maličkou úpravou) regulární lineární transformací $\mathbf{C}_1$ na tvar

$$X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_h^2,$$
druhou pak transformací $\mathbf{C}_2$ (opět regulární) na tentýž tvar. Je tedy zřejmo, že složená regulární transformace $\mathbf{C}_1\mathbf{C}_2^{-1}$ převádí formu prvou přímo v f_2.

Pro případ dvou forem bilineárních probíhá důkaz úplně analogicky — proveďte jej.

Poznámky. K formám kvadratickým se ještě později (až probereme užití determinantů v theorii rovnic) vrátíme a seznámíme se s jejich dalšími vlastnostmi, ještě zajímavějšími, než jsou ty, které jsme právě poznali.

Redukce kvadratické formy, jak jsme ji tu naznačili, se dá provést u každé formy nikoli identicky nulové. Pochází v podstatě od *Lagrange* a bývá také občas uváděna pod jeho jménem (Oeuvres, Recherches sur la méthode de maximis et minimis, 1759). Jiná methoda, velice elegantní, nikoli však tak všeobecná, pochází od Jacobiho (Journ. f. Math. 53, 1857).

Redukce kvadratických forem má důležitou úlohu v geometrii, mechanice, astronomii i v mnohých jiných oborech (použili jí Gauss, Lagrange, Jacobi a j.).

Příklady.

17. K objasnění theoretických výkladů tohoto paragrafu zopakujeme všechny pojmy a poučky, které jsme tu zavedli resp. odvodili, na příkladě formy (59). Protože má tato forma hodnost $h = 2$, lze ji redukovati na kvadratickou formu pouze dvou proměnných. To jsme provedli výše; v. vztah (59'). Ježto má naše forma $n = 4$ proměnné, bude míti také čtyři přidružené formy lineární. Podle vzorce (61) pro ně dostáváme (lze je ovšem psáti též ihned — jak?)

$$\begin{aligned} F_1 &= 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \\ F_2 &= x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \\ F_3 &= 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 \\ F_4 &= -x_1 + x_2 + 2x_4 \end{aligned}$$

a ověříme pro ně snadno platnost vzorce (62).

Polára dané formy vychází podle předpisu (63) ve tvaru (všimněte si součtu indexů v jednotlivých členech)

$$
\begin{aligned}
2x_1y_1 &+ x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_1y_3 + 2x_2y_2 + 3x_3y_1 - x_1y_4 + \\
&+ 3x_2y_3 + 3x_3y_2 - x_4y_1 + x_2y_4 + \\
&+ 6x_3y_3 + x_4y_2 + 2x_4y_4.
\end{aligned}
$$

Daná forma je singulární a má hodnost $h = 2$; jsou tedy všechny doplňky A_{ik} ze vztahu (64) rovny nule a rovnice (64) tedy vskutku splněna (neboť také $A = 0$). Forma adjungovaná k (59) je ovšem identicky nulová.

Nakonec ještě provedeme redukci naší formy ve smyslu věty 10. Budeme zde používati přímo transformace (67) — je totiž $a_{11} = 2$ —, doporučuji však čtenáři provésti podrobně celý postup, jenž zavedení této transformace předcházel. Transformace (67) zde jest

$$X_1 = 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4,\ X_2 = x_2,\ X_3 = x_3,\ X_4 = x_4;$$

reciproká k ní pak bude

$$2x_1 = X_1 - X_2 - 3X_3 + X_4,\ x_2 = X_2,\ x_3 = X_3,\ x_4 = X_4,$$

což dosazeno do dané formy vede k prvnímu částečnému výsledku:

$$
\begin{aligned}
f_1 = \tfrac{1}{2}X_1^2 + \tfrac{3}{2}X_2^2 + \tfrac{9}{2}X_3^2 + \tfrac{3}{2}X_4^2 + 3X_2X_3 + 3X_2X_4 + \\
+ 3X_3X_4 = \tfrac{1}{2}X_1^2 + F^{(1)}.
\end{aligned}
$$

Na formu $F^{(1)}$ aplikujeme opět transformaci inversní k regulární substituci obdobné (67):

$$Y_2 = \tfrac{3}{2}X_2 + \tfrac{3}{2}X_3 + \tfrac{3}{2}X_4,\ Y_3 = X_3,\ Y_4 = X_4;\ Y_1 = X_1,$$

tedy transformaci

$$X_2 = \tfrac{2}{3}Y_2 - Y_3 - Y_4,\ X_3 = Y_3,\ X_4 = Y_4;\ X_1 = Y_1.$$

Dostaneme tak konečně tvar, o němž mluví věta 10.; zde je velmi jednoduchý:

$$f_2 = \tfrac{1}{2}Y_1^2 + \tfrac{2}{3}Y_2^2.$$

Transformací

$$Y_1 = \sqrt{2}z_1,\ Y_2 = \sqrt{\tfrac{3}{2}}z_2,\ Y_3 = z_3,\ Y_4 = z_4$$

pak bude forma (59) nejjednodušším možného tvaru

$$f_3 = z_1^2 + z_2^2.$$

Je zcela snadné najíti transformaci, která přímo převádí danou formu (59) ve tvar právě napsaný. Tato regulární transformace vznikne složením těch, jichž jsme postupně užili, takže její matice $\boldsymbol{R}$ bude

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{C}_3,$$

kde jest

$$\boldsymbol{C}_1 = \begin{Vmatrix} \frac{1}{2}, & -\frac{1}{2}, & -\frac{3}{2}, & \frac{1}{2} \\ 0, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{Vmatrix},\quad \boldsymbol{C}_2 = \begin{Vmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & \frac{2}{3}, & -1, & -1 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{Vmatrix},$$

$$\boldsymbol{C}_3 = \begin{Vmatrix} \sqrt{2}, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & \sqrt{\frac{3}{2}}, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{Vmatrix}.$$

Výpočet jest vhodným cvičením pro násobení matic a vede k výsledku

$$\boldsymbol{R} = \begin{Vmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2}, & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}, & -1, & 1 \\ 0, & \sqrt{\frac{2}{3}}, & -1, & -1 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{Vmatrix}.$$

Transformací

$$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{1}{2}\sqrt{2}X_1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{2}{3}}X_2 - X_3 + X_4 \\ x_2 &= \sqrt{\tfrac{2}{3}}X_2 - X_3 - X_4 \\ x_3 &= X_3 \\ x_4 &= X_4 \end{aligned}$$

musí tedy forma (59) přejíti ve tvar

$$f = X_1^2 + X_2^2.$$

Přesvědčte se o tom přímým dosazením a také pomocí maticového obrazu dané formy.

18. „Přednostní“ očíslování proměnných kvadratické formy.

Má-li kvadratická forma s koeficienty $a_{ik} = a_{ki}$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ hodnost h, lze očíslovat proměnné $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tak, že bude hlavní minor $A_h = |a_{ik}|$, $i, k = 1, 2, \ldots, h$ různý od nuly. Tento souměrný determinant A_h má buď aspoň jeden hlavní minor $(h - 1)$-řadový různý od nuly — pak očíslujeme proměnné $x_1, x_2, \ldots, x_h$ tak, aby právě minor $A_{h-1} = |a_{ik}|$, $i, k = 1, 2, \ldots, h - 1$ byl nenulový — nebo jsou všechny hlavní minory $(h - 1)$-řadové determinantu A_h nulové. V tomto druhém případě však musí A_h obsahovati alespoň jeden hlavní nenulový minor $(h - 2)$-řadový, ježto by jinak byly rovny nule vůbec všechny $(h - 1)$-řadové minory (tedy ne pouze hlavní) determinantu A_h a tento by nemohl býti různý od nuly (toto tvrzení je zcela triviálním důsledkem věty o minorech determinantu reciprokého k danému; v našem případě vezměte v počet determinant reciproký k A_h a uvažujte o jeho libovolném hlavním minoru dvouřadovém). V případě, že jsou všechny hlavní $(h - 1)$-řadové minory determinantu A_h rovny nule, existuje tedy alespoň jeden nenulový hlavní minor $(h - 2)$-řadový a tu označíme proměnné $x_1, x_2, \ldots, x_h$ tak, aby byl nenulový právě minor $A_{h-2} = |a_{ik}|$, $i, k = 1, 2, \ldots, h - 2$. S nenulovými determinantem A_{h-1}, event. A_{h-2} naložíme stejně jako dříve s A_h a tak pokračujeme; položíme-li $A_0 = 1$, dospíváme tak k jistému očíslování proměnných původní kvadratické formy, jež nazveme „přednostním“ (takových očíslování může ovšem býti mnoho) a zároveň k řadě minorů

$$1 = A_0, A_1, A_2, \ldots, A_h. \tag{69}$$

Ukážeme si, že v této řadě nemohou vedle sebe státi dva nulové členy a že členy sousedící zleva a zprava s nulovým, mají vždy navzájem různá znaménka. Budiž na př. $A_s = 0$, kde $0 < s < h$; podle konstrukce řady (69) to značí, že jsme v A_{s+1} nenašli žádný hlavní nenulový minor s-řadový, takže tam rozhodně existuje alespoň jeden $(s - 1)$-řadový nenulový. Jeden pak z těchto byl vzat za A_{s-1} a proto je $A_{s-1} \neq 0$. Také A_{s+1} musí však býti různé od nuly, ježto by jinak musil v A_{s+2} existovati aspoň jeden nenulový hlavní minor s-řadový, který bychom vzali za A_s, takže by proti předpokladu bylo $A_s \neq 0$. Je tedy $A_{s-1} \neq 0$ a také $A_{s+1} \neq 0$ a dokážeme ještě, že je $A_{s-1} \,.\, A_{s+1} < 0$. Také tato skutečnost je sice zcela elementárním důsledkem věty o minorech determinantů reciprokých, přece snad by však mohla způsobiti určité potíže a proto zde naznačíme její důkaz: Nenulový hlavní minor A_{s-1} byl získán z A_{s+1} vynecháním jistých dvou řádků (budiž to řádek ϱ-tý a σ-tý) a stejně číslovaných dvou sloupců. Sestrojíme si determinant k A_{s+1} reciproký, označíme jeho elementy znaky α_{ik}, $i, k = 1, 2, \ldots, s + 1$ a vezmeme v úvahu jeho hlavní minor, tvořený elementy, v nichž se kříží řádky s pořadovými čísly ϱ, σ a sloupce téhož pořadí. Podle věty o minorech determinantu reciprokého je tento dvouřadý subdeterminant roven právě součinu $A_{s-1} \,.\, A_{s+1}$ a protože jsou všechny s-řadové hlavní minory determinantu A_{s+1} podle předpokladu nulové (tedy i $\alpha_{\varrho\varrho} = \alpha_{\sigma\sigma} = 0$), máme konečně (pamatujme, že všechny determinanty zde vystupující jsou souměrné)

$$A_{s-1} \,.\, A_{s+1} = \begin{vmatrix} \alpha_{\varrho\varrho}, & \alpha_{\varrho\sigma} \\ \alpha_{\sigma\varrho}, & \alpha_{\sigma\sigma} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0, & \alpha_{\varrho\sigma} \\ \alpha_{\varrho\sigma}, & 0 \end{vmatrix} = -\alpha_{\varrho\sigma}^2 < 0.$$

Abychom uvedený postup předvedli na číselném příkladě, budeme se zabývati regulární kvadratickou formou

$$f = x_1^2 + x_2^2 + 9x_3^2 + x_4^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_1x_4 - \\ - 6x_2x_3 + 4x_3x_4. \tag{70}$$

Matice

$$\mathbf{A}' = \left\| \begin{array}{rrrr} 1, & -1, & 2, & -2 \\ -1, & 1, & -3, & 0 \\ 2, & -3, & 9, & 2 \\ -2, & 0, & 2, & 1 \end{array} \right\|$$

má hodnost $h = 4$ a pro její determinant najdeme hodnotu $A_4 = 7$. Jeho minor A_{44} má hodnotu -1 a proto můžeme bez jakéhokoli přeměňování označení proměnných klásti $A_3 = -1$. Protože však je první hlavní dvouřadový minor determinantu A_3 — doplněk to jeho prvku 9 — roven nule, zato však má druhý hlavní minor (doplněk prvku a_{22}) hodnotu 5, provedeme přeznačení proměnných x_1, x_2, x_3 (a také x_4) na nové t_1, t_2, t_3, t_4 podle schematu

$$\begin{array}{cccc} x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \\ t_1, & t_3, & t_2, & t_4 \end{array} . \tag{70'}$$

V těchto nových proměnných bude míti forma tvar

$$f_1 = t_1^2 + 9t_2^2 + t_3^2 + t_4^2 + 4t_1t_2 - 2t_1t_3 - 4t_1t_4 - \\ - 6t_2t_3 + 4t_2t_4 \tag{70''}$$

a lze položiti $A_2 = 5$. Pak už máme beze všeho přeřaďování $A_1 = 1$, $A_0 = 1$.

Přečíslování proměnných v původní formě podle schematu (70′) je tedy přednostní (taková jsou zde možná dvě) a vede k formě (70″) s maticí

$$\mathbf{A} = \left\| \begin{array}{rrrr} 1, & 2, & -1, & -2 \\ 2, & 9, & -3, & 2 \\ -1, & -3, & 1, & 0 \\ -2, & 2, & 0, & 1 \end{array} \right\| ;$$

v této matici už má řada hlavních minorů vzniklých postupným vroubením

$$A_0 = 1,\ A_1 = 1,\ A_2 = \begin{vmatrix} 1, & 2 \\ 2, & 9 \end{vmatrix} = 5,$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} 1, & 2, & -1 \\ 2, & 9, & -3 \\ -1, & -3, & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_4 = \begin{vmatrix} 1, & 2, & -1, & -2 \\ 2, & 9, & -3, & 2 \\ -1, & -3, & 1, & 0 \\ -2, & 2, & 0, & 1 \end{vmatrix} = 7$$

vlastnosti řady (69).

Jestliže jsme provedli pro danou kvadratickou formu

$$f' = \sum_{i,k} b_{ik} y_i y_k$$

přednostní očíslování, vede nás vzniklá forma

$$f = \sum_{i,k} a_{ik} x_i x_k$$

k řadě hlavních minorů (69). Tuto řadu lze doplniti na úplnou

$$1 = A_0, A_1, A_2, \ldots, A_h, A_{h+1} = A_{h+2} = \ldots = A_n = 0. \quad (71)$$

Výraz

$$\sigma = \sum_{s=1}^{n} \operatorname{sgn}(A_{s-1} A_s), \quad (72)$$

kde klademe $\operatorname{sgn} a = 1, 0, -1$ pro $a > 0$, $a = 0$, $a < 0$, má veliký význam pro theorii kvadratických forem a jmenuje se signaturou dané formy f'. Tak má forma (70) signaturu rovnou nule, protože je

$$\sigma = \operatorname{sgn}(A_0 A_1) + \operatorname{sgn}(A_1 A_2) + \operatorname{sgn}(A_2 A_3) + \operatorname{sgn}(A_3 A_4) = \\ = 1 + 1 - 1 - 1 = 0.$$

Tento výsledek ukazuje (jak později podrobně poznáme), že je naše forma indefinitní, což značí, že může nabývati hodnot kladných i záporných, klademe-li za její proměnné číselné hodnoty (přesvědčte se o tom). Různé pochybnosti, které by se zde mohly vyskytnouti, tak na příklad, zda hodnota signatury nezávisí na tom, které z možných přednostních očistování (je-li jich více) pro formu zvolíme, vyvrátíme později, ač se budeme zabývati kvadratickými (a ještě jinými) formami s jiného hlediska.

8. RESULTANT DVOU BINÁRNÍCH FOREM.

Funkce $f(x, y)$ vytvořená z komplexních konstant $a_0, a_1, \ldots a_m$, jež nejsou vesměs rovny nule a z proměnných x, y podle předpisu

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^{m-i} y^i \tag{73}$$

se jmenuje *binární formou m-tého stupně* proměnných x, y.

Předpokládejme, že proměnné mohou nabývati všech komplexních (tedy speciálně i všech reálných) hodnot a dívejme se na $f(x, y)$ pro okamžik jako na polynom m-tého stupně v x. Můžeme si pro snazší pochopení mysliti, že jsme položili y rovno nějakému komplexnímu číslu — ponechme pro ně označení y. Pak existuje podle fundamentální věty algebry (podle té má každý polynom m-tého stupně s komplexními koeficienty právě m komplexních kořenů — také reálné číslo pokládáme za komplexní s nulovou imaginární částí) m komplexních čísel $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ tak, že jest

$$f(x, y) = a_0(x - \xi_1)(x - \xi_2) \ldots (x - \xi_m). \tag{a}$$

Čísla ξ_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ závisí ovšem na okamžité svrchu uvedené volbě proměnné y. Je pak nutně každé ξ_i polynom nejvýše prvého stupně v y (dokážete snadno, když v (a) porovnáte koeficienty členů stejných stupňů v x). Lze tudíž binární formu (73) psáti jako součin m lineárních binárních forem

$$f(x, y) = (\gamma_1 x + \delta_1 y)(\gamma_2 x + \delta_2 y) \ldots (\gamma_m x + \delta_m y) \tag{74}$$

a tento rozklad je — pokládáme-li dvě binární formy za různé jen, když jsou nezávislé — možný pouze jedním způsobem.

Předpokládejme, že by platilo identicky (t. j. pro všechna x, y)

$$(\gamma_1 x + \delta_1 y)(\gamma_2 x + \delta_2 y) \ldots (\gamma_m x + \delta_m y) =$$
$$= (\Gamma_1 x + \Delta_1 y)(\Gamma_2 x + \Delta_2 y) \ldots (\Gamma_m x + \Delta_m y) \qquad (74')$$

a všimněme si chování funkce $f(x, y)$ v okolí jejího nulového bodu (x_0, y_0). Tento bod budiž ϱ-násobný $(1 \leqq \varrho \leqq m)$ a seřaďme lineární faktory na levé straně rovnice (74') tak, aby právě

$$\gamma_1 x_0 + \delta_1 y_0 = \gamma_2 x_0 + \delta_2 y_0 = \ldots = \gamma_\varrho x_0 + \delta_\varrho y_0 = 0.$$

Položíme-li nyní $x = x_0 + \varepsilon\xi$, $y = y_0 + \varepsilon\eta$, při čemž volíme ξ, η tak, aby platilo $\gamma_i \xi + \delta_i \eta \neq 0$ pro $i = 1, 2, \ldots, \varrho$, můžeme rovnici (74') napsati ve tvaru

$$\varepsilon^\varrho(\gamma_1\xi + \delta_1\eta)(\gamma_2\xi + \delta_2\eta) \ldots (\gamma_\varrho\xi + \delta_\varrho\eta) \,.$$
$$. \prod_{i=\varrho+1}^{m} \begin{vmatrix} \gamma_i, & -\delta_i \\ y_0 + \varepsilon\eta, & x_0 + \varepsilon\xi \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^{m} \begin{vmatrix} \Gamma_k, & -\Delta_k \\ y_0 + \varepsilon\eta, & x_0 + \varepsilon\xi \end{vmatrix} . \qquad \text{(b)}$$

Dělíme-li tento vztah veličinou ε^ϱ a necháme pak ε konvergovati k nule, má levá strana konečnou limitu, takže to musí platit i o straně pravé. K tomu je ovšem nutno, aby se pravá strana rovnice (b) dala jakožto funkce ε psáti ve tvaru $\varepsilon^\varrho F(\varepsilon)$, kde jest $F(0) \neq 0$. Musí tedy na pravé straně vztahu (b) právě ϱ faktorů míti pro $\varepsilon \to 0$ hodnotu nulovou; očíslujme je tak, aby to bylo právě prvých ϱ faktorů. Tím dostáváme podmínky pro Γ, Δ úplně stejného tvaru, jaké platily pro γ, δ:

$$\Gamma_1 x_0 + \Delta_1 y_0 = \Gamma_2 x_0 + \Delta_2 y_0 = \ldots = \Gamma_\varrho x_0 + \Delta_\varrho y_0 = 0.$$

Celkem tedy máme rovnice

předpokládané:

$$\gamma_r x_0 + \delta_r y_0 = 0, \; r = 1, 2, \ldots, \varrho \qquad \text{(c)}$$

a z nich plynoucí:

$$\Gamma_r x_0 + \Delta_r y_0 = 0, \; r = 1, 2, \ldots, \varrho. \qquad \text{(d)}$$

Uvážíme-li, že lze za nulový bod (x_0, y_0) voliti na př. $(\delta_1, -\gamma_1)$, tedy bod různý od $(0, 0)$, plynou ze vztahů (c), (d) další, které lze podle theorie systémů homogenních rovnic vyjádřiti takto:

$$\begin{vmatrix} \gamma_1, & \delta_1 \\ \gamma_r, & \delta_r \end{vmatrix} = 0, \text{ t. j. } \gamma_r = \lambda\gamma_1, \ \delta_r = \lambda\delta_1, \ r = 2, 3, \ldots, \varrho; \quad \text{(e)}$$

$$\begin{vmatrix} \gamma_r, & \delta_r \\ \Gamma_r, & \Delta_r \end{vmatrix} = 0, \text{ t. j. } \Gamma_r = \varkappa\gamma_r, \ \Delta_r = \varkappa\delta_r, \ r = 1, 2, \ldots, \varrho. \quad \text{(f)}$$

Každý faktor zastoupený na levé straně rovnice (74′) stojí tedy také na straně pravé a to ve stejné násobnosti. Je tudíž rozklad (74) opravdu jednoznačný.

Nyní si položíme otázku, kdy mají dvě binární formy stupňů m a n

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^{m-i} y^i, \quad g(x, y) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^{n-k} y^k \qquad (75)$$

alespoň jeden lineární faktor společný. Existuje-li takový společný faktor $\alpha x + \beta y$, platí rovnice

$$f(-\beta, \alpha) = 0, \quad g(-\beta, \alpha) = 0$$

a je ovšem $(-\beta, \alpha) \neq (0, 0)$. Platí-li naopak pro jistý bod $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ současně vztahy

$$f(x_0, y_0) = 0, \quad g(x_0, y_0) = 0,$$

musí $f(x, y)$ obsahovati nutně alespoň jeden lineární faktor $\alpha x + \beta y$, $g(x, y)$ pak alespoň jeden faktor $\gamma x + \delta y$ tak, že platí

$$\begin{aligned} \alpha x_0 + \beta y_0 &= 0 \\ \gamma x_0 + \delta y_0 &= 0, \text{ t. j.} \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{vmatrix} = 0, \ \alpha\delta = \beta\gamma; \ \gamma = \varrho\alpha, \ \delta = \varrho\beta;$$

lineární faktory $\alpha x + \beta y$, $\gamma x + \delta y$ jsou stejné. Je tedy nutná a postačující podmínka pro to, aby formy (75) měly alespoň jeden lineární faktor společný, ta, aby existoval bod $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ tak, že současně platí rovnice

$$f(x_0, y_0) = 0, \ g(x_0, y_0) = 0. \tag{76}$$

Vyjádříme si tuto podmínku ve tvaru jiném, nezávislém na x_0, y_0. Je-li splněna, platí současně s ní rovnice

$$\begin{aligned} x_0^{n-\nu} y_0^{\nu-1} f(x_0, y_0) &= 0, \ \nu = 1, 2, \ldots, n; \\ x_0^{m-\varrho} y_0^{\varrho-1} g(x_0, y_0) &= 0, \ \varrho = 1, 2, \ldots, m. \end{aligned} \tag{77}$$

Těchto $m + n$ lineárních rovnic představuje homogenní systém pro veličiny $x_0^{m+n-1}, x_0^{m+n-2}y_0, \ldots, y_0^{m+n-1}$ v počtu $m + n$, které nejsou všechny rovny nule. Je tudíž roven nule determinant z koeficientů rovnic (77) t. j.

$$\begin{vmatrix} a_0, & a_1, & a_2, & \ldots, a_m, & 0, & \ldots, 0, & 0 \\ 0, & a_0, & a_1, & \ldots, a_{m-1}, & a_m, & \ldots, 0, & 0 \\ 0, & 0, & a_0 & \ldots, a_{m-2}, & a_{m-1}, & \ldots, 0, & 0 \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ 0, & 0, & 0, & \ldots & \ldots & \ldots a_{m-1}, & a_m \\ b_0, & b_1, & b_2, & \ldots & \ldots & \ldots 0, & 0 \\ 0, & b_0, & b_1, & \ldots & \ldots & \ldots 0, & 0 \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ 0, & 0, & 0, & \ldots, b_1, & b_2, & \ldots, b_{n-1}, & b_n \end{vmatrix} = 0. \tag{78}$$

Platí-li obráceně rovnice (78), pak zůstane v platnosti i když jednotlivé sloupce determinantu násobíme po řadě výrazy $x^{m+n-1}, x^{m+n-2}y, \ldots, y^{m+n-1}$. Proto existuje nenulová soustava čísel

$$\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}, -\alpha_0, -\alpha_1, -\alpha_2, \ldots, -\alpha_{m-1} \tag{g}$$

tak, že součet β_0-násobného řádku prvého, plus β_1-násobný řádek druhý, plus ..., plus $(-\alpha_{m-1})$-násobný řádek poslední pozměněného determinantu má hodnotu nulovou. Docházíme tak k rovnosti

$$\begin{aligned} &(\beta_0 x^{n-1} + \beta_1 x^{n-2} y + \ldots + \beta_{n-1} y^{n-1}) \, f(x, y) = \\ &= (\alpha_0 x^{m-1} + \alpha_1 x^{m-2} y + \ldots + \alpha_{m-1} y^{m-1}) \, g(x, y), \end{aligned} \tag{h}$$

jež platí pro všechny hodnoty x, y. Není pak možno, aby byla všechna α rovna nule; potom by totiž bylo — vzhledem k tomu, že je soustava (g) nenulová — aspoň jedno β různé od nuly a na levé straně rovnice (h) by stál polynom, který má míti hodnotu nulovou pro všechna x, y, ačkoli nejsou rovny nule všechny jeho koeficienty. To ovšem není možno. Právě tak ukážeme, že existuje aspoň jedno $\beta \neq 0$.

