PROF. DR BOHUSLAV HOSTINSKÝ

POČET
pravděpodobnosti

První část

CESTA K VĚDĚNÍ SVAZEK 53

Jč
m+f

Prof. Dr BOHUSLAV HOSTINSKÝ

POČET PRAVDĚPODOBNOSTI

PRVNÍ ČÁST

JEDNOTA ČESKOSLOVENSKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ

PŘEDMLUVA

Tento spis o počtu pravděpodobnosti, rozvržený na dvě části, vznikl z přednášek, které jsem měl na Masarykově universitě. Přednášky o počtu pravděpodobnosti, jež jsem konal počátkem let dvacátých, lišily se značně od přednášek konaných v létech třicátých a později. R. 1928 jsem začal studovat Markovovu theorii řetězů, která, ač je v Markovových pracích vyložena bez výslovně uvedeného vztahu k aplikacím, má významnou úlohu ve studiích o vývoji soustav uvažovaném se statistického hlediska. Na prvním sjezdu matematiků ze slovanských zemí, konaném r. 1929 ve Varšavě, jsem poukázal k tomu, jak Poincaréovy a Smoluchowského práce o theorii difuse jsou zahrnuty v Markovově theorii, zavedeme-li do ní spojitě proměnné veličiny. Výklad o Markovově theorii staly se součástí mých občasných přednášek o počtu pravděpodobnosti.

První část tohoto spisu je věnována pravděpodobnostem zjevů vzájemně nezávislých. *Druhá* jedná o zjevech závislých, zejména o Markovových řetězech. Volím způsob výkladu co možná elementární; odvození některých pomocných vět (n. př. Stirlingovy formule) vyžaduje znalosti vyšší matematiky. Nevyhnul jsem se některým obtížnějším úlohám, které jsem považoval za významné jakožto přípravu k aplikacím počtu pravděpodobnosti ve fysice. V tomto spise o fysikálních aplikacích nejednám a omezuji se ve výkladu Markovovy theorie na úlohy vyžadující k svému řešení jen elementárních prostředků algebry. Úlohy, které vznikají rozšířením Markovovy theorie na případ spojitě proměnných veličin, vyžadují k svému řešení složitých úvah z vyšší analyse; nepojal jsem je do těchto přednášek a doufám, že je vyložím při jiné příležitosti v souvislosti se statistickými methodami ve fysice. Na některých místech jsem uvedl význačné spisy týkající se počtu pravděpodobnosti; zejména jsem se snažil upozorniti čtenáře na rozvoj nauky o řetězech v poslední době.

Děkuji srdečně panu prof. Dru Františku Vyčichlovi za to, že se staral o přípravy a vydání tohoto spisu, a Jednotě československých matematiků a fysiků za to, že jej vydala tiskem.

V Brně dne 12. října 1949.

Bohuslav Hostinský.

KAPITOLA PRVNÍ

JEDNODUCHÉ ÚLOHY A DEFINICE

1. Náhodné zjevy a statistické zákonitosti. Elementární definice pravděpodobnosti. Dovedeme předvídati některé zjevy s menší nebo s větší přesností, poněvadž známe jejich příčiny nebo aspoň určitou pravidelnost v jich průběhu; jiné zjevy jsou však takové, že jich nedovedeme předvídati.

Mějme na př. kostku, jejíž stěny jsou obvyklým způsobem označeny „oky“ (na jedné stěně je jedno oko, na druhé dvě oka atd.). Hodíme-li ji z větší vzdálenosti na vodorovnou rovinu (na stůl), kostka po dopadu na stůl nejprve odskočí (po případě několikrát), pak se valí po stole a na konec se zastaví. Konečný výsledek, t. j. počet ok na vrchní straně kostky v konečné poloze, závisí zajisté na její počáteční poloze a na způsobu, kterým byla vržena (krátce řečeno: na počáteční rychlosti kostky), a nelze jej předvídati. Představme si, že kostkou hodíme po druhé; i když její počáteční poloha a počáteční rychlost jen málo se liší od počátečních podmínek v předešlém hodu, přece může býti konečný výsledek po druhé docela jiný než po prvé. Konečný výsledek není možno předvídati; objeví-li se určitý předem očekávaný počet ok, pravíme, že je to *zjev náhodný*.

Opakujme pokus s kostkou mnohokrát a zaznamenávejme výsledky; ve statistice výsledků se objeví určitá pravidelnost. Hodíme-li kostkou n. př. 6000krát, padne jedno oko přibližně 1000krát, dvě oka také přibližně 1000krát atd., ovšem za předpokladu, že kostka má přesně tvar krychle, že je z homogenního materiálu a že ji házíme z větší vzdálenosti na stůl. Kdyby dřevěná kostka měla kovovou vložku poblíž jedné stěny, padala by častěji na tuto stěnu a zmíněná pravidelnost ve statistice pokusů by se tím porušila. Kdybychom kostku, která leží na stole, opatrně a jen málo zdvihli a pak pustili, dopadla by jistě na tu stěnu, na které původně ležela; za těchto podmínek zjev není náhodný a zmíněná pravidelnost ve statistice pokusů byla by vyloučena.

Pravidelnost, jevící se ve statistice dlouhé řady pokusů (házíme-li kostkou, vyjde daný počet ok přibližně tolikrát, kolik je šestina z celkového počtu pokusů; házíme-li mincí, padne přibližně v polovině případů na líc), *považujeme za důsledek určitých podmínek, za kterých se pokus koná* (kostka je přesně krychlového tvaru, je homogenní; mince je souměrná a homogenní; v obou případech je třeba házeti z větší vzdálenosti).

Míra pravděpodobnosti, se kterou očekáváme nějaký zjev, odvodí se takto: je-li n počet všech těch případů, které vůbec mohou nastati jakožto výsledek pokusu, a m počet všech těch mezi nimi, které vedou k očekávanému zjevu („případy příznivé"), je pravděpodobnost p, že zjev nastane, rovna poměru $m : n$,

$$p = \frac{m}{n}. \tag{1}$$

Pravděpodobnost zjevu vypočteme, dělíme-li počet případů, které jsou zjevu příznivé, počtem všech případů, které vůbec mohou nastati jakožto výsledek pokusu.

Výpočet pravděpodobnosti podle této definice předpokládá: 1. že ustanovíme, které případy považujeme za možné a 2. že spočítáme případy příznivé uvažovanému zjevu.

Pravděpodobnost, že při hodu kostkou vyjde pět ok, je $\frac{1}{6}$, neboť mezi všemi ze šesti možných případů ($n = 6$) je jediný příznivý ($m = 1$). Pravděpodobnost, že vyjde sudý počet ok je $\frac{1}{2}$, neboť zde $n = 6$, $m = 3$. Pravděpodobnost, že hozená mince padne na líc je $\frac{1}{2}$ ($n = 2$, $m = 1$).

Krajní případy pravděpodobnosti jsou: *nemožnost* (zjev vůbec nemůže nastati jakožto výsledek pokusu; $m = 0$, $p = 0$) a *jistota* (zjev nastane v každém z n možných případů; $m = n$, $p = 1$). Vždy platí, že

$$0 \leqq p \leqq 1.$$

Pravděpodobnost, že zjev nastane, budiž p; pravděpodobnost, že týž zjev nenastane, je

$$q = \frac{n - m}{n} = 1 - p,$$

neboť je celkem $n - m$ případů nepříznivých. V případě, že $p = \frac{1}{2}$, je též $q = \frac{1}{2}$; pravděpodobnost, že zjev nastane, je v tomto případě rovna pravděpodobnosti, že zjev nenastane.

Definice pravděpodobnosti (1) přihlíží jen k jedné stránce náhodného zjevu, totiž k podmínkám pokusu (v případě kostky je dáno, že pokus musí míti jeden ze šesti možných výsledků a že jen v jediném z těchto případů vyjde daný počet ok). Proto nazýváme někdy pravděpodobnost takto definovanou *pravděpodobností a priori*, lišíce ji od t. zv. *pravděpodobnosti a posteriori*, která je dána druhou stránkou náhodných zjevů, totiž pravidelností jevící se ve statistice dlouhé řady pokusů. V každé úloze, kde se vyskytují jakkoli získané číselné hodnoty pravděpodobnosti, je možná kontrola, užijeme-li dat plynoucích ze statistiky dlouhé řady pokusů.

Definice (1) není logicky bezvadná, neboť obsahuje logický kruh, jak poznamenal Poincaré. Klademe-li totiž, při daném n, veličinu p úměrnou počtu m příznivých případů, považujeme vlastně všechny možné případy za *stejně pravděpodobné*. Tak v případě kostky vede definice (1) k tomu, že každý z možných výsledků (jedno oko, dvě oka, ...) má stejnou pravděpodobnost $\frac{1}{6}$. Pravíme-li zde, že je „šest případů možných", vlastně implicitně už předpokládáme, že každý ze šesti případů má stejnou pravděpodobnost. Obtíž je v pojmu „případů stejně pravděpodobných" (viz poznámky k úloze b, v odst. 2.); v každé úloze musíme rozhodnouti, které případy považujeme za stejně pravděpodobné.

Naším úkolem bude objasniti pojem pravděpodobnosti rozborem rozmanitých úloh; z toho vyplynou rozmanité doplňky a objasnění k původní definici (1) pravděpodobnosti.

2. Jednoduché úlohy. a) V osudí je m koulí bílých a m' černých, celkem $m + m'$ koulí; jak veliká je pravděpodobnost, že vytáhneme bílou kouli? Za předpokladu, že tah kterékoliv koule má stejnou pravděpodobnost, obdržíme

$$p = \frac{m}{m + m'}.$$

b) Jak veliká je pravděpodobnost, že vrhneme dvěma kostkami daný součet ok? Uvažujme nejprve o součtu 2; ten se vyskytne jen v tom jediném případě, že na jedné i na druhé kostce se objeví 1. Označíme tento případ znakem (1, 1). Součet 3 můžeme dostati dvojím způsobem: buď (2, 1) nebo (1, 2); součet 4 třemi způsoby: (3, 1), (2, 2) nebo (1, 3) atd. Dělíce tato čísla číslem 36, které udává počet všech možných případů (případ je dán, je-li dáno, kolik ok vyjde na první kostce a kolik na druhé), dostaneme pravděpodobnosti vrhnouti součet 2, 3, 4, ... Hodnoty pravděpodobností sestavíme do tabulky:

Součet	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Pravděpodobnost ..	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Předpokládáme, že každý ze třiceti šesti případů (a, b) (kde $a = 1, 2, \ldots, 6, b = 1, 2, \ldots, 6$) má stejnou pravděpodobnost; různé součty ok mají proto různé pravděpodobnosti, poněvadž každý se uskutečňuje jiným počtem oněch případů. Nebylo by správné usuzovati takto: poněvadž součet ok, který padne na obou kostkách, má jednu z jedenácti různých hodnot (od 2 do 12), je na př. pravděpodobnost vrhnouti součet pět rovna $\frac{1}{11}$. — Vrhneme-li několikrát dvě kostky a vyjde-li po každé jiný součet ok, mají tyto výsledky obecně různé pravděpodobnosti. Statistika velkého počtu hodů dvěma kostkami dala by výsledky odpovídající hořejší tabulce; kdybychom hodili 3600krát, vyšel by součet 2 asi

100krát, součet 3 asi 200krát, součet 4 asi 300krát, ..., součet 12 asi 100krát.

Každému, kdo chce vniknouti do počtu pravděpodobnosti, se doporučuje, aby sám pokusy s kostkami prováděl, výsledky zapisoval a srovnával je pak s theoretickými vzorci pro pravděpodobnost.

3. Permutace, variace a kombinace. K výpočtu úloh o pravděpodobnostech potřebujeme některých vzorců kombinatorických, jichž odvození zde uvádíme.

a) Je dáno n různých prvků a hledáme počet P_n *permutací*, které z nich lze utvořiti, t. j. počet všech možných způsobů, kterými lze ty prvky seřaditi.

Jsou-li dány dva prvky a, b, jsou celkem dvě permutace: *ab* a *ba*; jsou-li dány tři prvky a, b, c, je celkem šest permutací: *abc, acb, bac, bca, cab, cba.*

Je-li známo P_{n-1}, je

$$P_n = nP_{n-1},$$

neboť z každé permutace α utvořené z $n - 1$ různých prvků dostaneme permutaci z n prvků, zařadíme-li n-tý prvek do permutace α před její první nebo před druhý, ..., před $(n - 1)$-tý nebo konečně za $(n - 1)$-tý prvek; naopak každá permutace z n prvků dá se takto vytvořiti. Napišme shora uvedený vzorec postupně pro $n = 2, 3, \ldots$; poněvadž $P_1 = 1$, bude

$$P_2 = 2 \,.\, 1, P_3 = 3P_2 = 1 \,.\, 2 \,.\, 3, P_4 = 4P_3 = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4, \ldots$$

Obecně platí pro *počet permutací bez opakování* (t. j. z různých prvků) *z n prvků*

$$\mathrm{P}_n = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, \ldots, n = n! \qquad (1)$$

Předpokládejme nyní, že mezi danými n prvky je n_1 stejných; počet navzájem různých permutací, které lze z n prvků utvořiti v tomto případě, je

$$P_n' = \frac{n!}{n_1!}.$$

Kdyby obecně bylo mezi n prvky k skupin takových, že první by se skládala z n_1 stejných prvků, druhá z n_2 stejných …, k-tá z n_k stejných (při čemž dva prvky vzaté ze dvou různých skupin by byly vždy různé), bylo by

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n,$$

a počet *permutací s opakováním* z n prvků, t. j. počet různých permutací, by byl roven

$$P_n' = \frac{(n_1 + n_2 + \ldots + n_k)!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!}. \tag{2}$$

Některá z čísel $n_1, n_2, \ldots, n_k$ mohou býti rovna 1; jsou-li všechna rovna 1, přechází vzorec (2) v (1).

b) *Variace bez opakování r-té třídy z n různých prvků* ($r < n$) jsou skupiny po r různých prvcích, při čemž přihlížíme k pořadí prvků ve skupině. Abychom ustanovili počet $V_r(n)$ variací bez opakování r-té třídy z n prvků, zvolíme nejprve jeden z n prvků, který dáme na první místo; pak zvolíme jeden z $(n - 1)$ zbývajících, který dáme na druhé místo; pak další z $(n - 2)$ zbývajících, který dáme na třetí místo atd. Tak najdeme, že

$$V_r(n) = n(n - 1)\,(n - 2) \ldots (n - r + 1). \tag{3}$$

Ze tří prvků a, b, c $[n = 3, r = 2, V_2(3) = 6]$ je šest variací druhé třídy:

$$ab,\ ac,\ ba,\ bc,\ ca,\ cb.$$

Variace s opakováním r-té třídy z n prvků jsou skupiny po r prvcích, při čemž každý prvek se může na kterýchkoli místech opakovati. Na první místo může přijíti kterýkoli z n prvků, na druhé rovněž, na třetí také atd. Počet variací $V_r'(n)$ s opakováním r-té třídy z n prvků je tedy dán vzorcem

$$V_r'(n) = n^r. \tag{4}$$

Tak na př. ze dvou prvků a, b ($n = 2, r = 3$) možno utvořiti osm variací třetí třídy s opakováním:

$$aaa,\ aab,\ aba,\ abb,\ baa,\ bab,\ bba,\ bbb.$$

c) *Kombinace bez opakování r-té třídy z n různých prvků* ($r \leqq n$) jsou skupiny po r prvcích, ve kterých se nepřihlíží k pořadí prvků. Permutujeme-li všech r prvků, tvořících určitou kombinaci, dostaneme všechny variace bez opakování, které lze utvořiti z těch r prvků. Označíme-li znakem $C_r(n)$ počet kombinací bez opakování z n prvků, máme podle (1) a (3)

$$V_r(n) = C_r(n) \,.\, r!$$

$$C_r(n) = \frac{V_r(n)}{r!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{1\,.\,2\,.\,3\dots r}$$

nebo

$$C_r(n) = \frac{n!}{r!(n-r)!}. \tag{5}$$

Vzorec (5) vyjadřuje větu: z n prvků je tolik kombinací r-té třídy kolik je kombinací $n - r$-té třídy (na př. ze sedmi prvků je tolik kombinací čtvrté třídy kolik je kombinací třetí třídy). Dále plyne z (5), že

$$C_r(n) + C_{r+1}(n) = \frac{n!}{r!(n-r)!} + \frac{n!}{(r+1)!\,(n-r-1)!} =$$

$$= \frac{n!(r+1+n-r)}{(r+1)!\,(n-r)!} = \frac{(n+1)!}{(r+1)!\,(n-r)!} = C_{r+1}\,(n+1). \tag{5a}$$

Čísla $C_r(n)$, která značíme též $(n)_r$, jsou *binomické koeficienty*, které vytvořují t. zv. *Pascalův trojúhelník*. Napišme je tak, aby v n-tém řádku byla čísla $(n)_0, (n)_1, \dots, (n)_n$; při tom klademe pro každé n, $(n)_0 = 1$. Dostaneme tak

$$\begin{array}{ll}
n = 1 & 1,\ 1 \\
n = 2 & 1,\ 2,\ 1 \\
n = 3 & 1,\ 3,\ 3,\ 1 \\
n = 4 & 1,\ 4,\ 6,\ 4,\ 1 \\
n = 5 & 1,\ 5,\ 10,\ 10,\ 5,\ 1
\end{array}$$

Podle (5) je každý řádek Pascalova trojúhelníku souměrný podle středního členu; podle (5a) je každý koeficient roven součtu obou nad ním stojících.

Kombinace s opakováním r-té třídy z n různých prvků jsou skupiny po r prvcích, při čemž se prvky mohou libovolně opakovati a nepřihlíží se k jich pořadí. Abychom určili počet kombinací s opakováním druhé třídy ze čtyř prvků a, b, c, d, připojme k nim pátý prvek e a utvořme všechny kombinace bez opakování druhé třídy z těchto pěti prvků [podle (5) je jich $C_2(5) = 10$]:

$$ab,\ ac,\ ad,\ ae,\ bc,\ bd,\ be,\ cd,\ ce,\ de.$$

Nahraďme nyní prvek e v každé z těchto kombinací, kde se e vyskytuje, tak, aby vznikla kombinace s opakováním; dostaneme deset hledaných kombinací:

$$ab,\ ac,\ ad,\ aa,\ bc,\ bd,\ bb,\ cd,\ cc,\ dd.$$

Platí tedy, značíme-li znakem $C'_r(n)$ počet kombinací s opakováním r-té třídy z n prvků,

$$C_2'(4) = C_2(5).$$

Podobně, abychom dostali kombinace s opakováním třetí třídy z tří prvků a, b, c, utvořme nejprve všechny kombinace bez opakování třetí třídy z pěti prvků a, b, c, d, e [podle (5) je jich deset]:

$$abc,\ abd,\ abe,\ acd,\ ace,\ bcd,\ bce,\ adc,\ bde,\ cde.$$

V každé z kombinací, kde se vyskytuje některý z prvků d, e, nahraďme jej některým z těch prvků a, b, c. které se vyskytují v téže kombinaci. Tak dostaneme deset hledaných kombinací s opakováním:

$$abc,\ aab,\ abb,\ aac,\ acc,\ bbc,\ bcc,\ aaa,\ bbb,\ ccc.$$

Je tedy

$$C_3'(3) = C_3(5)$$

a obecně platí, že

$$C_r'(n) = C_r(n + r - 1) = \frac{(n + r - 1)!}{r!(n - 1)!}. \qquad (6)$$

4. Pravděpodobnost úhrnná. Věta o sčítání pravděpodobností. Budiž n počet všech případů, které mohou nastati jakožto výsledky pokusu. Z nich nechť m_1 případů je příznivo zjevu A_1, m_2 případů jinému zjevu $A_2, \ldots, m_k$ případů zjevu A_k. Pravděpodobnost, že pokus povede ke zjevu A_i, je podle definice (1) odst. 1. dána vzorcem $p_i = m_i : n$. *Pravděpodobnost úhrnná p, že nastane buď zjev A_1, nebo zjev $A_2, \ldots,$ nebo A_k*, jest určena vzorcem

$$p = \frac{m_1 + m_2 + \ldots + m_k}{n} = p_1 + p_2 + \ldots + p_k,$$

neboť příznivých případů je nyní $m_1 + m_2 + \ldots + m_k$.

Smysl vzorce vyjádříme takto:

Jsou-li $p_1, p_2, \ldots, p_k$ pravděpodobnosti k vzájemně se vylučujících zjevů, které se mohou dostaviti jakožto výsledky pokusu, je pravděpodobnost, že buď první, nebo druhý, ..., nebo k-tý z nich se dostaví, rovna součtu $p_1 + p_2 + \ldots + p_k$.

Kdyby kromě uvažovaných případů (v celkovém počtu $m_1 + m_2 + \ldots + m_k$), jež jsou příznivé každý jednomu ze zjevů $A_1, A_2, \ldots,, A_k$, nebylo jiných možných výsledků pokusu, bylo by

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n$$

a tedy

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_k = 1;$$

bylo by jisto, že se dostaví jeden ze zjevů A_i.

Příklady: a) Pravděpodobnost vrhnouti jednou kostkou buď pět ok nebo šest je $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

b) Pravděpodobnost vrhnouti dvěma kostkami součet ok rovný buď pěti nebo šesti je (podle odst. 2b) $\frac{4}{36} + \frac{5}{36} = \frac{1}{4}$.

c) V osudí je b bílých koulí, c červených a m modrých. Pravděpodobnosti: p_b vytáhnouti bílou, p_c červenou a p_m modrou jsou

$$p_b = \frac{b}{b+c+m}, \quad p_c = \frac{c}{b+c+m}, \quad p_m = \frac{m}{b+c+m},$$

$$p_b + p_c + p_m = 1.$$

Pravděpodobnost vytáhnouti buď bílou nebo červenou je

$$\frac{b+c}{b+c+m} = p_b + p_c.$$

5. Pravděpodobnost složená. Věta o násobení pravděpodobností. Závislé a nezávislé veličiny. a) Budiž n_1 počet všech případů, které mohou nastati jakožto výsledek pokusu, m_1 pak počet těch z nich, které jsou příznivy zjevu A_1. Pravděpodobnost p_1, že A_1 nastane, je dána vzorcem

$$p_1 = \frac{m_1}{n_1}.$$

Označme písmeny m_2, n_2 a p_2 obdobné veličiny pro nějaký jiný pokus, který se koná za jiných podmínek než první a při kterém očekáváme zjev A_2. Pravděpodobnost, že nastane zjev A_2, je

$$p_2 = \frac{m_2}{n_2}.$$

Předpokládejme, že mezi výskyty zjevů A_1 a A_2 *není souvislosti*, že tedy A_1 a A_2 jsou *vzájemně nezávislé*. a hledejme pravděpodobnost p, že první pokus povede k A_1 a druhý k A_2. Počet všech možných případů, jež se mohou vyskytnouti jakožto výsledky obou pokusů, je $n_1 . n_2$, neboť každý z n_1 možných výsledků prvého pokusu může se kombinovati s každým z n_2 možných výsledků druhého. Počet příznivých případů je z podobného důvodu roven $m_1 . m_2$, je tedy

$$p = \frac{m_1 m_2}{n_1 n_2}$$

čili

$$p = p_1 p_2.$$

Je-li p_1 pravděpodobnost, že nastane zjev A_1 a p_2 pravděpodobnost, že nastane zjev A_2, nezávislý na A_1, je $p_1 p_2$ pravděpodobnost, že nastanou oba zjevy.

Příklady: a) Pravděpodobnost, že ve dvou hodech kostkou vyjde po každé předepsaný počet ok (na př. po každé dvě oka), je rovna $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.

b) Pravděpodobnost p, že ve dvou hodech kostkou vyjde po každé týž počet ok (předem neznámý), vypočteme třemi způsoby:

1. Počet příznivých případů ($= 6$) dělíme počtem všech možných ($= 36$), tedy $p = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

2. p jakožto pravděpodobnost úhrnná rovná se součtu pravděpodobností šesti vzájemně se vylučujících případů (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5) a (6, 6); viz označení zavedené v odst. 2b. Každý z nich má pravděpodobnost $\frac{1}{36}$, tedy $p = 6 \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{6}$.

3. Užívajíce pravidla o pravděpodobnosti složené uvažujeme takto: pravděpodobnost $p_1 = 1$ (jistota), že vůbec několik ok vyjde, kombinujeme s pravděpodobností $p_2 = \frac{1}{6}$, že právě tolik ok, kolik vyšlo v prvním hodu, vyjde také ve druhém; je tedy $p = p_1 p_2 = \frac{1}{6}$.

b) Podobně jako jsme odůvodnili pravidlo o násobení dvou pravděpodobností, odvodíme pravidlo platné pro součin libovolného počtu pravděpodobností: *Jsou-li $p_1, p_2, \ldots, p_k$ pravděpodobnosti zjevů navzájem nezávislých, je pravděpodobnost p, že všech k zjevů se uskuteční, rovna součinu $p_1 p_2 \ldots p_k$,*

$$p = p_1 p_2 \cdots p_k.$$

c) Není-li splněna podmínka nezávislosti, nelze užíti pravidla o násobení pravděpodobností (viz odst. 48. a násl.).

6. Obecnější pojem pravděpodobnosti. Dvě základní věty o počítání s pravděpodobnostmi. Ačkoli definice pravděpodobnosti podaná v odst. 1. se hodí jako základ výpočtu v mnohých úlohách, nebudeme se na ni vázati, nýbrž připustíme obecně, že pravděpodobnosti mohou býti vyjádřeny čísly $p_1, p_2, \ldots$, obsaženými v mezích $0 \ldots 1$ (při čemž $p = 0$ značí nemožnost, $p = 1$ jistotu), bez ohledu na onu definici; úkolem počtu pravděpodobnosti pak je studovati vztahy mezi pravděpodobnostmi, při čemž vycházíme z těchto dvou základních vět:

I. Věta o úhrnné pravděpodobnosti neboli o sečítání pravděpodobností: Jsou-li $p_1, p_2, \ldots, p_k$ pravděpodobnosti zjevů *vzájemně se vylučujících*, je $p_1 + p_2 + \ldots + p_k$ pravděpodobnost, že aspoň jeden z těch zjevů nastane.

II. Věta o složené pravděpodobnosti neboli o násobení pravděpodobností: Jsou-li $p_1, p_2, \ldots, p_k$ pravděpodobnosti k zjevů *vzájemně nezávislých*, je $p_1 p_2 \ldots p_k$ pravděpodobnost, že všech k zjevů se uskuteční.

Tyto dvě věty bereme za *axiomy*. V případě, že užijeme definice (1) odst. 1., dají se obě věty na základě této definice dokázati (viz odst. 4. a 5.); připouštíme však s obecnějšího stanoviska, že lze s pravděpodobnostmi počítati (algebraicky), i když jejich číselné hodnoty nejsou známé a když tedy nemůžeme tvrditi, že byly odvozeny užitím definice (1) odst. 1.

7. Příklady na užití základních vět. a) Budiž p pravděpodobnost, že nějaký pokus se zdaří. Vykonáme-li řadu k pokusů, je pravděpodobnost, že všech k pokusů se zdaří, rovna p^k. Je-li p malé číslo, ubývá p^k rychle s rostoucím k.

b) Je-li p pravděpodobnost, že se pokus zdaří, kolik je třeba vykonati pokusů, aby pravděpodobnost, že aspoň jeden z nich se zdaří, se rovnala danému číslu r $(0 \leq r \leq 1)$? — Pravděpodobnost, že se pokus nezdaří, je $1 - p$. Pravděpodobnost, že ani jeden z k pokusů se nezdaří, je $(1 - p)^k$. Tato poslední pravděpodobnost doplňuje se s danou pravděpodobností r na jistotu (buď se ani jeden pokus nepodaří, nebo se podaří aspoň jeden), takže

$$(1 - p)^k + r = 1$$

a tedy
$$k = \frac{\log(1 - r)}{\log(1 - p)}.$$

Tento výraz není obecně roven celému číslu. Je-li počet pokusů menší než číslo k zde vypočtené, bude pravděpodobnost, že se aspoň jeden pokus podaří, o něco menší než r; je-li počet pokusů větší než k, bude ona pravděpodobnost větší než r.

Házíme-li na př. dvěma kostkami, je pravděpodobnost, že na každé z obou se objeví jedno oko, rovna $\frac{1}{36}$. Kolikrát musíme hoditi, abychom se stejnou pravděpodobností mohli čekati, že aspoň jednou se objeví po jednom oku současně na obou kostkách, i že se to nestane ani jednou?

Zde je
$$p = \tfrac{1}{36},\ r = \tfrac{1}{2}$$
a tedy
$$n = \frac{\log(1 - \frac{1}{2})}{\log(1 - \frac{1}{36})} = 24{,}6.$$

Musili bychom tedy hoditi 25krát.

c) Pravděpodobnost p, že ve třech vrzích dvěma kostkami vrhneme součty ok 5 a 7, každý jen jednou, vypočte se takto:

Pravděpodobnost, že v jednom hodu vyjde součet 5, je $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$, pravděpodobnost, že v jednom hodu vyjde součet 7, je $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$, pravděpodobnost, že v jednom hodu nevyjde ani 5 ani 7, je rovna $1 - \frac{1}{9} - \frac{1}{6} = \frac{13}{18}$.

Označme písmenem a jakýkoli součet ok, jenž není roven ani 5 ani 7; v serii tří vrhů mohou se vyskytnouti tyto příznivé případy:

$$5, 7, a;\ \ 5, a, 7;\ \ a, 5, 7;\ \ 7, 5, a;\ \ 7, a, 5;\ \ a, 7, 5.$$

Každý z nich má (při neurčitém a) pravděpodobnost
$$\tfrac{1}{9} \cdot \tfrac{1}{6} \cdot \tfrac{13}{18};$$
hledaná pravděpodobnost p je šestkrát větší, tedy
$$p = 6 \,.\, \tfrac{1}{9} \,.\, \tfrac{1}{6} \,.\, \tfrac{13}{18} = \tfrac{13}{162}.$$

d) Hodíme pět penízů. Pravděpodobnost, že tři z nich padnou na líc a dva na rub, je

$$(5)_3 : 2^5 = \tfrac{5}{16}.$$

e) Pravděpodobnost, že k kostkami vrhneme součet ok N, rovná se koeficientu při x^N v rozvoji (uspořádaném podle mocnin veličiny x) výrazu

$$\frac{1}{6^k}(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^k.$$

f) Bílé a černé koule jsou ve třech osudích. V prvním je m_1 koulí bílých a n_1 černých; ve druhém m_2 a n_2, ve třetím pak m_3 a n_3. Pravděpodobnost voliti i-té osudí je $p_i (i = 1, 2, 3)$. Volíme jedno osudí a vytáhneme kouli; jak velká je pravděpodobnost p, že vytáhneme bílou? — p určíme jakožto pravděpodobnost úhrnnou. Bylo-li zvoleno n-té osudí, je pravděpodobnost, že vytáhneme bílou kouli, rovna $\frac{m_i}{m_i + n_i}$; pravděpodobnost, že jsme volili i-té osudí a pak z něho vytáhli bílou kouli, je $p_i \frac{m_i}{m_i + n_i}$.

Volby jednotlivých osudí jsou případy vzájemně se vylučující, takže

$$p = p_1 \frac{m_1}{m_1 + n_1} + p_2 \frac{m_2}{m_2 + n_2} + p_3 \frac{m_3}{m_3 + n_3}.$$

Kdyby všechny koule byly smíchány v jediném osudí, byla by pravděpodobnost p', že vytáhneme bílou kouli, určena vzorcem

$$p' = \frac{m_1 + m_2 + m_3}{m_1 + m_2 + m_3 + n_1 + n_2 + n_3}.$$

8. Matematická naděje neboli střední hodnota proměnné veličiny závislé na náhodě. a) Osoba A hází kostkou a získá, padne-li jedno oko, výhru 1 Kčs. V řadě 6000 hodů padne jedno oko přibližně 1000krát, takže A může očekávati výhru přibližně 1000 Kčs. Na jeden hod připadá tedy *průměrně* výhra $\frac{1000}{6000}$ Kčs $= \frac{1}{6}$ Kčs, t. j. šestina z výhry možné v jediném hodu.

Je-li obecně p pravděpodobnost, že se nějaký pokus zdaří, a dostane-li osoba A za každý zdařilý pokus k korun, jest očekávati, že po provedení N pokusů získá celkem přibližně Npk korun.

Z toho připadá na jediný pokus *průměrně* pk korun; kterážto částka se nazývá matematickou nadějí osoby A (nebo také m. n. zisku) pro jeden pokus.

Pojem matematické naděje rozšiřujeme na všechny úlohy o pravděpodobnostech takto: Předpokládejme nejprve, že nějaká veličina x nabude určité hodnoty x_1, zdaří-li se pokus a že p je pravděpodobnost, že se pokus podaří; matematická naděje veličiny x je pak rovna součinu px_1. V nejobecnějším případě budiž x „*náhodná veličina*“ t. j. veličina, která může nabýti kterékoli z n hodnot

$$x_1, x_2, \ldots, x_n,$$

každé s určitou pravděpodobností; nechť jsou

$$p_1, p_2, \ldots, p_n$$

příslušné pravděpodobnosti; p_i je tedy pravděpodobnost rovnice $x = x_i$*). Za předpokladu, že x nemůže nabýti jiných hodnot než $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$, platí

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1 \qquad (1)$$

a matematická naděje veličiny x je dána vzorcem

$$p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n. \qquad (2)$$

Slovy: *matematická naděje (nebo: střední hodnota, pravděpodobná hodnota) veličiny x se vypočte, násobíme-li každou*

*) Zkráceně označeno: $P(x = x_i) = p_i$. Obecně znamená $P(R)$ pravděpodobnost, že vztah R platí.

hodnotu, které ta veličina může nabýti, pravděpodobností, že oné hodnoty nabude, a sečteme-li všechny součiny tak utvořené.

Znaky pro matematickou naději veličiny x jsou s. h. (x) nebo $E(x)$.

b) Pojem matematické naděje se shoduje v podstatě s pojmem aritmetického středu. Měříme na př. nějakou délku n-krát a obdržíme tak n hodnot (obecně různých, poněvadž se vyskytují pozorovací chyby) $x_1, x_2, \ldots, x_n$; za „pravou hodnotu" x měřené délky bereme obyčejně aritmetický střed hodnot x_k

$$x = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Při tom předpokládáme, že každé jednotlivé z n měření zaslouží stejnou důvěru jako kterékoli jiné z nich. Kdybychom však z jakýchkoli důvodů přisoudili veličinám x_k kladné „váhy" s_k, počítali bychom pak „pravou hodnotu" měřené délky podle obecnějšího vzorce *(zobecněný aritmetický střed)*:

$$\xi = \frac{s_1x_1 + s_2x_2 + \ldots + s_nx_n}{s_1 + s_2 + \ldots + s_n};$$

je-li $s_1 = s_2 = \ldots = s_n$, je hodnota ξ totožná s obyčejným aritmetickým středem, který jsme shora nazvali x.

Položme

$$\frac{s_k}{s_1 + s_2 + \ldots + s_n} = p_k \geqq 0, \; k = 1, 2, \ldots, n,$$

takže

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1.$$

Střední hodnota ξ veličiny x bude, jak plyne z předchozích vzorců, rovna

$$\xi = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n.$$

(2) jest *obecná definice střední hodnoty* veličiny x za těchto předpokladů:

1. x nemůže nabývati jiných hodnot než některé z řady $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

2. Hodnotě x_k přisuzujeme váhu úměrnou nezápornému koeficientu p_k.

3. Součet všech těchto koeficientů rovná se jedné.

Jsou-li všechny hodnoty p_k kladné a jsou-li mezi veličinami x_i aspoň dvě různé, platí nerovnosti

$$x_{min} < \text{s. h. } (x) < x_{max},$$

kde x_{min} a x_{max} značí nejmenší resp. největší z čísel $x_1 \ldots x_n$. Neboť nahradíme-li v součtu $p_1x_1 + \ldots + p_nx_n$ každou veličinu x_i hodnotou x_{min}, zmenší se tím hodnota součtu na x_{min} vzhledem k (1); podobně se dokáže druhá nerovnost.

c) Příklady: Házíme kostkou; jaká je s. h. počtu ok? Zde je patrně

$$x_i = i,\ p_i = \tfrac{1}{6} (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

a tedy

$$\text{s. h. } (x) = \tfrac{1}{6} + \tfrac{2}{6} + \tfrac{3}{6} + \tfrac{4}{6} + \tfrac{5}{6} + \tfrac{6}{6} = \tfrac{7}{2}.$$

Házíme dvěma kostkami; jaká je s. h. součtu ok? Podle odst. 2b máme zde

$$\text{s. h. } (x) = \frac{M}{N} = 7, \text{ kde } M = 2 \,.\, 1 + 3 \,.\, 2 + 4 \,.\, 3 + 5 \,.\, 4 + $$

$$+ 6 \,.\, 5 + 7 \,.\, 6 + 8 \,.\, 5 + 9 \,.\, 4 + 10 \,.\, 3 + 11 \,.\, 2 + 12 \,.\, 1;\ N = 36.$$

Ve velkém počtu hodů dvěma kostkami je průměrná hodnota součtu ok rovna sedmi.

Kdybychom házeli m kostkami, byla by střední hodnota součtu x ok rovna

$$\text{s. h. } (x) = m \,.\, \tfrac{7}{2},$$

neboť

$$x = \xi + \eta + \zeta + \ldots,$$

kde ξ značí počet ok na první kostce, η na druhé, ζ na třetí atd.; podle obecné věty (viz odst. 10a)

$$\text{s. h. }(x) = \text{s. h. }(\xi) + \text{s. h. }(\eta) + \text{s. h. }(\zeta) + \ldots,$$

kde každý sčítanec se rovná $\frac{1}{2}$.

9. Matematická naděje při hazardních hrách. Hra je hazardní, je-li výhra či prohra podmíněna náhodnými zjevy. Hazardní hra je *spravedlivá*, mají-li všichni hráči stejné matematické naděje na výhru, čili jsou-li střední hodnoty zisků, jež mohou jednotliví hráči očekávati, navzájem rovny. Předpokládejme, že hrají dva hráči; budiž p_1 pravděpodobnost, že vyhraje první, a p_2 pravděpodobnost, že vyhraje druhý; a_1 a a_2 nechť jsou případné výhry prvého resp. druhého. Podmínka spravedlivé hry zní

$$p_1 a_1 = p_2 a_2,$$

čili

$$a_1 : a_2 = p_2 : p_1.$$

Rozumí se, že výhra jednoho hráče je vždy na účet druhého; a_2 je tedy vklad, který dává první hráč do hry, a_1 pak vklad, který dává druhý hráč. Podmínka spravedlivé hry dá se vyjádřiti také takto (platí pro jakýkoli počet hráčů): *střední hodnota zisku pro každého hráče rovná se nule*; přihlíží se ke všem možným výsledkům jedné partie, zisky se počítají kladně a ztráty jako záporné zisky. Budiž x zisk prvního hráče (máme na mysli stále případ dvou hráčů); podle obecné formule o střední hodnotě máme

$$\text{s. h. }(x) = p_1 x_1 + p_2 x_2,$$

při čemž $x_1 = a_1$, $x_2 = -a_2$. x_2 je záporné číslo, poněvadž udává ztrátu prvního hráče při prohře. Hledaná podmínka zní tedy

$$\text{s. h. }(x) = 0, \text{ čili } p_1 a_1 - p_2 a_2 = 0,$$

ve shodě s hořejším výsledkem. Poslední rovnice vyjadřuje zároveň podmínku, že zisk y druhého hráče má střední hodnotu rovnou nule; neboť pravděpodobnost, že druhý hráč prohraje částku a_1, je p_1 a pravděpodobnost, že vyhraje částku a_2, je p_2, tedy

$$\text{s. h.}\ (y) = -p_1a_1 + p_2a_2.$$

Příklad 1. Hází se dvěma kostkami. Je-li součet ok 7 výhrou pro prvního hráče a součet 8 výhrou pro druhého, je

$$p_1 = \tfrac{1}{6},\ p_2 = \tfrac{5}{36}$$

a podmínka spravedlivé hry zní

$$\tfrac{1}{6}a_1 = \tfrac{5}{36}a_2 \text{ aneb } a_1 : a_2 = 5 : 6.$$

Hra bude tedy spravedlivá, zaplatí-li druhý hráč prvému 5 Kčs, padne-li součet 7, a první druhému 6 Kčs, padne-li součet 8.

Hraje-li se mnoho partií, bude z celkového jich počtu asi $\frac{1}{6}$ těch, ve kterých vyhrává první hráč, a asi $\frac{5}{36}$ těch, ve kterých vyhrává druhý. Je-li na př. všech partií 3600, vyhraje první asi 600krát, druhý pak asi 500krát. Každý hráč může očevati, že během 3600 partií přijme asi $5.600 = 6.500 = 3000$ Kčs a že asi zrovna tolik vyplatí.

Kdyby výhry v jednotlivé partii nebyly v poměru 5 : 6, nebyla by hra spravedlivá; byla by výhodnější pro jednoho z hráčů než pro druhého, což by se ukázalo ziskem jednoho po velikém počtu partií.

Příklad 2. Loterie má 10 000 losů a jsou čtyři výhry po 5000 Kčs. Jakou cenu má jeden los? Pravděpodobnost, že určitý los vyhraje, je

$$p = \frac{(9999)_3}{(10\,000)_4} = \frac{9999 \,.\, 9998 \,.\, 9997 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4}{10\,000 \,.\, 9999 \,.\, 9998 \,.\, 9997 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3} = \frac{4}{10\,000}.$$

Cena losu se rovná matematické naději, kterou má majitel losu vzhledem k očekávané výhře; tato naděje čili střední hodnota výhry je $p \,.\, 5000 = 2$ Kčs a to je právě cena losu. —

Jiný způsob výpočtu: Úhrnná cena všech výher je 20 000 Kčs; to je zároveň úhrnná cena všech losů, takže na jeden los připadá 20 000 Kčs : 10 000 = 2 Kčs.

Takováto loterie je spravedlivá; podnikatel loterie má zde jistotu (prodá-li ovšem všechny losy), že sám nemůže nic ani získati ani ztratiti, neboť na čtyři vyhrávající losy vyplatí celkem 20 000 Kčs, což je právě částka stržená za všechny losy. Má-li loterie podnikateli něco vynésti, musí býti ceny losů vyšší; loterie není pak spravedlivá hra.