Pravá strana rovnice (h) musí obsahovati zřejmě všech m lineárních faktorů formy $f(x, y)$. První činitel, jsa sám stupně nejvýše $(m - 1)$-ho, jich může obsahovati nejvýše $m - 1$, takže aspoň jeden musí býti zároveň činitelem formy $g(x, y)$. Lze tedy vysloviti větu:

Nutná a dostačující podmínka, aby měly dvě binární formy společný alespoň jeden lineární faktor, je platnost rovnice (78), t. j. anulování resultantu obou forem.

Dvě binární formy, které nemají žádný společný lineární činitel, se jmenují nesoudělnými. Lze tedy předchozí výsledky vysloviti také takto:

Nutná a postačující podmínka pro nesoudělnost dvou binárních forem je ta, aby jejich *resultant* by od nuly různý.

Resultantem obou forem zde nazýváme právě determinant z rovnice (78).

Formy

$$f = 2x^3 - 7x^2y + 8xy^2 - 3y^3, \quad g = -2x^2 + 7xy - 6y^2 \qquad (79)$$

mají resultant

$$R_{fg} = \begin{vmatrix} 2, & -7, & 8, & -3, & 0 \\ 0, & 2, & -7, & 8, & -3 \\ -2, & 7, & -6, & 0, & 0 \\ 0, & -2, & 7, & -6, & 0 \\ 0, & 0, & -2, & 7, & -6 \end{vmatrix}. \qquad (79')$$

Přesvědčte se, že je roven nule a najděte společné lineární faktory obou forem.

Formy

$$f = 2x^3 - 7x^2y + 8xy^2 - 3y^3,$$
$$g = -2x^3 + 9x^2y - 13xy^2 + 6y^3 \qquad (80)$$

mají také resultant

$$R_{fg} = \begin{vmatrix} 2, & -7, & 8, & -3, & 0, & 0 \\ 0, & 2, & -7, & 8, & -3, & 0 \\ 0, & 0, & 2, & -7, & 8, & -3 \\ -2, & 9, & -13, & 6, & 0, & 0 \\ 0, & -2, & 9, & -13, & 6, & 0 \\ 0, & 0, & -2, & 9, & -13, & 6 \end{vmatrix} = 0$$

a jsou tedy soudělné.

Nyní se seznámíme s některými jednoduchými vlastnostmi resultantu dvou binárních forem f, g. K tomu cíli si napřed vypočítáme resultant formy f ze vztahu (73) a lineární formy $l = \alpha x + \beta y$. Najdeme

$$R(f, l) = \begin{vmatrix} a_0, & a_1, & a_2, & \ldots, & a_m \\ \alpha, & \beta, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & \alpha, & \beta, & \ldots, & 0 \\ 0, & 0, & \alpha, & \ldots, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, & 0, & \ldots, & \beta \end{vmatrix} =$$

$$= a_0\beta^m - a_1\alpha\beta^{m-1} + a_2\alpha^2\beta^{m-2} - \ldots + (-1)^m a_m \alpha^m =$$
$$= f(\beta, -\alpha),$$

což píšeme vzorcem

$$R(a_0x^m + a_1x^{m-1}y + \ldots + a_my^m, \alpha x + \beta y) = R(f, l) =$$
$$= f(\beta, -\alpha). \tag{81}$$

Dále si spočteme resultant forem f a lg, tedy forem

$$f = \sum_{i=0}^{m} a_i x^{m-i} y^i,$$

$$lg = (\alpha x + \beta y) \sum_{k=0}^{n} b_k x^{n-k} y^k = \sum_{\varrho=0}^{n+1} (\alpha b_\varrho + \beta b_{\varrho-1})\, x^{n-\varrho+1} y^\varrho,$$

$$b_{-1} = b_{n+1} = 0.$$

Napíšeme-li si příslušný determinant, poznáme ihned, že je resultant $R(f, lg)$ homogenní funkcí veličin α, β a to funkcí stupně m-tého (přesvědčte se o tom podrobně, nahradivše v něm veličiny α, β novými $t\alpha, t\beta$) — označme ji znakem $\varphi(\alpha, \beta)$.

Představíme-li si nyní formu psánu ve tvaru (74), nahlédneme snadno, že jest

$$\varphi(\gamma_1, \delta_1) = \varphi(\gamma_2, \delta_2) = \ldots = \varphi(\gamma_m, \delta_m) = 0. \qquad \text{(k)}$$

Tak značí ku příkladu $\varphi(\gamma_1, \delta_1)$ resultant forem $f(x, y)$ a $(\gamma_1 x + \delta_1 y)\, g(x, y)$; ty ovšem mají společný faktor $\gamma_1 x + \delta_1 y$, takže je vskutku $\varphi(\gamma_1, \delta_1) = 0$ a stejně platí i ostatní rovnice (k).

Vztahy (k) nám podávají všech m nulových bodů $(\gamma_\mu, \delta_\mu) \neq (0, 0)$ funkce $\varphi(\alpha, \beta)$ a ukazují, že je možno psáti

$$R(f, lg) = \varphi(\alpha, \beta) = C(-\delta_1\alpha + \gamma_1\beta)\,(-\delta_2\alpha + \gamma_2\beta) \ldots$$
$$\ldots (-\delta_m\alpha + \gamma_m\beta) = Cf(\beta, -\alpha) = CR(f, l).$$

Zvolíme-li si nyní na příklad $\alpha = 0$, dostaneme pro určení konstanty C (neobsahuje ani α ani β) rovnici

$$Cf(\beta, 0) = \varphi(0, \beta);$$

jest pak $f(\beta, 0) = a_0\beta^m$ a jednoduchým počtem zjistíme, že $\varphi(0, \beta) = a_0\beta^m R(f, g)$, takže dostáváme pro konstantu C hodnotu $C = R(f, g)$ a můžeme psáti vzorec

$$R(f, lg) = R(f, l) \,.\, R(f, g). \qquad (82)$$

Měníce v determinantu $R(f, g)$ vhodným způsobem sled řádků, dokážeme snadno, že platí

$$R(g, f) = (-1)^{mn} R(f, g). \qquad (83)$$

Zajímavé je také vyjádření resultantu $R(f, g)$ forem f, g pomocí koeficientů jejich lineárních faktorů. Budiž

$$f(x, y) = l_1 l_2 \ldots l_m,\; l_\mu = \gamma_\mu x + \delta_\mu y,\; \mu = 1, 2, \ldots, m$$
$$g(x, y) = L_1 L_2 \ldots L_n,\; L_\nu = \varkappa_\nu x + \lambda_\nu y,\; \nu = 1, 2, \ldots, n. \qquad (84)$$

Pak nacházíme podle vzorců (82) a (83) postupně

$$R(f, g) = R(f, L_1 L_2 \ldots L_n) = R(f, L_1)\, R(f, L_2) \ldots R(f, L_n),$$
$$R(f, L_\nu) = (-1)^m R(L_\nu, f) = (-1)^m R(L_\nu, l_1 l_2 \ldots l_m) =$$
$$= (-1)^m R(L_\nu, l_1)\, R(L_\nu, l_2) \ldots R(L_\nu, l_m) =$$
$$= R(l_1, L_\nu)\, R(l_2, L_\nu) \ldots R(l_m, L_\nu),$$

takže lze psáti

$$R(f, g) = \prod_{\mu, \nu} R(l_\mu, L_\nu), \quad \mu = 1, 2, \ldots, m; \ \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

Protože však jest

$$R(l_\mu, L_\nu) = \gamma_\mu \lambda_\nu - \delta_\mu \varkappa_\nu,$$

dostáváme svrchu zmíněné vyjádření

$$R(f, g) = \prod_{\mu, \nu} (\gamma_\mu \lambda_\nu - \delta_\mu \varkappa_\nu), \tag{85}$$
$$\mu = 1, 2, \ldots, m; \ \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

Odtud pak snadno dospíváme k dalším zajímavým tvarům pro resultant dvou forem:

$$R(f, g) = \prod_{\nu=1}^{n} \Big[\prod_{\mu=1}^{m} (\gamma_\mu \lambda_\nu - \delta_\mu \varkappa_\nu)\Big] =$$
$$= \prod_{\nu=1}^{n} f(\lambda_\nu, -\varkappa_\nu) = f(\lambda_1, -\varkappa_1)\, f(\lambda_2, -\varkappa_2) \ldots f(\lambda_n, -\varkappa_n);$$
$$R(f, g) = (-1)^{mn} g(\delta_1, -\gamma_1)\, g(\delta_2, -\gamma_2) \ldots g(\delta_m, -\gamma_m). \tag{86}$$

Po těchto úvahách se obrátíme k otázce, kdy mají dvě binární formy $f(x, y)$, $g(x, y)$ obecně více než r společných lineárních činitelů. Stává-li tento případ, označme znakem $d(x, y)$ součin libovolných r z nich. Pak je resultant forem stupňů resp. $m - r$, $n - r$

$$\Phi(x, y) = \frac{f(x, y)}{d(x, y)}, \quad \Gamma(x, y) = \frac{g(x, y)}{d(x, y)}$$

roven nule, protože mají ještě další lineární faktory společné. Tento resultant je však determinantem koeficientů soustavy $m + n - 2r$ forem

$$x^{n-r-\nu}y^{\nu-1}\Phi(x, y),\ \nu = 1, 2, \ldots, n - r;$$
$$x^{m-r-\varrho}y^{\varrho-1}\Gamma(x, y),\ \varrho = 1, 2, \ldots, m - r,$$

takže lze pro tyto formy zjistit podobnou závislost, jaká je vyjádřena rovnicí (h). Násobíme-li vztah tuto závislost vyjadřující výrazem $d(x, y)$, přejde v nový, z něhož plyne vzájemná závislost binárních forem

$$x^{n-r-\nu}y^{\nu-1}f(x, y),\ \nu = 1, 2, \ldots, n - r;$$
$$x^{m-r-\varrho}y^{\varrho-1}g(x, y),\ \varrho = 1, 2, \ldots, m - r. \qquad \text{(l)}$$

Tvoří tedy koeficienty těchto $m + n - 2r$ forem (l) $(m + n - 2r)$-řadovou matici s hodností h_r menší než $m + n - 2r$. Tato matice vzniká z matice resultantu $R(f, g)$ obou forem tím, že v ní vynecháme prvních r sloupců, prvních r řádků a pak dalších r řádků od $(n + 1)$-ho počínajíce. Označíme-li tuto matici znakem $\boldsymbol{M}_r$, máme výsledek: Mají-li dvě formy binární f, g více než r společných lineárních činitelů, má matice $\boldsymbol{M}_r$ hodnost $h_r < m + n - 2r$.

Je-li obráceně pro dvě formy f, g hodnost matice $\boldsymbol{M}_r$ menší než $m + n - 2r$, jsou její řádky — to jest koeficienty forem (l) — navzájem závislé a tedy platí totéž o soustavě forem samotných. Existuje tudíž mezi nimi relace

$$(\beta_0 x^{n-r-1} + \beta_1 x^{n-r-2}y + \ldots + \beta_{n-r-1}y^{n-r-1})\, f =$$
$$= (\alpha_0 x^{m-r-1} + \alpha_1 x^{m-r-2}y + \ldots + \alpha_{m-r-1}y^{m-r-1})\, g, \quad \text{(m)}$$

kde nejsou všechna β, ani všechna α rovna nule — to nahlédneme stejně jako jsme už výše učinili.

Pravá strana rovnice (m) musí obsahovati všech m lineárních faktorů formy f; první činitel pravé strany, jsa polynomem stupně nejvýše $(m - r - 1)$-ho, jichž může obsahovati nejvýše $m - r - 1$, takže všechny zbývající, jichž je aspoň $r + 1$, musí býti obsaženy v g. Mají tedy f a g aspoň $r + 1$ lineárních faktorů společných. Výsledek těchto úvah vyslovíme

větou 11. Nutná a postačující podmínka, aby dvě binární formy f, g stupňů m, n měly společných aspoň $r + 1$ lineárních faktorů, je tato: Hodnost matice $\boldsymbol{M}_r$ vzniklé z matice resultantu $R(f, g)$ tím, že vynecháme prvých r sloupců, prvých r řádků a ještě r řádků dalších, počínajíce $(n+1)$-vým musí býti menší než $m + n - 2r$.

Příklady.

19. Vyšetřiti společné lineární činitele u binárních forem (79).

Matice $\boldsymbol{M}_0$ je zde právě matice determinantu (79'). Tento determinant je roven, jak už jsme vypočítali, nule, takže je $h_0 < m + n - 2 . 0 = 3 + 2 - 2 . 0 = 5$ a formy mají podle věty 11. aspoň jeden společný lineární faktor; to jsme už zjistili dříve. Matice

$$\boldsymbol{M}_1 = \begin{Vmatrix} 2, & -7, & 8, & -3 \\ -2, & 7, & -6, & 0 \\ 0, & -2, & 7, & -6 \end{Vmatrix}$$

má hodnost $h_1 = 3$, tedy nikoli menší než číslo $m + n - 2r = 3 + 2 - 2 . 1 = 3$. Proto mají formy (79) jediný společný lineární faktor; protože je $g(x, y) = (x - 2y) . (-2x + 3y)$, můžeme snadno zkusit, který z obou faktorů je obsažen také ve formě $f(x, y)$. Je to činitel $-2x + 3y$.

20. Vyšetřiti společné lineární činitele u forem (80).

Také zde má matice $\boldsymbol{M}_0$ hodnost menší než $m + n - 2 . 0 = 6$, takže mají formy alespoň jeden společný lineární faktor. Sestrojíme nyní matici

$$\boldsymbol{M}_1 = \begin{Vmatrix} 2, & -7, & 8, & -3, & 0 \\ 0, & 2, & -7, & 8, & -3 \\ -2, & 9, & -13, & 6, & 0 \\ 0, & -2, & 9, & -13, & 6 \end{Vmatrix}.$$

Podle věty 4. najdeme snadno $h_1 = 3 < m + n - 2r = 3 + 3 - 2 . 1 = 4$, takže mají formy (80) alespoň dva společné lineární faktory.

Sestrojíme ještě matici

$$\mathbf{M}_2 = \left\| \begin{matrix} 2, & -7, & 8, & -3 \\ -2, & 9, & -13, & 6 \end{matrix} \right\|,$$

jež má zřejmě hodnost $h_2 = 2$, tedy rovnou číslu $m + n - 2r = 2$ (t. j. stejnou se svým počtem řádků). Proto mají dané formy společné právě dva lineární činitele. Protože víme z předchozího příkladu, že má forma f lineárního činitele $-2x + 3y$, zkusíme, zda je tento výraz také faktorem formy g. Dělením zjistíme, že tomu tak jest a že platí

$$g(x, y) = (-2x + 3y)(x^2 - 3xy + 2y^2) =$$
$$= (-2x + 3y)(x - y)(x - 2y);$$

druhý společný faktor obou forem jest pak $x - y$.

21. Dokažte platnost vzorců

$$R(f, g) = R(f, f + g) = R(f + g, g) \tag{87}$$

za předpokladu, že binární formy f a g jsou téhož stupně n.

Máme

$$R(f, f+g) = \left| \begin{matrix} a_0, & a_1, & \ldots, a_{n-1}, \\ 0, & a_0, & \ldots, a_{n-2}, \\ \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & \ldots, a_0, \\ a_0 + b_0, & a_1 + b_1, & \ldots, a_{n-1} + b_{n-1}, \\ 0, & a_0 + b_0, & \ldots, a_{n-2} + b_{n-2}, \\ \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & \ldots, a_0 + b_0, \end{matrix} \right. \quad \text{pokračování}$$

$$\left. \begin{matrix} a_n, & 0, & \ldots, 0 \\ a_{n-1}, & a_n, & \ldots, 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_1, & a_2, & \ldots, a_n \\ a_n + b_n, & 0, & \ldots, 0 \\ a_{n-1} + b_{n-1}, & a_n + b_n, & \ldots, 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_1 + b_1, & a_2 + b_2, & \ldots, a_n + b_n \end{matrix} \right| ;$$

odečteme-li v tomto determinantu každý z prvých n řádků vždy od řádku s ním stejnolehlého ve skupině posledních n řádků (tedy krátce řádek ν-tý od $(n + \nu)$-tého, $\nu = 1, 2, \ldots, n$), dostáváme právě resultant $R(f, g)$; je tedy opravdu $R(f, g) = R(f, f + g)$. Stejně dokážeme správnost druhé z rovnic (87).

22. Resultant dvou binárních forem f, g téhož stupně n je možno vyjádřiti pomocí dvouřadových determinantů matice

$$\left\| \begin{matrix} a_0, & a_1, & a_2, & \ldots, & a_n \\ b_0, & b_1, & b_2, & \ldots, & b_n \end{matrix} \right\| . \tag{88}$$

Přemístíme-li totiž v $R(f, g)$ řádky tak, aby místo původního pořadí určeného čísly $1, 2, 3, 4, \ldots, 2n - 1, 2n$ zaujaly nové $1, n + 1, 2, n + 2, \ldots, n, 2n$, dostaneme determinant R_1, pro který zřejmě platí vztah

$$R_1 = (-1)^{\frac{1}{2}[n(n-1)]} R(f, g).$$

Rozvineme-li jej podle elementů prvých dvou řádků (věta Laplaceova), dostáváme ihned

$$R_1 = -\sum_{r=1}^{n} (-1)^r \begin{vmatrix} a_0, & a_r \\ b_0, & b_r \end{vmatrix} M_r,$$

při čemž značí M_r subdeterminant vzniklý z R_1 vynecháním prvých dvou řádků, prvého a $(r + 1)$-ho sloupce. Také tento minor M_r rozvineme podle prvých dvou řádků, čímž se nám objeví jako součet součinů po dvou faktorech, z nichž jeden je vždy dvouřadový determinant matice (88), druhý pak $(2n - 4)$-řadový minor matice posledních $2n - 4$ řádků determinantu R_1. S těmito druhými faktory naložíme stejně, jak bylo vylíčeno již dvakrát a takto pokračujeme, až dospějeme k vyjádření R_1 a tedy také $R(f, g)$ pomocí samých dvouřadových determinantů matice (88).

23. Buďte $f(x, y)$, $g(x, y)$ dvě binární formy téhož stupně n, tedy

$$f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i} y^i, \quad g = \sum_{i=0}^{n} b_i x^{n-i} y^i. \qquad (\alpha)$$

Vyjádřit matematicky důsledek, k němuž vede požadavek, aby platilo identicky (t. j. pro všechna x, y) těchto n rovnic:

$$f(x, y) \cdot \sum_{\varrho=0}^{\nu} b_\varrho x^{\nu-\varrho} y^\varrho - g(x, y) \cdot \sum_{\varrho=0}^{\nu} a_\varrho x^{\nu-\varrho} y^\varrho = 0,$$
$$\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1. \qquad (\beta)$$

Těmito rovnicemi (jsou to známé vztahy tvořící východisko pro Bézoutovu úpravu resultantu dvou binárních forem téhož stupně na tvar souměrného determinantu) jsou zřejmě stanoveny velmi těsné vztahy mezi koeficienty a_i, b_i ($i = 0, 1, 2, \ldots, n$) obou daných forem.

Upravme postupně vztahy (β):

$$0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i} y^i \sum_{\varrho=0}^{\nu} b_\varrho x^{\nu-\varrho} y^\varrho - \sum_{i=0}^{n} b_i x^{n-i} y^i \sum_{\varrho=0}^{\nu} a_\varrho x^{\nu-\varrho} y^\varrho =$$
$$= \sum_{i=0}^{n} \sum_{\varrho=0}^{\nu} (a_i b_\varrho - a_\varrho b_i)\, x^{n+\nu-i-\varrho} y^{i+\varrho} =$$
$$= \sum_{i=0}^{n} \sum_{\varrho=0}^{\nu} M_{i\varrho} x^{n+\nu-i-\varrho} y^{i+\varrho} = \sum_{i=0}^{n} \sum_{\varkappa=i}^{i+\nu} M_{i,\varkappa-i} x^{n+\nu-\varkappa} y^\varkappa =$$
$$= \sum_{\varkappa=i}^{i+\nu} x^{n+\nu-\varkappa} y^\varkappa \sum_{i=0}^{\varkappa} M_{i,\varkappa-i} = \sum_{\varkappa=i}^{i+\nu} \Gamma_\varkappa x^{n+\nu-\varkappa} y^\varkappa =$$
$$= \sum_{\varkappa=0}^{n+\nu} \Gamma_\varkappa x^{n+\nu-\varkappa} y^\varkappa.$$

Rovnice (β) lze tedy psáti také ve tvaru

$$\sum_{\varkappa=0}^{n+\nu} \Gamma_\varkappa x^{n+\nu-\varkappa} y^\varkappa = 0, \ \nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1; \qquad (\gamma)$$

$$\Gamma_\varkappa = \sum_{i=0}^{\varkappa} M_{i,\varkappa-i}, \ M_{i\varrho} = a_i b_\varrho - a_\varrho b_i.$$

Podle původních rovnic (β) jsou ovšem $M_{i\varrho}$ obecně nenulová jen pro $0 \leqq \varrho \leqq \nu$, tedy $M_{i,\varkappa-i}$ pro $i \geqq \varkappa - \nu$; pro $i \leq \varkappa - \nu - 1$ je nutno klásti $M_{i,\varkappa-i} = 0$, takže máme dále

$$\Gamma_\varkappa = \sum_{i=\varkappa-\nu}^{\varkappa} M_{i,\varkappa-i}. \tag{δ}$$

Je tedy $\Gamma_0 = \Gamma_1 = \ldots = \Gamma_\nu = 0$ a v rovnicích (γ) vystoupí až teprve členy s koeficienty $\Gamma_\varkappa$, jichž index $\varkappa \geqq \nu + 1$, t. j. členy s koeficienty $\Gamma_{\nu+\lambda}$ ($\lambda = 1, 2, \ldots, n$). Je pak podle vzorce ($\delta$)

$$\Gamma_{\nu+\lambda} = \sum_{i=\lambda}^{\nu+\lambda} M_{i,\nu+\lambda-i}, \quad \nu = 0, 1, \ldots, n-1, \ \lambda = 1, 2, \ldots, n. \tag{ε}$$

Nyní se jeví nejvýše záhodným označiti konstantu $\Gamma_{\nu+\lambda}$ novým symbolem, který by lépe vyznačoval, že tento koeficient patří právě do $(\nu + 1)$-ní z Bézoutových rovnic (β), tedy do rovnice s pořadovým číslem ν. Došli bychom k závěrům zcela chybným, kdybychom ponechali znak $\Gamma_{\nu+\lambda}$ a jeho indexy prostě sčítali (rozvažte si to podrobně; ztratili bychom ku příkladu možnost rozhodnouti, zda součinitel $\Gamma_3 = \Gamma_{0+3} = \Gamma_{1+2} = \Gamma_{2+1}$ patří do rovnice s pořadovým číslem 0, 1 nebo 2). Těmto nesnázím se vyhneme tím jednoduchým způsobem, že klademe $\Gamma_{\nu+\lambda} = c_{\nu,\lambda}$; je tedy $c_{\nu,\lambda}$ koeficient stojící v rovnici s pořadovým číslem ν u členu, jenž obsahuje $x^{n-\lambda}y^{\nu+\lambda}$. Vypočítá se pak $c_{\nu,\lambda}$ obecně podle vzorce (ε), při čemž mohou podle poměru vzájemné velikosti indexů ν, λ nastati určitá zjednodušení.