10. Dvě obecné věty o středních hodnotách. a) Budiž x veličina závislá na náhodě; x může nabýti každé z hodnot $x_1, x_2, \ldots, x_h$ s pravděpodobnostmi po řadě $p_1, p_2, \ldots, p_h$. Podle (2) odst. 8. platí, že

$$\text{s. h.}\,(x) = \sum_{\alpha=1}^{h} p_\alpha x_\alpha .$$

Budiž y jiná veličina, která může nabýti každé z hodnot $y_1, y_2, \ldots, y_k$ s pravděpodobnostmi po řadě $p_1', p_2', \ldots, p_k'$, a z třetí veličina, která může nabýti hodnot $z_1, z_2, \ldots, z_l$ s pravděpodobnostmi $p_1'', p_2'', \ldots, p_l''$. Budiž pak $p_{\alpha\beta\gamma}$ pravděpodobnost, že současně platí

$$x = x_\alpha, \; y = y_\beta, \; z = z_\gamma,$$

kde

$$\alpha = 1, 2, \ldots, h; \; \beta = 1, 2, \ldots, k; \; \gamma = 1, 2, \ldots, l.$$

Úhrnná pravděpodobnost p_α, že $x = x_\alpha$, je dána vzorcem

$$p_\alpha = \sum_{\beta=1}^{k} \sum_{\gamma=1}^{l} p_{\alpha\beta\gamma};$$

podobně pravděpodobnost p_β', že $y = y_\beta$, je

$$p'_\beta = \sum_{\alpha=1}^{h} \sum_{\gamma=1}^{l} p_{\alpha\beta\gamma}$$

a pravděpodobnost p_γ'', že $z = z_\gamma$, je

$$p''_\gamma = \sum_{\alpha=1}^{h} \sum_{\beta=1}^{k} p_{\alpha\beta\gamma}.$$

Podle definice je

$$\text{s. h.}\,(x + y + z) = \sum_{\alpha=1}^{h} \sum_{\beta=1}^{k} \sum_{\gamma=1}^{l} p_{\alpha\beta\gamma} (x_\alpha + y_\beta + z_\gamma) =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{h} p_\alpha x_\alpha + \sum_{\beta=1}^{k} p_\beta' y_\beta + \sum_{\gamma=1}^{l} p_\gamma'' z_\gamma =$$

$$= \text{s. h.}\,(x) + \text{s. h.}\,(y) + \text{s. h.}\,(z).$$

Platí tedy věta (a to pro libovolný počet sčítanců), že *střední hodnota součtu několika veličin rovná se součtu jejich středních hodnot.*

Příklad: Hodíme-li jednou kostkou, je střední hodnota počtu ok rovna $\frac{7}{2}$. Hodíme-li m kostkami, je střední hodnota součtu ok rovna součtu středních hodnot pro jednotlivé kostky, tedy $m \,.\, \frac{7}{2}$; (srv. odst. 8c).

b) Počítejme nyní střední hodnotu součinu tří veličin x, y, z podržujíce zavedené označení. Výraz

$$\text{s. h.}\,(xyz) = \sum_{\alpha=1}^{h} \sum_{\beta=1}^{k} \sum_{\gamma=1}^{l} p_{\alpha\beta\gamma}\, x_\alpha y_\beta z_\gamma,$$

nedá se obecně redukovati na střední hodnotu jednotlivých veličin x, y, z. Jen ve zvláštním případě, že veličiny x, y, z jsou *navzájem nezávislé*, platí podle věty o složené pravděpodobnosti, že

$$p_{\alpha\beta\gamma} = p_\alpha \cdot p_\beta' \cdot p_\gamma''$$

a tedy

$$\text{s. h.}\,(xyz) = \left(\sum_{\alpha=1}^{h} p_\alpha x_\alpha\right) \left(\sum_{\beta=1}^{k} p_\beta' y_\beta\right) \left(\sum_{\gamma=1}^{l} p_\gamma'' z_\gamma\right) =$$

$$= [\text{s. h.}\,(x)] \,.\, [\text{s. h.}\,(y)] \,.\, [\text{s. h.}\,(z)].$$

Střední hodnota součinu několika veličin navzájem nezávislých rovná se součinu jejich středních hodnot (srv. též odst. 38).

Poznamenejme, že věta a) platí zcela obecně *i pro navzájem závislé veličiny.*

c) Je-li a konstanta, je s. h. $(a) = a$, neboť a je veličina, která s jistotou ($p = 1$) se rovná a. Je-li a konstanta a x veličina závislá na náhodě, je s. h. $(ax) = a$ s. h. (x), neboť a a x lze považovati za veličiny *navzájem nezávislé*, takže podle odst. b) platí

$$\text{s. h. } (ax) = \text{s. h. } (a) \,.\, \text{s. h. } (x) = a \,.\, \text{s. h. } (x).$$

11. Střední hodnota druhé mocniny. Budiž zase x veličina závislá na náhodě, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nechť jsou její možné hodnoty a $p_1, p_2, \ldots, p_n$ příslušné pravděpodobnosti. Je tedy s. h. $(x) = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots p_nx_n$; $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$. Pro libovolná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ platí Lagrangeova identita

$$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2) -$$
$$- (a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 = (a_1b_2 - a_2b_1)^2 +$$
$$+ (a_1b_3 - a_3b_1)^2 + \ldots + (a_{n-1}b_n - a_nb_{n-1})^2.$$

Dosaďme sem

$$a_i = \sqrt{p_i},\ b_i = \sqrt{p_i}x_i;\ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1;$$

vychází

$$\sum_{i=1}^{n} p_ix_i^2 - \left[\sum_{i=1}^{n} p_ix_i\right]^2 = \sum_i \sum_k p_ip_k(x_i - x_k),$$

kde poslední součet se vztahuje ke všem různým dvojicím indexů i a k ($i, k = 1, 2, \ldots, n$). Tento součet rovnal by se nule jen tehdy, kdyby všechny hodnoty x_i byly si navzájem rovny. Obecně je kladný a proto

$$\sum_{i=1}^{n} p_ix_i^2 - \left[\sum_{i=1}^{n} p_ix_i\right]^2 \geqq 0$$

aneb

$$\text{s. h. } (x^2) \geqq [\text{s. h. } (x)]^2.$$

Uveďme příklad: Je-li x počet ok, který vyjde při hodu kostkou, je podle odst. 8c

$$\text{s. h. } (x) = \tfrac{7}{2};$$

střední hodnota veličiny x^2 je

$$\text{s. h. } (x^2) = \tfrac{1}{6}[1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36] = \tfrac{91}{6} = 15{,}16 \ldots$$

a tedy

$$\text{s. h. } (x^2) = 15{,}16 \ldots, \quad [\text{s. h. } (x)]^2 = \tfrac{49}{4} = 12{,}25.$$

12. Věta Bienayméova-Čebyševova. Budiž x veličina, která nabývá *nezáporných* hodnot $x_1, x_2, \ldots, x_n$ s resp. pravděpodobnostmi $p_1, p_2, \ldots, p_n$; $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Je-li α kladné číslo, je

$$\text{s. h. } (x^\alpha) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^\alpha.$$

Označme znakem $\sum_i'$ součet, jenž se vztahuje k těm a jen k těm indexům i, pro které platí, že $x_i \geqq A$; A je dané kladné číslo. Pak je

$$\text{s. h. } (x^\alpha) \geqq \sum_i' p_i x_i^\alpha \geqq A^\alpha \sum_i' p_i = A^\alpha P(A \leqq x),$$

kde $P(A \leqq x)$ značí pravděpodobnost, že $A \leqq x$, a tedy

$$\left.\begin{aligned} P(A \leqq x) &\leqq \frac{\text{s. h. } (x^\alpha)}{A^\alpha}, \\ \text{aneb} \qquad P(x < A) &\geqq 1 - \frac{\text{s. h. } (x^\alpha)}{A^\alpha}. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Jedna nebo druhá nerovnost (1) vyjadřuje *větu Bienayméovu-Čebyševovu* poněkud zobecněnou dle Chinčina.

Čebyšev původně uvažoval o případě, že $\alpha = 2$. Pak jest*)

$$
\left.
\begin{aligned}
P(A \leqq x) &\leqq \frac{\text{s. h. }(x^2)}{A^2},\\
P(x < A) &\geqq 1 - \frac{\text{s. h. }(x^2)}{A^2}.
\end{aligned}
\right\} \qquad (2)
$$

aneb

Těmto nerovnostem (2) dáme poněkud jinou úpravu tím, že zavedeme proměnnou x, která po případě nabývá též záporných hodnot. Pak bude

$$
\left.
\begin{aligned}
P(|x| \geqq A) &\leqq \frac{\text{s. h. }(x^2)}{A^2},\\
P(|x| < A) = P(-A < x < A) &\geqq 1 - \frac{\text{s. h. }(x^2)}{A^2}.
\end{aligned}
\right\} \qquad (3)
$$

Poslední rovnici lze psáti též v tvaru

$$P\left(\frac{|x|}{A} < 1\right) \geqq 1 - \text{s. h.}\left(\frac{x^2}{A^2}\right).$$

Důkaz nerovností (3) provede se zcela obdobně jako pro (2): Značí-li $\sum\limits_i''$ součet, jenž se vztahuje k těm a jen k těm indexům, pro které platí $|x_i| \geqq A$ je

$$\text{s. h. }(x^2) \geqq \sum_i{}'' p_i x_i^2 \geqq A^2 \sum_i{}'' p_i = A^2 P(x \geqq A),$$

z čehož plynou nerovnosti (3).

Píšeme-li pro stručnost

$$\text{s. h. }(x^2) = u^2,\ A = tu,\ t > 0,\ u > 0,$$

*) Dvě znaménka $\leqq$ v první nerovnosti (2) jsou nezávislá; pravděpodobnost $P(A \leqq x)$ že x je buď větší než A nebo rovna A je vyjádřena určitým číslem a toto číslo může býti buď menší než s. h. $(x^2) : A^2$, anebo může býti rovno s. h. $(x^2) : A^2$. Podobně je tomu ve druhém vzorci (2) i ve vzorcích (3) a (4).

je

$$\left.\begin{aligned} P(tu \leqq |x|) &\leqq \frac{1}{t^2}, \\ P(tu > |x|) &\geqq 1 - \frac{1}{t^2}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

a

Je-li u^2 střední hodnota veličiny x^2, je pravděpodobnost, že $|x| < tu$, buď rovna číslu $1 - \frac{1}{t^2}$, nebo větší.

KAPITOLA DRUHÁ

OPĚTOVANÉ VZÁJEMNĚ NEZÁVISLÉ POKUSY

13. Pravděpodobnost různých výsledků v řadě opakovaných vzájemně nezávislých pokusů. a) Budiž p pravděpodobnost, že zjev Z se dostaví jakožto výsledek nějakého pokusu; $1 - p$ pak je pravděpodobnost, že Z se nedostaví. Pokus, jehož výsledkem je Z, nazveme zkrátka zdařeným, v opačném případě nezdařeným.

Vykonáme postupně n vzájemně nezávislých pokusů; pro každý z nich je pravděpodobnost p, že se zdaří, stejná. Klademe si otázku: jak veliká je pravděpodobnost P_m, že v řadě n pokusů bude právě m zdařených a tedy $n - m$ nezdařených $(0 \leqq m \leqq n)$?

Očíslujme n pokusů pořadovými čísly $1, 2, \ldots, n$ a vyvolme nejprve určitých m z těchto čísel jakožto pořadová čísla pokusů, které se mají zdařiti. Pravděpodobnost, že v řadě n pokusů budou zdařené právě na těchto m předepsaných místech, má hodnotu

$$p^m(1 - p)^{n-m}.$$

Ale v otázce shora položené nepřihlížíme k pořadí, ve kterém se vyskytují pokusy zdařené nebo nezdařené, nýbrž jen k celkovému počtu m zdařených. Proto musíme násobiti hodnotu právě nalezenou počtem kombinací bez opakování m-té třídy z n prvků (viz odst. 3c). Tak dostaneme vzorec pro hledanou pravděpodobnost P_m:

$$P_m = \frac{n!}{m!(n - m)!} p^m (1 - p)^{n-m}, \tag{1}$$

který se někdy nazývá vzorcem Newtonovým. Pro $m = 0, 1, 2, \ldots n$ dává vzorec (1) $n + 1$ čísel $P_0, P_1, P_2, \ldots P_n$, která udávají pravděpodobnosti, že v řadě n pokusů se nezdaří ani jeden, resp. že se jich zdaří 1, 2, ..., n. Poznamenejme, že, pokud $0 \leq p \leq 1$ a pokud m a n jsou celá kladná čísla, je hodnota pravé strany (1) menší než jedna nebo nejvýše rovna jedné.

b) Poněvadž

$$\frac{n!}{n!(n-m)!} = (n)_m,$$

máme podle binomické formule

$$\begin{aligned}1 &= [p + (1-p)]^n = \\ &= p^n + (n)_1 p^{n-1}(1-p) + (n)_2 p^{n-2}(1-p)^2 + \ldots + \\ &+ (n)_k p^{n-k}(1-p)^k + \ldots + (1-p)^n.\end{aligned}$$

Jednotlivé členy tohoto výrazu představují pravděpodobnosti, že v řadě n pokusů bude $n, n-1, \ldots, n-k, \ldots, 0$ zdařených; součet všech těchto pravděpodobností se rovná jedné,

$$P_0 + P_1 + P_2 + \ldots + P_n = 1.$$

c) Položme si další otázku: Je-li n dáno, jak voliti m, aby pravděpodobnost P_m určená vzorcem (1) měla co největší hodnotu?

Vypočteme, neměníce čísel p a n, veličiny $P_0, P_1, \ldots, P_n$ a utvořme podíl u_m m-té veličiny k veličině $(m+1)$-té:

$$u_m = \frac{P_m}{P_{m+1}} = \frac{1-p}{p}\,\frac{m+1}{n-m}.$$

Hledaná hodnota indexu m, pro který P_m dosahuje největší hodnoty, má tu vlastnost, že $u_m < 1$ a že $u_{m-1} < 1$.

Z toho plynou dvě nerovnosti:

$$\frac{1-p}{p} \cdot \frac{m+1}{n-m} > 1, \frac{1-p}{p}\,\frac{m}{n-m+1} < 1,$$

které upraveny dají

$$(m+1)(1-p) > (n-m)p, \quad m(1-p) < (n-m+1)p,$$
aneb
$$np + p - 1 < m < np + p. \tag{2}$$

Číslo m je takto uzavřeno mezi dvěma mezemi, jichž rozdíl se rovná jedné. Není-li právě jedna z mezí rovna celému číslu (druhá mez je pak také celé číslo), je celé číslo m jednoznačně určeno nerovnostmi (2). Je-li n dosti veliké, takže lze čísla p a $p - 1$ vynechati vedle n, vychází z (2) np jakožto přibližná hodnota pro m (s chybou menší než 1). Je tedy, za předpokladu, že P_m má co největší hodnotu, přibližně np zdařených a přibližně $n(1-p)$ nezdařených pokusů. Výsledek výpočtu vyjádříme takto:

Ze všech případů,) které se mohou vyskytnouti, vykonáme-li pokus n-krát, má největší pravděpodobnost ten, ve kterém počet zdařených pokusů se má k počtu nezdařených jako p k $(1-p)$.*

14. Střední hodnota počtu zdařených pokusů. a) Počet m zdařených pokusů může míti hodnoty $m = 0, 1, 2, \ldots, n$; příslušné pravděpodobnosti jsou $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n$. Počet pokusů n považujeme za dané neproměnné číslo. Podle definice střední hodnoty (odst. 8) bude

$$\text{s. h.}\,(m) = \sum_{m=0}^{n} m \,.\, P_m.$$

Abychom ustanovili hodnotu tohoto součtu, položme $q = 1 - p$, $p + q = 1$, takže

$$1 = (p+q)^n =$$
$$= p^n + (n)_1 p^{n-1} q + (n)_2 p^{n-2} q^2 + \ldots + npq^{n-1} + q^n.$$

Derivujme tuto rovnici dle p a násobme pak veličinou p; vychází

$$\begin{aligned} n(p+q)^{n-1}p = np^n &+ (n-1)(n)_1\, p^{n-1}q + \\ &+ (n-2)\,(n)_2 p^{n-2}q + \ldots + npq^{n-1}, \end{aligned} \tag{1}$$

*) Při daném n je celkem $n + 1$ různých případů $(m = 0, 1, 2, \ldots, n)$.

aneb, zavedeme-li

$$(p + q) = 1,\ p^n = P_n,\ (n)_1 p^{n-1} q = P_{n-1}, \dots, npq^{n-1} = P_1,$$

$$np = nP_n + (n-1)P_{n-1} + \dots + P_1 = \sum_{m=0}^{n} m \,.\, P_m.$$

Je tedy

$$\text{s. h.}\ (m) = np. \tag{2}$$

b) Uvedeme ještě jiný důkaz rovnice (2) užívajíce methody, která se hodí i k jiným výpočtům.

Budiž $x^{(i)}$ hodnota přiřaděná i-tému pokusu takto:

$x^{(i)} = 1$, zdaří-li se i-tý pokus,

$x^{(i)} = 0$, nezdaří-li se i-tý pokus.

Podle toho je

$$m = x^{(1)} + x^{(2)} + \dots + x^{(n)},$$

neboť v součtu na pravé straně je tolik sčítanců rovných 1, kolik pokusů se podaří (t. j. m); ostatní sčítanci jsou rovni nule.

Podle věty dokázané v odst. 10a je

$$\text{s. h.}\ (m) = \text{s. h.}\ (x^{(1)} + x^{(2)} + \dots + x^{(n)}) = \sum_{i=1}^{n} \text{s. h.}\ (x^{(i)});$$

poněvadž pak

$$\text{s. h.}\ (x^{(i)}) = 1 \,.\, p + 0 \,.\, (1 - p) = p,$$

je

$$\text{s. h.}\ (m) = np. \tag{2}$$

Pro každý jednotlivý pokus má příslušná veličina $x^{(i)}$ hodnotu buď 1 nebo 0; její střední hodnota je p; součet všech n veličin $x^{(i)}$ má střední hodnotu n-krát větší, totiž np. Výsledek (2) vyjádříme větou:

V řadě n pokusů postupně provedených je střední hodnota počtu zdařených pokusů rovna np. (Srv. odst. 22.)

15. Střední hodnota druhé mocniny úchylky. Veličina $h = m - np$, která se rovná rozdílu mezi počtem m skutečně zdařených pokusů a mezi střední hodnotou np čísla m, nazývá se *úchylka.*

Střední hodnota úchylky se rovná nule, neboť

$$\text{s. h. } (m - np) = \text{s. h. } (m) - \text{s. h. } (np) = np - np = 0.$$

Počítejme střední hodnotu čtverce úchylky; podle definice je

$$\text{s. h. } (m - np)^2 = \sum_{m=0}^{n} P_m (m - np)^2.$$

Výpočet pravé strany provedeme dvojím způsobem:

a) Derivujme rovnici (1) odst. 14 dle p a násobme pak veličinou p. Vychází

$$p[n(n-1)(p+q)^{n-2}p + n(p+q)^{n-1}] =$$
$$= n^2p^n + (n-1)^2\,(n)_1 p^{n-1}q + \dots .$$

Dosadíme-li sem

$$p + q = 1,\ p^n = P_n,\ (n)_1 p^{n-1} q = P_{n-1}, \dots,$$

bude

$$p[n(n-1)p + n] = \sum_{m=0}^{n} m^2 P_m = \text{s. h. } (m^2).$$

K této rovnici připojíme další dvě (užíváme vztahu s. h. $(m) = np$)

$$-2n^2p^2 = -2 \text{ s. h. } (mnp),$$
$$n^2p^2 = \text{s. h. } (n^2p^2).$$

Sečtením všech tří rovnic vychází

$$\text{s. h. } (m - np)^2 = np(1 - p). \tag{1}$$

b) Druhý důkaz vzorce (1) provedeme užívajíce methody vyložené v odst. 14b. Budiž zase $x^{(i)}$ veličina přiřaděná i-tému pokusu; $x^{(i)} = 1$ nebo 0 podle toho, zdařil-li se i-tý pokus nebo ne. Máme

$$\text{s. h. } (m - np)^2 =$$
$$= \text{s. h. } (x^{(1)} + x^{(2)} + \ldots + x^{(n)} - np)^2 =$$
$$= \text{s. h. } [(x^{(1)} - p) + (x^{(2)} - p) + \ldots + (x^{(n)} - p)]^2 =$$
$$= \text{s. h. } [\sum_{i=1}^{n}(x^{(i)} - p)^2 + 2\sum_{i<k}\sum(x^{(i)} - p)(x^{(k)} - p)] =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \text{s. h. } (x^{(i)} - p)^2 + 2\sum_{i<k}\sum \text{s. h. } (x^{(i)} - p)(x^{(k)} - p); \qquad (2)$$

dvojnásobný součet se vztahuje ke všem dvojicím indexů i a k ($i < k$) utvořeným z čísel od 1 do n.

Poněvadž $x^{(i)}$ může nabýti jen hodnot 1 a 0 s pravděpodobnostmi p resp. $(1 - p)$, je

$$\text{s. h. } (x^{(i)} - p)^2 = (1 - p)^2 \,.\, p + (-p)^2(1 - p) = p(1-p)$$

a tedy

$$\sum_{i=1}^{n} \text{s. h. } (x^{(i)} - p)^2 = np(1 - p). \qquad (3)$$

Ještě je třeba vypočísti s. h. $(x^{(i)} - p)(x^{(k)} - p)$ pro $i \neq k$. Výpočet provedeme dvojím způsobem. *Předně* uvážíme, že součin $(x^{(i)} - p)(x^{(k)} - p)$ má (pro $x^{(i)} = 1, 0$; $x^{(k)} = 1, 0$) možné hodnoty

$$(1 - p)^2,\ (1 - p) \,.\, -p,\ -p \,.\, (1 - p),\ -p \,.\, -p$$

a že příslušné pravděpodobnosti jsou

$$p^2,\ p(1 - p),\ (1 - p)p,\ (1 - p)^2.$$

Násobíce každou z uvedených hodnot příslušnou pravděpodobností a sečtouce čtyři součiny tak utvořené dostáváme

$$\text{s. h. } (x^{(i)} - p)(x^{(k)} - p) = 0.$$

Druhý způsob výpočtu se zakládá na větě dokázané v odst. 10b: poněvadž výsledek i-tého pokusu nemá vlivu na podmínky k-tého pokusu, je

$$\text{s. h. } [(x^{(i)} - p)(x^{(k)} - p)] = \text{s. h. } (x^{(i)} - p) \,.\, \text{s. h. } (x^{(k)} - p),$$

a ježto

$$\text{s. h. } (x^{(i)} - p) = (1 - p)p + (-p)(1 - p) = 0,$$

máme zase

$$\text{s. h. } (x^{(i)} - p)(x^{(k)} - p) = 0.$$

Každý člen dvojitého součtu v (2) je tedy roven nule a vzhledem k (3) obdržíme zase

$$\text{s. h. } (m - np)^2 = np(1 - p); \tag{1}$$

tento vzorec udává *střední hodnotu čtverce úchylky*. Konáme-li jen jeden pokus ($n = 1$), je s. h. $(x^{(1)} - p)^2 = p(1 - p)$; konáme-li n pokusů, jest s. h. druhé mocniny úchylky n-krát větší.

c) Někdy se zavádí do počtu t. zv. *relativní úchylka,* t. j. úchylka $m - np$ dělená počtem pokusů: $(m : n) - p$.

Patrně je

$$\text{s. h.} \left(\frac{m}{n} - p\right)^2 = \frac{p(1 - p)}{n}. \tag{4}$$

16. Bernoulliova věta. Podle Čebyševovy věty (nerovnosti (3) odst. 12) je při $\varepsilon > 0$

$$P\left(-\varepsilon < \frac{m}{n} - p < \varepsilon\right) \geqq 1 - \frac{\text{s. h.} \left(\frac{m}{n} - p\right)^2}{\varepsilon^2}$$

a tedy vzhledem ke vzorci (4) odst. 15.

$$P\left(-\varepsilon < \frac{m}{n} - p < \varepsilon\right) \geqq 1 - \frac{p(1 - p)}{n\varepsilon^2}.$$

Z toho plyne dále, že

$$\lim_{n=\infty} P\left(-\varepsilon < \frac{m}{n} - p < \varepsilon\right) = 1,$$

což je právě Bernoulliova věta:

Pravděpodobnost, že relativní úchylka $(m : n) - p$ *nebude číselně větší než dané, jakkoli malé, číslo* ε, *blíží se jistotě, když počet pokusů* n *roste do nekonečna.*

Tato věta dokázaná ve spise Ars conjectandi Jakuba Bernoulliho vyšlém r. 1713 (osm let po autorově smrti), je jedním z hlavních výsledků počtu pravděpodobnosti; v odst. 24 pojednáme o tom, jak byla později zobecněna.

Připomeňme, že v uvedeném důkaze Bernoulliovy věty a vůbec ve výpočtech odst. 13—16 užíváme předpokladu o vzájemné nezávislosti jednotlivých pokusů; při každém pokuse je konstantní pravděpodobnost p, že se pokus zdaří, nezávislá na tom, jak dopadly pokusy ostatní.

17. Wallisova formule. V odst. 17—19 uvedeme důkazy některých pomocných vzorců, kterých se užívá v různých výpočtech pravděpodobností.

Budiž m celé kladné číslo a počítejme hodnotu integrálu

$$A_m = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^m x \, dx.$$

Integrujíce po částech obdržíme

$$A_m = \left[-\cos x \sin^{m-1} x\right]_0^{\frac{1}{2}\pi} + (m-1)\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{m-2} x \, . \cos^2 x \, dx;$$

výraz $[\ldots]_0^{\frac{1}{2}\pi}$ je roven nule. Píšeme-li $1 - \sin^2 x$ místo $\cos^2 x$, je

$$A_m = (m-1)\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{m-2} x \, dx - (m-1)\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^m x \, dx =$$

$$= (m-1)\, A_{m-2} - (m-1) A_m$$

a tedy

$$A_m = \frac{m-1}{m} A_{m-2},$$

$$A_{m-2} = \frac{m-3}{m-2} A_{m-4},$$

. . . .

Řada rovnic, které takto dostaneme snižujíce index m postupně o dvě jednotky, končí, je-li $m = 2p$ sudé číslo, rovnicí

$$A_0 = \int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\pi;$$

je-li $m = 2p + 1$ liché číslo, končí řada rovnicí

$$A_1 = \int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin x \,\mathrm{d}x = 1.$$

Znásobme všechny rovnice; v případě sudého m dostaneme

$$A_{2p} = \frac{2p-1}{2p} \cdot \frac{2p-3}{2p-2} \cdots \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2}\pi$$

a v případě lichého m

$$A_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} \cdot \frac{2p-2}{2p-1} \cdots \tfrac{2}{3}.$$

Poněvadž uvnitř integračního intervalu $(0, \frac{1}{2}\pi)$ platí

$$\sin x < 1,\ \sin^{m+1} x < \sin^m x,$$

zmenšuje se A_m s rostoucím m, takže

$$A_{2p+1} < A_{2p} < A_{2p-1}$$

čili

$$\frac{2p}{2p+1} \frac{2p-2}{2p-1} \cdots \tfrac{2}{3} < \frac{2p-1}{2p} \frac{2p-3}{2p-2} \cdots \tfrac{1}{2}\, \tfrac{1}{2}\pi <$$

$$< \frac{2p-2}{2p-1} \cdot \frac{2p-4}{2p-3} \cdots \tfrac{2}{3}.$$

Po úpravě dostaneme

$$\frac{2^2 \cdot 4^2 \ldots (2p-2)^2 (2p)^2}{3^2 \cdot 5^2 \ldots (2p-1)^2 (2p+1)} < \tfrac{1}{2}\pi < \frac{2^2 \cdot 4^2 \ldots (2p-2)^2 \cdot 2p}{3^2 \cdot 5^2 \ldots (2p-1)^2}.$$

Položme

$$F(p) = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \quad \ldots 2p \cdot 2p}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \ldots (2p - 1)(2p + 1)};$$

předešlé nerovnosti dají se napsati takto:

$$F(p) < \tfrac{1}{2}\pi < F(p) \cdot \frac{2p + 1}{2p}. \tag{1}$$

Funkce $F(p)$ roste, roste-li p, neboť

$$\frac{F(p + 1)}{F(p)} = \frac{(2p + 2)(2p + 2)}{(2p + 1)(2p + 3)} = \frac{4p^2 + 8p + 4}{4p^2 + 8p + 3} > 1;$$

poněvadž je stále menší než $\frac{1}{2}\pi$, má limitu pro $\lim p = \infty$. Vzhledem k (1) je $\lim\limits_{p=\infty} F(p) = \frac{1}{2}\pi$

nebo

$$\lim_{p=\infty} \left[\frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \ldots 2p \cdot 2p}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2p - 1) \cdot (2p + 1)} \right] = \tfrac{1}{2}\pi. \tag{2}$$

To je *Wallisova formule* z r. 1655.

18. Stirlingova formule. Budiž n celé kladné číslo. Hodnota výrazu $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots . n = n!$ dá se vyjádřiti pro případ, že n je veliké číslo, přibližnou formulí, kterou máme odvoditi. Položme

$$\varphi(n) = \frac{n!}{\sqrt{2\pi} \cdot e^{-n}\, n^{n+\frac{1}{2}}}.$$

Ze vzorců

$$[\varphi(n)]^4 = \frac{(n!)^4}{4\pi^2\, e^{-4n}\, n^{4n+2}},\ [\varphi(2n)]^2 = \frac{[(2n)!]^2}{2\pi\, e^{-4n}\, n^{4n+1}\, 2^{4n+1}}$$

plyne, že

$$\frac{[\varphi(n)]^4}{[\varphi(2n)]^2} = \frac{(2n + 1) \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \ldots (2n) \cdot (2n)}{\pi \cdot n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \ldots (2n - 1) \cdot (2n + 1)}.$$

Podle Wallisovy formule (2) odst. 17. má pravá strana této rovnice za limitu 1, roste-li n do nekonečna. Je tedy

$$\lim_{n=\infty} \frac{[\varphi(n)]^4}{[\varphi(2n)]^2} = 1 \text{ a z toho } \lim_{n=\infty} \frac{[\varphi(n)]^2}{\varphi(2n)} = 1. \qquad (1)$$

Dále je

$$\frac{\varphi(n)}{\varphi(n+1)} = \frac{n!}{(n+1)!} \frac{e^{-n-1}(n+1)^{n+\frac{3}{2}}}{e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}}} = e^{-1}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}},$$

$$\lg \frac{\varphi(n)}{\varphi(n+1)} = -1 + (n + \tfrac{1}{2}) \lg\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Rozviňme $\lg\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ v Maclaurinovu řadu postupující podle mocnin proměnné $\frac{1}{n}$. Vychází

$$(n + \tfrac{1}{2}) \lg\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \sum \frac{(-1)^k}{(k+1)\, n^k} + \sum \frac{(-1)^{k+1}}{2k\, n^k},$$

$$\lg \frac{\varphi(n)}{\varphi(n+1)} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{n^k}\left[\frac{1}{k+1} - \frac{1}{2k}\right] =$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k (k-1)}{n^k\, 2k\,(k+1)} = \frac{1}{12n^2} - \frac{1}{12n^3} + \ldots$$

Členy této řady se zmenšují co do absolutní hodnoty, roste-li index k, a mají střídavá znamení. Proto platí

$$0 < \lg \frac{\varphi(n)}{\varphi(n+1)} < \frac{1}{12n^2},\ 1 < \frac{\varphi(n)}{\varphi(n+1)} < e^{\frac{1}{12n^2}}.$$

Připojme k poslední nerovnosti dalších $(n - 1)$, které dostaneme dosazujíce postupně $(n + 1)$, $(n + 2)$, ..., $(2n - 1)$ na místo n:

$$1 < \frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n+2)} < e^{\frac{1}{12(n+1)^2}}$$

$$1 < \frac{\varphi(2n+1)}{\varphi(2n)} \quad e^{\frac{1}{12(2n-1)^2}}.$$

Znásobme všech těchto n nerovností; mocnitel čísla e napravo bude

$$\frac{1}{12}\left[\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)^2}\right] < n\,\frac{1}{12n^2} = \frac{1}{12n},$$

takže

$$1 < \frac{\varphi(n)}{\varphi(2n)} < e^{\frac{1}{12n}}, \quad \lim_{n=\infty} \frac{\varphi(n)}{\varphi(2n)} = 1.$$

Dělme výraz, jenž stojí za znamením lim v poslední rovnici, výrazem, jenž se vyskytuje v rovnici (1). Pro $\lim n = \infty$ vychází $\lim\limits_{n=\infty} \varphi(n) = 1$ aneb, vypíšeme-li $\varphi(n)$,

$$\lim_{n=\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi}\, e^{-n}\, n^{n+\frac{1}{2}}} = 1. \tag{2}$$

Je-li tedy n veliké číslo, můžeme nahraditi $n!$ asymptotickým výrazem:

$$n! \sim \sqrt{2\pi}\, e^{-n}\, n^{n+\frac{1}{2}}.$$

Formule (2) pochází od *Stirlinga* (1730). Důkaz na základě Wallisovy formule zde uvedený pochází od *J. A. Serreta.*

19. Laplaceův integrál a jiné pomocné vzorce. a) Abychom určili hodnotu L Laplaceova integrálu

$$L = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx,$$

zavedeme v rovině Oxy polární souřadnice. Druhou mocninu integrálu L považujeme za dvojnásobný integrál:

$$L^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy$$

vztažený k celé rovině Oxy. Polární souřadnice: průvodič r a polární úhel φ souvisí s x, y podle rovnic

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi;\ \frac{D(x, y)}{D(r, \varphi)} = r;$$

element plošného obsahu v polárních souřadnicích je roven $r\,dr\,d\varphi$ (je to obsah čtyrúhelníka omezeného jednak dvěma průvodiči příslušnými polárním úhlům φ a $\varphi + d\varphi$, jednak dvěma kruhovými oblouky o společném středu 0 a o poloměrech r a $r + dr$). Je tedy

$$L^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2}\, r\, dr\, d\varphi,$$

kterýžto integrál je roven součinu dvou integrálů

$$\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \quad \text{a} \quad \int_0^{\infty} e^{-r^2}\, r\, dr = \tfrac{1}{2};$$

je tedy $L^2 = \pi$ a z toho plyne hledaný vzorec pro L:

$$L = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}.$$

Poněvadž e^{-x^2} je sudá funkce, je

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}\, dx = \int_0^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}. \qquad (1)$$

b) Abychom ustanovili hodnotu integrálu

$$I_r = \int_0^{\infty} e^{-x^2}\, x^r\, dx,$$

kde r je libovolné celé kladné číslo, vyjděme z rovnice platné pro každé $r > 2$:

$$I_r = \left[-\tfrac{1}{2}\, e^{-x^2}\, x^{r-1}\right]_0^{\infty} + \frac{r-1}{2}\int_0^{\infty} e^{-x^2}\, x^{r-2}\, dx$$

aneb

$$I_r = \frac{r-1}{2}\, I_{r-2}.$$

Je-li r sudé, $r = 2m$, je

$$I_{2m} = \frac{2m-1}{2} \cdot \frac{2m-3}{2} \cdots \tfrac{1}{2} \cdot I_0;$$

I_0 jest integrál (1), tedy

$$I_{2m} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2m-1)}{2^{m+1}} \sqrt{\pi}. \tag{2}$$

Pro liché r, $r = 2m + 1$, je

$$I_{2m+1} = \frac{2m}{2} \cdot \frac{2m-2}{2} \cdots \tfrac{2}{2} \cdot I_1$$

a poněvadž

$$I_1 = \int_0^\infty e^{-x^2}\, x \,\mathrm{d}x = \left[-\frac{e^{-x^2}}{2}\right]_0^\infty = \tfrac{1}{2},$$

vychází

$$I_{2m+1} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2m)}{2^{m+1}} = \frac{m!}{2}. \tag{3}$$

20. Přibližný vzorec pro P_m. Zavedení spojité proměnné. a) Podle Newtonova vzorce (viz (1) v odst. 13.) je

$$P_m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}\, p^m (1-p)^{n-m}$$

pravděpodobnost, že v řadě n pokusů bude m zdařených. Zavedeme-li úchylku h rovnicí

$$m = np + h,$$

nabude hořejší vzorec tvaru

$$P_m = \frac{n!}{(np+h)!\,(n-np-h)!}\, p^{np+h} (1-p)^{n-np-h}.$$

Předpokládejme, že n je tak veliké číslo, že lze faktoriály nahraditi přibližnými výrazy podle Stirlingovy formule (odst. 18.). Po úpravě dostaneme tuto přibližnou hodnotu pro P_m:

$$P_m \doteq \frac{\left(1+\frac{h}{np}\right)^{-np-h-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{h}{n-np}\right)^{-n+np+h-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi\, np\,(1-p)}}.$$

Položme

$$A=\left(1+\frac{h}{np}\right)^{-np-h-\frac{1}{2}},\ B=\left(1-\frac{h}{n-np}\right)^{-n+np+h-\frac{1}{2}}$$

a rozviňme $\lg A$ a $\lg B$ v Maclaurinovy řady postupující podle mocnin veličiny $\frac{h}{n}$, při čemž budeme předpokládati, že $\frac{h}{\sqrt{n}}$ *je menší než určité konečné číslo* a že tedy veličiny

$$\frac{h}{n}=\frac{h}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}},\ \frac{h^3}{n^2}=\left(\frac{h}{\sqrt{n}}\right)^3\frac{1}{\sqrt{n}}$$

jsou libovolně malé, roste-li n neomezeně. Tak dostaneme

$$\lg A=-\left(np+h+\tfrac{1}{2}\right)\lg\left(1+\frac{h}{np}\right)=$$

$$=\left(-np-h-\tfrac{1}{2}\right)\left(\frac{h}{np}-\tfrac{1}{2}\frac{h^2}{n^2p^2}+\tfrac{1}{3}\frac{h^3}{n^3p^3}-\ldots\right)=$$

$$=-h-\tfrac{1}{2}\frac{h^2}{np}+\ldots$$

$$\lg B=\left(-n+np+h-\tfrac{1}{2}\right)\lg\left(1-\frac{h}{n-np}\right)=$$

$$=\left(-n+np+h-\tfrac{1}{2}\right)\left(-\frac{h}{n-np}-\tfrac{1}{2}\frac{h^2}{(n-np)^2}-\ldots\right)=$$

$$=h-\frac{h^2}{2n(1-p)}+\ldots$$

V obou řadách jsme podrželi (vedle členu h nekonečné velkého) jen konečné veličiny; vynechané členy jsou nekonečně malé. Máme tedy

$$\lg(AB) = -\frac{h^2}{2np(1-p)}, \; AB = e^{-\frac{h^2}{2np(1-p)}}$$

a

$$P_m = \frac{e^{-\frac{h^2}{2np(1-p)}}}{\sqrt{2\pi \, np(1-p)}}. \tag{1}$$

Z tohoto vzorce plyne, že pravděpodobnost P_m dosahuje maximální hodnoty v případě, že $h = 0$, t. j. když $m = np$; v tom případě je počet zdařených pokusů ($= np$) v poměru $p : (1 - p)$ k počtu nezdařených (srv. odst. 13c) a máme

$$P_{m_{max}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi \, np(1-p)}} \tag{2}$$

Roste-li úhrnný počet pokusů n do nekonečna, konverguje i tato maximální hodnota pravděpodobnosti P_m k nule.

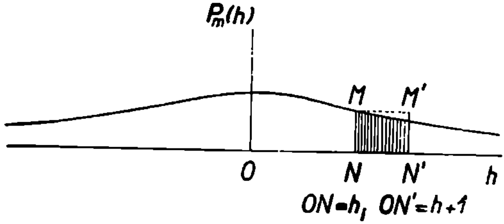
b) Ve vzorci $h = m - np$ může m nabývati hodnot $0, 1, 2, \ldots n$ a tedy h jen hodnot $-np, -np+1, \ldots, -np+n$. Ale k některým výpočtům se nám hodí považovati ve vzorci (1) h za spojitě proměnnou veličinu.

Pro veliké n je nejen P_m, vyjádřená přibližně pravou stranou vzorce (1), malá, nýbrž také derivace podle h je malá, neboť

$$\frac{dP_m}{dh} = -\frac{h}{\sqrt{2\pi}\,[np(1-p)]^{\frac{3}{2}}} \, e^{-\frac{h^2}{2np(1-p)}}.$$

Tato okolnost dovoluje vyjádřiti P_m jakožto plochu. V diagramu (obr. 1), jenž udává P_m jakožto funkci proměnné h, je, poněvadž tečna křivky má přibližně nulový sklon k ose Oh, (vyčárkovaná) plocha omezená dvěma pořadnicemi, příslušnými úsečkám h a $h + 1$, přibližně rovna obdélníku

$NN'M'M$ o základně $= 1$ a o výšce $NM = P_m(h)$. P_m je číselně rovna ploše obdélníka a tedy také velmi přibližně oné vyčárkované ploše. Pravděpodobnost, že úchylka jest rovna buď h_1, nebo $h_1 + 1$, nebo $h_1 + 2, \ldots$ nebo h_2 (jinými slovy: že jest obsažena v mezích h_1 až h_2), rovná se součtu $P_m(h_1) +$



Obr. 1.

$+ P_m(h_1 + 1) + \ldots + P_m(h_2)$. Tento součet se dá nahraditi součtem obdélníků takových jako je $NN'M'M$ anebo součtem vyčárkovaných ploch, který se rovná integrálu ($h_1 <$ $< h_2$)

$$\int_{h_1}^{h_2+1} \frac{e^{-\frac{h^2}{2np(1-p)}}}{\sqrt{2\pi\, np\,(1-p)}}\, dh.$$

Pro případ, že n a h_2 jsou velká čísla, můžeme psáti h_2 na místo $h_2 + 1$ a máme vzorec

$$P(h_1 < m - np < h_2) = \int_{h_1}^{h_2} \frac{e^{-\frac{h^2}{2np(1-p)}}}{\sqrt{2\pi\, np\,(1-p)}}\, dh. \qquad (3)$$

Výsledek výpočtů shrneme touto větou:

Budiž p konstantní pravděpodobnost, že nějaký pokus se zdaří, n počet vzájemně nezávislých pokusů, m počet zdařených mezi nimi a tedy np střední hodnota počtu zdařených pokusů; pravděpodobnost, že úchylka $m - np$ jest obsažena v mezích

h_1 a h_2 ($h_1 < h_2$), jest udána přibližně vzorcem (3) a to tím přesněji, čím je n větší.

Připomeňme ještě předpoklady, za kterých byla odvozena formule (3); n je tak veliké, že faktoriály v původní formuli pro P_m (viz (1), odst. 13.) se dají nahraditi přibližnými výrazy podle Stirlingovy formule; $\frac{h}{\sqrt{n}}$ zůstává menší než určité konečné číslo; h_2 je tak veliké, že v horní mezi integrálu (3) můžeme psáti h_2 místo $h_2 + 1$.