Zvláště pozoruhodné je zjednodušení pro $\lambda \leqq \nu$; v tom případě můžeme psáti vzhledem k $M_{i\varrho} = -M_{\varrho i}$:

$$c_{\nu,\lambda} = \sum_{i=\lambda}^{\nu+\lambda} M_{i,\nu+\lambda-i} = \sum_{i=\lambda}^{\nu} M_{i,\nu+\lambda-i} + \sum_{i=\nu+1}^{\nu+\lambda} M_{i,\nu+\lambda-i} =$$

$$= \sum_{i=\nu+1}^{\nu+\lambda} M_{i,\nu+\lambda-i}. \tag{ε'}$$

Po těchto úpravách dostáváme Bézoutovy rovnice (β) v konečném tvaru

$$\sum_{\lambda=1}^{n} c_{\nu,\lambda} x^{n-\lambda} y^{\nu+\lambda} = 0;\ \nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1, \tag{ζ}$$

kde jest podle vzorců (ε), (ε'):

$$c_{0,\lambda} = M_{\lambda,0};\ c_{\nu,\lambda} = \sum_{i=\nu+1}^{\nu+\lambda} M_{i,\nu+\lambda-i},\ \lambda \leqq \nu;$$

$$c_{\nu,\lambda} = \sum_{i=\lambda}^{\nu+\lambda} M_{i,\nu+\lambda-i},\ \lambda \geqq \nu + 1. \tag{η}$$

Jakmile ovšem v těchto vzorcích překročí jeden z indexů minoru M hodnotu n, položíme tento minor rovný nule.

Položme nyní v rovnicích (ζ) (které mají platiti identicky pro všechna x, y) $y = 1$, $x \neq 0$ libovolné. Vzniklé vztahy nám představují systém n lineárních homogenních rovnic s nenulovým řešením $x^{n-1}, x^{n-2}, \ldots, x, 1$, takže je nutně roven nule jeho determinant. Lze tedy matematický důsledek Bézoutových podmínek (β) napsati ve tvaru (čárky mezi indexy vynecháváme)

$$\begin{vmatrix} c_{01}, & c_{02}, & \ldots, c_{0n} \\ c_{11}, & c_{12}, & \ldots, c_{1n} \\ c_{21}, & c_{22}, & \ldots, c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1,1}, & c_{n-1,2}, & \ldots, c_{n-1,n} \end{vmatrix} = 0. \tag{ϑ}$$

Přesvědčte se, že je právě napsaný determinant symetrický.

Také jinak lze vyjádřiti důsledek identické platnosti rovnic (β). Snadno si ověříte, že tyto žádají, aby všechny dvouřadové determinanty matice

$$\left\| \begin{matrix} a_0, & a_1, & a_2, & \ldots, & a_n \\ b_0, & b_1, & b_2 & \ldots, & b_n \end{matrix} \right\| \tag{ι}$$

byly rovny nule. Že má tento nový důsledek v zápětí automaticky platnost vztahu (ϑ), je samozřejmé. Otázkou, který z obou důsledků vyjadřuje více, event. zda jsou oba ekvivalentní, se zde nebudeme zabývati. S úvahami tohoto příkladu úzce souvisí vyjádření resultantu dvou binárních forem téhož stupně n souměrným n-řadovým determinantem.

9. DISKRIMINANT BINÁRNÍ FORMY.

Definice. Je-li dána binární forma

$$f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i} y^i, \tag{89}$$

nazýváme resultant $R\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ binárních forem $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ diskriminantem dané formy f.

Skutečný výpočet diskriminantu je v obecném případě, kdy je forma dána ve tvaru (89), dosti pracný (v. př. 24). Poměrně jednoduše se dá tento výpočet provésti, jestliže je forma f rozložena v součin svých lineárních faktorů, tedy psána ve tvaru

$$f = \prod_{\nu=1}^{n} (\gamma_\nu x + \delta_\nu y). \tag{90}$$

V tomto případě vyjdeme ze vztahu — v. vzorce (82) a (83) —

$$R\left(x\frac{\partial f}{\partial x}, y\frac{\partial f}{\partial y}\right) = R\left(x\frac{\partial f}{\partial x}, y\right) . R\left(x\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) =$$

$$= (-1)^n R(y, x) . R\left(y, \frac{\partial f}{\partial x}\right) . (-1)^{n(n-1)} R\left(\frac{\partial f}{\partial y}, x\right) .$$

$$. R\left(\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial x}\right) =$$

$$= (-1)^{n^2+(n-1)^2} R(y, x)\, R\left(y, \frac{\partial f}{\partial x}\right) R\left(\frac{\partial f}{\partial y}, x\right) R\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Je však $R(y, x) = -1$ a podle vzorců (86) dále

$$R\left(y, \frac{\partial f}{\partial x}\right) = (-1)^{n-1} \frac{\partial f}{\partial x}(1, 0) = (-1)^{n-1} n\gamma_1\gamma_2 \dots \gamma_n,$$

$$R\left(\frac{\partial f}{\partial y}, x\right) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, -1) = (-1)^{n+1} n\delta_1\delta_2 \dots \delta_n;$$

tím dostáváme pro diskriminant $R\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ dané binární formy (89) vztah

$$R\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{\gamma_1\gamma_2 \dots \gamma_n\delta_1\delta_2 \dots \delta_n} R\left(x\frac{\partial f}{\partial x}, y\frac{\partial f}{\partial x}\right). \quad (91)$$

Nyní už běží jen o výpočet $R\left(x\frac{\partial f}{\partial x}, y\frac{\partial f}{\partial y}\right)$. Podle vzorce (87) a Eulerovy identity pro homogenní funkce platí

$$R\left(x\frac{\partial f}{\partial x}, y\frac{\partial f}{\partial y}\right) = R\left(x\frac{\partial f}{\partial x}, x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}\right) = R\left(x\frac{\partial f}{\partial x}, nf\right). \quad \text{(a)}$$

Ze vztahu (90) však nalezneme snadno (logaritmickým derivováním)

$$x\frac{\partial f}{\partial x} = x\prod_{\nu=1}^{n}(\gamma_\nu x + \delta_\nu y) \cdot \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu x + \delta_\nu y} =$$

$$= x\sum_{\nu=1}^{n}\gamma_\nu\prod_{\mu \neq \nu}(\gamma_\mu x + \delta_\mu y); \quad \text{(b)}$$

položíme-li pak

$$nf = \prod_{\nu=1}^{n}(\Gamma_\nu x + \Delta_\nu y), \quad (92)$$

dostáváme podle (86)

$$R\left(x\frac{\partial f}{\partial x}, nf\right) = \prod_{\nu=1}^{n}\Delta_\nu \frac{\partial f}{\partial x}(\Delta_\nu - \Gamma_\nu) =$$

$$= \prod_{\nu=1}^{n}\Delta_\nu\sum_{\varrho=1}^{n}\gamma_\varrho\prod_{\mu \neq \varrho}(\gamma_\mu\Delta_\nu - \delta_\mu\Gamma_\nu). \quad \text{(c)}$$

Porovnáme-li nyní vztahy (90) a (92) navzájem, vidíme, že můžeme klásti na příklad

$$\Gamma_\nu = n^{\frac{1}{n}}\gamma_\nu,\ \Delta_\nu = n^{\frac{1}{n}}\delta_\nu,\ \nu = 1, 2, \ldots, n; \tag{93}$$

dosazením do (c) pak dostaneme (doporučuji provésti podrobně)

$$R\left(x\frac{\partial f}{\partial x}, nf\right) = \prod_{\nu=1}^{n} n\gamma_\nu\delta_\nu \prod_{\mu\neq\nu}^{1,n}(\gamma_\mu\delta_\nu - \delta_\mu\gamma_\nu) =$$

$$= n^n\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n\delta_1\delta_2\ldots\delta_n\prod_{\nu=1}^{n}\prod_{\mu\neq\nu}^{1,n}(\gamma_\mu\delta_\nu - \delta_\mu\gamma_\nu).$$

Vnitřní součin upravíme

$$\prod_{\mu\neq\nu}^{1,n}(\gamma_\mu\delta_\nu - \delta_\mu\gamma_\nu) = \prod_{\mu=1}^{\nu-1}(\gamma_\mu\delta_\nu - \delta_\mu\gamma_\nu)\prod_{\mu=\nu+1}^{n}(\gamma_\mu\delta_\nu - \delta_\mu\gamma_\nu) =$$

$$= \prod_{\mu=1}^{\nu-1}(\gamma_\mu\delta_\nu - \delta_\mu\gamma_\nu)\,(-1)^{n-\nu}\prod_{\mu=\nu+1}^{n}(\gamma_\nu\delta_\mu - \delta_\nu\gamma_\mu) =$$

$$= (-1)^{n-\nu}\prod_{\mu=1}^{\nu-1}(\gamma_\mu\delta_\nu - \delta_\mu\gamma_\nu)\prod_{\mu=\nu+1}^{n}(\gamma_\nu\delta_\mu - \delta_\nu\gamma_\mu)$$

a najdeme

$$R\left(x\frac{\partial f}{\partial x}, nf\right) =$$

$$= (-1)^{\frac{1}{2}[n(n-1)]}n^n\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n\delta_1\delta_2\ldots\delta_n\prod_{\mu<\nu}^{1,n}(\gamma_\mu\delta_\nu - \delta_\mu\gamma_\nu)^2. \tag{d}$$

Odtud pak dostaneme dosazením do vzorce (91) a vzhledem k (a) hotovou formuli pro výpočet diskriminantu formy (90):

$$R\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (-1)^{\frac{1}{2}[n(n-1)]}n^{n-2}\prod_{\mu<\nu}^{1,n}(\gamma_\mu\delta_\nu - \delta_\mu\gamma_\nu)^2. \tag{94}$$

Vzorec (94) podává návod, jak se určí diskriminant formy f, je-li tato dána jako součin svých lineárních faktorů. S tímto tvarem diskriminantu souvisí úzce tvar další, k němuž dospějeme takto: Vzorec (23′) pro hodnotu Vandermondeova determinantu (23) z dílu prvého píšeme ve formě

$$V_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (-1)^{\frac{1}{2}[n(n-1)]} \prod_{\mu<\nu}^{1,n} (x_\mu - x_\nu),$$

položíme v něm $x_\nu = \dfrac{\gamma_\nu}{\delta_\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$ a povýšíme pak na druhou. Dostaneme

$$V_n^2\left(\frac{\gamma_1}{\delta_1}, \frac{\gamma_2}{\delta_2}, \ldots, \frac{\gamma_n}{\delta_n}\right) = \prod_{\mu<\nu}^{1,n} \frac{(\gamma_\mu\delta_\nu - \delta_\mu\gamma_\nu)^2}{(\delta_\mu\delta_\nu)^2} =$$

$$= (-1)^{\frac{1}{2}[n(n-1)]} n^{2-n} \frac{1}{\prod\limits_{\mu<\nu}^{1,n} \delta_\mu^2\delta_\nu^2} R\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

takže můžeme resultant $R\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$ psáti ve tvaru

$$R\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) =$$

$$= (-1)^{\frac{1}{2}[n(n-1)]} n^{n-2} \prod_{\mu<\nu}^{1,n} \delta_\mu^2\delta_\nu^2 \,.\, V_n^2\left(\frac{\gamma_1}{\delta_1}, \frac{\gamma_2}{\delta_2}, \ldots, \frac{\gamma_n}{\delta_n}\right). \tag{e}$$

Nyní však jest — v. vzorec (23) v dílu prvém —

$$V_n\left(\frac{\gamma_1}{\delta_1}, \frac{\gamma_2}{\delta_2}, \ldots, \frac{\gamma_n}{\delta_n}\right) = \frac{1}{(\delta_1\delta_2 \ldots \delta_n)^{n-1}} \,.$$

$$. \begin{vmatrix} \delta_1^{n-1}, & \gamma_1\delta_1^{n-2}, & \gamma_1^2\delta_1^{n-3}, & \ldots, \gamma_1^{n-1} \\ \delta_2^{n-1}, & \gamma_2\delta_2^{n-2}, & \gamma_2^2\delta_2^{n-3}, & \ldots, \gamma_2^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \delta_n^{n-1}, & \gamma_n\delta_n^{n-2}, & \gamma_n^2\delta_n^{n-3}, & \ldots, \gamma_n^{n-1} \end{vmatrix};$$

zdvojmocnění, jehož potřebujeme, abychom mohli dosaditi do vztahu (e), provedeme tak, že násobíme determinant právě napsaný sebou samým po sloupcích. Dostaneme determinant S s obecným členem

$$c_{ik} = \sum_{\varrho=1}^{n} \gamma_\varrho^{\,i+k-2} \delta_\varrho^{\,2n-i-k} = s_{i+k-2,\,2n-i-k}; \quad i, k = 1, 2, \ldots, n,$$

takže můžeme psáti

$$V_n^2\left(\frac{\gamma_1}{\delta_1}, \frac{\gamma_2}{\delta_2}, \ldots, \frac{\gamma_n}{\delta_n}\right) = \frac{1}{(\delta_1\delta_2\ldots\delta_n)^{2n-2}} \cdot \left|\begin{array}{lllll} s_{0,2n-2}, & s_{1,2n-3}, & s_{2,2n-4}, & \ldots, & s_{n-1,n-1} \\ s_{1,2n-3}, & s_{2,2n-4}, & s_{3,2n-5}, & \ldots, & s_{n,n-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{n-1,n-1}, & s_{n,n-2} & s_{n+1,n-3}, & \ldots, & s_{2n-2,0} \end{array}\right| .$$

Dosazením tohoto výsledku do vztahu (e) dostáváme po maličké úpravě definitivní vzorec:

$$R\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (-1)^{\frac{1}{2}[n(n-1)]} n^{n-2} \cdot \left|\begin{array}{llll} s_{0,2n-2}, & s_{1,2n-3}, & \ldots, & s_{n-1,n-1} \\ s_{1,2n-3}, & s_{2,2n-4}, & \ldots, & s_{n,n-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{n-1,n-1}, & s_{n,n-2}, & \ldots, & s_{2n-2,0} \end{array}\right| . \qquad (95)$$

Nalezli jsme tak vyjádření diskriminantu formy (90) pomocí determinantu, který je typu persymetrického — v. odst. 8. dílu prvého.

Pomocí diskriminantu formy (89) lze snadno rozhodnouti, zdali má tato vícenásobné lineární faktory. Provedeme to předpokládajíce diskriminant ve tvaru (94). Má-li forma (89) alespoň dvojnásobný lineární faktor, je zřejmě podle (94) její diskriminant roven nule. Je-li naopak tento diskriminant nulový, musí nutně existovati alespoň dva indexy $\mu_0 < \nu_0$ tak, že je $\gamma_{\mu_0}\delta_{\nu_0} - \delta_{\mu_0}\gamma_{\nu_0} = 0$, t. j. $\gamma_{\nu_0} = \varrho\gamma_{\mu_0}$, $\delta_{\nu_0} = \varrho\delta_{\mu_0}$; pak jsou oba činitelé $\gamma_{\mu_0}x + \delta_{\mu_0}y$ a $\gamma_{\nu_0}x + \delta_{\nu_0}y$ navzájem stejné a forma má alespoň dvojnásobný lineární faktor. Lze tedy vysloviti

větu 12. Nutná a postačující podmínka, aby binární forma měla vícenásobný lineární faktor, jest anulování jejího diskriminantu.

Položíme-li ve formě (89) hodnotu proměnné y rovnou 1, dostaneme zvláštní její případ — mnohočlen $f(x)$ proměnné x (stupeň budiž m):

$$f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^{m-i}. \tag{96}$$

Všechny pojmy a úvahy tohoto paragrafu se ovšem přenášejí také na tento polynom — jenom jest nutno je přizpůsobiti poměrům zde panujícím. Také pojem resultantu dvou binárních forem f a g a vše, co s ním souvisí, lze přenésti na případ dvou polynomů $f(x)$, $g(x)$, jež z daných forem f, g vzniknou, položíme-li v nich $y = 1$. Naznačíme zde stručně, jak se modifikují dříve uvedené pojmy a poznatky, přejdeme-li od forem dvou proměnných x, y k polynomům proměnné x.

Buďtež dány dva polynomy

$$f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^{m-i}, \quad g(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^{n-k}. \tag{97}$$

Také zde platí věta, že lze každý z nich rozložiti jediným způsobem v součin lineárních faktorů, tedy

$$f(x) = \prod_{\mu=1}^{m} (\gamma_\mu x + \delta_\mu), \quad g(x) = \prod_{\nu=1}^{n} (\varkappa_\nu x + \lambda_\nu). \tag{98}$$

Důkaz tohoto tvrzení se provádí zcela analogicky, jako se stalo v odst. 8. — jsou zde jen nepatrné změny zcela přiměřené povaze věci.

Resultant $R(f, g)$ obou polynomů (97) se definuje stejně, jako se stalo u dvou binárních forem, takže

$$R(f, g) = \begin{vmatrix} a_0, & a_1, & \ldots, & a_m, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & a_0, & \ldots, & a_{m-1}, & a_m, & \ldots, & 0 \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ 0, & 0, & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & a_m \\ b_0, & b_1 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0, & b_0, & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ 0, & 0, & \ldots, & b_1, & b_2, & \ldots, & b_n \end{vmatrix}. \tag{99}$$

Také zde je anulování resultantu nutnou a postačující podmínkou pro soudělnost obou polynomů (97). Důkaz se provádí stejně jako při formách binárních.

Pro resultant polynomu f a lineární funkce $l = \alpha x + \beta$ nacházíme stejně, jako v odst. 8., výraz

$$R(f, l) = a_0\beta^m - a_1\alpha\beta^{m-1} + a_2\alpha^2\beta^{m-2} - \ldots + (-1)^m a_m\alpha^m, \tag{100}$$

pouze je nutno jej nyní jinak interpretovat, než se stalo ve vzorci (81). Najdeme snadno

$$R(f, l) = (-\alpha)^m f\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right). \tag{101}$$

Vzorec (82), tedy

$$R(f, lg) = R(f, l) \,.\, R(f, g), \tag{102}$$

podrží svou platnost i když jsou f, g, l polynomy. Důkaz se provádí analogicky, jako v odst. 8.

Také vztah (83) platí beze změny, takže je

$$R(f, g) = (-1)^{mn} R(g, f) \tag{103}$$

a stejně také

$$R(f, g) = \prod_{\mu, \nu} (\gamma_\mu \lambda_\nu - \delta_\mu \varkappa_\nu); \; \mu = 1, 2, \ldots, m, \; \nu = 1, 2, \ldots, n. \tag{104}$$

Tomuto poslednímu vzorci lze dáti zajímavý tvar. Nulové body polynomů $f(x)$, $g(x)$ označme znaky resp. α_μ, β_ν. Pak je zřejmě

$$\alpha_\mu = -\frac{\delta_\mu}{\gamma_\mu}, \; \delta_\mu = -\alpha_\mu\gamma_\mu; \beta_\nu = -\frac{\lambda_\nu}{\varkappa_\nu}, \; \lambda_\nu = -\beta_\nu\varkappa_\nu;$$
$$\mu = 1, 2, \ldots, m, \; \nu = 1, 2, \ldots, n \tag{105}$$

a vztah (104) můžeme postupně upraviti takto:

$$R(f, g) = \prod_{\mu, \nu} (\gamma_\mu \lambda_\nu - \delta_\mu \varkappa_\nu) = \prod_{\mu, \nu} \gamma_\mu \varkappa_\nu (\alpha_\mu - \beta_\nu) =$$
$$= a_0{}^n b_0{}^m \prod_{\mu, \nu} (\alpha_\mu - \beta_\nu).$$

Máme tedy resultant dvou polynomů vyjádřen jejich nulovými body:

$$R(f, g) = a_0{}^n b_0{}^m \prod_{\mu, \nu} (\alpha_\mu - \beta_\nu). \tag{106}$$

Stejně snadno zjistíme, jak se modifikují vzorce (86). Upravujíce vztah (104), najdeme

$$R(f, g) = \prod_{\nu=1}^{n} [\prod_{\mu=1}^{m} (-\varkappa_\nu)(\gamma_\mu \beta_\nu + \delta_\mu)] = \prod_{\nu=1}^{n} (-\varkappa_\nu)^m f(\beta_\nu) =$$
$$= (-1)^{mn} b_0{}^m f(\beta_1)\, f(\beta_2) \dots f(\beta_n),$$

anebo druhým způsobem

$$R(f, g) = \prod_{\mu=1}^{m} [\prod_{\nu=1}^{n} \gamma_\mu (\varkappa_\nu \alpha_\mu + \lambda_\nu)] = \prod_{\mu=1}^{m} \gamma_\mu^n g(\alpha_\mu) =$$
$$= a_0{}^n g(\alpha_1)\, g(\alpha_2) \dots g(\alpha_m).$$

Vzorce pro resultant dvou polynomů, analogické vztahům (86), tedy znějí

$$R(f, g) = (-1)^{mn} b_0{}^m f(\beta_1)\, f(\beta_2) \dots f(\beta_n),$$
$$R(f, g) = a_0{}^n g(\alpha_1)\, g(\alpha_2) \dots g(\alpha_m). \tag{107}$$

Také všechny ostatní úvahy z odst. 8. se přenášejí z forem na polynomy; zvláště důležitá je z nich věta 11. a vzorec (87).

Pokud jde o diskriminant $D(f)$ polynomu (96), nemůžeme jej ovšem definovati tak, jak jsme učinili pro binární formu na počátku tohoto paragrafu (ježto polynom má pouze proměnnou x, nelze mluvit o jeho parciální derivaci $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ podle y). Zato však jsou schopny přenesení vztahy (91) a potom (a). Užívajíce jich, definujeme diskriminant $D(f)$ takto:

$$D(f) = \frac{1}{m^2 a_0 a_m} R(xf', mf),\ f' = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}. \tag{108}$$

Tento definiční vztah lze ovšem upraviti. Podle dosavadních výsledků totiž máme

$$R(xf', mf) = m^m R(xf', f) = (-1)^{m^2} m^m R(f, x) \,.\, R(f, f') =$$
$$= (-1)^{m^2} m^m (-1)^m f(0)\, R(f, f') = m^m a_m R(f, f'),$$

takže můžeme vzorec pro diskriminant polynomu (96) napsati ve tvaru

$$D(f) = \frac{1}{a_0}\, m^{m-2} R(f, f'). \tag{109}$$

Použitím vzorců (107) dostáváme pak diskriminant v jiném tvaru

$$D(f) = (ma_0)^{m-2} f'(\alpha_1)\, f'(\alpha_2) \ldots f'(\alpha_m). \tag{110}$$

Existuje ještě další vyjádření diskriminantu $D(f)$ pomocí kořenů $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ polynomu $f(x)$. Od rozkladu (98) snadno dospějeme pomocí vzorců (105) k rozkladu na „kořenové činitele“:

$$f(x) = a_0 \prod_{\mu=1}^{m} (x - \alpha_\mu) = a_0(x - \alpha_1)\,(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_m); \tag{111}$$

odtud pak nacházíme

$$f'(x) = f(x) \sum_{\mu=1}^{m} \frac{1}{x - \alpha_\mu},$$

takže bude

$$f'(\alpha_\varrho) = a_0 \prod_{\mu \neq \varrho}^{1,\, m} (\alpha_\varrho - \alpha_\mu)$$

a vzorec (110) nabývá tvaru

$$D(f) = m^{m-2} a_0^{2m-2} \prod_{\varrho=1}^{m} \prod_{\mu \neq \varrho}^{1,\, m} (\alpha_\varrho - \alpha_\mu). \tag{110'}$$

Postupem zcela stejným, jakého bylo použito při odvozování formule (94), najdeme také zde

$$D(f) = (-1)^{\frac{1}{2}[m(m-1)]}\, m^{m-2} a_0^{2m-2} \prod_{\mu < \varrho}^{1,\, m} (\alpha_\mu - \alpha_\varrho)^2 \tag{112}$$

a zavedením Vandermondeova determinantu dále

$$D(f) = (-1)^{\frac{1}{2}[m(m-1)]} m^{m-2} a_0^{2m-2} \begin{vmatrix} 1, & \alpha_1, & \alpha_1^2, & \ldots, & \alpha_1^{m-1} \\ 1, & \alpha_2, & \alpha_2^2, & \ldots, & \alpha_2^{m-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1, & \alpha_m, & \alpha_m^2, & \ldots, & \alpha_m^{m-1} \end{vmatrix}^2 . \tag{113}$$

Provedeme-li zdvojmocnění determinantu zde figurujícího po sloupcích a označíme-li

$$s_k = \alpha_1^k + \alpha_2^k + \ldots + \alpha_m^k, \tag{114}$$

dostaneme další, velmi známý tvar diskriminantu polynomu $f(x)$:

$$D(f) = (-1)^{\frac{1}{2}[m(m-1)]} m^{m-2} a_0^{2m-2} \begin{vmatrix} s_0, & s_1, & \ldots, & s_{m-1} \\ s_1, & s_2, & \ldots, & s_m \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{m-1}, & s_m, & \ldots, & s_{2m-2} \end{vmatrix} . \tag{115}$$

Determinant ze vzorce (115) je orthosymetrický (v. odst. 8. dílu prvého).

Fakt, že má polynom $f(x)$ vícenásobné kořeny, když a jen když je jeho diskriminant roven nule, je nyní zřejmý z pouhého pohledu na vzorec (112) nebo (113).

S pojmem diskriminantu souvisí ovšem ještě zákonitosti povahy mnohem hlubší, než ty, které jsme tu probrali. S některými z nich se seznámíme v odstavci jednajícím o aplikaci determinantů v theorii rovnic (v. odst. 11.).

Poznámky. 1. Pojem resultantu byl dokonale znám už Eulerovi (Introductio in analysin infinitorum, Lausanne 1748); methoda, které jsme zde užili pro jeho konstrukci, je známa pode jménem „dialytická" a pochází od Sylvestera (Phil. Mag., 1840). Souvislost diskriminantu dvou polynomů s jejich nulovými body studovali po prvé Euler (Hist. de l'acad. de Berlin, 1748) a Cramer (Introduction à l'analyse des lignes courbes, Génève 1750). Vyjádření resultantu dvou forem binárních téhož stupně ve tvaru symetrického determinantu (jak jsme se o něm zmínili na konci př. 23) provedl jako prvý Bézout (Mém. Acad. de Paris 1764), zvláště pak elegantní způsob pochází od Cayleya (Journ. f. Math., 1857).

2. Pojem „diskriminant polynomu" pochází od Sylvestera (Philos. Mag., 1851). V učebnicích algebry se definuje diskriminant poněkud odchylně, než se stalo ve vzorci (108); tato odlišnost má důsledek v tom, že místo vztahu (109) vychází pro $D(f)$ jiný:

$$D(f) = (-1)^{\frac{1}{2}[m(m-1)]} \cdot \frac{1}{a_0} R(f, f'). \tag{116}$$

Pak je ovšem nutno patřičně pozměnit i další vzorce pro určení $D(f)$.

Příklady.

24. Diskriminant binární formy 4. stupně

$$f(x, y) = a_0x^4 + a_1x^3y + a_2x^2y^2 + a_3xy^3 + a_4y^4. \tag{117}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4a_0x^3 + 3a_1x^2y + 2a_2xy^2 + a_3y^3,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = a_1x^3 + 2a_2x^2y + 3a_3xy^2 + 4a_4y^3.$$

Pro diskriminant dostáváme

$$R\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \begin{vmatrix} 4a_0, & 3a_1, & 2a_2, & a_3, & 0, & 0 \\ 0, & 4a_0, & 3a_1, & 2a_2, & a_3, & 0 \\ 0, & 0, & 4a_0, & 3a_1, & 2a_2, & a_3 \\ a_1, & 2a_2, & 3a_3, & 4a_4, & 0, & 0 \\ 0, & a_1, & 2a_2, & 3a_3, & 4a_4, & 0 \\ 0, & 0, & a_1, & 2a_2, & 3a_3, & 4a_4 \end{vmatrix}. \tag{118}$$

Skutečný výpočet se provede tak, že pořadí řádek změníme z daného — označme je 1, 2, 3, 4, 5, 6 — na nové: 1, 4, 2, 5, 3, 6 (v. př. 22). Determinant, který tak dostaneme, jeho hodnota je podle př. 22 rovna $-R\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$, pak vypočítáme způsobem naznačeným v př. 22. Najdeme po dosti dlouhém počítání

$$R\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (3a_1^2 - 8a_0a_2)\,[(9a_1a_3 - 4a_2^2)\,(8a_2a_4 -$$
$$- 3a_3^2) - (12a_1a_4 - 2a_2a_3)^2 + (8a_2a_4 - 3a_3^2)(16a_0a_4 - a_1a_3)] +$$
$$+ (12a_0a_3 - 2a_1a_2)[(12a_0a_3 - 2a_1a_2)(8a_2a_4 - 3a_3^2) +$$
$$+ (a_1a_3 - 16a_0a_4)(12a_1a_4 - 2a_2a_3)] + (a_1a_3 - 16a_0a_4)\,.$$
$$.\,[(8a_0a_2 - 3a_1^2)(8a_2a_4 - 3a_3^2) - (16a_0a_4 - a_1a_3)^2] =$$
$$= 8(3a_1^2 - 8a_0a_2)(16a_0a_2a_4^2 - 6a_0a_3^2a_4 -$$
$$- 18a_1^2a_4^2 + 14a_1a_2a_3a_4 - 3a_1a_3^3 - 4a_2^3a_4 + a_2^2a_3^2) +$$
$$+ 8(6a_0a_3 - a_1a_2)(-48a_0a_1a_4^2 + 32a_0a_2a_3a_4 - 9a_0a_3^3 +$$
$$+ a_1a_2a_3^2 - 4a_1a_2^2a_4 + 3a_1^2a_3a_4) + 8(a_1a_3 - 16a_0a_4)\,.$$
$$.\,(-32a_0^2a_4^2 + 4a_0a_1a_3a_4 + 8a_0a_2^2a_4 - 3a_0a_2a_3^2 -$$
$$- 3a_1^2a_2a_4 + a_1^2a_3^2).$$

Provedeme naznačená násobení a dostaneme

$$R\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = 16(256a_0^3a_4^3 - 192a_0^2a_1a_3a_4^2 - 128a_0^2a_2^2a_4^2 +$$
$$+ 144a_0^2a_2a_3^2a_4 - 27a_0^2a_3^4 + 144a_0a_1^2a_2a_4^2 - 6a_0a_1^2a_3^2a_4 -$$
$$- 80a_0a_1a_2^2a_3a_4 + 18a_0a_1a_2a_3^3 + 16a_0a_2^4a_4 - \qquad (119)$$
$$- 4a_0a_2^3a_3^2 - 27a_1^4a_4^2 + 18a_1^3a_2a_3a_4 - 4a_1^2a_2^3a_4 +$$
$$+ a_1^2a_2^2a_3^2 - 4a_1^3a_3^3).$$

Sečteme-li v každém členu všechny indexy u veličin a, dostáváme vždy součet 12. Vyjadřujeme to rčením, že je diskriminant binární formy 4. stupně isobarickou funkcí koeficientů a to funkcí váhy 12.

25. Má binární forma

$$f = 2x^4 - 9x^3y + 17x^2y^2 - 16xy^3 + 6y^4$$

vícenásobné lineární faktory?

Diskriminant této formy (vypočítejte jej přímo podle definice a také podle vzorce odvozeného v př. 24) má hodnotu — 1600, takže lze formu f rozložiti na součin čtyř lineárních navzájem různých faktorů. Koeficienty těchto faktorů nemohou ovšem býti vesměs reálné, ježto by v tomto případě musil býti diskriminant podle vzorce (94) kladný. Skutečně lze psáti

$$f = (x - y)(2x - 3y)[x - (1 - \mathrm{i})\, y][x - (1 + \mathrm{i})\, y],$$

kde i značí imaginární jednotku. Vypočítejte odtud znovu podle vzorce (94) hodnotu diskriminantu dané formy.

26. Rozhodněte otázku soudělnosti polynomů

$$f(x) = x^3 - x^2 - 5x - 3, \quad g(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 9.$$

Snadno vypočítáme, že má resultant obou mnohočlenů nulovou hodnotu, takže jsou tyto soudělné. Mají tedy alespoň jeden lineární faktor společný. Ve smyslu věty 11., jejíž platnost se přenáší, jak bylo výše uvedeno, také na polynomy, sestrojíme matici $\boldsymbol{M}_1$ a zkoumáme její hodnost h_1.

Máme zde

$$\boldsymbol{M}_1 = \begin{Vmatrix} 1, & -1, & -5, & -3, & 0 \\ 0, & 1, & -1, & -5, & -3 \\ 1, & -5, & 3, & 9, & 0 \\ 0, & 1, & -5, & 3, & 9 \end{Vmatrix}$$

a snadno najdeme $h_1 = 3$, takže mají polynomy podle věty 11. alespoň dva společné lineární faktory. Sestavíme ještě matici $\boldsymbol{M}_2$

$$\boldsymbol{M}_2 = \begin{Vmatrix} 1, & -1, & -5, & -3 \\ 1, & -5, & 3, & 9 \end{Vmatrix};$$

její hodnost je $h_2 = 2$ a polynomy mají největší společný dělitel právě stupně druhého. Určete jej známým Euklidovým postupem a rozložte pak oba mnohočleny na lineární faktory.

10. INVARIANTY.

Budiž $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ homogenní polynom stupně m-tého proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$; jeho koeficienty označme na tomto místě (označení se v algebře provádí podle jistých zásad tak, aby už z něho bylo patrno, jaký tvar má příslušný člen polynomu) jednoduše znaky $a_1, a_2, \ldots$ Podrobíme nyní proměnné $x_1, x_2, \ldots, x_n$ polynomu (říkáme také: formy) F homogenní lineární transformaci (v. odst. 6.)

$$\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{X}. \tag{120}$$

Forma $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tím přejde ve formu nových proměnných $X_1, X_2, \ldots, X_n$ téhož stupně m, jaký měl původní polynom — značme tuto novou formu znakem $\Phi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ a její koeficienty symboly $a_1', a_2', \ldots$ Každá funkce $f(a_1, a_2, \ldots)$ původních součinitelů, pro kterou platí vztah — C značí modul transformace (120) —

$$f(a_1', a_2', \ldots) = C^w f(a_1, a_2, \ldots), \tag{121}$$

se jmenuje *invariant dané formy F* a to invariantem *váhy w*.

Všimneme si tu jenom zcela běžných invariantů, abychom ukázali i zde užitečnost determinantů a matic. Musíme si však býti vědomi toho, že počítání s invarianty vyrostlo v celou velmi rozsáhlou theorii, v níž hrají nemalou roli na příklad také parciální diferenciální rovnice (Cayley, Journ. f. Math., 1854) a těch několik případů, které můžeme v úzkém rámci této knihy uvésti, představuje jen nejprimitivnější prvopočátky celé theorie.

Také v případě, kdy je dáno více forem, může míti jistá funkce jejich koeficientů vlastnost vyjádřenou vztahem (121). Říkáme pak takovéto funkci *simultánní invariant daných forem*.

1. *Soustava n lineárních forem v n proměnných.*

Budiž dán systém forem $y_1, y_2, \ldots, y_n$ proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ maticovou rovnicí

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}. \tag{122}$$

Transformací (120) přejde v soustavu

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{C}\mathbf{X} = \mathbf{A}'\mathbf{X}, \tag{122'}$$

při čemž ovšem platí

$$A' = CA; \tag{123}$$

je tedy determinant systému lineárních forem (122) jejich simultánním invariantem váhy 1.

2. *Forma bilineární.*

Bilineární forma s maticovým obrazem (v. odst. 6.)

$$\bar{\mathbf{x}}\mathbf{A}\mathbf{y} \tag{124}$$

přechází homogenními lineárními transformacemi (kogredientními)

$$\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{X},\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{Y}$$

opět v bilineární formu s obrazem

$$\bar{\mathbf{X}}\bar{\mathbf{C}}\mathbf{A}\mathbf{C}\mathbf{Y} = \bar{\mathbf{X}}\mathbf{A}'\mathbf{Y}.$$

Platí proto vztah

$$A' = C^2A, \tag{125}$$

který ukazuje, že jest determinant bilineární formy dvou řad proměnných invariantem váhy 2 vůči všem lineárním homogenním a kogredientním transformacím obou řad proměnných.

3. *Forma kvadratická.*

Daná kvadratická forma s obrazem

$$\bar{\mathbf{x}}\mathbf{A}\mathbf{x} \tag{126}$$

přejde homogenní lineární transformací (120) v novou, jejíž obraz jest

$$\bar{X}\bar{C}ACX = \bar{X}A'X$$

takže máme

$$A' = C^2A. \tag{127}$$

Je tedy diskriminant kvadratické formy invariantem váhy 2 vůči každé homogenní lineární transformaci proměnných.

Systém $y_1, y_2, \ldots, y_n$ lineárních forem adjungovaných k dané kvadratické s obrazem (126) má v maticové symbolice rovnici (122) a vzorec (122') nás poučuje, že je diskriminant A formy simultánním invariantem váhy 1 pro systém lineárních forem k oné kvadratické přidružených. Je ovšem nutno dáti dobrý pozor, aby nedošlo k omylu: Lineární formy adjungované ku kvadratické formě transformované lineární substitucí (120) nejsou rovny formám, které dostaneme, jestliže podrobíme téže transformaci (120) systém lineárních forem přidružených k původní formě kvadratické — ukažte si a ujasněte tuto věc pomocí maticového počtu. Při transformaci kvadratické formy se tedy její lineární adjungované formy netransformují zároveň ve formy přidružené k nové formě kvadratické — říkáme stručně, že adjungované formy nejsou kovarianty dané formy kvadratické.

Srovnáme-li navzájem obraz poláry

$$\bar{y}Ax \tag{128}$$

kvadratické formy původní a obraz

$$\bar{Y}\bar{C}ACX \tag{129}$$

poláry k formě transformované, vidíme, že tento nový obraz (129) vznikne z původního (128) stejnou transformací obou řad proměnných, jaké jsme použili při transformování původní formy kvadratické. Je tedy polára kvadratické formy jejím kovariantem.

4. *Forma kvadratická a lineární.*

Budiž $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ kvadratická forma s maticovým obrazem (126) a dále $L(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ lineární forma

$$L = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i.$$

Sestrojme si nyní formu kvadratickou o $n + 1$ proměnných

$$f = F + 2x_{n+1}L \tag{130}$$

a podrobme ji homogenní lineární transformaci s maticí

$$\mathbf{C}_1 = \left\| \begin{matrix} c_{11}, & c_{12}, & \ldots, & c_{1n}, & 0 \\ c_{21}, & c_{22}, & \ldots, & c_{2n}, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1}, & c_{n2}, & \ldots, & c_{nn}, & 0 \\ 0, & 0, & \ldots, & 0, & 1 \end{matrix} \right\|. \tag{131}$$

Z předchozích úvah víme, že se při této transformaci násobí diskriminant formy (130)

$$\left| \begin{matrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n}, & b_1 \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n}, & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, & a_{nn}, & b_n \\ b_1, & b_2, & \ldots, & b_n, & 0 \end{matrix} \right|; \quad a_{ik} = a_{ki}, \quad i, k = 1, 2, \ldots, n \tag{132}$$

pouze čtvercem C_1^2 determinantu C_1, t. j. číslem C^2. Podle tvaru naší transformace (131) můžeme tento výsledek vysloviti zřejmě také takto: Výraz (132) je simultánním invariantem forem F a L vůči libovolné lineární homogenní transformaci (120); je to invariant váhy 2.

Přejdou-li při takové transformaci formy F, L v nové Φ, Λ s koeficienty a_{ik}', b_i', lze invarianci determinantu (132) psáti podle theorie determinantů vroubených také ve tvaru

$$\sum_{i,k} A_{ik}' b_i' b_k' = C^2 \,.\, \sum_{i,k} A_{ik} b_i b_k.$$

5. *Forma kvadratická a 2r lineárních.*

Budiž vedle kvadratické formy F z předchozího odstavce dáno ještě $2r$ forem lineárních

$$L_\varrho = \sum_{i=1}^{n} b_{\varrho i} x_i,\ \varrho = 1, 2, \ldots, r;\ \Lambda_\varrho = \sum_{i=1}^{n} d_{\varrho i} x_i,\ \varrho = 1, 2, \ldots, r. \tag{133}$$

Dokážeme si snadno, že je determinant

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n}, & b_{11}, & \ldots, & b_{r1} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n}, & b_{12}, & \ldots, & b_{r2} \\ \dots & & & & & & \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, & a_{nn}, & b_{1n}, & \ldots, & b_{rn} \\ d_{11}, & d_{12}, & \ldots, & d_{1n}, & 0, & \ldots, & 0 \\ \dots & & & & & & \\ d_{r1}, & d_{r2}, & \ldots, & d_{rn}, & 0, & \ldots, & 0 \end{vmatrix} \tag{134}$$

vůči transformaci (120) invariantem váhy 2 simultánním pro formy $F, L_1, \ldots, L_r, \Lambda_1, \ldots, \Lambda_r$.

Tento determinant je totiž determinantem bilineární formy

$$\sum_{i,k}^{1,n} a_{ik} x_i y_k + \sum_{\varrho=1}^{r} x_{n+\varrho} \Lambda_\varrho(y) + \sum_{\varrho=1}^{r} y_{n+\varrho} L_\varrho(x)$$

proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_{n+r};\ y_1, y_2, \ldots, y_{n+r}$. Podrobíme-li je kogredientním transformacím

$$\mathbf{C}_r = \begin{Vmatrix} c_{11}, & \ldots, & c_{1n}, & 0, & \ldots, & 0 \\ \dots & & & & & \\ c_{n1}, & \ldots, & c_{nn}, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & \ldots, & 0, & 1, & \ldots, & 0 \\ \dots & & & & & \\ 0, & \ldots, & 0, & 0, & \ldots, & 1 \end{Vmatrix},$$

kde jest počet vroubících řádků i sloupců roven r, násobí se determinant (134) podle odstavce o invarianci determinantu forem bilineárních pouze číslem $C_r^2 = C^2$.

6. *Dvě formy kvadratické.*

Buďte dány dvě kvadratické formy

$$F(x) = \sum_{i,k}^{1,n} a_{ik} x_i x_k,\ a_{ik} = a_{ki};\ G(x) = \sum_{i,k}^{1,n} b_{ik} x_i x_k,\ b_{ik} = b_{ki}. \quad (135)$$

Zcela snadno si pro ně určíme $n + 1$ simultánních invariantů tím, že vezmeme v úvahu kvadratickou formu $F + \lambda G$ (λ zcela libovolné) ze svazku určeného oběma formami danými.

Determinant této formy jsme už poznali v prvém oddílu — byl tam uveden ve vzorci (54) — a nalezli jeho hodnotu

$$I_0 + \lambda I_1 + \lambda^2 I_2 + \ldots + \lambda^{n-1} I_{n-1} + \lambda^n I_n.$$

Z té okolnosti, že je tento diskriminant formy $F + \lambda G$ invariantem váhy 2 a že je λ libovolné, plyne, že veličiny — jejich konstrukce popsána v prvém oddílu —

$$I_0, I_1, I_2, \ldots, I_{n-1}, I_n \quad (136)$$

jsou simultánní invarianty váhy 2 obou forem F a G vůči transformaci (120).

7. *Kvadratické formy v počtu m.*

Z daných m kvadratických forem

$$F_\varrho(x) = \sum_{i,k}^{1,n} a_{ik}^{(\varrho)} x_i x_k;\ \varrho = 1, 2, \ldots, m$$

vytvořme pomocí libovolných součinitelů $1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ formu novou

$$F(x) = \sum_{\varrho=1}^{m} \lambda_\varrho F_\varrho(x) = \sum_{i,k}^{1,n} x_i x_k \sum_{\varrho=1}^{m} \lambda_\varrho a_{ik}^{(\varrho)},\ \lambda_1 = 1. \quad (137)$$

Její diskriminant

$$D(\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_m) = \begin{vmatrix} a_{11}^{(1)} + \lambda_2 a_{11}^{(2)} + \ldots + \lambda_m a_{11}^{(m)}, & \ldots & \ldots, a_{1n}^{(1)} + \lambda_2 a_{1n}^{(2)} + \ldots + \lambda_m a_{1n}^{(m)} \\ a_{21}^{(1)} + \lambda_2 a_{21}^{(2)} + \ldots + \lambda_m a_{21}^{(m)}, & \ldots & \ldots, a_{2n}^{(1)} + \lambda_2 a_{2n}^{(2)} + \ldots + \lambda_m a_{2n}^{(m)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}^{(1)} + \lambda_2 a_{n1}^{(2)} + \ldots + \lambda_m a_{n1}^{(m)}, & \ldots & \ldots, a_{nn}^{(1)} + \lambda_2 a_{nn}^{(2)} + \ldots + \lambda_m a_{nn}^{(m)} \end{vmatrix} \tag{138}$$

jest polynom proměnných $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_m$ stupně n-tého a jest, jak víme, invariantem váhy 2 vůči transformaci (120). Proto také každý z jeho koeficientů, těch je obecně $\binom{n + m - 1}{m - 1}$, je invariantem váhy 2.

Velmi často se vyskytuje případ $m = 3$, $n = 2$; jde tedy o tři kvadratické formy po dvou proměnných. Máme zde

$$D(\lambda_2, \lambda_3) =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}^{(1)} + \lambda_2 a_{11}^{(2)} + \lambda_3 a_{11}^{(3)}, & a_{12}^{(1)} + \lambda_2 a_{12}^{(2)} + \lambda_3 a_{12}^{(3)} \\ a_{21}^{(1)} + \lambda_2 a_{21}^{(2)} + \lambda_3 a_{21}^{(3)}, & a_{22}^{(1)} + \lambda_2 a_{22}^{(2)} + \lambda_3 a_{22}^{(3)} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}^{(1)}, & a_{12}^{(2)} \\ a_{21}^{(1)}, & a_{22}^{(1)} \end{vmatrix} + \left(\begin{vmatrix} a_{11}^{(2)}, & a_{12}^{(2)} \\ a_{21}^{(1)}, & a_{22}^{(1)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}^{(1)}, & a_{12}^{(1)} \\ a_{21}^{(2)}, & a_{22}^{(2)} \end{vmatrix} \right) . \lambda_2 +$$

$$+ \left(\begin{vmatrix} a_{11}^{(3)}, & a_{12}^{(3)} \\ a_{21}^{(1)}, & a_{22}^{(1)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}^{(1)}, & a_{12}^{(1)} \\ a_{21}^{(3)}, & a_{22}^{(3)} \end{vmatrix} \right) . \lambda_3 + \begin{vmatrix} a_{11}^{(2)}, & a_{12}^{(2)} \\ a_{21}^{(2)}, & a_{22}^{(2)} \end{vmatrix} .$$

$$. \lambda_2^2 + \begin{vmatrix} a_{11}^{(3)}, & a_{12}^{(3)} \\ a_{21}^{(3)}, & a_{22}^{(3)} \end{vmatrix} . \lambda_3^2 +$$

$$+ \left(\begin{vmatrix} a_{11}^{(2)}, & a_{12}^{(3)} \\ a_{21}^{(2)}, & a_{22}^{(3)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}^{(3)}, & a_{12}^{(2)} \\ a_{21}^{(3)}, & a_{22}^{(2)} \end{vmatrix} \right) . \lambda_2 \lambda_3 .$$

Že jsou invariantními koeficienty při λ_2^2, λ_3^2 a člen absolutní, víme už z dřívějška, jsou to totiž diskriminanty forem F_2, F_3 a F_1. Zato však dostáváme jako výsledek invarianci koeficientů v ostatních členech.

8. *Forma binární.*

Binární forma (90), t. j.

$$f = \prod_{\nu=1}^{n} (\gamma_\nu x + \delta_\nu y),$$

přejde transformací

$$x = c_{11}X + c_{12}Y, \; y = c_{21}X + c_{22}Y \tag{139}$$

v novou

$$F = \prod_{\nu=1}^{n} [(c_{11}\gamma_\nu + c_{21}\delta_\nu)\, X + (c_{12}\gamma_\nu + c_{22}\delta_\nu)\, Y] =$$

$$= \prod_{\nu=1}^{n} (\Gamma_\nu X + \Delta_\nu Y).$$

Její diskriminant — faktor $(-1)^{\frac{1}{2}[n(n-1)]} n^{n-2}$ nebereme v úvahu — má hodnotu

$$D = \prod_{\mu<\nu}^{1,n} (\Gamma_\mu \Delta_\nu - \Delta_\mu \Gamma_\nu)^2 =$$

$$= \prod_{\mu<\nu}^{1,n} \begin{vmatrix} c_{11}\gamma_\mu + c_{21}\delta_\mu, & c_{11}\gamma_\nu + c_{21}\delta_\nu \\ c_{12}\gamma_\mu + c_{22}\delta_\mu, & c_{12}\gamma_\nu + c_{22}\delta_\nu \end{vmatrix}^2 =$$

$$= \prod_{\mu<\nu}^{1,n} \begin{vmatrix} c_{11}, & c_{21} \\ c_{12}, & c_{22} \end{vmatrix}^2 . \begin{vmatrix} \gamma_\mu, & \delta_\mu \\ \gamma_\nu, & \delta_\nu \end{vmatrix}^2,$$

čili

$$\prod_{\mu<\nu}^{1,n} (\Gamma_\mu \Delta_\nu - \Delta_\mu \Gamma_\nu)^2 = C^{n(n-1)} \prod_{\mu<\nu}^{1,n} (\gamma_\mu \delta_\nu - \delta_\mu \gamma_\nu)^2. \tag{140}$$

Vidíme, že je diskriminant binární formy n-tého stupně invariantem váhy $n(n-1)$ vůči homogenní lineární transformaci (139) jejích proměnných.