Počítáme-li podle (3) pravděpodobnost, že úchylka, $m - np$ jest obsažena v mezích $-\infty \ldots + \infty$, vychází

$$P(-\infty < m - np < +\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{h^2}{2np(1-p)}}}{\sqrt{2\pi\, np(1-p)}} \mathrm{d}h$$

a zavedeme-li integrační proměnnou u rovnicí

$$u\sqrt{2np(1-p)} = h, \quad \sqrt{2np(1-p)}\, \mathrm{d}u = \mathrm{d}h,$$

je (viz odst. 19a)

$$P(-\infty < m - np < +\infty) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} \mathrm{d}u = 1.$$

Tento výpočet však není přesný, neboť vzorec (3) platí jen pro velké n; h nemůže býti větší než n, zde se však integruje podle h, při konstantním n, od $-\infty$ do $+\infty$. K přesnějším výpočtům se doporučuje užívati původní Newtonovy formule (1) odst. 13. pro P_m.

c) Jakožto příklad uveďme pokusy s mincí. Padne-li na líc, považujeme pokus za zdařený, padne-li na rub, za nezdařený. Poněvadž je zde

$$p = 1 - p = \tfrac{1}{2},$$

platí

$$np = \frac{n}{2},\; h = m - \frac{n}{2},\; P_m = \frac{n!}{(\frac{1}{2}n + h)!\,(\frac{1}{2}n - h)!} \cdot \frac{1}{2^n}.$$

Následující tabulky udávají hodnotu P_m jakožto funkci veličiny h a to pro $n = 2, 4, 6, 8$:

$n = 2$

h	-1	0	1
P_m	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$n = 4$

h	-2	-1	0	1	2
P_m	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

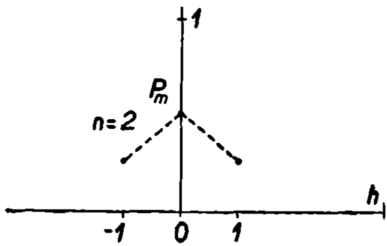
$n = 6$

h	-3	-2	-1	0	1	2	3
P_m	$\frac{1}{64}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{20}{64}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{1}{64}$

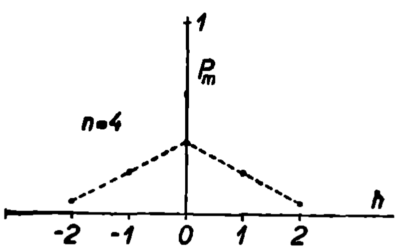
$n = 8$

h	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
P_m	$\frac{1}{256}$	$\frac{8}{256}$	$\frac{28}{256}$	$\frac{56}{256}$	$\frac{70}{256}$	$\frac{56}{256}$	$\frac{28}{256}$	$\frac{8}{256}$	$\frac{1}{256}$

Příslušné čtyři diagramy (obr. 2. až 5.)

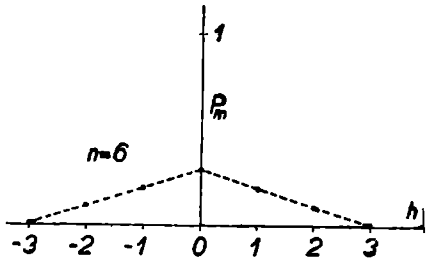


Obr. 2.

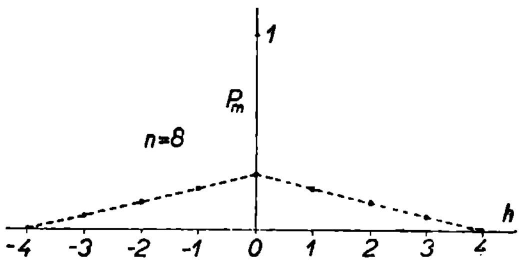


Obr. 3.

ukazují, jak se lomená čára, spojující po dvou sousední body diagramu, blíží — roste-li n — ke křivce, která probíhá velmi blízko osy Oh a která má také všude velmi malý sklon (srv. hořejší graf v odst. b), obr. 1.).



Obr. 4.



Obr. 5.

21. Laplaceova věta. Číselné příklady. a) Rovnice (3) odst. 20. vyjadřuje t. zv. Laplaceovu větu (kterou však znal již dříve Bayes). K odhadu pravděpodobností, že úchylka je v daných mezích, upravíme onu rovnici na jednodušší tvar. Za tím účelem zavedeme pomocnou funkci proměnné t:

$$\Theta(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-x^2}\, dx,$$

jejíž hodnoty najdeme v tabulkách. Uveďme výtah z tabulek:

t	$\Theta(t)$	t	$\Theta(t)$
0,00	0,0000000	1,20	0,9103140
0,20	0,2227025	1,50	0,9661052
0,40	0,4283922	2,00	0,9953223
0,50	0,5204999	3,00	0,9999779
1,00	0,8427008	4,00	0,9999999847

$\Theta(t)$ se tedy velmi rychle blíží jedné, roste-li t.

Zaveďme do rovnice (3) odst. 20. integrační proměnnou x rovnicí

$$x\sqrt{2np\,(1-p)} = h, \quad \sqrt{2np\,(1-p)}\,.\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}h;$$

pro $h_1 < h_2$ a pro veliké n dostáváme

$$P(h_1 < m - np < h_2) = \\ = \tfrac{1}{2}\Theta\left(\frac{h_2}{\sqrt{2np\,(1-p)}}\right) - \tfrac{1}{2}\Theta\left(\frac{h_1}{\sqrt{2np\,(1-p)}}\right). \tag{1}$$

Klademe-li $h_1 = 0$, $h_2 = h > 0$, je

$$P\,(0 < m - np < h) = \tfrac{1}{2}\Theta\left(\frac{h}{\sqrt{2np\,(1-p)}}\right);$$

klademe-li $-h_1 = h_2 = h > 0$, je

$$P\,(-h < m - np < h) = \Theta\left(\frac{h}{\sqrt{2np\,(1-p)}}\right)$$

nebo

$$P\,(|m - np| < h) = \Theta\left(\frac{h}{\sqrt{2np\,(1-p)}}\right).$$

b) Píšeme-li

$$t_1 = \frac{h_1}{\sqrt{2np(1-p)}}, \quad t_2 = \frac{h_2}{\sqrt{2np(1-p)}},$$

vychází Laplaceova věta (1) v této úpravě (pro $t_1 < t_2$):

$$P[np + t_1\sqrt{2np(1-p)} < m < np + t_2\sqrt{2np(1-p)}] =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}\,dx. \tag{2}$$

Věta (2) platí přibližně pro velké hodnoty čísla n; přesně vzato je

$$\lim_{n=\infty} P[np + t_1\sqrt{2np(1-p)} < m < np + t_2\sqrt{2np(1-p)}] =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}\,dx. \tag{2a}$$

Pravděpodobnost, že v řadě n pokusů bude počet zdařených obsažen v mezích

$$np - t\sqrt{2np(1-p)} \quad \text{a} \quad np + t\sqrt{2np(1-p)}$$

rovná se $\Theta(t)$ pro velké n.

Tato pravděpodobnost závisí tedy jen na čísle t a nikoli na p ani na n.

Volme za t postupně čísla 0,476936, 1, 2, 3, 4. Z tabulek funkce $\Theta(t)$ najdeme tyto pravděpodobnosti:

Následující tabulka obsahuje v levém sloupci meze pro úchylku h a v pravém sloupci příslušné hodnoty pravděpodobnosti, že h je v těch mezích:

$$\left.\begin{array}{r|l} np \pm 0{,}4769\,.\,\sqrt{2np(1-p)} & 0{,}5 \\ np \pm \sqrt{2np(1-p)} & 0{,}8427 \\ np \pm 2\sqrt{2np(1-p)} & 0{,}9953 \\ np \pm 3\sqrt{2np(1-p)} & 0{,}99998 \end{array}\right\} \tag{3}$$

Příklad 1.: Házíme penízem; pravděpodobnost, že padne líc, je $p = \frac{1}{2}$. Dosazujeme-li do předešlých čtyř řádků za n postupně

$$n = 20\,000;\ 2\,000\,000;\ 200\,000\,000,$$

takže

$$\sqrt{2np(1-p)} = 100;\ 1000;\ 10\,000,$$

dostaneme tuto tabulku:

Meze, v nichž má býti obsažen počet m zdařených pokusů			Příslušná pravděpodobnost
pro $n = 2.10^4$	pro $n = 2.10^6$	pro $n = 2.10^8$	
$10^4 \pm 48$	$10^6 \pm 476$	$10^8 \pm 4\,769$	0,5
$10^4 \pm 100$	$10^6 \pm 1000$	$10^8 \pm 10\,000$	0,8427 ..
$10^4 \pm 200$	$10^6 \pm 2000$	$10^8 \pm 20\,000$	0,9953 ..
$10^4 \pm 300$	$10^6 \pm 3000$	$10^8 \pm 30\,000$	0,99998 ..

Příklad 2.: Házíme kostkou; pravděpodobnost, že padne jedno oko, je $p = \frac{1}{6}$. Zase dosazujeme postupně $n = 18\,000$; $1\,800\,000$; $180\,000\,000$, takže $\sqrt{2np(1-p)} \doteq 71,\ 707,\ 7071$ (poněvadž $\sqrt{50} = 7{,}071, \ldots$) a dostaneme tyto výsledky:

Meze, v nichž má býti obsažen počet m zdařených pokusů			Příslušná pravděpodobnost
pro $n = 18.10^3$	pro $n = 18.10^5$	pro $n = 18.10^7$	
$3.10^3 \pm 34$	$3.10^5 \pm 337$	$3.10^7 \pm 3\,372$	0,5
$3.10^3 \pm 71$	$3.10^5 \pm 107$	$3.10^7 \pm 7\,071$	0,8427
$3.10^3 \pm 141$	$3.10^5 \pm 1\,414$	$3.10^7 \pm 14\,142$	0,9953
$3.10^3 \pm 212$	$3.10^5 \pm 2\,121$	$3.10^7 \pm 21\,213$	0,99998

22. Srovnání theoretických vzorců s výsledky pokusů. Vzorce uvedené v předešlém odstavci dají se kontrolovati, srovnáme-li je s výsledky skutečně provedených pokusů. Rozdělme všechny pokusy v s serií; provedeme nejprve n pokusů prvé serie, mezi kterými bude m_1 zdařených, pak n pokusů druhé serie, mezi kterými bude m_2 zdařených atd. Předpokládáme, že pravděpodobnost p, že se jeden pokus zdaří, je konstantní, že jsou pokusy nezávislé jeden na druhém a že daná čísla n (počet pokusů v jedné serii) a s (počet serií) jsou veliká. Srovnání theorie s pokusy je zajímavé hlavně v těchto věcech:

a) Empirická (t. j. odvozená ze statistiky pokusů) střední hodnota počtu zdařených pokusů v jedné serii je arithmetický střed čísel m_i:

$$\text{s. h}'.(m) = \frac{m_1 + m_2 + \ldots + m_s}{s}; \tag{1}$$

s. h′. značí empirickou střední hodnotu. Toto číslo se má přibližně shodovati s theoretickou střední hodnotou s. h. (m), která je rovna np (odst. 14a).

b) Empirická střední hodnota čtverce $(m - np)^2$ úchylky pro jednu serii je

$$\text{s. h}'.(m - np)^2 = \frac{(m_1 - np)^2 + (m_2 - np)^2 + \ldots + (m_s - np)^2}{s}. \tag{2}$$

Toto číslo má se shodovati s theoretickou střední hodnotou čtverce úchylky, která je podle rovnice (1) odst. 15. s. h. $(m - np)^2 = np(1 - p)$. Střední hodnota čtverce relativní úchylky (viz odst. 15c) je

$$\text{s. h}'.\left(\frac{m}{n} - p\right)^2 = \frac{\left(\frac{m_1}{n} - p\right)^2 + \left(\frac{m_2}{n} - p\right)^2 + \ldots + \left(\frac{m_s}{n} - p\right)^2}{s}$$

theoretická hodnota je s. h. $\left(\frac{m}{n} - p\right)^2 = \frac{p(1-p)}{n}$.

c) Napišme úchylky pro každou z s serií:

$$m_1 - np,\ m_2 - np,\ \ldots,\ m_s - np$$

a spočítejme, kolik z nich jest obsaženo v mezích h_1 až h_2; toto číslo dělené počtem s serií, udává empirickou hodnotu pravděpodobnosti, že úchylka je v oněch mezích a má se shodovati s theoretickou hodnotou té pravděpodobnosti (vzorec (1) odst. 21.).

Jinak vyjádřeno: theoretický počet serií, ve kterých jest odchylka obsažena v mezích h_1 až h_2, je podle citovaného vzorce

$$\frac{s}{2}\left[\Theta\left(\frac{h_2}{\sqrt{2np(1-p)}}\right) - \Theta\left(\frac{h_1}{\sqrt{2np(1-p)}}\right)\right]. \tag{3}$$

Pro $h_1 = -h_2 = h > 0$ bude

$$s \,.\, \Theta\left(\frac{h}{\sqrt{2np(1-p)}}\right)$$

theoretický počet těch serií, u nichž absolutní hodnota úchylky je menší než h.

d) Očekáváme, že čísla $m_1, m_2, \ldots, m_s$ budou se lišiti od np nejvýše asi o $\pm 3\sqrt{2np(1-p)}$, neboť podle čtvrtého vzorce (3) odst. 21 je jen nepatrná pravděpodobnost, že m by se lišilo od np více než o $\pm 3\sqrt{2np(1-p)}$.

Statistika o výsledcích velkého počtu pokusů může sloužiti, podle toho, co bylo uvedeno v tomto odstavci, ke kontrole theoretických vzorců o pravděpodobnostech a středních hodnotách.

23. Zobecnění Laplaceovy věty. Vyjdeme z Laplaceovy věty vyjádřené rovnicí (2a) odst. 21. (pro $t_1 < t_2$):

$$\lim_{n=\infty} P[np + t_1 \sqrt{2np(1-p)} < m < np + t_2 \sqrt{2np(1-p)}] =$$
$$= \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} dx. \qquad (1)$$

Veličina m (počet zdařených pokusů) dá se podle odst. 14b pojímati jakožto součet n veličin: $x^{(1)} + x^{(2)} + \ldots + x^{(n)}$; $x^{(i)}$ závisí na výsledku i-tého pokusu.

Laplaceova věta nazývá se někdy také věta o limitě pravděpodobnosti, poněvadž se vztahuje k limitě pravděpodobnosti (pro $n = \infty$), že tento součet jest obsažen v mezích závislých určitým způsobem na n. S tohoto stanoviska lze Laplaceovu větu zobecniti jak následuje.

Předpokládejme, že konáme řadu pokusů vzájemně nezávislých, takže výsledek některého z nich nemá vlivu na pravděpodobnosti, se kterými se očekávají výsledky jiných. i-tému pokusu přiřadíme veličinu $x^{(i)}$, která může nabývati různých hodnot, podle toho k jakému zjevu vedl onen pokus. Nechť jsou $E_1^{(i)}$, $E_2^{(i)}$, ... zjevy, které se mohou vyskytnouti jakožto výsledek i-tého pokusu a nechť nabude $x^{(i)}$ hodnoty $\alpha_k^{(i)}$, vede-li i-tý pokus ke zjevu $E_k^{(i)}$. Pravděpodobnost, že se $E_k^{(i)}$ vyskytne, budiž $p_k^{(i)}$; platí, že $p_k^{(i)} = P(x^{(i)} = \alpha_k^{(i)})$, a máme

$$a^{(i)} = \text{s. h. } (x^{(i)}) = \sum_k p_k^{(i)} \alpha_k^{(i)}, \quad \sum_k p_k^{(i)} = 1;$$

součty se vztahují ke všem možným eventualitám i-tého pokusu (součet má tolik členů, kolik má i-tý pokus různých možných výsledků).

Zaveďme do počtu *absolutní moment* $d_i^{(\delta)}$ stupně δ ($\delta > 0$) veličiny $x^{(i)}$:

$$d_i^{(\delta)} = \text{s. h. } |x^{(i)} - a^{(i)}|^\delta = \sum_k p_k^{(i)} |\alpha_k^{(i)} - a^{(i)}|^\delta.$$

Absolutní moment $d_i^{(2)}$ druhého stupně je totožný se střední hodnotou čtverce úchylky.

$$\mathrm{d}_i^{(2)} = \text{s. h. } (x^{(i)} - a^{(i)})^2 = \sum_k p_k^{(i)} (\alpha_k^{(i)} - a^{(i)})^2.$$

Úchylka se zde počítá tak, že se každá veličina $x^{(i)}$ odečítá od své střední hodnoty $a^{(i)}$, která sama závisí na i (v jednoduchém případě 15b) byla s. h. všech veličin $x^{(i)}$ stejná, rovná p).

Zobecniti Laplaceovu větu znamená nalézti podmínky, za kterých platí (pro $t_1 < t_2$)

$$\lim_{n=\infty} P\left[t_1 \sqrt{2\sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}_i^{(2)}} < \sum_{i=1}^{n}(x^{(i)} - a^{(i)}) < t_2 \sqrt{2\sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}_i^{(2)}}\right] = \int_{t_1}^{t_2} \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}\,\mathrm{d}x. \tag{2}$$

Rovnice (1) je speciálním případem rovnice (2). Připustíme-li totiž, že $x^{(i)}$ může nabýti (jako v odst. 14 a 15) jen hodnot 1 až 0 a to s konstantními pravděpodobnostmi p resp. $(1 - p)$, bude

$$a^{(i)} = p, \sum_{i=1}^{n} x^{(i)} = m, \mathrm{d}_i^{(2)} = \text{s. h. } (x^{(i)} - p)^2 = p(1 - p),$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x^{(i)} - a^{(i)}) = m - np, \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}_i^{(2)} = np\,(1 - p) \text{ (podle odst. 15);}$$

rovnice (2) pak přejde v (1).

Laplace se zabýval myšlenkou odvoditi obecný zákon pro pravděpodobnost, že součet velikého počtu n náhodných veličin jest obsažen v určitých mezích (závislých na n). Dokázal větu ve zvláštním případě (1). Obtíž zobecnění je v tom, že třeba voliti pravděpodobnosti $p^{(i)}$ i hodnoty $\alpha_k^{(i)}$ tak, aby bylo vyhověno rovnici (2). Čebyšev učinil v tomto směru další kroky, a ačkoli nejsou jeho výsledky úplné, ukázaly se jeho methody cennými. Čebyševovy důkazy zdokonalil Markov. Později Ljapunov dokázal Laplaceovu větu v obecnějším znění než Markov. Nové výsledky a nové methody v tomto oboru jsou uvedeny v knihách: *A. Khintchine* (Chinčin): Asymptotische Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Berlin 1933); *S. Bernštejn*: Těorija věrojatnostěj (Moskva 1946, 4. vyd.).

24. Zákon velkých čísel. Markovova věta. a) Konáme neomezenou řadu pokusů; výsledek i-tého pokusu určuje hodnotu veličiny $x^{(i)}$. Možné hodnoty veličiny $x^{(i)}$ nechť jsou $\alpha_1^{(i)}$, $\alpha_2^{(i)}, \ldots$ s příslušnými pravděpodobnostmi $p_1^{(i)}, p_2^{(i)}, \ldots$. Budiž $a^{(i)}$ jako v odst. 23., s. h. veličiny $x^{(i)}$, tedy

$$\text{s. h.}\,(x^{(i)}) = a^{(i)} = \sum_k p_k^{(i)}\,\alpha_k^{(i)}, \quad i = 1, 2, 3, \ldots .$$

Užívajíce názvosloví obvyklého u ruských matematiků pravíme, že *veličiny* $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots$ *splňují zákon velkých čísel*, je-li

$$\lim_{n=\infty} P\left(\left|\frac{x^{(1)} + x^{(2)} + \ldots + x^{(n)}}{n} - \frac{a^{(1)} + a^{(2)} + \ldots + a^{(n)}}{n}\right| \leqq \varepsilon\right) = 1, \qquad (1)$$

kde ε je libovolně volená kladná konstanta. Smysl rovnice (1) je ten: pravděpodobnost, že aritmetický střed veličin $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}$ se liší od aritmetického středu jejich středních hodnot o méně než ε, blíží se jistotě, roste-li n do nekonečna.