9. *Resultant dvou binárních forem.*

Transformací (139) přejdou binární formy

$$f = \prod_{\mu=1}^{m}(\gamma_\mu x + \delta_\mu y),\ g = \prod_{\nu=1}^{n}(\varkappa_\nu x + \lambda_\nu y)$$

v nové

$$F = \prod_{\mu=1}^{m}(\Gamma_\mu X + \Delta_\mu Y),\ G = \prod_{\nu=1}^{n}(K_\nu X + \Lambda_\nu Y),$$

kde jest

$$\Gamma_\mu = c_{11}\gamma_\mu + c_{21}\delta_\mu,\ \Delta_\mu = c_{12}\gamma_\mu + c_{22}\delta_\mu;$$
$$K_\nu = c_{11}\varkappa_\nu + c_{21}\lambda_\nu,\ \Lambda_\nu = c_{12}\varkappa_\nu + c_{22}\lambda_\nu.$$

Platí tedy dále

$$\Gamma_\mu\Lambda_\nu - \Delta_\mu K_\nu = \begin{vmatrix} c_{11}\gamma_\mu + c_{21}\delta_\mu, & c_{12}\gamma_\mu + c_{22}\delta_\mu \\ c_{11}\varkappa_\nu + c_{21}\lambda_\nu, & c_{12}\varkappa_\nu + c_{22}\lambda_\nu \end{vmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} c_{11}, & c_{21} \\ c_{12}, & c_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \gamma_\mu, & \delta_\mu \\ \varkappa_\nu, & \lambda_\nu \end{vmatrix} = C(\gamma_\mu\lambda_\nu - \delta_\mu\varkappa_\nu),$$

takže pro resultant $R(F, G)$ transformovaných forem máme

$$R(F, G) = \prod_{\mu,\nu}(\Gamma_\mu\Lambda_\nu - \Delta_\mu K_\nu) =$$
$$= C^{mn}\prod_{\mu,\nu}(\gamma_\mu\lambda_\nu - \delta_\mu\varkappa_\nu) = C^{mn}R(f, g). \qquad (141)$$

Tato rovnice ukazuje, že jest resultant dvou binárních forem stupňů resp. m, n invariantem váhy mn vůči transformaci (139).

10. *Symbolika Aronholdova.*

Ve vědách matematických a fysikálních se už odedávna užívá symbolických početních method. Jejich společným podstatným rysem jest vhodná náhrada veličin a operací daných jistými veličinami a operacemi symbolickými tak, aby matematická práce s těmito „obrazy" byla snazší a průhlednější, než tomu jest v oboru veličin původních. Jako příklad takovýchto method uvedeme známé použití Laplaceovy integrální transformace, kde se místo původních funkcí berou do počtu jejich Laplaceovy obrazy, dalším případem tohoto druhu jest řešení některých problémů počtu pravděpodobnosti pomocí vytvořujících funkcí (známé Laplaceovy „fonctions génératrices“), analogické prvky vykazuje též komplexní methoda elektrotechniků, Schwarzova-Christoffelova methoda sdružených funkcí a řada dalších početních způsobů.

Také algebraické úvahy spěly mnohdy stejnou cestou. Zde se zmíníme alespoň o jednom případě tohoto druhu, který má svrchovanou důležitost v theorii invariantů, forem atd. Základní myšlenka je ta, že počítáme podle potřeby místo s binární formou

$$\sum_{\nu=0}^{n} \alpha_\nu x_1^{n-\nu} x_2^{\nu} \tag{142}$$

n-tého stupně raději s jejím obrazem, k němuž podle úvah Aronholdových (Crelle's Journ. sv. 39 a 55) dospějeme takto:

Binární formu (142) n-tého stupně v proměnných x_1, x_2 píšeme ve tvaru

$$f_n(x_1, x_2) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \bar{a}_\nu x_1^{n-\nu} x_2^{\nu} \tag{143}$$

a jejím „obrazem“ $F_n(x_1, x_2)$ nazveme kterýkoli z výrazů

$$\begin{aligned} &(a_1x_1 + a_2x_2)^n = a_x^n, \ (b_1x_1 + b_2x_2)^n = b_x^n, \\ &(c_1x_1 + c_2x_2)^n = c_x^n, \ (d_1x_1 + d_2x_2)^n = d_x^n, \dots \end{aligned} \tag{144}$$

Veličiny $a_1, a_2, b_1, b_2, \dots$ jsou pouhé symboly, budeme jim říkati symbolické koeficienty formy (143) na rozdíl od skutečných jejích koeficientů $\bar{a}_\nu$. Skutečný součinitel $\bar{a}_\nu$ je pak symbolicky vyjádřen kterýmkoli z výrazů $a_1^{n-\nu}a_2^{\nu}$, $b_1^{n-\nu}b_2^{\nu}$, $c_1^{n-\nu}c_2^{\nu}$, $d_1^{n-\nu}d_2^{\nu}, \dots$; tuto skutečnost budeme zapisovati vzorci

$$\bar{a}_\nu \doteq a_1^{n-\nu} a_2^{\nu}, \quad \bar{a}_\nu \doteq b_1^{n-\nu} b_2^{\nu}, \quad \bar{a}_\nu \doteq c_1^{n-\nu} c_2^{\nu}, \tag{145}$$
$$\bar{a}_\nu \doteq d_1^{n-\nu} d_2^{\nu}, \ldots$$

Okolnost, že má původní binární forma $f_n(x_1, x_2)$ — často pro ni použijeme pojmenování ,,originál" — za svůj obraz výraz $F_n(x_1, x_2)$, tuto skutečnost budeme se zřetelem ku zvyklostem technické praxe vyjadřovati kterýmkoli ze vztahů (záměny s označením matic se není třeba obávati)

$$F_n(x_1, x_2) = \mathsf{A}\{f_n(x_1, x_2)\},$$
$$f_n(x_1, x_2) = \mathsf{A}^{-1}\{F_n(x_1, x_2)\}. \tag{146}$$

Tato symbolika není sice zavedena v odborné literatuře matematické, technikům však prokáže bez nejmenších pochyb cenné služby a usnadní pochopení toho, co jest na věci podstatné a to svou alespoň formální analogií se zobrazovacími pochody technické praxe: Právě tak, jako vyjadřuje inženýr známý symbolický vztah

$$L\{f(t)\} = F(p) = p\int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt$$

slovy: ,,Funkce $F(p)$ je Laplaceovým obrazem k originálu $f(t)$", může bez obav vyjádřiti relaci

$$\mathsf{A}\{f_n(x_1, x_2)\} = F_n(x_1, x_2)$$

rčením: ,,Výraz $F_n(x_1, x_2)$ jest Aronholdovým obrazem k binární formě $f_n(x_1, x_2)$."

Účelnost té skutečnosti, že je k dané binární formě (143) ve smyslu vztahů (144) přiřaděno více ,,obrazů", se objeví v dalších úvahách.

Příklad 27. Danou binární formu (143) s obrazem $a_x^n = (a_1x_1 + a_2x_2)^n$ podrobme transformaci

$$x_1 = \gamma_{11}y_1 + \gamma_{12}y_2, \quad x_2 = \gamma_{21}y_1 + \gamma_{22}y_2. \tag{147}$$

Stanoviti symbolické koeficienty A_1, A_2 formy $\varphi_n(y_1, y_2)$ tímto způsobem z $f_n(x_1, x_2)$ vzniklé.

Nová forma bude míti tvar

$$\varphi_n(y_1, y_2) = f_n(\gamma_{11}y_1 + \gamma_{12}y_2, \gamma_{21}y_1 + \gamma_{22}y_2) =$$
$$= \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \bar{a}_\nu(\gamma_{11}y_1 + \gamma_{12}y_2)^{n-\nu} (\gamma_{21}y_1 + \gamma_{22}y_2)^\nu$$

a její obraz $\Phi_n(y_1, y_2)$ dostaneme tím, že skutečné koeficienty $\bar{a}_\nu$ nahradíme podle rovnic (145) symbolickými a. Vychází postupně

$$\Phi_n(y_1, y_2) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} a_1^{n-\nu} a_2^\nu(\gamma_{11}y_1 + \gamma_{12}y_2)^{n-\nu} \,.$$
$$. (\gamma_{21}y_1 + \gamma_{22}y_2)^\nu = [(\gamma_{11}a_1 + \gamma_{21}a_2)\, y_1 +$$
$$+ (\gamma_{12}a_1 + \gamma_{22}a_2)\, y_2]^n = (A_1y_1 + A_2y_2)^n = A_y^n,$$

takže máme vzorec

$$\Phi_n(y_1, y_2) = (A_1y_1 + A_2y_2)^n = A_y^n; \tag{148}$$

hledané symbolické koeficienty A_1, A_2 jsou pak dány vztahy

$$A_1 = \gamma_{11}a_1 + \gamma_{21}a_2, \ A_2 = \gamma_{12}a_1 + \gamma_{22}a_2. \tag{149}$$

Příklad 28. Pomocí symbolických koeficientů formy

$$f_2(x_1, x_2) = \bar{a}_0x_1^2 + 2\bar{a}_1x_1x_2 + \bar{a}_2x_2^2 \tag{150}$$

vyjádřiti výrazy

$$\begin{aligned} D &= \bar{a}_0\bar{a}_2 - \bar{a}_1^2, \qquad\qquad (151)\\ E &= (-\bar{a}_0 + \bar{a}_1 + \bar{a}_2)(\bar{a}_0 - \bar{a}_1 + \bar{a}_2)(\bar{a}_0 + \bar{a}_1 - \bar{a}_2). \end{aligned}$$

Napřed upozorníme na tuto důležitou skutečnost: Symbol pro výraz na příklad $\bar{a}_0^2\bar{a}_2$ musí ovšem býti toho druhu, abychom z něho mohli jednoznačně přejíti nazpět k výrazu původnímu. Mechanickým zobrazením podle (145) bychom dostali

$$\bar{a}_0^2\bar{a}_2 \doteqdot (a_1^2)^2\, a_2^2 = a_1^4a_2^2$$

a zmíněný zpáteční přechod by nebyl jednoznačně proveditelný. Píšeme-li totiž

$$a_1^4a_2^2 = a_1a_2 \,.\, a_1a_2 \,.\, a_1^2 = a_1^4 \,.\, a_2^2,$$

dostáváme dva různé „originály“:

$$\bar{a}_0\bar{a}_1^2, \ \bar{a}_0^2\bar{a}_2.$$

Této obtíži se vyhneme tak, že místo jediné dvojice symbolických koeficientů a_1, a_2 použijeme při zobrazování tolika různých dvojic, kolik má zobrazovaný výraz skutečných (to jest nikoli symbolických) faktorů $\bar{a}$. V našem případě $\bar{a}_0^2\bar{a}_2 = \bar{a}_0 . \bar{a}_0 . \bar{a}_2$ jsou takovéto faktory tři a proto použijeme tří dvojic symbolických součinitelů: a_1, a_2; b_1, b_2; c_1, c_2. Dostaneme tak

$$\bar{a}_0^2\bar{a}_2 \doteqdot a_1^2b_1^2c_2^2$$

a výše zmíněný zpětný přechod je nyní zcela jednoznačný.

Zobrazení výrazů (151) nečiní po této přípravě žádných obtíží. Pro D dostáváme buď

$$D = \bar{a}_0\bar{a}_2 - \bar{a}_1^2 \doteqdot a_1^2b_2^2 - a_1a_2b_1b_2 = (a_1b_2 - a_2b_1)\, a_1b_2,$$

nebo ekvivalentní výraz

$$D \doteqdot b_1^2a_2^2 - b_1b_2a_1a_2 = (a_2b_1 - a_1b_2)\, a_2b_1.$$

Sečtením obou těchto formulí dostáváme jednoduchý symbolický vztah

$$D = \bar{a}_0\bar{a}_2 - \bar{a}_1^2 \doteqdot \tfrac{1}{2}(a_1b_2 - a_2b_1)^2. \qquad (152)$$

Zobrazení veličiny E provedeme pomocí tří dvojic symbolických koeficientů a najdeme

$$E \doteqdot (-a_1^2 + a_1a_2 + a_2^2)(b_1^2 - b_1b_2 + b_2^2)(c_1^2 + c_1c_2 - c_2^2).$$

Způsobem obdobným k tomu, jenž vedl k odvození vzorce (152), bychom dostali vedle uvedeného symbolického vztahu pro E ještě pět dalších s ním rovnocenných.

K zobrazení formy (143) použijme nyní dvou řad symbolických součinitelů, takže jest

$$\mathbf{A}\{f_n(x_1, x_2)\} = a_x^n = b_x^n$$

a transformujme ji lineární substitucí (147). Obraz $\Phi_n(y_1, y_2)$ transformované formy $\varphi_n(y_1, y_2)$ pak bude podle výsledku př. 27

$$\Phi_n(y_1, y_2) = A_y{}^n = B_y{}^n,$$

kde jest

$$A_1 = \gamma_{11}a_1 + \gamma_{21}a_2,\ A_2 = \gamma_{12}a_1 + \gamma_{22}a_2;$$
$$B_1 = \gamma_{11}b_1 + \gamma_{21}b_2,\ B_2 = \gamma_{12}b_1 + \gamma_{22}b_2;$$

platí tedy (viz pravidla o násobení determinantů v prvém svazku) vztah

$$\begin{vmatrix} A_1, & A_2 \\ B_1, & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \gamma_{11}, & \gamma_{12} \\ \gamma_{12}, & \gamma_{22} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} a_1, & a_2 \\ b_1, & b_2 \end{vmatrix} = \Gamma . \begin{vmatrix} a_1, & a_2 \\ b_1, & b_2 \end{vmatrix} .$$

Zavedeme-li často používanou zkratku

$$\begin{vmatrix} m_1, & m_2 \\ n_1, & n_2 \end{vmatrix} = (mn), \tag{153}$$

nabývá předchozí rovnice tvaru

$$(AB) = \Gamma . (ab); \tag{154}$$

při tom ovšem značí Γ modul transformace (147).

Symbolické koeficienty a, b binární formy (143) souvisí tedy se symbolickými součiniteli A, B formy vzniklé z ní transformací (147) vztahem (154).

Pomocí této skutečnosti najdeme snadno důležitý invariant dané formy (143). Jest jím výraz, který má za svůj symbol mocninu

$$(ab)^n = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} a_1{}^{n-\nu} a_2{}^\nu b_1{}^\nu b_2{}^{n-\nu},$$

t. j. výraz

$$I_n = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} \bar{a}_\nu \bar{a}_{n-\nu}; \tag{155}$$

podle vztahu (154) je to invariant váhy n vůči transformaci (147).

Pro lichá n jest $I_n = 0$, jak ukazuje tento jednoduchý výpočet:

$$I_{2m+1} = \sum_{\nu=0}^{m}(-1)^\nu \binom{2m+1}{\nu} \bar{a}_\nu \bar{a}_{2m+1-\nu} +$$

$$+ \sum_{\nu=m+1}^{2m+1} (-1)^\nu \binom{2m+1}{\nu} \bar{a}_\nu \bar{a}_{2m+1-\nu} =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{m}(-1)^\nu \binom{2m+1}{\nu} \bar{a}_\nu \bar{a}_{2m+1-\nu} -$$

$$- \sum_{\varrho=0}^{m}(-1)^\varrho \binom{2m+1}{2m+1-\varrho} \bar{a}_{2m+1-\varrho} \bar{a}_\varrho = 0;$$

proto představuje výraz I_n skutečnou invariantní funkci součinitelů $\bar{a}$ dané formy (143) jen pro případ, že jest tato sudého stupně. Tak dostáváme pro

$$\begin{aligned} n = 2&: \quad I_2 = 2(\bar{a}_0\bar{a}_2 - \bar{a}_1^2), \\ n = 4&: \quad I_4 = 2(\bar{a}_0\bar{a}_4 - 4\bar{a}_1\bar{a}_3 + 3\bar{a}_2^2), \\ n = 6&: \quad I_6 = 2(\bar{a}_0\bar{a}_6 - 6\bar{a}_1\bar{a}_5 + 15\bar{a}_2\bar{a}_4 - 10\bar{a}_3^2). \end{aligned} \tag{156}$$

Ježto zprostředkuje transformace (147) rovnost mezi symbolickými výrazy

$$A_y = A_1y_1 + A_2y_2, \quad a_x = a_1x_1 + a_2x_2,$$

tedy

$$A_y = a_x,$$

můžeme vzhledem k (154) psáti

$$(AB)^p A_y^q B_y^r = \Gamma^p (ab)^p a_x^q b_x^r. \tag{157}$$

Pro

$$q = r = n - p$$

jest pravá strana vztahu (157) symbolem pro jistou funkci $h(x_1, x_2; \bar{a})$ proměnných x_1, x_2 a skutečných koeficientů $\bar{a}$ původní formy $f_n(x_1, x_2)$, jeho levá strana pak symbolem pro funkci $h(y_1, y_2; \bar{A})$ proměnných y_1, y_2 a koeficientů $\bar{A}$ transformované formy $\varphi_n(y_1, y_2)$. Plyne tudíž ze vztahu (157) rovnice

$$h(y_1, y_2; \bar{A}) = \Gamma^p \,.\, h(x_1, x_2; \bar{a}) \tag{158}$$

a funkci $h(x_1, x_2; \bar{a})$ nazýváme kovariantem formy (143) vůči transformaci (147) a to kovariantem váhy p.

Tak jest ku příkladu výraz

$$(ab)^2 a_x b_x$$

symbolem pro kovariant váhy 1 u formy $f_3(x_1, x_2)$. Skutečný výraz pro tento kovariant dostaneme přechodem k původním součinitelům $\bar{a}$; vychází

$$2[(\bar{a}_0\bar{a}_2 - \bar{a}_1^2)\, x_1^2 + (\bar{a}_0\bar{a}_3 - \bar{a}_1\bar{a}_2)\, x_1x_2 + (\bar{a}_1\bar{a}_3 - \bar{a}_2^2)\, x_2^2]. \tag{159}$$

Analogicky jest

$$(ab)^2\, (ac)\, b_x c_x^2$$

symbolický výraz pro kovariant váhy 3 téže formy $f_3(x_1, x_2)$. Jeho skutečná hodnota jest

$$\begin{aligned} &(3\bar{a}_0\bar{a}_1\bar{a}_2 - \bar{a}_0^2\bar{a}_3 - 2\bar{a}_1^3)\, x_1^3 - \\ &- 3(\bar{a}_0\bar{a}_1\bar{a}_3 - 2\bar{a}_0\bar{a}_2^2 + \bar{a}_1^2\bar{a}_2)\, x_1^2x_2 + \\ &+ 3(\bar{a}_0\bar{a}_2\bar{a}_3 + \bar{a}_1\bar{a}_2^2 - 2\bar{a}_1^2\bar{a}_3)\, x_1x_2^2 + \\ &+ (\bar{a}_0\bar{a}_3^2 - 3\bar{a}_1\bar{a}_2\bar{a}_3 + 2\bar{a}_2^3)\, x_2^3. \end{aligned} \tag{160}$$

Už z těchto několika ukázek je patrna plodnost a účelnost symbolického počítání Aronholdova. Dalším rozvedením a důslednou aplikací této symboliky lze dokonale vybudovati celou theorii invariantů (podrobnosti nalezne čtenář v knize P. Gordan, Invariantentheorie).

11. ALGEBRAICKÉ ROVNICE.

Také v theorii algebraických rovnic lze při mnoha důležitých otázkách s výhodou použíti theorie determinantů. Některé, sem patřící výpočty jsme provedli již dříve, takže budeme často moci výsledky tam získané prostě přenésti do „mluvy rovnic".

Základní úlohou nauky o rovnicích jest úkol nalézti nulové body polynomu s komplexními koeficienty. Lze nahlédnouti snadno, že je možno bez újmy obecnosti vyjádřiti tuto základní úlohu matematicky požadavkem: Určiti všechny hodnoty (jsou-li jaké) x tak, aby bylo

$$f(x) \equiv x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0; \quad (161)$$

čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jsou komplexní.

Již dříve jsme nalezli vyjádření polynomu $f(x)$ takto:

$$f(x) = (x - x_1)\, q(x) + f(x_1); \quad (162)$$

$q(x)$ je polynom stupně $(n - 1)$-ho, jehož koeficienty počítáme nejsnáze Hornerovým schematem. Je-li x_1 kořenem rovnice (161), takže platí $f(x_1) = 0$, máme

$$f(x) = (x - x_1)\, q(x); \quad (163)$$

je tedy v tomto případě $f(x)$ dělitelno výrazem (říká se také kořenovým činitelem) $x - x_1$. Jestliže jest naopak $f(x)$ dělitelno dvojčlenem $x - x_1$, lze psáti $f(x)$ ve tvaru (163), z něhož je ihned patrno $f(x_1) = 0$. Můžeme tedy vysloviti větu:

Nutnou a postačující podmínkou, aby měla rovnice (161) *kořen* x_1, *je dělitelnost polynomu* $f(x)$ *výrazem* $x - x_1$, *t. j. možnost vyjádřiti* $f(x)$ *ve tvaru* (163).

Pokud jde o základní otázku, má-li algebraická rovnice vůbec nějaké kořeny, odpovídá na ni fundamentální věta algebry. Vyslovíme ji (ovšem bez důkazu; ten je předmětem algebry, nebo, v jednoduché formě, theorie funkcí komplexní proměnné) třeba takto:

Každá algebraická rovnice n-tého stupně s komplexními koeficienty má právě n komplexních kořenů; tyto mohou býti zčásti (nebo také všechny) *navzájem stejné.*

Označíme-li kořeny rovnice (161) znaky $x_1, x_2, \ldots, x_n$, dostaneme postupným užitím vztahu (163) vyjádření rovnicního polynomu $f(x)$ pomocí t. zv. kořenových činitelů:

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n). \tag{164}$$

Právě napsaný vztah vede k dalším zajímavým důsledkům. Provedeme-li násobení a porovnáme pak koeficienty při stejných mocninách x na obou stranách rovnosti (164), dostáváme

$$(-1)^\nu a_\nu = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_\nu} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_\nu}, \ \nu = 1, 2, \ldots, n; \tag{165}$$

sčítání se provádí přes všech $\binom{n}{\nu}$ kombinací $i_1, i_2, \ldots, i_\nu$, ν-té třídy z prvků $1, 2, \ldots, n$. Výrazům na pravé straně rovnic (165) se říká základní *symetrické funkce kořenů* x_1, $x_2, \ldots, x_n$ původní rovnice. Každý z nich se v matematice charakterisuje svým prvým členem (to se ostatně činí vůbec při každé symetrické funkci kořenů) a vztahy (165) se píší též ve tvaru

$$(-1)^\nu a_\nu = \Sigma x_1 x_2 \ldots x_\nu, \ \nu = 1, 2, \ldots, n. \tag{165'}$$

Ze symetrických funkcí kořenů se velmi často setkáváme s t. zv. *potenčními součty* $s_0, s_1, s_2, \ldots$; tyto jsou definovány vzorci

$$s_\nu = x_1^\nu + x_2^\nu + \ldots + x_n^\nu, \ \nu = 0, 1, 2, \ldots \tag{166}$$

a existují mezi nimi a koeficienty dané rovnice jisté vztahy, říká se jim relace Newtonovy, jež dovolují vypočísti jedny pomocí druhých. Odvodíme je z rovností

$$\Sigma x_1{}^{k-\varkappa}\Sigma x_1x_2\dots x_\varkappa = (x_1{}^{k-\varkappa} + x_2{}^{k-\varkappa} + \dots)\,.$$
$$.\,(x_1x_2\dots x_{\varkappa-1}x_\varkappa + x_1x_2\dots x_{\varkappa-1}x_{\varkappa+1} + \dots) =$$
$$= (x_1{}^{k-\varkappa+1}x_2\dots x_\varkappa + \dots) + (x_1{}^{k-\varkappa}x_2\dots x_{\varkappa+1} + \dots) =$$
$$= \Sigma x_1{}^{k-\varkappa+1}x_2\dots x_\varkappa + \Sigma x_1{}^{k-\varkappa}x_2\dots x_{\varkappa+1},$$

čili

$$a_\varkappa s_{k-\varkappa} = (-1)^\varkappa \Sigma x_1{}^{k-\varkappa+1}x_2\dots x_\varkappa +$$
$$+ (-1)^\varkappa \Sigma x_1{}^{k-\varkappa}x_2\dots x_{\varkappa+1},\ \varkappa = 1, 2, \dots, k-2, \qquad (167)$$

sečtením

$$\Sigma a_\varkappa s_{k-\varkappa} = \sum_{\varkappa=1}^{k-2}(-1)^\varkappa \Sigma x_1{}^{k-\varkappa+1}x_2\dots x_\varkappa -$$
$$-\sum_{\varrho=2}^{k-1}(-1)^\varrho \Sigma x_1{}^{k-\varrho+1}x_2\dots x_\varrho = -\Sigma x_1{}^k +$$
$$+ (-1)^k \Sigma x_1{}^2x_2\dots x_{k-1}$$

a dodatečným připočtením vztahu dalšího (dokažte jej)

$$a_{k-1}s_1 = (-1)^{k-1}\Sigma x_1{}^2x_2\dots x_{k-1} + (-1)^{k-1}\,.$$
$$.\,k\Sigma x_1x_2\dots x_k. \qquad (167')$$

Tak dostaneme Newtonovy vzorce ve tvaru

$$s_1a_{k-1} + s_2a_{k-2} + \dots + s_{k-1}a_1 + s_k = -ka_k;$$
$$k = 1, 2, 3, \dots, a_0 = 1. \qquad (168)$$

Byly sice odvozeny za předpokladu, že jest $k \leqq n$, platí však také pro všechna $k > n$, položíme-li jen $a_k = 0$ pro $k = n+1,\ n+2, \dots$

Z jednotlivých rovnic (168) lze postupně počítati potenční součty $s_1, s_2, \dots$ a naopak zase vyjádřiti koeficienty rovničního polynomu $f(x)$ pomocí potenčních součtů kořenů příslušné rovnice. Tyto výpočty je též možno provésti použitím soustavy lineárních rovnic. Dostaneme tak přehledné formule

$$s_\nu = (-1)^\nu \begin{vmatrix} a_1, & 1, & 0, & \dots, 0, & 0 \\ 2a_2, & a_1, & 1, & \dots, 0, & 0 \\ 3a_3, & a_2, & a_1, & \dots, 0, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\nu - 1)\, a_{\nu-1}, & a_{\nu-2}, & a_{\nu-3}, & \dots, a_1, & 1 \\ \nu a_\nu, & a_{\nu-1}, & a_{\nu-2}, & \dots, a_2, & a_1 \end{vmatrix}, \tag{169}$$

$$\nu = 2, 3, \dots;\ s_0 = n,\ s_1 = -a_1,$$

$$a_\nu = \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \begin{vmatrix} s_1, & 1, & 0, & 0, & \dots, 0, & 0, & 0 \\ s_2, & s_1, & 2, & 0, & \dots, 0, & 0, & 0 \\ s_3, & s_2, & s_1, & 3, & \dots, 0, & 0, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{\nu-1}, & s_{\nu-2}, & s_{\nu-3}, & s_{\nu-4}, & \dots, s_2, & s_1, & \nu - 1 \\ s_\nu, & s_{\nu-1}, & s_{\nu-2}, & s_{\nu-3}, & \dots, s_3, & s_2, & s_1 \end{vmatrix}, \tag{170}$$

$$\nu = 2, 3, 4, \dots;\ a_1 = -s_1.$$

Další důležitá otázka, jež se při studiu algebraických rovnic naskýtá, je ta, zdali má daná rovnice vícenásobné kořeny. Abychom ji zodpověděli, stačí ve smyslu úvah odst. 9. vypočítati pro předloženou rovnici její diskriminant; je-li tento roven nule, existují kořeny vícenásobné, v opačném případě nikoli (důkaz viz v odst. 9.). Místo obecných vzorců uvedených v odst. 9. vystačíme v theorii rovnic s jednoduššími a budeme pod pojmem diskriminantu rovnice (161) rozuměti jeden z těchto tří navzájem stejných výrazů:

$$\Delta(f) = (-1)^{\frac{1}{2}[n(n-1)]} \,.\, R(f, f') = \prod_{\nu<\varrho}^{1,n} (x_\nu - x_\varrho)^2 =$$

$$= \begin{vmatrix} s_0, & s_1, & s_2, & \dots, s_{n-1} \\ s_1, & s_2, & s_3, & \dots, s_n \\ s_2, & s_3, & s_4, & \dots, s_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n-1}, & s_n, & s_{n+1}, & \dots, s_{2n-2} \end{vmatrix}; \tag{171}$$

při tom značí $R(f, f')$ resultant polynomu $f(x)$ a jeho prvé derivace $f'(x)$.

Pouhým pohledem na druhý tvar diskriminantu ve vzorcích (171) nahlédneme nyní správnost této věty o vícenásobných kořenech rovnice:

Nutná a postačující podmínka, aby algebraická rovnice měla alespoň dva stejné kořeny, jest anulování jejího diskriminantu.

Hodnota diskriminantu jest však spolehlivým vodítkem také při podrobnějším zkoumání povahy kořenů předložené algebraické rovnice v tom případě, že má tato vesměs reálné koeficienty. O rovnicích tohoto druhu jest známo, že jejich nikoli reálné kořeny se vždy vyskytují v párech navzájem komplexně sdružených; má-li tedy rovnice s reálnými koeficienty komplexní kořen $x_1 = \xi_1 + i\eta_1$, má nutně za kořen též číslo konjugované $\bar{x}_1 = \xi_1 - i\eta_1$ a oba tyto kořeny mají stejnou násobnost (důkaz nalezne čtenář ve většině učebnic algebry; je ostatně tak jednoduchý, že si jej každý může bez nesnází provésti sám).

Nechť má rovnice s reálnými koeficienty kořeny navzájem různé. Její diskriminant je pak ovšem nenulový. Ukážeme si, že jest to reálné číslo, které dává svým znaménkem cenné informace o bližší povaze kořenů. Označme tyto kořeny (seřadivše je tak, že napřed stojí páry komplexně sdružených a teprve za nimi následují reálné) symboly

$$\begin{gathered} x_1, \bar{x}_1, x_3, \bar{x}_3, x_5, \bar{x}_5, \ldots, x_{2m+1}, \bar{x}_{2m+1}; \\ x_{2m+3}, x_{2m+4}, \ldots, x_{n-1}, x_n \end{gathered} \tag{172}$$

a vypočítejme pomocí nich diskriminant $\Delta(f)$ dané rovnice, používajíce k tomu druhého tvaru daného vzorcem (171). Snadno najdeme, že má tento diskriminant tvar

$$\Delta(f) = (-1)^{m+1}P^2, \tag{173}$$

kde jest P číslo reálné.

Odtud vyvodíme lehko tento důsledek o povaze kořenů dané algebraické rovnice:

Nutná a postačující podmínka, aby algebraická rovnice s re-

álnými koeficienty měla sudý počet párů kořenů komplexně sdružených, je ta, aby byl její diskriminant kladný.

Správnost tohoto tvrzení je zcela evidentní, když uvážíme, že má ve smyslu označení (172) rovnice právě $m + 1$ párů takovýchto komplexně sdružených kořenů, tedy právě tolik párů, kolik činí mocnitel záporné jedničky ve vzorci (173) pro diskriminant $\Delta(f)$ té rovnice.

V technických aplikacích theorie determinantů (v prvé řadě při studiu spřažených kmitových soustav) mají značnou důležitost hlavní minory $\Delta_\nu(f)$ diskriminantu $\Delta(f)$ rovnice (161), definované vztahy

$$\Delta_\nu(f) = \begin{vmatrix} s_0, & s_1, & s_2, & \ldots, & s_{\nu-1} \\ s_1, & s_2, & s_3, & \ldots, & s_\nu \\ s_2, & s_3, & s_4, & \ldots, & s_{\nu+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{\nu-1}, & s_\nu, & s_{\nu+1}, & \ldots, & s_{2\nu-2} \end{vmatrix}; \; \nu = 1, 2, \ldots, n - 1. \tag{174}$$

Potřeby fysikálně-technické praxe žádají často vyjádřiti tyto veličiny $\Delta_\nu(f)$ jednak pomocí kořenů $x_1, x_2, \ldots, x_n$, jednak přímo pomocí koeficientů $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dané rovnice (161).

První problém rozřešíme snadno tím, že vezmeme v úvahu čtverec matice

$$\begin{Vmatrix} 1, & 1, & 1, & \ldots, 1, & 1 \\ x_1, & x_2, & x_3, & \ldots, x_{n-1}, & x_n \\ x_1^2, & x_2^2, & x_3^2, & \ldots, x_{n-1}^2, & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{\nu-1}, & x_2^{\nu-1}, & x_3^{\nu-1}, & \ldots, x_{n-1}^{\nu-1}, & x_n^{\nu-1} \end{Vmatrix}$$

počítaný jako řádkový součin dvou stejných matic (definici viz v prvém svazku na str. 21).

Podle definice je čtverec právě roven determinantu $\Delta_\nu(f)$, na druhé straně však má týž čtverec podle vzorce (47) a příslušného pravidla z prvé části této knížky hodnotu

$$\Sigma \begin{vmatrix} 1, & 1, & \ldots, 1 \\ x_{\varrho_1}, & x_{\varrho_2}, & \ldots, x_{\varrho_\nu} \\ x_{\varrho_1}^2, & x_{\varrho_2}^2, & \ldots, x_{\varrho_\nu}^2 \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ x_{\varrho_1}^{\nu-1}, & x_{\varrho_2}^{\nu-1}, & \ldots, x_{\varrho_\nu}^{\nu-1} \end{vmatrix}^2,$$

při čemž se sčítá přese všech $\binom{n}{\nu}$ kombinací $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots, \varrho_\nu$ ν-té třídy z čísel $1, 2, \ldots, n$.

Máme tedy hledané vyjádření determinantů (174) pomocí kořenů $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ dané rovnice (161) ve tvaru

$$\Delta_\nu(f) = \Sigma \begin{vmatrix} 1, & 1, & \ldots, 1 \\ x_{\varrho_1}, & x_{\varrho_2}, & \ldots, x_{\varrho_\nu} \\ x_{\varrho_1}^2, & x_{\varrho_2}^2, & \ldots, x_{\varrho_\nu}^2 \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ x_{\varrho_1}^{\nu-1}, & x_{\varrho_2}^{\nu-1}, & \ldots, x_{\varrho_\nu}^{\nu-1} \end{vmatrix}^2 ; \; \nu = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{175}$$

Tento vzorec platí i pro $\nu = n$ a dává pak ovšem hodnotu diskriminantu $\Delta(f)$ dané rovnice (161).

Abychom zavedli do výrazů $\Delta_\nu(f)$ koeficienty $a_1, a_2, \ldots, a_n$ rovnice (161), nabízí se vzhledem k platnosti Newtonových relací (168) přímo tento postup: K $(\varrho + 1)$-mu sloupci $s_\varrho, s_{\varrho+1}, s_{\varrho+2}, \ldots, s_{\varrho+\nu-1}$ determinantu $\Delta_\nu(f)$ přičtěme lineární kombinaci všech sloupců předchozích prvým počínajíce a to kombinaci se součiniteli $a_\varrho, a_{\varrho-1}, a_{\varrho-2}, \ldots, a_1$. Prvek $d_{\sigma,\varrho+1} = s_{\varrho+\sigma-1}$, který stál původně na σ-tém místě onoho $(\varrho + 1)$-vého sloupce ($\sigma = 2, 3, \ldots, \nu$), přejde touto úpravou podle Newtonových formulí v nový

$$\begin{aligned} e_{\sigma,\varrho+1} &= -a_{\varrho+1}s_{\sigma-2} - a_{\varrho+2}s_{\sigma-3} - \ldots - a_{\varrho+\sigma-2}s_1 - \\ &\quad - (\varrho + \sigma - 1)\, a_{\varrho+\sigma-1}; \\ e_{1,\varrho+1} &= s_\varrho + a_\varrho s_0 + a_{\varrho-1}s_1 + a_{\varrho-2}s_2 + \ldots + a_1 s_{\varrho-1} = \\ &= (n - \varrho)\, a_\varrho. \end{aligned} \tag{176}$$

Provedeme-li popsanou operaci postupně pro $\varrho = 1, 2, \ldots, \nu - 1$, objeví se determinant $\Delta_\nu(f)$ ve tvaru

$$\Delta_\nu(f) = \begin{vmatrix} s_0, & (n-1)\,a_1, \ldots, (n-\nu+1)\,a_{\nu-1} \\ s_1, & e_{22}, \quad \ldots, e_{2\nu} \\ s_2, & e_{32}, \quad \ldots, e_{3\nu} \\ \multicolumn{2}{c}{\dotfill} \\ s_{\nu-1}, & e_{\nu 2}, \quad \ldots, e_{\nu\nu} \end{vmatrix}$$

Tento determinant podrobíme obdobné úpravě, jaká byla právě provedena s původním tvarem $\Delta_\nu(f)$: K jeho $(\tau + 1)$-vému řádku $s_\tau, e_{\tau+1,2}, e_{\tau+1,3}, \ldots, e_{\tau+1,\nu}$ přičteme lineární kombinaci všech řádků předcházejících druhým počínajíce a to kombinaci s koeficienty $a_{\tau-1}, a_{\tau-2}, a_{\tau-3}, \ldots, a_1$. Tam, kde stál v determinantu $\Delta_\nu(f)$ prvek $e_{\tau+1,\omega}$ $(\omega = 2, 3, \ldots, \nu)$, bude nyní nový

$$\begin{aligned} h_{\tau+1,\omega} &= e_{\tau+1,\omega} + a_1 e_{\tau\omega} + a_2 e_{\tau-1,\omega} + \ldots + \\ &\quad + a_{\tau-2} e_{3\omega} + a_{\tau-1} e_{2\omega}; \\ h_{\tau+1,1} &= s_\tau + a_1 s_{\tau-1} + a_2 s_{\tau-2} + \ldots + \\ &\quad + a_{\tau-2} s_2 + a_{\tau-1} s_1 = -\tau a_\tau. \end{aligned} \tag{177}$$

Provedeme-li právě zmíněnou úpravu postupně pro $\tau = 2, 3, \ldots, \nu - 1$, dostáváme původní determinant ve tvaru

$$\Delta_\nu(f) = \begin{vmatrix} s_0, & (n-1)\,a_1, \ldots, (n-\nu+1)\,a_{\nu-1} \\ s_1, & e_{22}, \quad \ldots, e_{2\nu} \\ -2a_2, & h_{32}, \quad \ldots, h_{3\nu} \\ \multicolumn{2}{c}{\dotfill} \\ -(\nu-1)\,a_{\nu-1}, & h_{\nu 2}, \quad \ldots, h_{\nu\nu} \end{vmatrix};$$

$$\nu = 3, 4, \ldots, n-1; \tag{178}$$

vztahy (178) budeme považovati za řešení našeho problému, ježto lze veličiny h, e zde figurující snadno vyjádřiti použitím vzorců (176) a (177) pomocí koeficientů $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Tak dostáváme obecně

$$\begin{gathered} h_{\tau+1,\omega} = -\sum_{\varkappa=0}^{\tau-1} (\omega + \tau - 1 - 2\varkappa)\, a_\varkappa a_{\omega+\tau-1-\varkappa}; \\ \tau = 2, 3, \ldots, \nu - 1, \ \ \omega = 2, 3, \ldots, \nu; \\ e_{2\omega} = -\,\omega a_\omega; \ \ \omega = 2, 3, \ldots, \nu; \ \ s_0 = n, \ \ s_1 = -\,a_1. \end{gathered} \tag{179}$$

Výsledek daný vzorci (178) a (179) — ty ostatně platí i pro $\nu = n$ a vedou pak přímo k vyjádření diskriminantu $\Delta(f)$ dané rovnice (161) — zcela postačí pro potřeby běžné praxe a nebudeme se proto zabývati další jeho úpravou. V rámci tohoto svazku raději použijeme právě získané skutečnosti k důkazu této důležité věty (L. Baur, Math. Ann. 50, 241, 1898):

Nutná a postačující podmínka, aby měla rovnice (161) právě ν navzájem různých kořenů, jest vyjádřena vztahy

$$\Delta_{\nu+1}(f) = \Delta_{\nu+2}(f) = \ldots = \Delta_{n-1}(f) = \Delta(f) = 0,$$
$$\Delta_\nu(f) \neq 0. \tag{180}$$

Má-li totiž rovnice (161) právě ν různých kořenů, obsahuje každý sčítanec ve výrazu utvořeném podle vzorce (175) pro $\Delta_{\nu+\mu}(f)$, $\mu = 1, 2, \ldots$ alespoň dva stejné sloupce, takže je roven nule a tím i determinant $\Delta_{\nu+\mu}(f)$ samotný. Naproti tomu není roven nule determinant $\Delta_\nu(f)$, ježto jest součtem samých navzájem stejných nenulových sčítanců — každý z nich je čtvercem Vandermondeova determinantu utvořeného z ν různých kořenů rovnice (161), podle předpokladu existujících.

Že jsou podmínky (180) pro existenci právě ν navzájem různých kořenů rovnice (161) postačující, dokáže si čtenář zcela snadno sám — stačí ukázat, že by důsledky existence jiného počtu různých kořenů, než jest ν, byly ve sporu s předpokládanými vztahy (180).

Když jsme se pomocí diskriminantu $\Delta(f)$ dané rovnice přesvědčili o tom, zdali tato má vícenásobné kořeny a když nám, v případě, že vícenásobné kořeny existují, ukázala řada minorů $\Delta_\nu(f)$, kolik má rovnice celkem navzájem různých kořenů, můžeme ještě snadno sestrojiti novou rovnici, která má tytéž kořeny, jako rovnice daná, každý však pouze jednoduchý.

Je-li $f(x) = 0$ rovnice původní, má tato nová rovnice tvar

$$\frac{f(x)}{d(x)} = 0, \tag{181}$$

při čemž jest $d(x)$ největším společným dělitelem původního rovničního polynomu $f(x)$ a jeho prvé derivace $f'(x)$.

Správnost této konstrukce jest důsledkem známé skutečnosti (čtenář si ji ostatně dokáže zcela snadno sám), že jest každý kořen rovnice $f(x) = 0$ také kořenem rovnice $f'(x) = 0$, avšak s násobností o jedničku nižší.

Zajímavé úvahy se pojí k otázce společných kořenů dvou algebraických rovnic

$$f(x) = 0, \quad g(x) = 0 \tag{182}$$

stupňů resp. m, n.

O tom, mají-li takové rovnice vůbec nějaký společný kořen, nás informuje resultant (99) polynomů $f(x)$, $g(x)$. Je-li roven nule, existuje takový společný kořen alespoň jeden. Může jich ovšem býti více a o tom, kolik jich vskutku jest, se poučíme vhodným použitím věty 11., kterou snadno přeneseme na případ rovnic a vyslovíme ji zde, vzhledem k její důležitosti, ještě jedenkráte takto:

Mají-li rovnice (182) alespoň $r + 1$ společných kořenů (počítáme je i co do násobnosti — tedy na příklad kořen trojnásobný jako tři kořeny), jest hodnost matice $\boldsymbol{M}_r$, vzniklé z resultantu $R(f, g)$ způsobem popsaným ve větě 11. (str. 66), menší než $m + n - 2r$ a naopak.

Důkazy všech těchto tvrzení byly už provedeny, nebo aspoň dostatečně naznačeny v odst. 8. a bylo by zbytečné je zde opakovati. Místo toho si raději ukážeme, jak je principielně možno nalézti číselnou hodnotu společného kořene ξ rovnic (182) v případě, že je takový společný kořen jediný a jednoduchý.

Tu platí zřejmě rovnice

$$\begin{aligned} &f(\xi) = 0, \quad \xi f(\xi) = 0, \quad \xi^2 f(\xi) = 0, \ldots, \xi^{n-2} f(\xi) = 0 \\ &g(\xi) = 0, \quad \xi g(\xi) = 0, \quad \xi^2 g(\xi) = 0, \ldots, \xi^{m-2} g(\xi) = 0, \end{aligned} \tag{183}$$

které představují systém $m + n - 2$ homogenních rovnic pro $m + n - 1$ veličin $1, \xi, \xi^2, \ldots, \xi^{m+n-2}$ a podle příkladu 11., vzorce (22) je možno tyto veličiny jednoznačně stanoviti.

V obecném případě ovšem určíme společné kořeny rovnic (182) tím, že stanovíme nulové body největšího společného dělitele obou rovničních polynomů $f(x)$, $g(x)$. Tyto nulové body jsou pak hledanými společnými kořeny.

Nyní si ještě všimneme jisté skupiny algebraických rovnic, které mají zásadní důležitost nejen v celé řadě otázek čistě matematických, ale také v mnoha případech fysikálních a technických. S příslušnými aplikacemi se obeznámíme v dalších svazcích této knížky, zde prozatím upozorníme zcela namátkou alespoň na některé případy, kdy se zmíněných rovnic a jejich vlastností s výhodou používá: V theorii kmitových soustav, při fysikálním použití tensorového počtu, při řešení některých úloh z theorie pružnosti, v nebeské mechanice atd.

Základní úlohou pro nás bude studium vlastností kořenů rovnice $D(x) = 0$, při čemž vznikne rovniční polynom $D(x)$ tím, že ke všem hlavním prvkům Hermiteova determinantu (definici a základní vlastnosti nalezne čtenář v prvém svazku na str. 45) $A = |a_{ik}|$; $i, k = 1, 2, \ldots, n$ přidáme neznámou veličinu x.

Tato rovnice — nazýváme ji rovnicí Hermiteovou — nemá kořenů ryze imaginárních. Ze vztahu $D(\mathrm{i}\xi) = 0$, ξ reálné, by totiž plynulo $D(\mathrm{i}\xi)\,.\,D(-\mathrm{i}\xi) = 0$, to jest — provedeme-li naznačené zde násobení tak, že kombinujeme řádky determinantu prvého se sloupci druhého —

$$\begin{vmatrix} c_{11} + \xi^2, & c_{12}, & \ldots, c_{1n} \\ c_{21}, & c_{22} + \xi^2, & \ldots, c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1}, & c_{n2}, & \ldots, c_{nn} + \xi^2 \end{vmatrix} = 0, \tag{a}$$

při čemž jest

$$c_{ik} = \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} a_{\nu k}; \quad i, k = 1, 2, \ldots, n. \tag{b}$$

Právě napsaný vztah (a) je však možno podle vzorců (85) a (87) v prvém svazku vyjádřiti také rovností

$$f(\xi) \equiv \xi^{2n} + \gamma_1\xi^{2(n-1)} + \gamma_2\xi^{2(n-2)} + \ldots + \gamma_{n-1}\xi^2 + \gamma_n = 0, \tag{c}$$

v níž značí γ_r součet všech r-řadových hlavních minorů determinantu C z relace (a).

Každý takovýto r-řadový hlavní minor $|c_{i_\varrho i_\sigma}|$; $\varrho, \sigma = 1, 2, \ldots, r$ však jest řádkovým součinem matice

$$\left\| \begin{matrix} a_{i_1 1}, & a_{i_1 2}, & \ldots, & a_{i_1 n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i_r 1}, & a_{i_r 2}, & \ldots, & a_{i_r n} \end{matrix} \right\|$$

s maticí, která z ní vznikne vzájemnou výměnou obou indexů u jednotlivých prvků [tuto skutečnost si čtenář s použitím vzorců (b) snadno ověří podle definice řádkového součinu dvou matic ve svazku prvém] a podle vzorce (47) prvého dílu tohoto spisu lze tedy každý takový r-řadový hlavní minor $|c_{i_\varrho i_\sigma}|$ psáti ve tvaru

$$|c_{i_\varrho i_\sigma}| = \Sigma \begin{vmatrix} a_{i_1\nu_1}, & a_{i_1\nu_2}, & \ldots, & a_{i_1\nu_r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i_r\nu_1}, & a_{i_r\nu_2}, & \ldots, & a_{i_r\nu_r} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{\nu_1 i_1}, & a_{\nu_2 i_1}, & \ldots, & a_{\nu_r i_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{\nu_1 i_r}, & a_{\nu_2 i_r}, & \ldots, & a_{\nu_r i_r} \end{vmatrix},$$

při čemž se sčítá přese všech $\binom{n}{r}$ kombinací $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r$ čísel $1, 2, \ldots, n$.

Podle definice Hermiteova determinantu však platí zcela obecně $a_{ki} = \bar{a}_{ik}$ (číslem $\bar{z}$ označujeme, jak jest zvykem, komplexní číslo sdružené s číslem z) a proto jest každý sčítanec ve výrazu $|c_{i_\varrho i_\sigma}|$ číslo nezáporné (jakožto součin dvou čísel, zde determinantů, komplexně spolu sdružených); tuto vlastnost pak má též minor $|c_{i_\varrho i_\sigma}|$ samotný a tudíž také součinitel γ_r ve vztahu (c).