Kdybychom volili hodnoty $\alpha_k^{(i)}$, kterých mohou nabývati veličiny $x^{(i)}$ jakož i příslušné pravděpodobnosti $p_k^{(i)}$ docela libovolně, neplatil by zákon (1) obecně. Aby platil, je třeba omeziti nějakým způsobem tyto veličiny. Uvádím zde *Markovovu větu*, která stanoví postačující podmínky k platnosti zákona velikých čísel a která je pozoruhodná tím, že platí také pro veličiny $x^{(i)}$ vzájemně závislé: *Budiž*

$$B_n = \text{s. h.}\,[x^{(1)} + x^{(2)} + \ldots + x^{(n)} - (a^{(1)} + a^{(2)} + \ldots + a^{(n)})]^2;$$

veličiny $x^{(i)}$ splňují zákon velkých čísel, je-li

$$\lim_{n=\infty} \frac{B_n}{n^2} = 0. \tag{2}$$

Markovovův důkaz užívá Čebyševovy nerovnosti (viz odst. 12.). Položme pro stručnost

$$y_n = x^{(1)} + x^{(2)} + \ldots + x^{(n)} - (a^{(1)} + a^{(2)} \ldots + a^{(n)});$$

$$B_n = \text{s. h. } y_n^2.$$

Podle druhé nerovnosti (4) odst. 12. je

$$P(|y_n| < t\sqrt{B_n}) \geqq 1 - \frac{1}{t^2}$$

aneb

$$P\left(\frac{|y_n|}{n} < t\sqrt{\frac{B_n}{n^2}}\right) \geqq 1 - \frac{1}{t^2}.$$

Kladné číslo t může být libovolně veliké, takže $1 - \frac{1}{t^2}$ se liší libovolně málo od jednotky; vzhledem k předpokladu (2) můžeme voliti pak n tak veliké, že $t\sqrt{\frac{B_n}{n^2}} = \varepsilon$, kde ε je libovolně dané kladné číslo. Je tedy

$$P\left(\left|\frac{x^{(1)} + x^{(2)} + \ldots + x^{(n)}}{n} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{a^{(1)} + a^{(2)} + \ldots + a^{(n)}}{n}\right| < \varepsilon\right) \geqq 1 - \frac{1}{t^2},$$

z čehož plyne platnost limitního vztahu (1), t. j. zákona velkých čísel.

b) Uveďme některé speciální případy, ve kterých je splněna podmínka (1). *Zákon velkých čísel platí, jsou-li veličiny $x^{(i)}$ vzájemně nezávislé a je-li*

$$\text{s. h.}\ (x^{(i)} - a^{(i)})^2 = \sum_k p_k^{(i)} (\alpha_k^{(i)} - a^{(i)})^2 < C, \tag{3}$$

kde C je konstanta (Čebyšev). Neboť v tomto případě je

$$B_n = \sum_{i=1}^{n} \text{s. h.}\ (x^{(i)} - a^{(i)})^2 +$$

$$+ 2 \sum_{1 \leq i < k \leq n} \sum \text{s. h.}\ [(x^{(i)} - a^{(i)})\ (x^{(k)} - a^{(k)})].$$

Poněvadž první součet má n členů, z nichž každý je menší než C a poněvadž

$$\text{s. h.}\ (x^{(i)} - a^{(i)}) = a^{(i)} - a^{(i)} = 0,$$

a vzhledem k nezávislosti veličin $x^{(i)}$ (odst. 10b)

$$\text{s. h.}\ [x^{(i)} - a^{(i)})\ (x^{(k)} - a^{(k)})] =$$

$$= \text{s. h.}\ (x^{(i)} - a^{(i)})\ .\ \text{s. h.}\ (x^{(k)} - a^{(k)}) = 0,$$

je $B_n < nC$; rovnice (2) platí.

Poissonova věta: Je-li $p^{(i)}$ pravděpodobnost, že v neomezené řadě navzájem nezávislých pokusů i-tý pokus se zdaří a je-li mezi prvními n pokusy m zdařených, je

$$\lim_{n=\infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p^{(i)}\right| \leqq \varepsilon\right) = 1. \tag{4}$$

Neboť zde jsou pro každý pokus dva možné výsledky, a

$$\alpha_1^{(i)} = 1,\ \alpha_2^{(i)} = 0,\ p_1^{(i)} = p^{(i)},\ p_2^{(i)} = 1 - p^{(i)},$$

$$\text{s. h.}\ x^{(i)} = a^{(i)} = p^{(i)},\ \text{s. h.}\ (x^{(i)} - a^{(i)})^2 =$$

$$= p^{(i)}\ (1 - p^{(i)}) < 1,$$

takže je splněna podmínka (3) pro $C = 1$. Ježto $x^{(1)} + x^{(2)} + \ldots + x^{(n)} = m$, přechází rovnice (1) ve (4).

Bernoulliova věta (odst. 16.) je speciální případ Poissonovy věty (4); obdržíme ji ze vzorce (4) předpokládajíce, že každý pokus má konstantní na i nezávislou pravděpodobnost $p^{(i)} = p$.

25. Náhodné rozdělování předmětů do přihrádek. a) N předmětů se rozdělí do ν přihrádek; každý předmět má stejnou pravděpodobnost, že přijde do jedné určité přihrádky jako do jakékoliv jiné (pravděpodobnost dostati se do určité přihrádky je $p = 1 : \nu$). Jak velká je pravděpodobnost, že v dané přihrádce bude právě n předmětů ($n \leq N$)? Za předpokladu nezávislosti (dostane-li se několik předmětů do jedné přihrádky, nemá to vliv na pravděpodobnost, se kterou se tam může dostati další předmět) je počet všech možných případů ν^N, t. j. počtu variací N-té třídy z ν prvků (odst. 3b). Příznivý případ je ten, že do zvolené přihrádky se dostane n předmětů a že zároveň všechny ostatní předměty budou jakkoli rozděleny do ostatních $\nu - 1$ přihrádek. Počet příznivých případů je tedy roven počtu kombinací n-té třídy z N prvků, což je $(N)_n$ podle odst. 3c, násobenému počtem variací $(N - n)$-té třídy z $\nu - 1$ prvků. Hledaná pravděpodobnost P je tedy dána vzorcem

$$P = \frac{N(N-1)\dots(N-n+1)}{1 \,.\, 2 \,.\, \dots \,.\, n} \cdot \frac{(\nu - 1)^{N-n}}{\nu^N}. \qquad (1)$$

Vzorec (1) je v podstatě totožný s Newtonovým vzorcem (1) odst. 13. Neboť položíme-li $p = 1/\nu$ a násobíme-li čitatele i jmenovatele v (1) číslem ν^{N-n}, vychází $P = (N)_n p^n (1 - p)^{N-n}$, což se shoduje až na označení s vzorcem (1) odst. 13. Srovnejme úlohu o zařaďování předmětů s úlohou o opětovaných pokusech (odst. 13): Dvěma možnostem: zařaditi předmět do určité přihrádky A či nezařaditi, odpovídají dvě možnosti: pokus se buď zdaří nebo nezdaří; N (počet předmětů) odpovídá úhrnnému počtu pokusů; ν (počet přihrádek) jest obráceně úměrný pravděpodobnosti p, že se pokus zdaří ($p = \nu^{-1}$)); n (počet předmětů v přihrádce A) odpovídá počtu zdařených pokusů.

b) Ve vzorci (1) udává poměr N/ν kolik předmětů je průměrně v jedné přihrádce. Předpokládejme že N i ν rostou do nekonečna, ale tak, že je vždy průměrně k předmětů v jedné přihrádce; k je dané číslo. Bude tedy

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{N}{\nu} = k,$$

$$\lim_{\nu=\infty} P = \lim_{\nu=\infty} \frac{\frac{N}{\nu} \cdot \left(\frac{N}{\nu} - \frac{1}{\nu}\right) \cdots \left(\frac{N}{\nu} - \frac{n-1}{\nu}\right)}{1 . 2 . 3 \ldots . n} \left(1 - \frac{1}{\nu}\right)^{\frac{N}{\nu} \nu - n}$$

nebo

$$\lim_{\nu=\infty} P = \frac{k^n}{n!} e^{-k}. \tag{2}$$

Je-li tedy velmi velký počet předmětů rozdělen do velmi velkého počtu přihrádek a to tak, že na jednu přihrádku připadne průměrně k předmětů, udává pravá strana rovnice (2) pravděpodobnost, že v dané přihrádce je přesně m předmětů. (2) se nazývá *Poissonovou formulí*.

Úhrnná pravděpodobnost, že v dané přihrádce buď není žádný předmět ($n = 0$), nebo jen jeden ($n = 1$), nebo jen dva ($n = 2$) atd. je

$$\left(1 + \frac{k}{1!} + \frac{k^2}{2!} + \frac{k^3}{3!} + \ldots\right) . e^{-k} = e^k . e^{-k} = 1,$$

rovná se tedy jistotě.

c) Poissonovu formuli lze vyložiti geometricky takto: Na neomezené přímce q jsou rozsety body tak, že na jednotku délky připadne průměrně k bodů; pravděpodobnost, že jich bude přesně n na zvolené úsečce o délce 1 cm, rovná se pravé straně rovnice (2).

Pravděpodobnost, že na úsečce o délce x, zvolené na přímce q, bude přesně n bodů, je podle (2) rovna

$$\frac{(kx)^n}{n!} e^{-kx},$$

neboť, volíme-li úsečku o délce x za jednotku délky, bude na této nově zvolené jednotce průměrně kx bodů.*)

---

*) Pro čtenáře, kteří se zajímají o počet pravděpodobnosti, uvádím názvy některých učebnic určených pro začátečníky:

Fréchet-Halbwachs: Le Calcul des probabilités à la portée de tous (Paris, 1924).

Borel-Deltheil: Probabilités, erreurs (Paris, 1923).

Coolidge: An Introduction to Mathematical Probability (Oxford, 1925).

Vyšlo též německy:

Coolidge-Urban: Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung (Leipzig, 1927).

Castelnuovo: Calcolo di Probabilità, seconde ediz., ve 2 svazcích (Bologna, 1925—28).

Uspensky: Introduction to Mathematical Probability (New York, 1937).

Borel: Éléments de la Théorie des probabilités, 3ième édition (Paris, 1924).

Czuber: Die Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendungen auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung, 3. Aufl. (Leipzig, I. 1914, II. 1921).

O počtu pravděpodobnosti v souvislosti s jeho užitím ve fysice, v biologii a psychologii a s otázkami filosofickými jedná spis:
Borel: Le hasard, Paris 1920.

Konečně upozorňuji na encyklopedické dílo, které dává přehled o otázkách počtu pravděpodobnosti a o jeho aplikacích v různých oborech:

Traité du Calcul des Probabilités et de ses Applications publié par *E. Borel.* Vyšlo ve čtyřech svazcích v Paříži 1925—39.

Jako doplněk uvádí redaktor knihu:

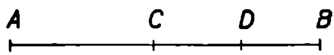
V. J. Glivěnko: Těorija věrojatnostěj (Moskva, 1939).

Spis obsahuje axiomaticky budované základy počtu pravděpodobnosti s obsahem menším, než tato knížka. Český překlad spisu od prof. Dra K. Rychlíka je v tisku.

KAPITOLA TŘETÍ

GEOMETRICKÉ PRAVDĚPODOBNOSTI

26. Definice geometrických pravděpodobností v nejjednodušších úlohách. a) Je dána úsečka AB a volíme bod M někde uvnitř AB nebo na kraji. Množství všech případů, jež zde mohou nastati (t. j. množství všech bodů ležících na úsečce AB), měříme délkou $\overline{AB}$ úsečky AB a pravíme, že *množství všech bodů ležících na dané úsečce má za míru délku této úsečky.* Zvolme nyní na AB dva body C a D. (Obr. 6.) Množství



Obr. 6.

všech bodů ležících na CD má za míru délku úsečky CD. *Pravděpodobnost p, že bod M volený na úsečce AB leží zároveň na její části CD, určujeme vzorcem*

$$p = \frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}. \tag{1}$$

Definice (1) je zcela obdobná definici pravděpodobnosti podané v odst. 1. Na místo čísla n, které udávalo počet možných případů, nastupuje zde míra $\overline{AB}$ bodového množství na úsečce AB, a na místo čísla m, které udávalo počet příznivých případů, nastupuje míra $\overline{CD}$ bodového množství, jehož body odpovídají „příznivým případům".

Pravděpodobnost (1) se nemění, pošine-li se úsečka CD beze změny délky uvnitř AB. Jsou-li tedy C_1D_1 a C_2D_2 dvě polohy úsečky CD uvnitř AB, považujeme případy, že bod M

volený na AB leží buď na C_1D_1, nebo na C_2D_2 za stejně pravděpodobné. Tento předpoklad odpovídá předpokladům o případech stejně pravděpodobných, o nichž jsme jednali v odst. 1; viz poznámku na konci odst. 1.

Náš předpoklad lze vyjádřiti též tak, že hustota pravděpodobnosti je konstantní; viz odst. 31.

Je-li $\overline{AB}$ délka oblouku AB nějaké křivky a $\overline{CD}$ délka oblouku CD, jenž je částí předešlého, udává (1) zase pravděpodobnost, že bod volený na AB leží zároveň na CD.

b) Podle vzoru (1) tvoří se tyto další definice.

Veďme bodem O dva polopaprsky svírající dutý úhel α. Za míru množství všech polopaprsků o vrcholu O a probíhajících uvnitř úhlu α bereme velikost α toho úhlu. Množství všech polopaprsků vedených bodem O má tedy míru 2π.

Pravděpodobnost p, že polopaprsek vedený v rovině daným bodem O leží v daném úhlu α o vrcholu O, je dána vzorcem

$$p = \frac{\alpha}{2\pi}. \tag{2}$$

Za míru bodového množství, které jest utvořeno všemi body nějakého oboru A v rovině, považujeme jeho *plošný obsah* P. Je-li A_1 část oboru A a P_1 její plošný obsah, je pravděpodobnost p, že bod M, volený v A, leží zároveň v A_1, dána vzorcem

$$p = \frac{P_1}{P}. \tag{3}$$

Tento vzorec by platil také pro křivoplochý obor A volený na libovolné ploše a pro jeho část A_1; P a P_1 by byly příslušné plošné obsahy.

Za míru bodového množství, které jest utvořeno všemi body nějakého trojrozměrného oboru A, považujeme jeho *objem* V. Je-li A_1 část oboru A a V_1 její objem, je p pravděpodobnost, že bod M volený uvnitř A leží zároveň v A_1, dána vzorcem

$$p = \frac{V_1}{V}. \tag{4}$$

27. Přímky v rovině. *Přímka v rovině* budiž určena souřadnicemi q a φ tak, že v bodových pravoúhlých souřadnicích x, y má rovnici

$$x \cos\varphi + y \sin\varphi - q = 0;$$

φ jest úhel, který svírá kolmice spuštěná na přímku z počátku souřadnic O s osou Ox, a q vzdálenost přímky od O $(0 \leqq \varphi < 2\pi;\ q \geqq 0)$. V dalším se budeme zabývati dvojrozměrnými množstvími přímek; souřadnice q a φ přímky, jež je částí takového množství, jsou spojité a vzájemně nezávislé proměnné.*) Takové množství může býti na př. utvořeno všemi přímkami, jichž souřadnice q, φ vyhovují nerovnostem

$$a \leqq F(q, \varphi) \leqq l,$$

kde a a l jsou konstanty a $F(q, \varphi)$ daná funkce dvou proměnných. Za míru dvojrozměrného přímkového množství M bereme integrál

$$\iint\limits_M \mathrm{d}q\, \mathrm{d}\varphi, \tag{1}$$

vztažený ke všem přímkám množství M. *Pravděpodobnost, že přímka obsažená v M je zároveň obsažena v části M_1 množství M, je dána vzorcem*

$$\iint\limits_{M_1} \mathrm{d}q\, \mathrm{d}\varphi : \iint\limits_M \mathrm{d}q\, \mathrm{d}\varphi. \tag{2}$$

Tak na př. všechny přímky protínající kružnici K opsanou poloměrem R kolem počátku souřadnic jsou stanoveny

*) Kdyby mezi q a φ byl určitý analytický vztah, takže každé hodnotě φ by odpovídala určitá hodnota q, bylo by přímkové množství jednorozměrné (obecně byly by ty přímky tečnami rovinné křivky).

nerovnostmi $0 \leqq q \leqq R$, $0 \leqq \varphi < 2\pi$; míra množství utvořeného těmito přímkami je

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{R} \mathrm{d}q \,\mathrm{d}\varphi = 2\pi R.$$

Je-li K_1 kružnice o poloměru R_1 soustředná s K, $R_1 < R$, je míra přímkového množství utvořeného přímkami protínajícími K_1 rovna $2\pi R_1$. Pravděpodobnost, že přímka protínající K protíná zároveň K_1, je rovna $2\pi R_1 : 2\pi R$ nebo $R_1 : R$.

28. Úhrnná a složená pravděpodobnost geometrická. a) Předpokládáme, že pravděpodobnost případu, kdy volíme bod na úsečce, počítá se podle vzorce (1) odst. 26. Rozdělme úsečky AB o délce l na n dílů, jichž délky jsou $l_1, l_2 \ldots l_n$. Pravděpodobnost p_k, že bod zvolený na AB leží uvnitř*) k-tého dílu, je podle onoho vzorce

$$p_k = \frac{l_k}{l}.$$

Pravděpodobnost, že bod zvolený na AB leží buď uvnitř i-tého dílu, nebo uvnitř j-tého, je ve shodě s obecnou větou I. odst. 6.

$$\frac{l_i + l_j}{l} = p_i + p_j.$$

Pravděpodobnost, že bod zvolený na AB leží buď uvnitř i-tého dílu, nebo j-tého nebo k-tého jest

$$\frac{l_i + l_j + l_k}{l} = p_i + p_j + p_k$$

atd.

b) Totéž pravidlo o sčítání pravděpodobností platí v případech, kdy běží buď o polohu polopaprsku, nebo o polohu

*) Místo „uvnitř“ můžeme ve všech těchto úvahách říci též „uvnitř nebo na kraji“.

bodu v rovině nebo v prostoru (viz rovnice (2), (3) a (4) odst. 26) nebo o polohu přímky v rovině (rovnice (2) odst. 27). Tak na př. budiž dána uzavřená plocha, jež omezuje část T prostoru o objemu V; uvnitř T jsou dány další dvě vzájemně se vylučující uzavřené plochy, které omezují části T_1 a T_2 prostoru o objemech V_1 resp. V_2. Pravděpodobnost p_1, že bod zvolený uvnitř T leží uvnitř T_1, a pravděpodobnost p_2, že bod zvolený uvnitř T leží uvnitř T_2, jsou dány rovnicemi

$$p_1 = \frac{V_1}{V}, \quad p_2 = \frac{V_2}{V}.$$

Pravděpodobnost, že bod volený uvnitř T leží buď uvnitř T_1, nebo uvnitř T_2, je

$$\frac{V_1 + V_2}{V} = p_1 + p_2.$$

Obecná věta o úhrnné pravděpodobnosti zní takto: Je-li T množství prvků (bodů, přímek a pod.) a V jeho míra, jsou-li pak $T_1, T_2 \ldots T_n$ části množství T bez společných prvků a $V_1, V_2 \ldots V_n$ po řadě míry oněch částí, je $p_k = \dfrac{V_k}{V}$ pravděpodobnost, že prvek volený v T je zároveň v T_k, a

$$\frac{V_1 + V_2 + \cdots + V_n}{V} = p_1 + p_2 + \cdots + p_n$$

pravděpodobnost, že prvek zvolený v T je buď v T_1, nebo v T_2, ... nebo v T_n (srv. větu I. odst. 6).

c) Budiž CD část úsečky AB; položme $l_1 = CD$, $l = AB$. Volme na AB dva body; množství všech takových párů má míru l^2.*) Podobně množství utvořené všemi páry bodů volenými na CD má míru l_1^2. Pravděpodobnost, že dva body volené na AB leží zároveň na CD, rovná se

*) Podle odst. 26a je l měrou množství všech bodů na úsečce o délce l.

$$\frac{l_1^2}{l^2}. \tag{1}$$

Pravděpodobnost, že tři body volené na AB jsou na CD, je podobně

$$\frac{l_1^3}{l^3}. \tag{2}$$

Obecná věta o složené pravděpodobnosti zní takto: Je dáno n množství T_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ a v každém z T_k je vytčena jeho určitá část M_k. Pravděpodobnosti p_k, že prvek zvolený v T_k je zároveň v M_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$, jsou

$$p_1 = \frac{M_1}{T_1}, \quad p_2 = \frac{M_2}{T_2}, \ldots, \quad p_n = \frac{M_n}{T_n},$$

kde míru každého z množství T_k nebo M_k značíme týmž znakem jako množství samo. Pravděpodobnost složená, že prvek zvolený v T_1 je v M_1 a že zároveň prvek volený v T_2 je v $M_2, \ldots$ a že prvek volený v T_n je v M_n, je ve shodě s obecnou větou II. odst. 6, rovna

$$p = \frac{M_1 \,.\, M_2 \,.\, M_3 \,.\, \ldots \,.\, M_n}{T_1 \,.\, T_2 \,.\, T_3 \,.\, \ldots \,.\, T_n} = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n. \tag{3}$$

Běží-li na př. o polohu dvou bodů na úsečce o délce l, které zároveň leží na její části o délce l_1, dosadíme do (3) $n = 2$, $T_1 = T_2 = l$, $M_1 = M_2 = l_1$ a vzorec (3) přechází v (1). Obecně je M^n míra množství složeného ze všech skupin po n různých prvcích, které lze voliti uvnitř daného množství o míře M. Příklad:

Na dané úsečce AB o délce l volíme n bodů $A_1, A_2, \ldots, A_n$; délku $\overline{AA_k}$ označme a_k a předpokládáme, že $0 < a_1 < \ldots < a_n < l$. Jak veliká je pravděpodobnost*) $\varphi(x)\,dx$, že a_1 je v mezích x a $x + dx$ a kolik je průměrně mezi úsečkami

*) Hledaná pravděpodobnost se blíží nule pro lim $dx \to 0$; proto ji předpokládáme ve tvaru $\varphi(x) \,.\, dx$.

$AA_1, A_1A_2, \ldots, A_nB$ těch, jichž délka jest obsažena mezi x a $x + \mathrm{d}x$?