Má tudíž pro každé reálné $\xi \neq 0$ funkce $f(\xi)$, jak jsme ji zavedli v (c), zcela jistě hodnotu kladnou a docházíme tak ke sporu se vztahem (c), jenž byl důsledkem předpokladu existence ryze imaginárního kořene $i\xi$ Hermiteovy rovnice $D(x) = 0$. Tato tedy opravdu nemá ryze imaginárních kořenů.

Pomocí této skutečnosti a na základě toho, že vznikne z původního Hermiteova determinantu A přičtením libovolného reálného čísla k elementům hlavním zřejmě opět determinant typu Hermiteova, nahlédneme snadno, že nemůže míti Hermiteova rovnice $D(x) = 0$ ani žádných kořenů komplexních a proto jest všech jejích n kořenů reálných. Tuto důležitou skutečnost vyslovíme

větou 13. Všech n kořenů Hermiteovy rovnice

$$D(x) \equiv \begin{vmatrix} a_{11} + x, & a_{12}, & \ldots, a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22} + x, & \ldots, a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, a_{nn} + x \end{vmatrix} = 0, \quad (184)$$

$$a_{ik} = \bar{a}_{ki}; \; i, k = 1, 2, \ldots, n$$

jsou čísla reálná.

Prvým skoro bezprostředním důsledkem této věty jest fakt, že má rovnice obdobná ku (184), při níž však jest základní determinant A determinantem polosouměrným s reálnými prvky (definice a hlavní vlastnosti jsou uvedeny v prvním svazku), kořeny vesměs ryze imaginární (také nulu pokládáme v případě potřeby za číslo ryze imaginární).

Zvláštní pozornosti zasluhuje ten případ, kdy jsou každé dva sdružené prvky a_{ik}, a_{ki} determinantu ze vztahu (184) stejné, takže jest základní determinant příslušné rovnice determinantem souměrným s elementy vesměs reálnými. Rovnici se pak říká sekulární (saeculum — století; rovnice má svou roli při studiu stoletých poruch v pohybu oběžnic) a její kořeny jsou ovšem podle věty 13. všechny reálné.

Abychom se mohli věnovati důležité otázce vícenásobných kořenů rovnice sekulární, připomeneme si jisté jednoduché skutečnosti z theorie determinantů.

Maticí h-řadových subdeterminantů daného determinantu $A = |a_{ik}|$; $i, k = 1, 2, \ldots, n$ nazveme každou $\binom{n}{h}$-řadovou čtverečnou matici, v jejíž obecné řádce stojí jako elementy všechny h-řadové subdeterminanty, které lze vytvořiti z týchž h řádků determinantu A a v obecném sloupci všech $\binom{n}{h}$ subdeterminantů, které lze sestaviti z určitých h sloupců daného determinantu A.

Používajíce tohoto pojmu, dokážeme si tuto důležitou

větu 14. Matice h-řadových subdeterminantů n-řadového determinantu A o hodnosti h menší než n má hodnost 1.

Bez újmy obecnosti lze u takového determinantu A totiž pokládati za navzájem nezávislé řádky s pořadovými čísly $1, 2, \ldots, h$ a podle definice závislosti číselných soustav (viz odst. 1.) psáti

$$a_{\varrho\sigma} = \sum_{s=1}^{h} \lambda_{s\varrho} a_{s\sigma}; \quad \varrho, \sigma = 1, 2, \ldots, n, \tag{d}$$

při čemž má ovšem pro $\varrho = 1, 2, \ldots, h$ veličina $\lambda_{s\varrho}$ hodnotu Kroneckerova symbolu $\delta_{s\varrho}$ (definice ve svazku prvém na str. 14).

V důsledku vztahu (b) jest h-řadový subdeterminant $M_h = |a_{i_\varkappa k_\iota}|$; $\varkappa, \iota = 1, 2, \ldots, h$ determinantu A součinem determinantu $\Lambda_h = |\lambda_{\mu i_\nu}|$; $\mu, \nu = 1, 2, \ldots, h$ a subdeterminantu $A_h = |a_{\omega k_\tau}|$; $\omega, \tau = 1, 2, \ldots, h$ téhož determinantu A a to součinem vzatým po sloupcích. Platí tedy

$$M_h = \Lambda_h A_h, \tag{e}$$

takže jest každý h-řadový subdeterminant M_h determinantu A úměrný subdeterminantu A_h stejnolehlému s ním v matici prvých h (navzájem nezávislých) řádků determinantu A. Koeficient úměrnosti jest pro všech $\binom{n}{h}$ subdeterminantů vzatých z týchž řádků (u nás to jsou řádky s pořadovými čísly $i_1, i_2, \ldots, i_h$) determinantu A týž a roven A_h; mění se pouze v tom případě, že tvoříme subdeterminanty M_h' z prvků jiných h řádků daného determinantu A.

Odtud jest platnost věty 14. vzhledem k známým větám o hodnosti matice (speciálně viz větu 11., svazek prvý, str. 24) ihned patrna.

Je-li ve zvláštním případě daný determinant A souměrný s reálnými prvky (tak jako právě u rovnice sekulární), vede věta 14. k tomuto důležitému a často používanému důsledku:

V souměrném determinantu $A = |a_{ik}|$; $i, k = 1, 2, \ldots, n$ s reálnými prvky a s hodností h existují nenulové hlavní minory h-řadové a jsou všechny téhož znaménka.

Každý dvouřadový determinant matice h-řadových subdeterminantů našeho determinantu A je totiž podle věty 14. roven nule. Totéž tedy platí i o těch dvouřadových determinantech oné matice, v jichž hlavní úhlopříčce stojí elementy rovné nějakým dvěma hlavním minorům h-řadovým M_h, N_h daného determinantu A. Ježto je tento podle předpokladu symetrický, jsou pak zbývající dva prvky každého takového dvouřadového determinantu sobě rovny — jejich společnou hodnotu (tato je ovšem reálná) označme P_h. Platí tedy

$$M_h N_h = P_h^2 \tag{f}$$

a kdyby byly hlavní h-řadové minory determinantu A všechny rovny nule, měl by tento determinant nulové vůbec všechny h-řadové subdeterminanty a jeho hodnost by byla menší než h, což odporuje předpokladu. Existují tedy vskutku v determinantu A nenulové hlavní minory h-řadové a tyto mají pak ovšem vzhledem ku vztahu (f) všechny totéž znaménko.

Nyní už snadno dokážeme tuto důležitou větu o vícenásobných kořenech sekulární rovnice $D(x) = 0$:

Reálné číslo ξ jest $(n - h)$-násobným kořenem sekulární rovnice $D(x) = 0$, když a jen když má determinant $D(\xi)$ hodnost h.

Je-li totiž ξ kořenem oné rovnice a to s násobností $n - h$, platí (jak známo z nauky o algebraických rovnicích) současně vztahy

$$D(\xi) = 0,\ D'(\xi) = 0,\ D''(\xi) = 0, \ldots, D^{(n-h-1)}(\xi) = 0,$$
$$D^{(n-h)}(\xi) \neq 0. \tag{g}$$

Úvahy obdobné těm, které byly provedeny v souvislosti se vztahem (86) v prvém svazku, nás vedou ke konstatování, že jest ν-tá derivace $D^{(\nu)}(x)$ rovničního polynomu $D(x)$ úměrna součtu $S_{n-\nu}(x)$ všech $(n - \nu)$-řadových hlavních minorů determinantu $D(x)$ a proto jest možno psáti vztahy (g) také ve tvaru

$$D(\xi) = 0,\ S_{n-1}(\xi) = 0,\ S_{n-2}(\xi) = 0, \ldots, S_{h+1}(\xi) = 0,$$
$$S_h(\xi) \neq 0. \tag{k}$$

Tyto relace jsaně ukazují, že nemůže býti hodnost determinantu $D(\xi)$ vyšší než h, ježto by pak podle věty o hlavních minorech souměrného determinantu platilo $S_r(\xi) \neq 0$ pro $r > h$, což odporuje vztahům (k). Že nemůže býti ona hodnost nižší než h, je patrno ihned z poslední relace (k); podmínka uvedená v naší větě jest tedy nutná.

Má-li determinant $D(\xi)$ hodnost h, platí zřejmě vztahy (k) a tedy i relace (g). To ovšem značí, že je ξ právě $(n - h)$-násobným kořenem rovnice $D(x) = 0$ a věta jest dokázána v celém rozsahu.

Nakonec si ještě všimneme rovnice

$$F(x) \equiv \begin{vmatrix} a_{11}x + b_{11}, & a_{12}x + b_{12} & \ldots, & a_{1n}x + b_{1n} \\ a_{21}x + b_{21}, & a_{22}x + b_{22}, & \ldots, & a_{2n}x + b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}x + b_{n1}, & a_{n2}x + b_{n2}, & \ldots, & a_{nn}x + b_{nn} \end{vmatrix} = 0, \tag{185}$$

v níž jsou a_{ik}, b_{ik} reálná čísla, o kterých opět platí

$$a_{ik} = a_{ki},\ b_{ik} = b_{ki};\ i, k = 1, 2, \ldots, n. \tag{l}$$

Také tato rovnice (právě studovaná rovnice sekulární jest zřejmě jejím zvláštním případem) se často vyskytuje v aplikacích fysikálních a technických.

Za předpokladu, že jest

$$F(\alpha + \mathrm{i}\beta) = 0, \tag{m}$$

má systém

$$\sum_{\varrho=1}^{n}[(\alpha + \mathrm{i}\beta)\, a_{\nu\varrho} + b_{\nu\varrho}]\, x_\varrho = 0;\ \nu = 1, 2, \ldots, n \tag{n}$$

n homogenních rovnic rozhodně nenulové řešení $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Píšeme-li takové řešení obecně ve tvaru

$$x_\varrho = \xi_\varrho + \mathrm{i}\eta_\varrho;\ \varrho = 1, 2, \ldots, n,$$

dávají soustavy (n) tyto dva důsledky

$$\sum_{\varrho=1}^{n}[(\alpha a_{\nu\varrho} + b_{\nu\varrho})\, \xi_\varrho - \beta a_{\nu\varrho}\eta_\varrho] = 0;\ \nu = 1, 2, \ldots, n$$

$$\sum_{\varrho=1}^{n}[\beta a_{\nu\varrho}\xi_\varrho + (\alpha a_{\nu\varrho} + b_{\nu\varrho})\, \eta_\varrho] = 0;\ \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

Násobíme-li rovnice prvé soustavy po řadě čísly $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ a pak sečteme, rovnice druhé soustavy čísly $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ a opět sečteme, dostaneme odečtením takto získaných výsledků vzhledem k platnosti vztahů (l) postupně

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\varrho=1}^{n}[(\alpha a_{\nu\varrho} + b_{\nu\varrho})\, \xi_\varrho\eta_\nu - \beta a_{\nu\varrho}\eta_\varrho\eta_\nu] - \\ &- \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\varrho=1}^{n}[\beta a_{\nu\varrho}\xi_\varrho\xi_\nu + (\alpha a_{\nu\varrho} + b_{\nu\varrho})\, \eta_\varrho\xi_\nu] = \\ &= -\beta[\sum_{\varrho=1}^{n} a_{\varrho\varrho}(\xi_\varrho^2 + \eta_\varrho^2) + 2\sum_{\varrho\neq\sigma}^{1,n} a_{\varrho\sigma}(\xi_\varrho\xi_\sigma + \eta_\varrho\eta_\sigma)]. \end{aligned}$$

Za dodatečného předpokladu, že jest kvadratická forma $\sum_{i,k}^{1,n} a_{ik}z_iz_k$ definitní (viz odst. 12.), odtud plyne $\beta = 0$ a rovnice (185) tedy má vesměs reálné kořeny.

Příklady.

Obecné vývody tohoto odstavce si ozřejmíme vzhledem k jejich zvláštní důležitosti pro fysikální i technickou praxi na několika příkladech.

Příklad 29. Má rovnice

$$f(x) \equiv x^5 - 6x^3 + 28x^2 - 43x + 20 = 0 \qquad (186)$$

celistvé kořeny?

Tato rovnice jest algebraická, stupně pátého s reálnými koeficienty, takže má podle fundamentální věty algebry pět kořenů, z nichž komplexní se mohou vyskytovat pouze v párech navzájem sdružených. Protože je daná rovnice dále přímo typu (161), platí vzorce (165), tedy speciálně pro $\nu = 5$ vztah

$$-a_5 = -20 = x_1 x_2 x_3 x_4 x_5,$$

při čemž značí $x_1, \ldots, x_5$ kořeny naší rovnice (186).

Je tedy každý kořen dělitelem čísla 20, takže stačí k zodpovědění uvedené otázky vyzkoušeti, vyhovuje-li rovnici některá z hodnot: $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 10, \pm 20$. Příslušné výpočty provádíme ovšem Hornerovým schematem a snadno se přesvědčíme, že z těchto dvanácti čísel splňují rovnici (186) dvě, totiž -4 a 1. To jsou tedy dva kořeny naší rovnice a z nich jest kořen 1 dvojnásobný, ježto platí vedle $f(1) = 0$ také ještě $f'(1) = 0$, avšak $f''(1) \neq 0$.

Zbývající dva kořeny si už čtenář snadno určí sám.

Příklad 30. Vyšetřiti vlastnosti kořenů kubické rovnice

$$f(x) \equiv x^3 + 3\alpha_1 x^2 + 3\alpha_2 x + \alpha_3 = 0, \qquad (187)$$

jsou-li $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ čísla reálná.

Pomocí Newtonových vzorců (168) nebo přímo podle vzorce (169) si určíme napřed potenční součty s_0, s_1, s_2, s_3, s_4. Jednoduchý počet dává

$$\begin{aligned} &s_0 = 3, \ s_1 = -3\alpha_1, \ s_2 = 9\alpha_1^2 - 6\alpha_2, \\ &s_3 = -27\alpha_1^3 + 27\alpha_1\alpha_2 - 3\alpha_3, \\ &s_4 = 81\alpha_1^4 - 108\alpha_1^2\alpha_2 + 12\alpha_1\alpha_3 + 18\alpha_2^2 \end{aligned}$$

a řada (174) hlavních minorů $\Delta_1(f)$, $\Delta_2(f)$ diskriminantu $\Delta(f)$ rovnice (187) zde jest:

$$\Delta_1(f) = 3,\ \Delta_2(f) = 18(\alpha_1^2 - \alpha_2).$$

Diskriminant $\Delta(f)$ samotný má pak podle vzorce (171) hodnotu

$$\Delta(f) = 27(-4\alpha_1^3\alpha_3 + 3\alpha_1^2\alpha_2^2 + 6\alpha_1\alpha_2\alpha_3 - 4\alpha_2^3 - \alpha_3^2). \tag{188}$$

Podle vztahů (180) a věty k nim patřící dostaneme po malém počítání nutné a postačující podmínky, aby měla rovnice trojnásobný kořen:

$$\alpha_1^2 = \alpha_2,\ \alpha_1^3 = \alpha_3. \tag{189}$$

Tento kořen jest pak ovšem reálný a roven číslu $-\alpha_1$.

K tomu, aby měla rovnice (187) právě dva různé kořeny, jest nutno a stačí, aby bylo

$$\begin{gathered} 4\alpha_1^3\alpha_3 - 3\alpha_1^2\alpha_2^2 - 6\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + 4\alpha_2^3 + \alpha_3^2 = 0, \\ \alpha_1^2 - \alpha_2 \neq 0. \end{gathered} \tag{190}$$

V tomto případě má naše rovnice kořeny vesměs reálné a jeden z nich je dvojnásobný.

Podmínka

$$4\alpha_1^3\alpha_3 - 3\alpha_1^2\alpha_2^2 - 6\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + 4\alpha_2^3 + \alpha_3^2 \neq 0 \tag{191}$$

je konečně nutnou a postačitelnou k tomu, aby byly všechny tři kořeny rovnice (187) navzájem různé. Je-li výraz (191) záporný, jsou kořeny vesměs reálné, je-li kladný, existuje pár kořenů komplexně sdružených; to jest důsledkem vzorce (173) a věty k němu patřící.

Příklad 31. Studovati povahu kořenů rovnice bikvadratické

$$f(x) \equiv x^4 + 4\alpha_1 x^3 + 6\alpha_2 x^2 + 4\alpha_3 x + \alpha_4 = 0 \tag{192}$$

s reálnými součiniteli $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$.

Pro hlavní determinanty $\Delta_1(f)$, $\Delta_2(f)$ máme zde podle vzorců (174) a Newtonových vztahů (168) přímo hodnoty

$$\Delta_1(f) = 4,\ \Delta_2(f) = s_0 s_2 - s_1^2 = 48(\alpha_1^2 - \alpha_2), \tag{193}$$

$\Delta_3(f)$ a diskriminant $\Delta(f) = \Delta_4(f)$ určíme podle vztahů (178) a (179).

Předně vypočítáme podle vzorců (179) hodnoty

$$\begin{aligned}
&e_{22} = -12\alpha_2,\ e_{23} = -12\alpha_3,\ e_{24} = -4\alpha_4;\\
&h_{32} = -12(\alpha_3 + 2\alpha_1\alpha_2),\ h_{33} = -4(\alpha_4 + 8\alpha_1\alpha_3),\\
&h_{34} = -12\alpha_1\alpha_4;\\
&h_{42} = -4(\alpha_4 + 8\alpha_1\alpha_3),\ h_{43} = -12(\alpha_1\alpha_4 + 2\alpha_2\alpha_3),\\
&h_{44} = -12\alpha_2\alpha_4
\end{aligned}$$

a pomocí nich nacházíme, používajíce vzorce (178), pro $\Delta_3(f)$ a $\Delta_4(f)$ dlouhé výrazy, jimž však lze dáti aplikací pokročilejší theorie invariantů jednoduchý tvar

$$\Delta_3(f) = 192(3J - 2IH),\ \Delta_4(f) = \Delta(f) = 256(I^3 - 27J^2). \tag{194}$$

Při tom jest význam zkratek H, I, J určen formulemi

$$\begin{aligned}
H &= \alpha_2 - \alpha_1^2,\\
I &= \alpha_4 - 4\alpha_1\alpha_3 + 3\alpha_2^2,\\
J &= \alpha_2\alpha_4 + 2\alpha_1\alpha_2\alpha_3 - \alpha_3^2 - \alpha_1^2\alpha_4 - \alpha_2^3.
\end{aligned} \tag{195}$$

Tyto výsledky nám už dovolují činiti závěry o povaze kořenů rovnice (192) s reálnými koeficienty. Příslušné možnosti sestavíme v tabulku:

I. $\Delta(f) \neq 0$; všechny čtyři kořeny rovnice (192) jsou navzájem různé, jak ukazuje věta navazující na vzorec (171).

IA. $\Delta(f) < 0$; existuje jeden pár kořenů komplexně sdružených a dva navzájem různé kořeny reálné. Je to důsledek vzorce (173).

IB. $\Delta(f) > 0$; kořeny jsou buď všechny reálné, nebo všechny komplexní. Podrobnější theorie ukazuje, že prvý případ nastane, platí-li současně nerovnosti

$$H < 0,\ I - 12H^2 < 0,$$

druhý pro

$$H > 0,\ I - 12H^2 > 0.$$

II. $\Delta(f) = 0$; existují kořeny vícenásobné, jak ukazují vzorce (171).

IIA. Všechny čtyři kořeny jsou stejné, když a jen když platí $H = I = J = 0$, jak ukazují věta a vzorce (180).

IIB. Rovnice (192) má jen dva různé kořeny, když a jen když jest $H \neq 0$, $3J = 2IH$, $I^3 = 27J^2$; opět v důsledku vzorců (180).

IIC. Tři navzájem různé kořeny existují, když a jen když platí současně vztahy

$$3J - 2IH \neq 0,\ I^3 = 27J^2.$$

Ačkoli není tato klasifikace provedena do všech podrobností (body IIB. a IIC. lze ještě dále rozvésti), přece zcela stačí — kombinujeme-li ji eventuelně vhodným způsobem s výsledky předchozího příkladu — ve všech běžných případech fysikální a technické praxe.

Příklad 32. Eliminace neznámé ze dvou rovnic.

Soustava dvou algebraických rovnic o dvou neznámých x, y má obecný tvar

$$f(x, y) = 0,\ g(x, y) = 0; \tag{196}$$

f, g jsou polynomy.

Budiž x_0, y_0 nějaké řešení systému (196) a dosaďme do obou rovnic místo y hodnotu y_0. Dostaneme dvě rovnice $f(x, y_0) = 0$, $g(x, y_0) = 0$ s neznámou veličinou x a o těch víme, že mají společný kořen — je to právě číslo x_0. Má tedy jejich resultant nulovou hodnotu a vztah tuto skutečnost vyjadřující obsahuje vedle koeficientů daných rovnic (196) už jenom veličinu y_0. Vzniká nám tak algebraická určovací rovnice pro y_0 a obdobným způsobem bychom dospěli také k rovnici pro určení x_0.

Podrobnějším rozváděním těchto myšlenek se zde nebudeme zabývati a ukážeme si raději na důležitém příkladě dvou rovnic druhého stupně se dvěma neznámými, jak se zmíněná eliminace skutečně provádí. Při tom použijeme už dříve zavedeného označení

$$(ab) = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

Chceme-li z daných rovnic

$$a_i x^2 + b_i xy + c_i y^2 + d_i x + e_i y + f_i = 0; \; i = 1, 2 \quad (197)$$

vyloučiti na příklad neznámou y, píšeme je ve tvaru

$$c_i y^2 + (b_i x + e_i)\, y + a_i x^2 + d_i x + f_i = 0; \; i = 1, 2$$

a položíme-li rovný nule jejich resultant, pokládajíce jejich levé strany za polynomy v y.

Vznikne nám tak rovnice

$$\begin{vmatrix} c_1, & b_1 x + e_1, & a_1 x^2 + d_1 x + f_1, & 0 \\ 0, & c_1, & b_1 x + e_1, & a_1 x^2 + d_1 x + f_1 \\ c_2, & b_2 x + e_2, & a_2 x^2 + d_2 x + f_2, & 0 \\ 0, & c_2, & b_2 x + e_2, & a_2 x^2 + d_2 x + f_2 \end{vmatrix} = 0,$$

kterou snadno (třeba rozvojem daného determinantu pomocí Laplaceovy věty) uvedeme na tento výsledný tvar

$$\begin{gathered} [(ab)(bc) - (ac)^2]\, x^4 + \{- (ab)(ce) + 2(ac)(cd) - \\ - (bc)[- (ae) + (bd)]\}\, x^3 + \{2(ac)(cf) - (bc)\, [(bf) - (de)] - \\ - (cd)^2 + (ce)\, [- (ae) + (bd)]\}\, x^2 + \qquad (198) \\ + \{- (bc)(ef) - 2(cd)(cf) + (ce)[(bf) - (de)]\}\, x + \\ + (ce)(ef) - (cf)^2 = 0. \end{gathered}$$

Analogicky si čtenář odvodí výsledek eliminace neznámé x z obou daných rovnic (196) (ostatně jej lze přímo napsati už na základě formule (198) — jak?):

$$\begin{gathered} [(ab)(bc) - (ac)^2]\, y^4 + \{(ab)[(be) - (cd)] - \\ - 2(ac)(ae) + (ad)(bc)\}\, y^3 + \{(ab)[(bf) + (de)] - \\ - 2(ac)(af) + (ad)[(be) - (cd)] - (ae)^2\}\, y^2 + \qquad (199) \\ + \{(ab)(df) + (ad)[(bf) + (de)] - 2(ae)(af)\}\, y + \\ + (ad)(df) - (af)^2 = 0. \end{gathered}$$

Příklad 33. Nakonec se budeme zabývati soustavou

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} x_\nu = \lambda \varkappa_i x_i;\; i = 1, 2, \ldots, n \tag{200}$$

n homogenních rovnic o n neznámých $x_1, x_2, \ldots, x_n$ za těchto předpokladů:

$a_{i\nu} = a_{\nu i}$ $(i, \nu = 1, 2, \ldots, n)$ jsou daná reálná čísla;

$\varkappa_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ jsou daná reálná čísla vesměs různá od nuly a téhož znaménka;

λ jest parametr.

Nutnou a postačující podmínkou pro existenci netriviálních řešení našeho (technicky důležitého) systému (200) jest anulování jeho determinantu, takže má soustava (200) nenulová řešení jen pro zcela určité hodnoty parametru λ. Rovnici pro tato λ dostaneme tím, že do determinantu naší soustavy zavedeme místo koeficientů $a_{i\nu}$ nové $\alpha_{i\nu}$ rovnicemi

$$a_{i\nu} = \sqrt{\varkappa_i \varkappa_\nu}\,\alpha_{i\nu};\; i, \nu = 1, 2, \ldots, n \tag{201}$$

a tento pak položíme rovný nule.