Pravděpodobnost, že jeden bod A_k má od bodu A vzdálenost větší než $x (x < l)$ je $1 - \frac{x}{l}$; pravděpodobnost, že každý z bodů $A_1, \ldots, A_n$ má od bodu A vzdálenost větší než x, je

$$p(x) = \left(1 - \frac{x}{l}\right)^n. \tag{4}$$

$p(x)$ je pravděpodobnost, že $a_1 \geqq x$ (neboť $a_k > a_1$ pro $k > 1$). *Hledaná pravděpodobnost $\varphi(x)\,\mathrm{d}x$ souvisí s $p(x)$ podle rovnice*

$$p(x) = \varphi(x)\,\mathrm{d}x + p(x + \mathrm{d}x),$$

neboť v případě, že $a_1 \geqq x$ může býti buď $x \leqq a_1 < x + \mathrm{d}x$, nebo $x + \mathrm{d}x \leqq a_1$. Máme tedy

$$\varphi(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}p(x)}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \frac{n}{l}\left(1 - \frac{x}{l}\right)^{n-1}\mathrm{d}x. \tag{5}$$

Body $A_1, A_2, \ldots, A_n$ jsou na AB voleny zcela libovolně a nezávisle jeden na druhém. Proto považujeme větu (4) odvozenou původně pro pravděpodobnost, že délka $\overline{OA}_1 = a_1$, je v daných mezích, za platnou pro každou z dalších úseček $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_nB$. Součin $(n + 1)\,p(x)$ čili

$$(n + 1)\left(1 - \frac{x}{l}\right)^n,$$

udává střední počet těch z $(n + 1)$ úseček $AA_1, A_1A_2, \ldots$ $\ldots, A_nB$, které jsou delší než x. Konečně $(n + 1)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$ čili

$$\frac{(n + 1)n}{l}\left(1 - \frac{x}{l}\right)^{n-1}\mathrm{d}x \tag{7}$$

je hledaný *průměrný počet těch z $(n + 1)$ úseček $AA_1, A_1A_2, \ldots$ $\ldots, A_nB$, jichž délka je mezi x a $x + \mathrm{d}x$.*

Všimněme si ještě limitního tvaru, kterého nabude vzorec (5), rostou-li n a l do nekonečna tak, že poměr $n:l$ zůstává rovný konstantě h (h = počtu bodů A_k připadajících na jednotku délky). V tomto případě je $l = n:h$ a tedy

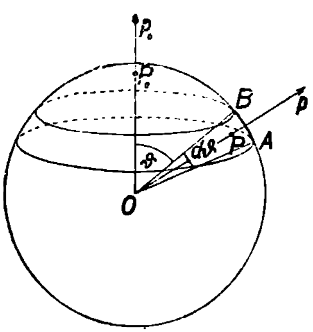
$$\left(1 - \frac{x}{l}\right)^{n-1} = \left(1 - \frac{hx}{n}\right)^{n-1}, \quad \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{x}{l}\right)^{n-1} = \mathrm{e}^{-hx},$$

$$\lim\varphi(x)\,\mathrm{d}x = h\,\mathrm{e}^{-hx}\,\mathrm{d}x. \tag{8}$$

To znamená: *Jsou-li body po neomezené přímce tak rozsety, že průměrně jich připadá h na jednotku délky, je pravděpodobnost, že vzdálenost dvou sousedních bodů je v mezích x až $x + \mathrm{d}x$, dána pravou stranou vzorce (8).*

29. Pravděpodobnost, že směr volený v prostoru vyhovuje daným podmínkám. Volíme určitý neproměnný směr p_0 a ptáme se, jak velká je pravděpodobnost, že jiný směr p svírá s p_0 úhel obsažený v mezích ϑ a $\vartheta + \mathrm{d}\vartheta$, kde ϑ je předepsaný úhel.

Předpokládáme, že směry p_0 a p jsou určeny přímkami (polopaprsky) vycházejícími z daného bodu O. Dáti směr znamená dáti bod P na kulové ploše opsané jednotkovým poloměrem kolem O; vektor OP má daný směr. Nechť je směr p_0 dán bodem P_0, směr p pak bodem P; podmínka, že směr p má svírati s p_0 úhel obsažený v mezích ϑ a $\vartheta + \mathrm{d}\vartheta$, vyjádří se geometricky takto: bod P leží na jednotkové kulové ploše uvnitř kulového pásu, jenž vzniká otočením oblouku AB kružnice o poloměru $OA = OB = 1$ kolem OP_0 (viz obr. 7). Povrch tohoto kulového pásu je $2\pi \sin\vartheta\, \mathrm{d}\vartheta$ povrch celé kulové plochy je 4π, takže hledaná *pravděpodobnost, že směr volený*



Obr. 7.

v prostoru má od pevně daného směru úchylku obsaženou v mezích ϑ a $\vartheta + d\vartheta$, je

$$\frac{2\pi \sin\vartheta \, d\vartheta}{4\pi} = \frac{\sin\vartheta}{2} d\vartheta. \tag{1}$$

Při tomto odvození považujeme za platnou zásadu vyslovenou v odst. 26b: pravděpodobnost, že bod zvolený na povrchu koule leží v nějaké části tohoto povrchu, je úměrná plošnému obsahu té části.

30. O pravděpodobnostech závislých na čase. V některých fysikálních úlohách užívá se pojmu geometrické pravděpodobnosti tak, že některé souřadnice mají význam času.

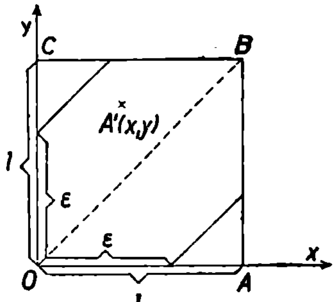
Pravděpodobnost, že bod M volený na úsečce délky l leží na její nekonečně malé části o délce dx, je rovna $\frac{dx}{l}$. Pravděpodobnost, že ze dvou bodů M, N volených na té úsečce jeden leží v její části o délce dx a druhý v jiné její části o délce dy, je $\frac{dx\,dy}{l^2}$.

Zavedeme-li proměnný čas místo proměnné délky, nabudou uvedené vzorce tohoto významu:

Pravděpodobnost, že zjev, který se vyskytuje v časovém intervalu (x značí čas počítaný od počátečního okamžiku $x = 0$) od $x = 0$ do $x = l$, vyskytne se právě v nekonečně malé části $x \dots x + dx$ tohoto intervalu $0 < x < l$, je $\frac{dx}{l}$. Pravděpodobnost, že jiný zjev, o kterém je také známo, že se vyskytne v časovém intervalu $0 \dots l$, vyskytne se právě v intervalu $y \dots y + dy$, je $\frac{dy}{l}$ $(0 < y < l)$. Pravděpodobnost, že dva zjevy, o nichž je známo, že se oba vyskytnou během intervalu $0 \dots l$, vyskytnou se jeden v intervalu $x \dots x + dx$, druhý v intervalu $y \dots y + dy$, je $\frac{dx\,dy}{l^2}$.

Uveďme ještě za účelem srovnání dvě úlohy:

a) Vypočísti pravděpodobnost p, že dva body M, N volené na úsečce o délce l mají vzdálenost menší než ε. Vzdálenost prvého bodu od kraje úsečky budiž x, druhého y. Volba obou bodů bude znázorněna v rovině Oxy jediným bodem A' o souřadnicích x, y (obr. 8). Všechny možné případy, t. j. všechny páry M, N takové, že



Obr. 8.

$$0 \leqq x \leqq l,\ 0 \leqq y \leqq l,$$

jsou znázorněny body A' vyplňujícími čtverec $OABC$ o straně l. Všechny příznivé případy, t. j. všechny páry M, N takové, že

$$\overline{MN} = |x - y| < \varepsilon,$$

jsou znázorněny body A' ležícími v pruhu omezeném rovnoběžkami, které mají rovnice

$$y = x + \varepsilon,\ y = x - \varepsilon.$$

Plošný obsah čtverce je l^2, plošný obsah tohoto pruhu (pokud leží ve čtverci), je $l^2 - (l - \varepsilon)^2$ takže

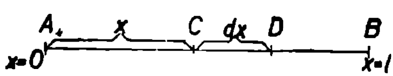
$$p = \frac{l^2 - (l - \varepsilon)^2}{l^2} = \frac{2\varepsilon}{l} - \frac{\varepsilon^2}{l^2}. \tag{1}$$

b) Dvě osoby si umluví, že během určité doby (x značí čas) od $x = 0$ do $x = l$ se sejdou na určitém místě a že ten, kdo přijde dříve, počká na druhého nejdéle po dobu ε a pak odejde, nepřijde-li druhý. Jak veliká je pravděpodobnost p, že se setkají? Je-li x okamžik, kdy se dostaví první osoba, a y okamžik, kdy druhá, znázorníme zase všechny možné případy body $A'(x, y)$ ležícími uvnitř čtverce $OABC$ jako v předešlé úloze. Obor příznivých případů je dán podmínkou, že časová odlehlost mezi příchodem prvého a druhého není větší než ε, tedy $|x - y| < \varepsilon$, jako v předešlé úloze. Vychází vzorec (1) pro hledanou pravděpodobnost.

Vzorce a způsob výpočtu v úloze b) jsou úplně stejné jako v úloze a). Rozdíl v úlohách je v interpretaci proměnných, které mají v jedné úloze význam délek, ve druhé význam časových intervalů.

31. Zobecnění původní definice. Hustota pravděpodobnosti. a) Budiž AB úsečka délky l a vytkněme na ní dva body CD, tak, že $\overline{CD}$ = jednotce délky. Pravděpodobnost, že bod M, volený na AB, leží na CD, je podle odst. 26a rovna $\frac{1}{l}$. Kdybychom vytkli jiné dva body E, F na AB, zase tak, aby $\overline{EF}$ = jednotce délky, byla by pravděpodobnost, že bod M, volený na AB leží na EF rovna opět $\frac{1}{l}$. Pravděpodobnost, která v jednom i ve druhém případě připadá na jednotku délky (buď na CD nebo na EF), čili *hustota pravděpodobnosti* je stejná. Užívajíce definice (1) odst. 26. *předpokládáme* tedy, že *hustota pravděpodobnosti je konstantní.*

Jsou však případy, kdy máme důvody, pro které připouštíme, že hustota pravděpodobnosti je proměnná podle toho, kde na AB volíme úsečku CD nebo EF o jednotkové délce. V takových úlohách počítáme s proměnnou hustotu pravděpodobnosti podobně jako s proměnnou hustotou hmoty v mechanice. Pravděpodobnost p, že bod volený na úsečce AB o délce l leží na její nekonečně malé části CD (viz obr. 9).



Obr. 9.

$$\overline{AB} = l, \ \overline{AC} = x, \ \overline{CD} = \mathrm{d}x,$$

vyjádříme — to je základní předpoklad — ve tvaru $f(x)\,\mathrm{d}x$, kde $f(x)$ je spojitá funkce proměnné x, vyhovující podmínkám

$$f(x) > 0, \ \int_0^l f(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

Veličina $f(x)$, kde x značí vzdálenost bodu C na AB od A, je limita poměru

$$\frac{p}{\mathrm{d}x} \text{ pro } \lim \mathrm{d}x = 0;$$

jinými slovy $f(x)$ je *proměnná hustota pravděpodobnosti.*

Vytkněme nyní na AB dva body A', B' o úsečkách $\overline{AA'} = x_1$, $\overline{AB'} = x_2$ $(0 < x_1 < x_2 < l)$ a hledejme pravděpodobnost $p(x_1, x_2)$, že bod M volený na AB leží na $A'B'$. Tato pravděpodobnost je součet nekonečně malých pravděpodobností $f(x)\,\mathrm{d}x$ vztahujících se na všecky $\mathrm{d}x$, na které si myslíme úsečku $A'B'$ rozdělenu. Vzhledem k (1) je tedy

$$\left.\begin{aligned} & p(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x, \\ \text{kde} \quad & \\ & f(x) > 0, \ \int_0^l f(x)\,\mathrm{d}x = 1. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Ve speciálním případě konstantní hustoty je $f(x) = c$, a tedy podle (2) $\int_0^l c\,\mathrm{d}x = cl = 1$; z toho plyne

$$f(x) = \frac{1}{l}, \ p(x_1, x_2) = \frac{x_2 - x_1}{l} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}},$$

což je právě definice (1) odst. 26.

b) Úprava vztahů (2) pro případ, že jde o pravděpodobnosti vztahující se k úhlům, nebo k bodům v rovině nebo v prostoru, je nasnadě.

Budiž x úhel ($O \leqq x < 2\pi$), jehož vrchol a jedno rameno se nemění; druhé rameno úhlu se otáčí kolem vrcholu. Pravděpodobnost, že úhel x jest obsažen v mezích ϑ a $\vartheta + \mathrm{d}\vartheta$ budiž $f(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta$. Pak pravděpodobnost, že x je v mezích ϑ_1 a ϑ_2, se rovná

$$\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} f(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta,$$

s podmínkami:

$$f(\vartheta) > 0, \quad \int_0^{2\pi} f(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta = 1.$$

c) Je-li $f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ pravděpodobnost, že bod zvolený uvnitř určité části P roviny leží uvnitř nekonečně malého obdélníka, který má jeden vrchol v bodě (x, y) a rozměry $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, a je-li P_1 část oboru P, je

$$p = \iint_{P_1} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

pravděpodobnost, že bod zvolený v P leží uvnitř P_1. Hustota pravděpodobnosti $f(x, y)$ vyhovuje podmínkám.

$$f(x, y) > 0, \quad \iint_P f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1.$$

Je-li na př. Oxy vodorovná rovina a házíme-li z větší vzdálenosti zrnkem tak, abychom trefili bod O, má funkce $f(x, y)$ větší hodnoty pro body blízké bodu O než pro body vzdálenější od C, neboť pravděpodobnost, že zrnko dopadne do plošky o obsahu 1 cm^2 položené blízko O je větší, než že dopadne do plošky stejně veliké, ale vzdálenější od O. V případě, že hustota pravděpodobnosti je konstantní, takže podle odst. 26b je $f(x, y) = 1/P$, kde P značí plošný obsah oboru P, je hledaná pravděpodobnost, že bod leží v P_1,

$$p = \iint_{P_1} f(x, y)\, dx\, dy = \frac{P_1}{P},$$

což se shoduje s rovnicí (3) odst. 26; P_1 je obsah oboru P_1.

d) Je-li $f(x, y, z)\, dy\, dy\, dz$ pravděpodobnost, že bod zvolený uvnitř určité části V prostoru leží uvnitř nekonečně malého pravoúhlého rovnoběžnostěnu, jenž má jeden vrchol v bodě (x, y, z) a rozměry dx, dy, dz, a je-li V_1 část oboru V, je

$$\iiint_{V_1} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

pravděpodobnost, že bod zvolený ve V leží ve V_1. Hustota pravděpodobnosti $f(x, y, z)$ vyhovuje podmínkám

$$f(x, y, z) > 0, \quad \iiint_{V} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = 1.$$

V případě konstantní hustoty je $f(x, y, z) = 1 : V$, kde V značí objem oboru V; hledaná pravděpodobnost je pak

$$\iiint_{V_1} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \frac{V_1}{V},$$

kde V_1 je objem oboru V_1. Tato rovnice se shoduje s rovnicí (4) odst. 26.

Obdobně by se zavedla hustota pravděpodobnosti v případě přímek v rovině, jichž polohu stanovíme souřadnicemi q a φ podle odst. 27.

Poznámka. Věty o úhrnné a o složené pravděpodobnosti dokázané v odst. 28. pro případ konstantní hustoty platí i v případech, že hustota je proměnná. Poněvadž pak počítání s pravděpodobnostmi se zakládá na těchto dvou větách, přenášejí se výsledky odvozené v kapitolách I. a II. na geometrické pravděpodobnosti. Totéž platí o větách týkajících se středních hodnot (viz odst. 32).

32. Střední hodnoty při geometrických pravděpodobnostech. a) Podle definice uvedené v odst. 8a vypočte se střední hodnota veličiny závislé na náhodě tak, že každá její možná hodnota se násobí příslušnou pravděpodobností a součiny se sečtou. Tato definice se přenáší na geometrické pravděpodobnosti s tou změnou, že na místo součtů se zavedou integrály.

Příklady: b) Na úsečce AB délky l volíme dva body C, D. Jak velká je střední hodnota úsečky CD?

Předpokládáme, že hustota pravděpodobnosti je konstantní. Úsečka AB nechť leží v ose Ox, takže koncovým bodům odpovídají hodnoty $x = 0$ a $x = l$. Pravděpodobnost, že úsečka bodu C je v mezích x až $x + \mathrm{d}x$ a že současně úsečka bodu D je v mezích y až $y + \mathrm{d}y$, je $\dfrac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{l^2}$. Délka $\overline{CD} = |y - x|$, tedy

$$\text{s. h. } \overline{CD} = \int_0^l \int_0^l \frac{|y-x|}{l^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{l^2}\int_0^l \left[\int_0^y (y-x)\,\mathrm{d}x + \right.$$

$$\left. + \int_y^l (x-y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y = \frac{1}{l^2}\int_0^l \left(y^2 + \frac{l^2}{2} - ly\right)\mathrm{d}y = \frac{l}{3}. \tag{1}$$

Výpočet lze provésti také takto: Předpokládejme, že bod C, bližší bodu A, má úsečku x, bod D pak úsečku y; $x < y$. Pak je $0 < x < y$, $0 < y < l$, a tedy

$$\text{s. h. } (\overline{CD}) = \text{s. h. } (y - x) = \text{s. h. } (y) - \text{s. h. } (x) =$$

$$= \int_0^l y\frac{\mathrm{d}y}{l} - \int_0^l \left[\int_0^y x\frac{\mathrm{d}x}{l}\right]\frac{\mathrm{d}y}{l} = \frac{l}{2} - \int_0^l \frac{y^2}{2l^2}\,\mathrm{d}y = \frac{l}{3}.$$

c) Střední hodnota čtverce vzdálenosti dvou bodů C, D volených na úsečce o délce l je

$$\text{s. h. } (y-x)^2 = \text{s. h. } (y^2) - 2 \text{ s. h. } (x) \,.\, \text{s. h. } (y) + \text{s. h. } (x)^2 =$$

$$= \int_0^l x^2 \frac{\mathrm{d}x}{l} - 2\int_0^l x \frac{\mathrm{d}x}{l} \,.\int_0^l y \frac{\mathrm{d}y}{l} + \int_0^l y^2 \frac{\mathrm{d}y}{l} = \frac{1}{6} l^2. \qquad (2)$$

Při výpočtu užíváme věty (odst. 10b), že s. h. $(xy) =$ s. h. (x) . . s. h. (y), neboť volbu jednoho bodu C považujeme za nezávislou na poloze druhého bodu D.

d) Úlohy b) a c) lze řešiti též užitím vzorce (1) odst. 30, podle něhož

$$p = \frac{2\varepsilon}{l} - \frac{\varepsilon^2}{l^2}$$

je pravděpodobnost, že dva body C, D volené na úsečce o délce l mají vzdálenost menší než ε. Pravděpodobnost, že ona vzdálenost je menší než $\varepsilon + \mathrm{d}\varepsilon$, je $p + \mathrm{d}p$ a tedy

$$\mathrm{d}p = \left(\frac{2}{l} - \frac{2\varepsilon}{l^2}\right) \mathrm{d}\varepsilon$$

je pravděpodobnost, že ona vzdálenost jest obsažena v mezích ε a $\varepsilon + \mathrm{d}\varepsilon$. Z toho plyne, že

$$\text{s. h. } \overline{CD} = \int_0^l \varepsilon \left(\frac{2}{l} - \frac{2\varepsilon}{l^2}\right) \mathrm{d}\varepsilon = \frac{l}{3},$$

$$\text{s. h. } \overline{CD}^2 = \int_0^l \varepsilon^2 \left(\frac{2}{l} - \frac{2\varepsilon}{l^2}\right) \mathrm{d}\varepsilon = \frac{l^2}{6}.$$

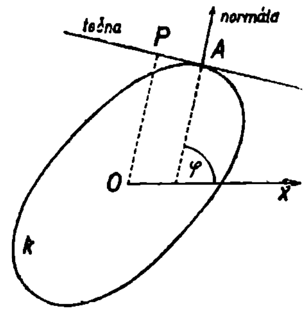
ve shodě s rovnicemi (1) resp. (2).

e) Dva body M, M' jsou zvoleny uvnitř čtverce o straně a. Střední hodnota čtverce vzdálenosti MM' je

$$\frac{1}{a^4}\int_0^a\int_0^a\int_0^a\int_0^a \left[\left(x - x'\right)^2 + \left(y - y'\right)^2\right] \mathrm{d}x\, \mathrm{d}x'\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}y' = \frac{a^2}{3}.$$

Poznámka. V úlohách o geometrických pravděpodobnostech a středních hodnotách předpokládá se zpravidla, že hustota pravděpodobnosti je konstantní.