Tím se objeví podmínka pro určení λ ve tvaru sekulární rovnice

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} - \lambda, & \alpha_{12}, & \ldots, & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21}, & \alpha_{22} - \lambda, & \ldots, & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1}, & \alpha_{n2}, & \ldots, & \alpha_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{202}$$

která má n reálných kořenů $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$; říká se jim charakteristické konstanty problému (200).

Ke každé charakteristické konstantě λ_ω $(\omega = 1, 2, \ldots, n)$ přísluší pak řešení $x_{\omega 1}, x_{\omega 2}, \ldots, x_{\omega n}$ soustavy (200) a to řešení určené až na libovolnou multiplikativní konstantu. Stanovíme-li ji tak, aby pro příslušné řešení platil vztah

$$\sum_{i=1}^{n} x_{\omega i}^2 \varkappa_i = 1, \tag{203}$$

dospíváme tím ku ω-tému normovanému řešení úlohy (200). Takováto normovaná řešení budeme v dalším mlčky předpokládati.

Mezi dvěma řešeními

$$x_{\omega i}, x_{\sigma i};\ i = 1, 2, \ldots, n$$

patřícími ke dvěma různým charakteristickým konstantám $\lambda_\omega, \lambda_\sigma$ (nejsou-li ovšem všechny tyto konstanty navzájem stejné) platí důležitý vztah

$$\sum_{i=1}^{n} \varkappa_i x_{\omega i} x_{\sigma i} = 0. \tag{204}$$

Takováto dvě řešení jsou tedy navzájem orthogonální.

Důkaz se provede zcela snadno pomocí rovnosti

$$\sum_{i=1}^{n} x_{\sigma i} \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} x_{\omega\nu} = \sum_{i=1}^{n} x_{\omega i} \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} x_{\sigma\nu}$$

a za použití rovnic (200) tímto výpočtem:

$$\sum_{i=1}^{n} \varkappa_i x_{\omega i} x_{\sigma i} = \frac{1}{\lambda_\sigma} \sum_{i=1}^{n} x_{\omega i} \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} x_{\sigma\nu} = \frac{1}{\lambda_\omega} \sum_{i=1}^{n} x_{\sigma i} \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} x_{\omega\nu}.$$

Protože jest podle předpokladu $\lambda_\omega \neq \lambda_\sigma$, dostáváme odtud jako nutný důsledek právě vzorec (204).

Otázkami souvisícími s případy, kdy má charakteristická rovnice (202) problému (200) vícenásobné kořeny, se budeme zabývati až později.

12. FORMY HERMITEOVY.

V tomto odstavci se zmíníme o jistém zobecnění pojmu reálné bilineární formy reálných proměnných (viz odst. 6.). Protože půjde o úvahy, které vykazují mnoho obdobných bodů s vývody předchozích odstavců, budeme se vyjadřovati co nejstručněji.

Číslo konjugované s komplexním číslem a označíme jako obvykle symbolem $\bar{a}$. Součin $a\bar{a}$ takových dvou veličin je vždy reálné a nezáporné číslo (vždycky kladné pro $a \neq 0$).

Jsou-li

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n; \ \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n \tag{205}$$

dvě soustavy komplexních čísel, budeme nazývati výraz

$$(\xi\eta) = \sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu \eta_\nu \tag{206}$$

jejich *vnitřním součinem*. V případě, že není prvá ze soustav identicky nulová a že jest $\eta_\nu = \bar{\xi}_\nu$ pro všechna $\nu = 1, 2, \ldots, n$, jest ovšem $(\xi\eta) = (\xi\bar{\xi}) > 0$. Označení $(\xi\eta)$ bylo sice již použito v odst. 10. při studiu invariantů, ovšem v docela jiném významu; nedorozumění se není v tomto ohledu třeba obávati.

Je-li pro řady (205) součin $(\xi\bar{\eta})$ nulový, říkáme že jsou navzájem orthogonální; jsou-li speciálně všechna ξ_ν reálná a $(\xi\xi) = 1$, mluvíme o řadě ve tvaru normálním a stejným názvem označujeme také řadu komplexních čísel

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n,$$

platí-li pro ni vztah $(\xi\bar{\xi}) = 1$.

Definice: Výraz H utvořený z komplexních konstant a_{ik} $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ a z řady $z_1, z_2, \ldots, z_n$ komplexních proměnných podle předpisu

$$H = \sum_{i,k}^{1.n} a_{ik} z_i \bar{z}_k \tag{207}$$

se jmenuje *Hermiteova forma*, je-li

$$a_{ik} = \bar{a}_{ki} \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n), \tag{208}$$

čili jinými slovy, je-li determinant $A = |a_{ik}|$; $i, k = 1, 2, \ldots, n$ determinantem Hermiteovým.

Poznámka. Snadno lze nahlédnouti, že nabývá takováto forma jen reálných hodnot.

Charakteristickou rovnicí Hermiteovy formy (207) nazýváme kteroukoli z obou rovnic navzájem identických (dokažte pomocí vlastnosti (208) koeficientů a_{ik}):

$$|a_{ik} - \delta_{ik}\varrho| = 0, \ |\bar{a}_{ik} - \delta_{ik}\varrho| = 0; \ i, k = 1, 2, \ldots, n. \tag{209}$$

Z předchozího paragrafu víme, že jsou kořeny $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$ této rovnice — říká se jim charakteristické konstanty formy (207) — vesměs reálné.

Systém n homogenních rovnic

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{ik} - \delta_{ik}\varrho_\nu)\, x_k = 0; \ i = 1, 2, \ldots, n \tag{210}$$

o n neznámých $x_1, x_2, \ldots, x_n$ budeme pro technické potřeby nazývati soustavou přidruženou k charakteristické konstantě ϱ_ν.

Znakem δ_{ik} ovšem označujeme stále Kroneckerův symbol.

Dokážeme si nyní tuto větu:

Systém (210) *má právě tolik navzájem nezávislých řešení, kolikanásobnou jest ϱ_ν charakteristickou konstantou Hermiteovy formy* (207).

Je-li totiž ona konstanta r-násobná, má rovnice

$$f(\sigma) \equiv |a_{ik} - \delta_{ik}(\varrho_\nu + \sigma)| \,.\, |\bar{a}_{ik} - \delta_{ik}(\varrho_\nu - \sigma)| = 0;$$
$$i, k = 1, 2, \ldots, n$$

zřejmě $2r$-násobný kořen $\sigma = 0$, takže obsahuje rovniční polynom $f(\sigma)$ až teprve mocninu σ^{2r} a vyšší. Provedeme-li naznačené násobení determinantů, shledáme v důsledku toho (úvahy jsou obdobné jako v předchozím odstavci při studiu rovnice Hermiteovy a sekulární), že má determinant

$$D(\varrho_\nu) = |a_{ik} - \delta_{ik}\varrho_\nu|;\; i, k = 1, 2, \ldots, n$$

soustavy (210) hodnost $h - r$ a tato má tedy — viz odst. 3. — skutečně právě r řešení navzájem nezávislých.

Všechny různé charakteristické konstanty formy (207) buďtež $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_l$; příslušné násobnosti pak $r_1, r_2, \ldots, r_l$. Soustava patřící k charakteristické konstantě ϱ_λ má podle předchozích úvah celkem r_λ navzájem nezávislých řešení. Označíme je

$$x_{\varkappa 1}{}^{(\varrho\lambda)}, x_{\varkappa 2}{}^{(\varrho\lambda)}, \ldots, x_{\varkappa n}{}^{(\varrho\lambda)};\; \varkappa = 1, 2, \ldots, r_\lambda \tag{211}$$

a ukážeme, že lze všechna bez újmy obecnosti pokládati za orthogonální s jedním z nich — třeba s prvým.

Není-li totiž už přímo

$$(\bar{x}_2{}^{(\varrho\lambda)}x_1{}^{(\varrho\lambda)}) = \sum_{\nu=1}^{n}\bar{x}_{2\nu}{}^{(\varrho\lambda)}x_{1\nu}{}^{(\varrho\lambda)} = 0,$$

nahradíme druhou ze soustav (211) soustavou novou

$$x_{21}{}^{(\varrho\lambda)} - qx_{11}{}^{(\varrho\lambda)}, x_{22}{}^{(\varrho\lambda)} - qx_{12}{}^{(\varrho\lambda)}, \ldots, x_{2n}{}^{(\varrho\lambda)} - qx_{1n}{}^{(\varrho\lambda)}, \tag{212}$$

která jest při libovolném q se všemi ostatními rovněž nezávislá. Volíme-li pro q hodnotu

$$q = \frac{(x_1{}^{(\varrho\lambda)}\bar{x}_2{}^{(\varrho\lambda)})}{(x_1{}^{(\varrho\lambda)}\bar{x}_1{}^{(\varrho\lambda)})}, \tag{213}$$

bude řešení (212) rovnic (210) — kde ovšem místo ϱ_ν stojí ϱ_λ — orthogonální s prvou ze soustav (211).

V soustavě řešení (211) lze tedy pokládati prvá dvě (t. j. pro indexy $\varkappa = 1, \varkappa = 2$) za vzájemně orthogonální.

Nahradíme-li nyní v případě potřeby — t. j. v případě, kdy soustava mající index $\varkappa = 3$ není současně orthogonální s oběma předchozími — třetí soustavu novou

$$x_{3\nu}^{(\varrho_\lambda)} - s x_{2\nu}^{(\varrho_\lambda)} - t x_{1\nu}^{(\varrho_\lambda)}; \ \nu = 1, 2, \ldots, n,$$

lze snadno určiti konstanty s a t tak, aby tato soustava byla už orthogonální jak k soustavě prvé, tak i ke druhé. Stanovení konstant s, t je elementární otázkou a přenechávám ji čtenáři.

Opakujeme-li naznačený postup tak dlouho, až vyčerpáme všech r_λ řešení (211), dospějeme k soustavě celkem r_λ navzájem nezávislých řešení systému rovnic obdobných ku (210), avšak přidružených k charakteristické konstantě ϱ_λ a každá dvě z těchto řešení jsou spolu orthogonální.

Ježto jest každé z oněch řešení určeno až na libovolnou multiplikativní konstantu, lze zmíněný „orthogonalisovaný" systém také ještě normovat, t. j. dosáhnouti násobením každého řešení vhodnou konstantou toho, aby byl vnitřní součin onoho řešení a soustavy s ním sdružené roven jedničce.

Theoreticky je zmíněný proces normování a orthogonalisování dané soustavy sice zcela elementární a průhledný, jeho praktické provádění je však značně pracné a proto se hledají různá zjednodušení. Zde se spokojíme konstatováním, že se dá provésti a budeme v důsledku toho pokládati už soustavu (211) za normovanou a orthogonalisovanou.

Napíšeme-li pod sebe všech r_1 normovaných a orthogonalisovaných řešení soustavy přidružené k charakteristické konstantě ϱ_1, pod ně potom všechna obdobná řešení příslušná ku ϱ_2 atd., dostaneme čtverečnou n-řadovou matici

$$\mathbf{C} = \|c_{ik}\|; \ i, k = 1, 2, \ldots, n \tag{214}$$

a ta jest orthogonální. To znamená, že jsou kterékoli dva její řádky navzájem orthogonální a že tvoří každá řádka sama pro sebe soustavu normální.

Vzájemná orthogonalita dvou řádek patřících k téže charakteristické konstantě je přímým důsledkem konstrukce matice (214), takže stačí dokázati tuto vlastnost ještě pro takové dvě řádky, které patří ke dvěma různým charakteristickým konstantám. Tento důkaz probíhá analogickým způsobem, jako v příkladě 33., jsou zde jen zcela bezpodstatné změny vlivem toho, že pracujeme nyní stále s čísly komplexními.

Nechť tedy patří řádek $c_{\alpha 1}, c_{\alpha 2}, \ldots, c_{\alpha n}$ matice (214) k charakteristické konstantě ϱ_α, řádek $c_{\beta 1}, c_{\beta 2}, \ldots, c_{\beta n}$ pak k jiné konstantě ϱ_β. Matematicky jsou tyto poměry vyjádřeny relacemi

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} c_{\alpha k} = \varrho_\alpha c_{\alpha i}, \sum_{k=1}^{n} \bar{a}_{ik} \bar{c}_{\beta k} = \varrho_\beta \bar{c}_{\beta i}; \ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Z prvé z nich plyne

$$\varrho_\alpha \sum_{i=1}^{n} c_{\alpha i} \bar{c}_{\beta i} = \sum_{i,k}^{1,n} a_{ik} c_{\alpha k} \bar{c}_{\beta i},$$

z druhé pak použitím vztahů (208) dostáváme postupně

$$\varrho_\beta \sum_{i=1}^{n} \bar{c}_{\beta i} c_{\alpha i} = \sum_{i,k}^{1,n} \bar{a}_{ik} \bar{c}_{\beta k} c_{\alpha i} = \sum_{i,k}^{1,n} a_{ki} \bar{c}_{\beta k} c_{\alpha i} = \sum_{i,k}^{1,n} a_{ik} \bar{c}_{\beta i} c_{\alpha k}.$$

Odtud ovšem plyne dále

$$(\varrho_\beta - \varrho_\alpha) \sum_{i=1}^{n} c_{\alpha i} \bar{c}_{\beta i} = 0$$

a vzhledem k předpokládané nerovnosti $\varrho_\alpha \neq \varrho_\beta$ konečně

$$\sum_{i=1}^{n} c_{\alpha i} \bar{c}_{\beta i} = 0. \qquad (215)$$

Tato rovnice jest však právě matematickým výrazem pro vzájemnou orthogonalitu obou soustav $c_{\alpha i}, c_{\beta i}$; $i = 1, 2, \ldots, n$.

Nahradíme-li v orthogonální matici **C** (dokažte, že jest regulární) každý element c_{ik} číslem komplexně sdruženým a pak ještě vyměníme řádky a sloupce matice tím vzniklé navzájem, dospíváme k matici důležité pro další výklad — označíme ji znakem **D**.

Aby nedošlo k nedorozumění, budeme v tomto odstavci označovati znakem $\overline{\mathbf{B}}$ matici vzniklou z dané $\mathbf{B}$ nahrazením všech jejích prvků čísly *komplexně sdruženými* a *symbolem* $\tilde{\mathbf{B}}$ *matici k* $\mathbf{B}$ *transponovanou* (viz str. 87 ve svazku prvém).

Danou formu (207) nyní podrobme regulární lineární (a orthogonální; dokažte) transformaci

$$\mathbf{z} = \mathbf{D}\mathbf{Z}, \tag{216}$$

takže je nutno psáti též

$$\overline{\mathbf{z}} = \overline{\mathbf{D}}\overline{\mathbf{Z}} = \tilde{\mathbf{C}}\overline{\mathbf{Z}}.$$

Maticový obraz (viz odst. 6.)

$$\tilde{\mathbf{z}}\mathbf{A}\overline{\mathbf{z}}$$

naší formy (207) tím nabude tvaru

$$\tilde{\mathbf{Z}}\tilde{\mathbf{D}}\mathbf{A}\tilde{\mathbf{C}}\overline{\mathbf{Z}}$$

a forma sama tedy uvedenou transformací přechází opět ve formu typu Hermiteova, ovšem v proměnných $Z_i, \overline{Z}_k$ a s maticí

$$\mathbf{R} = \tilde{\mathbf{D}}\mathbf{A}\tilde{\mathbf{C}} = \overline{\mathbf{C}}\mathbf{A}\tilde{\mathbf{C}}. \tag{217}$$

Řádky matice $\mathbf{C}$ však jsou řešeními soustav tvaru (210), přidružených k jednotlivým charakteristickým konstantám dané Hermiteovy formy (207). Označme nyní tyto konstanty po řadě $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ (mezi těmito čísly je ovšem r_1 navzájem stejných a rovných ϱ_1, r_2 stejných se společnou hodnotou ϱ_2 atd.). Platí tedy

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{\omega\nu} c_{k\nu} = \varkappa_k c_{k\omega}; \quad \omega, k = 1, 2, \ldots, n. \tag{218}$$

Obecný prvek r_{ik} matice $\mathbf{R}$ má pak podle elementárních pravidel o násobení matic (viz svazek prvý, odst. 9.) a vzhledem k orthogonalitě matice $\mathbf{C}$ hodnotu

$$r_{ik} = \sum_{\omega=1}^{n} \bar{c}_{i\omega} \sum_{\nu=1}^{n} a_{\omega\nu} c_{k\nu} = \varkappa_k \sum_{\omega=1}^{n} \bar{c}_{i\omega} c_{k\omega} = \delta_{ik}\varkappa_k;$$
$$i, k = 1, 2, \ldots, n. \tag{219}$$

Výsledek všech dosavadních úvah o Hermiteových formách vyslovíme nyní touto důležitou

větou 15. Existuje vždy taková orthogonální lineární transformace regulární, která převádí Hermiteovu formu

$$H = \sum_{i,k} a_{ik} z_i \bar{z}_k; \quad i, k = 1, 2, \ldots, n$$

na jednoduchý tvar, říká se mu normální,

$$\sum_{\nu=1}^{n} \varkappa_\nu Z_\nu \overline{Z_\nu} \tag{220}$$

s reálnými koeficienty $\varkappa_\nu$.

Jest to transformace (216), při čemž souvisí matice $\boldsymbol{D}$ výše popsaným způsobem s charakteristickými konstantami dané formy.

Jak jsme se už zmínili, může Hermiteova forma nabývati jen hodnot reálných. Jsou pak mezi formami tohoto typu takové, které nikdy nemají hodnotu zápornou a na druhé straně opět takové, které dají vždy výsledek nekladný, ať dosadíme za proměnné $z_1, z_2, \ldots, z_n$ jakýchkoli n komplexních čísel. Formám těchto dvou druhů se říká definitní, ostatní Hermiteovy formy se jmenují indefinitními.

Normální tvar (220) Hermiteovy formy (207) vede pak přímo k této větě: Nutná a postačující podmínka, aby byla Hermiteova forma (207) definitní, jest ta, aby měly její charakteristické konstanty $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ totéž znaménko.

Má-li forma hodnost r (t. j. má-li tuto hodnost její matice; srovnejte s dalšími vývody úvahy o redukci bilineárních a kvadratických forem na normální tvar v odst. 6. a 7.), jest v jejím normálním tvaru (220) právě r nenulových koeficientů $\varkappa_\nu$. Budiž obecně p z nich positivních, q negativních ($p + q = r$); výraz $p - q$ se pak jmenuje signaturou dané Hermiteovy formy a její význam jest daleko hlubší, než by se zdálo z těch několika slov, která jsme tu uvedli.

Lze totiž ukázati, že nezávisí signatura formy (207) na způsobu, jakým jsme ji uvedli na normální tvar (vedle redukce popsané výše existují totiž ještě jiné možnosti, jak dospěti od obecného tvaru formy k normálnímu). Tato konstantnost signatury jest důsledkem t. zv. *zákona setrvačnosti Hermiteových forem*, jehož přesné znění jest toto:

Počet positivních (a tedy ani negativních) součinitelů $\varkappa_\nu$ nezávisí na tom, jakou lineární regulární transformací byla daná forma (207) převedena na normální tvar (220).

Přejde-li totiž daná forma (207) o hodnosti r regulární lineární transformací $\mathbf{C}_1$ ve tvar

$$H_1 = \sum_{\nu=1}^{r} c_{1\nu} Y_\nu \overline{Y}_\nu,$$

při čemž jest mezi (vesměs reálnými) součiniteli $c_{1\nu}$, ($\nu = 1, 2, \ldots, r$) h_1 kladných a druhou transformací $\mathbf{C}_2$ na tvar

$$H_2 = \sum_{\nu=1}^{r} c_{2\nu} Z_\nu \overline{Z}_\nu$$

obsahující celkem h_2 kladných koeficientů $c_{2\nu}$, převádí regulární a lineární transformace

$$\mathbf{Z} = \mathbf{C}_2^{-1} \mathbf{C}_1 \mathbf{Y} \tag{221}$$

formu H_2 přímo v H_1.

Předpokládejme nyní, že jest na př. $h_1 < h_2$ a volme hodnoty vesměs nulové pro oněch h_1 proměnných Y, jež mají ve formě H_1 kladné koeficienty $c_{1\nu}$. Hodnoty ostatních proměnných Y (v počtu $n - h_1$; my z nich ovšem upotřebíme jen $r - h_1$ hodnot ve formě H_1 vskutku figurujících) potom určeme tak, aby byla rovna nule všechna Z, opatřená ve formě H_2 zápornými součiniteli.

Příslušný systém $n - h_2$ lineárních homogenních rovnic o $n - h_1$ neznámých Y má v našem případě $(n - h_2 < < n - h_1)$ podle věty 6. (str. 21) nenulových řešení Y požadované vlastnosti dokonce nekonečně mnoho a každé z nich vede spolu ve spojení s prve zvolenými nulovými h_1 hodnotami Y k soustavě n čísel, která dosazena za proměnné Y do formy H_1, činí tuto očividně zápornou, kdežto Z, příslušná k této speciální soustavě hodnot Y transformací (221), vedou vzhledem k její regulárnosti ku kladné hodnotě formy H_2.

Tím však docházíme ke sporu — formy H_1, H_2 musí totiž dávati pro kterékoli dvě soustavy Y, Z, souvisící spolu transformací (221) tutéž hodnotu, ježto převádí zmíněná transformace druhou z oněch forem přímo v prvou. Není tedy předpoklad $h_1 < h_2$ správný a stejně nemožné jest $h_2 < h_1$; platí tedy nutně $h_1 = h_2$ a zákon setrvačnosti je tím pro Hermiteovy formy dokázán.

Také u forem Hermiteova typu zavádíme důležitý pojem *ekvivalence*. Dvě takové formy nazýváme ekvivalentními, existuje-li lineární a regulární transformace, která převádí jednu z nich ve druhou. Platí pak toto *kriterium*:

Nutná a postačující podmínka pro ekvivalenci dvou Hermiteových forem je ta, aby měly stejnou hodnost a stejnou signaturu.

Důkaz jest tak snadný, že jej můžeme přenechati čtenáři. S výhodou při něm použije ještě jednoduššího tvaru formy (207), než jest tvar normální (220); vznikne z něho transformací

$$Z_\nu = \frac{1}{\sqrt{\varkappa_\nu \,.\, \mathrm{sgn}\varkappa_\nu}}\,\zeta_\nu;\quad \nu = 1, 2, \ldots, n. \tag{222}$$

Ježto jsou kvadratické formy pouze dosti jednoduchým zvláštním případem forem Hermiteových, lze právě provedené úvahy i výsledky přenésti též do oboru kvadratických forem; zde nabývají často přehlednějšího tvaru. Pokud jde o podrobnější rozvedení těchto úvah, odkazuji čtenáře na stať v Bydžovského knize o determinantech (viz citát v Závěru).

Závěr.

Ačkoli nevyčerpává látka v tomto druhém svazku vyložená ani zdaleka daný předmět (mnohé partie musily zůstati vůbec bez povšimnutí), přece podle autorových zkušeností z denní praxe průmyslové zcela postačí pro převážnou většinu potřeb technických a fysikálních. Pokud by pak v dalších svazcích vyžadoval některý problém přece snad dalších poznatků, budeme vždy míti příležitost tyto na patřičném místě přednésti.

Nejdůležitější literární údaje uvedu až na konci celého díla v souborném seznamu. Přesto však musím i tentokráte, jako už v prvém oddílu, citovat již nyní dvě znamenité knihy, které mi byly při spisování této druhé části velmi často věrnými rádci a spolehlivými pomocníky: Je to předně starý už spis Einführung in die Determinantentheorie od G. Kowalewskiho (původní vydání v Lipsku 1909) a pak s moderního hlediska pojatá učebnice Základy teorie determinantů a matic a jich užití z pera mého učitele, universitního profesora Dr B. Bydžovského, (JČMF, Praha, 1930; druhé vydání 1947).

REJSTŘÍK.

(Čísla za jednotlivými hesly udávají stránky.)

OBSAH

Spisovatel	*RNDr Václav Vodička*
Název díla	*Determinanty a matice v theorii i v praxi, část druhá*
Nákladem	*Přírodovědeckého nakladatelství*
vydala	*Jednota československých matematiků a fysiků*
roku	*1950 v Praze*
v edici	*Cesta k vědění, svazek 56*
za redakce	*Dra F. Vyčichla*
Stran	*144*
Vytiskly	*Středočeské tiskárny n. p., závod Prometheus*
Vydání	*první (3300 výt.)*
Cena	*Kčs 59,—*