33. Sečny konvexní křivky v rovině. Buffonova úloha o jehle. a) Budiž k uzavřená, vypuklá (konvexní) křivka v rovině (t. j. taková, že kterákoli přímka ji protíná nejvýše ve dvou bodech) neboli *ovál.* Volme počátek O souřadnic uvnitř k. Je-li φ úhel který svírá vnější normála (t. j. normála vystupující z vnitřku křivky k ven) s osou Ox, je vzdálenost OP tečny od počátku O určitou funkcí úhlu φ, kterou označíme $f(\varphi)$ (obr. 10). Každému úhlu $\varphi (0 \leqq \varphi < 2\pi)$ odpovídá jediný bod dotyku A na k; funkce $f(\varphi)$ je jednoznačná a periodická s periodou 2π (je definována pro všechny hodnoty úhlu φ). Každá přímka



Obr. 10.

$$x \cos\varphi + y \sin\varphi - q = 0,$$

protínající křivku k vyhovuje podmínce

$$q - f(\varphi) \leqq 0.$$

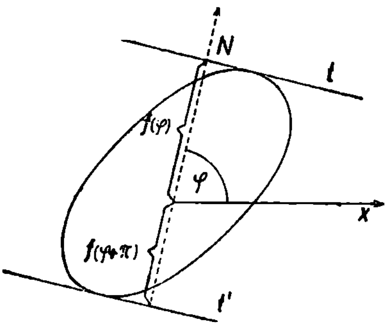
Znamení rovnosti platí zde jen pro případ, že přímka se křivky k dotýká. Měrou množství utvořeného všemi sečnami křivky k je podle vzorce (1) odst. 27 výraz

$$m = \iint \mathrm{d}q\, \mathrm{d}\varphi = \int q\, \mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} f(\varphi)\, \mathrm{d}\varphi,$$

který můžeme psáti také v tomto tvaru:

$$m = \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} [f(\varphi) + f(\varphi + \pi)]\, \mathrm{d}\varphi.$$

Výraz v hranaté závorce udává vzdálenost dvou tečen t a t' kolmých k normále ON určené úhlem φ (obr. 11). Tuto délku můžeme považovati za polovinu průmětu celého obvodu křivky do normály ON; při tom si představujeme celý její obvod rozložen na nekonečně malé elementy a sčítáme absolutní hodnoty jednotlivých průmětů. Průmět obvodu do ON označíme písmenem A; obdržíme



Obr. 11.

$$m = \tfrac{1}{4}\int_0^{2\pi} A \, d\varphi.$$

Poslední integrál vypočteme podle Cauchyho takto: Promítneme-li nějakou úsečku délky s do přímky, která s ní svírá úhel φ, jest absolutní hodnota průmětu $s \,.\, |\cos\varphi|$. Integrujme tento výraz dle φ od 0 do 2π; vychází

$$s \,.\, \int_0^{2\pi} |\cos\varphi| \, d\varphi = 4s \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos\varphi \, d\varphi = 4s.$$

Obvod křivky k si myslíme rozdělený na nekonečně mnoho nekonečně malých částí; napišme poslední rovnici pro každou takovou část s a všechny rovnice sečtěme. Dostaneme

$$\int_0^{2\pi} A \, d\varphi = 4L,$$

kde L značí obvod křivky k; je tedy

$$m = L. \tag{1}$$

Míra přímkového množství, utvořeného všemi přímkami protínajícími daný ovál, se rovná jeho obvodu.

Budiž k_1 ovál obsažený celý uvnitř k a L_1 jeho obvod.

Pak je*) $L_1 < L$ a podle vzorce (2) odst. 27 *pravděpodobnost p, že přímka protínající ovál k protíná zároveň jiný ovál k_1 ležící uvnitř k, je rovna poměru $L_1 : L$ obvodů obou oválů,*

$$p = L_1 : L. \tag{2}$$

b) Užijeme rovnice (2) k řešení této úlohy: V rovině jsou narýsovány ekvidistantní rovnoběžky a mimo to ovál k_1 o obvodu L_1; vzdálenost $2a$ dvou sousedních rovnoběžek je tak veliká, že křivka k_1 nemůže protínati dvě z nich. Je vypočítati pravděpodobnost p, že křivka k_1 je proťata některou rovnoběžkou (příslušný pokus se provádí tak, že se rovnoběžky nakreslí na vodorovnou rovinu a na ní se hodí ovál k_1, vystřižený z papíru).

Narýsujme kružnici k o průměru $2a$ a uvnitř k narýsujme k_1. Obrazec μ složený z k a k_1 považujeme za neproměnný útvar; mění-li k_1 polohu, mění ji současně i k. Položme obrazec u jakkoli na rovnoběžky; v každém případě je k proťata některou rovnoběžkou (a jen jedinou, nehledíme-li k případu, že k se dotýká dvou sousedních rovnoběžek). Výpočet pravděpodobnosti p se tedy převádí na řešení úlohy: přímka protíná kružnici k o obvodu $L = 2\pi a$; určiti pravděpodobnost p, že protíná současně ovál k_1 o obvodu L_1 ležící uvnitř k. Podle vzorce (2) bude

$$p = \frac{L_1}{L} = \frac{L_1}{2\pi a}. \tag{3}$$

c) Předpokládejme, že se k_1 redukuje na úsečku délky $2b$; křivka k_1 je v tom případě vlastně zploštělá elipsa, jejíž hlavní osa $= 2b$ a vedlejší osa nekonečně malá. Máme $L_1 = 4b$ a rovnice (3) dává

$$p = \frac{2b}{\pi a}. \tag{4}$$

*) Nerovnost $L_1 < L$ je důsledek věty: Leží-li konvexní mnohoúhelník celý uvnitř jiného konvexního mnohoúhelníka, má první kratší obvod než druhý.

Rovnice (4) dává *řešení Buffonovy úlohy o jehle*, která zní takto: házíme jehlu (nebo hůlku) o délce $2b$ na rovinu, na níž jsou narýsovány ekvidistantní rovnoběžky; je-li $2a$ vzdálenost dvou sousedních rovnoběžek ($2b < 2a$), jak velká je pravděpodobnost p, že jehla protne některou z těch rovnoběžek? — Stran pokusů, kterými se potvrzuje správnost vzorce (4) viz odst. 35.

d) Užijeme nyní rovnice (1) k řešení úlohy: Nalézti pravděpodobnost p, že přímka protínající obvod vypuklého čtyřúhelníka $ABCD$ protíná jeho dvě protější strany AB a CD.

Veďme úhlopříčky, jež se protnou v O a položme (viz obr. 12)

$$\overline{AB} = a, \quad \overline{BC} = b, \quad \overline{CD} = c, \quad \overline{DA} = d, \quad \overline{AC} = m, \quad \overline{BD} = n.$$

Především hledáme míru M pro množství přímek, které protínají strany a a c. Množství přímek, které protínají obvod trojúhelníka AOB, má podle (1) za míru délku jeho obvodu;*) podobně pro obvod trojúhelníka COD.

Součet obou těchto měr (obvodů) totiž $a + c + m + n$ je měrou množství U složeného ze všech přímek protínajících obvod AOB a ze všech přímek protínajících COD. V množství U je každá přímka protínající strany a i c obsažena dvakrát. Každá přímka protínající obvod AOB nebo obvod COD protíná zároveň obvod čtyřúhelníka $ABCD$. Naopak každá přímka protínající $ABCD$ protíná obvod buď jednoho, nebo druhého trojúhelníka (nebo oba). Proto je

$$a + c + m + n - M$$

měrou množství všech přímek, které protínají obvod čtyřúhelníka $ABCD$; tato míra je podle (1) rovna jeho obvodu $a + b + c + d$, tedy

*) Věta (1) byla dokázána pro uzavřenou vypuklou křivku. Platí však i pro vypuklý mnohoúhelník, poněvadž lze sestrojiti uzavřené vypuklé křivky, které probíhají libovolně blízko jeho obvodu a jichž délka obvodu v limitě se rovná délce jeho obvodu.

$$a + c + m + n - M = a + b + c + d$$

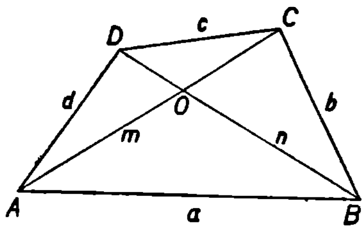
nebo

$$M = m + n - b - d.$$

Podobně množství přímek protínajících strany b a d má míru

$$M' = m + n - a - c.$$

Pravděpodobnost p, že přímka protínající obvod vypuklého čtyřúhelníka protíná jej ve dvou protějších stranách, je (viz obr. 12)



Obr. 12.

$$p = \frac{M + M'}{a + b + c + d} = 2\frac{m + n}{a + b + c + d} - 1.$$

Pro čtverec ($a = b = c = d$, $m = n = a\sqrt{2}$) je

$$p = \sqrt{2} - 1 = 0{,}414\ldots$$

Pro obdélník, jehož strany jsou v poměru 3 : 4 ($a = c = 3$, $b = d = 4$, $m = n = 5$) je*)

$$p = \tfrac{3}{7} = 0{,}428\ldots$$

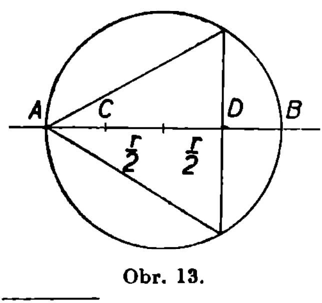
34. Bertrandovo paradoxon a jeho výklad podle Borela. Naší úlohou bude nyní srovnati řešení těchto tří úloh:

*) Viz *G. Polya:* Über geometrische Wahrscheinlichkeiten (Sitzber. der Ak. d. Wiss. Wien, Bd. 126, 319; 1917).

a) Na vodorovné rovině je narýsována řada ekvidistantních rovnoběžek; vzdálenost dvou sousedních rovnoběžek budiž $2r$. Na rovinu hodíme kruhový kotouč o poloměru r, jenž vždy protne jednu z rovnoběžek (v krajním případě by se kotouč dotýkal dvou sousedních rovnoběžek); jak velká je pravděpodobnost p, že tětiva vymezená na kotouči onou rovnoběžkou je větší než $r\sqrt{3}$?*)

Poloha kotouče na rovině jest určena souřadnicemi x, y jeho středu a úhlem ω, který svírá nějaký poloměr na kotouči vyznačený s pevnou přímkou. Nechť dané rovnoběžky mají směr osy Oy. Je zřejmo, že délka tětivy vymezené na kružnici nezávisí ani na y ani na ω, nýbrž jedině na x. Stačí srovnávati jen sečny kolmé na určitý průměr kotouče a úloha se dá vysloviti takto: na pevném průměru AB kotouče volíme bod a vedeme jím tětivu kolmou k AB; jaká je pravděpodobnost p, že takto sestrojená tětiva bude delší než $r\sqrt{3}$? Pravděpodobnost se zde vztahuje k volbě bodu M na průměru AB. Pokud je bod M ve vzdálenosti menší než $\frac{1}{2}r$ od středu kotouče, je příslušná tětiva delší než $r\sqrt{3}$, jinak je kratší (obr. 13). Bodové množství na $\overline{AB} = 2r$ odpovídající „příznivým případům“ (t. j. úsečka CD), má tedy míru r a

$$p = \frac{r}{2r} = \tfrac{1}{2}. \qquad (1)$$

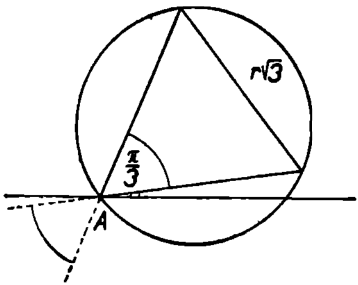


Obr. 13.

b) Na pevné rovině narýsujeme přímku a a v jednom jejím bodě A připíchneme k rovině list průhledného papíru, na

*) $r\sqrt{3}$ je délka strany rovnostranného trojúhelníka vepsaného do kružnice. p je tedy pravděpodobnost, že tětiva bude delší než strana tohoto trojúhelníka.

němž je narýsována jednak kružnice o poloměru r procházející bodem A, jednak rovnostranný trojúhelník T s vrcholem A do ní vepsaný. Roztočíme list prudce kolem bodu A; list se otáčí ve své rovině a zastaví se konečně v určité poloze, takže přímka a protíná kružnici v tětivě určité délky. Je vypočísti pravděpodobnost p, že tato tětiva bude delší než $r\sqrt{3}$ (obr. 14).



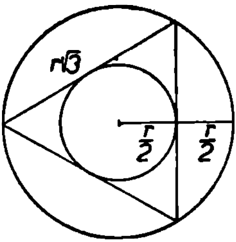
Obr. 14.

Za míru množství všech poloparsků vedených v rovině bodem A vezmeme 2π. Za „příznivý případ" považujeme, když polopaprsek (nebo polopaprsek protivného směru) prochází vnitřkem trojúhelníka T; příslušné množství polopaprsků má míru $\frac{2\pi}{3}$, takže (vzorec (2) odst. 26)

$$p = \frac{2\pi}{3} : 2\pi = \tfrac{1}{3}. \tag{2}$$

c) Házejme na kruhový kotouč o poloměru r malé zrnko tak, aby kterákoli část kotouče mohla býti zasažena se stejnou hustotou pravděpodobnosti. Bod, ve kterém zrnko dopadne, považujme za střed tětivy. Jak velká je pravděpodobnost p, že tětiva takto určená bude delší než $r\sqrt{3}$?

Je-li střed tětivy ve vzdálenosti menší než $\frac{1}{2}r$ od středu kotouče, bude tětiva delší než $r\sqrt{3}$ (obr. 15). Množství všech případů možných (polohy zrnka uvnitř kruhu) má za míru obsah kruhu πr^2; množství případů příznivých (body uvnitř kruhu soustředného o poloměru $\frac{1}{2}r$) má obdobně za míru $\frac{1}{4}\pi r^2$. Proto je (vzorec (3) odst. 26)



Obr. 15.

$$p = \frac{\pi r^2}{4} : \pi r^2 = \tfrac{1}{4}. \qquad (3)$$

Kdybychom všechny tři úlohy a), b) a c) vyjádřili jedinou otázkou: jak veliká je pravděpodobnost p, že tětiva volená v kružnici o poloměru r je delší než $r\sqrt{3}$?, dospěli bychom k paradoxnímu výsledku, že úloha má tři různá řešení (1), (2) a (3). *J. Bertrand* napsal proto, že ona otázka, a vůbec pojem geometrické pravděpodobnosti, nemá určitého smyslu. *E. Borel* rozebíraje otázku ukázal, že v každé úloze o geometrických pravděpodobnostech je třeba přihlížeti k podmínkám, za kterých se provádějí pokusy.

S tohoto hlediska nestačí se ptáti: jak veliká je pravděpodobnost, že tětiva bude delší než $r\sqrt{3}$, nýbrž je nutno udati způsob, kterým se „náhodně zvolená tětiva" sestrojuje. Přihlížejíce k těmto podmínkám rozeznáváme tři různé úlohy a), b) a c); každá sama o sobě má dobrý smysl a určité řešení, jak jsme ukázali.*)

Kdybychom volili tětivu tak jako v úloze a) (házením kotouče), dostali bychom v řadě 1000 postupně vykonaných pokusů asi $\frac{1}{2}1000 = 500$krát tětivu delší než $r\sqrt{3}$. Kdybychom volili tětivu tak jako v úloze b) (roztočením listu papíru), dostali bychom v řadě 1000 pokusů asi $\frac{1}{3}1000 = 333$krát

*) Viz *Borel:* Le hasard, No 34, 35; *Borel:* Éléments de la Théorie des probabilités, No 46.

tětivu delší než $r\sqrt{3}$. Kdybychom konečně volili střed tětivy podle c) (házením zrna), vyšla by v řadě 1000 pokusů tětiva delší než $r\sqrt{3}$ asi $\frac{1}{4}1000 = 250$krát.

35. Statistické ověření vzorců pro geometrické pravděpodobnosti. V odstavci 22 bylo uvedeno, jak se data odvozená ze statistiky o výsledcích dlouhé řady pokusů srovnávají s theoretickými formulemi o pravděpodobnostech; poněvadž odvození těchto formulí (podané v kap. II. pro nespojité pravděpodobnosti) se opírá o základní věty o pravděpodobnosti úhrnné a o pravděpodobnosti složené, a poněvadž obě tyto věty platí i pro geomatrické pravděpodobnosti, *platí vzorce odst. 22 beze změny i pro případ, že p je geometrická pravděpodobnost*. Běží hlavně o kontrolu těchto theoretických vzorců: a) V řadě n postupně provedených nezávislých pokusů je podle theorie střední počet zdařených roven np; p je pravděpodobnost, že jeden pokus se zdaří. Vykonejme veliký počet ns pokusů; je-li s serií pokusů, v každé n pokusů (s a n veliká čísla) a je-li m_k počet zdařených pokusů v k-té serii, má býti přibližně

$$\frac{m_1 + m_2 + \ldots + m_s}{s} \doteq np. \tag{1}$$

b) Je-li $h = m - np$ úchylka počítaná pro řadu o n pokusech, ve které je m zdařených, je podle theorie s. h. $(h^2) = np(1 - p)$. Dělíme-li zase pokusy na s serií po n pokusech, má býti přibližně

$$\frac{(m_1 - np)^2 + (m_2 - np)^2 + \ldots + (m_s - np)^2}{s} \doteq np(1 - p). \tag{2}$$

c) Utvořme úchylku pro každou z s serií:

$$m_1 - np,\ m_2 - np, \ldots,\ m_s - np$$

a spočítejme, kolik z těchto úchylek má absolutní hodnotu menší než h; je-li takových úchylek celkem ν, má býti podle theorie přibližně

$$\nu \doteq s\Theta\left(\frac{h}{2np(1-p)}\right); \tag{3}$$

Θ je funkce zavedená v odst. 21.

Uveďme jakožto příklad Buffonovu úlohu o jehle (odst. 33c). Je-li $2a$ vzdálenost sousedních rovnoběžek a $2b$ délka jehly, je pravděpodobnost, že se pokus zdaří, t. j. že jehla protne některou rovnoběžku, rovna $\frac{2b}{\pi a} = p$. Vykonáme-li s serií po n pokusech, čekáme podle (1), že

$$\frac{m_1 + m_2 + \ldots + m_s}{n \, . \, s} \doteq \frac{2b}{\pi a}.$$

Vzorec (1) byl od různých autorů ověřován pokusy.*) Bylo by zajímavo ověřiti též vzorce (2) a (3) pro geometrické pravděpodobnosti p; dosud, pokud vím, se tím nikdo nezabýval.

36. Methoda libovolných funkcí. Regularisace pravděpodobnosti.

a) *Úloha o ruletě.* Ruleta je kotouč rozdělený na veliký počet stejných výsečí, které jsou střídavě červené a černé.

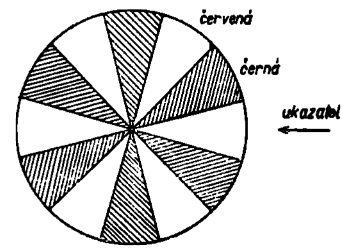
*) Položíme-li pro stručnost $m_1 + m_2 + \ldots + m_s = m$, dává rovnice v textu $\pi \doteq \frac{2b}{a} \frac{sn}{m}$. Na pravé straně jsou dané veličiny; ze statistického pozorování průseků dá se tedy nalézti přibližná hodnota čísla π.

Švýcarský matematik R. Wolf konal v letech 1849—1853 takové pokusy a odvodil ze serie 5000 pokusů hodnotu 3,159 pro číslo π. Viz o tom *Czuber:* Geometrische Wahrscheinlichkeiten und Mittelwerte (Leipzig, 1884, p. 88); *Markoff-Liebmann:* Wahrscheinlichkeitsrechnung (Leipzig, 1912, p. 164); *Markov:* Izčislěnije vĕrojatnostěj, 4. vyd. (Moskva, 1924, p. 263). — Bývalý posluchač přírodovědecké fakulty Masarykovy university *J. Bača* v práci: Některé pokusy o geometrických pravděpodobnostech (Spisy vydávané přírodovědeckou fakultou Masarykovy university č. 90, 1927) uvádí výsledky pokusů, jimž se potvrzuje Buffonův vzorec, Bertrandovy vzorce (viz odst. 34 textu) a řada jiných theoretických vzorců.

Uvedeme ruletu do rychlé rotace. Kotouč se mnohokrát otočí dokola a pak se zastaví. Jak velká je pravděpodobnost p, že, když se kotouč zastavil, pevný ukazatel ukazuje na červenou výseč? (V obrazci 16 je ruleta se 12 výsečemi.) Úhrnný úhel, o který se ruleta otočí, souvisí s tím, jak velikou počáteční rychlost jsme jí udělili.

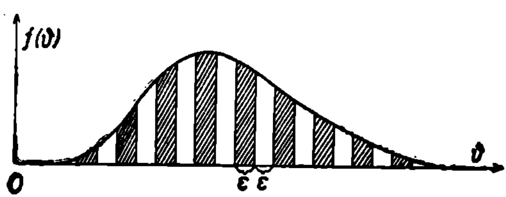
Předpokládáme: pravděpodobnost, že úhrnný úhel, o který se ruleta otočí, jest obsažen v mezích ϑ a $\vartheta + d\vartheta$, dá se vyjádřiti formulí $f(\vartheta)\, d\vartheta$. Přitom je hustota pravděpodobnosti $f(\vartheta)$ kladná a spojitá funkce, která vyhovuje podmínce

$$\int_0^\infty f(\vartheta)\, d\vartheta = 1. \qquad (1)$$



Obr. 16.

(To znamená: je jisto, že onen úhel jest v mezích 0 až $+\infty$.) Budiž ε středový úhel jedné výseče na ruletě; znázorníme funkci $y = f(\vartheta)$ graficky a rozdělíme osu ϑ dělícími body na stejně dlouhé intervaly o délce ε a dělícími body vedeme pořadnice až k průseku s křivkou $y = f(\vartheta)$. Plocha omezená křivkou a osou $O\vartheta$ je tak rozdělena na svislé pruhy o šířce ε, jež odpovídají střídavě výsečím červeným a černým. V obrazci odpovídají bílé pruhy červeným úsečím a vyčárkované černým. Pravděpodobnost p se rovná součtu ploch bílých (obr. 17).



Obr. 17.

Ruletu nesmíme roztáčeti ani příliš málo*) ani příliš mnoho (s ohledem na její pevnost). Je-li A maximální hodnota úhlu, o který se může ruleta otočiti a n počet pruhů v obrazci 17**), je $n\varepsilon = A$. Připusťme, že funkce $f(\vartheta)$ má derivaci, jejíž absolutní hodnota je menší než konstanta M. Rozdíl ploch dvou sousedních pruhů je menší než $\varepsilon(\mu' - \mu)$, kde μ' a μ jsou resp. maximum a minimum funkce $f(\vartheta)$ v intervalu o délce 2ε odpovídajícímu oběma pruhům.

Veličina $\mu' - \mu$ je menší než $2M\varepsilon$, rozdíl plošných obsahů obou pruhů je tedy menší než $2M\varepsilon^2$. Součet ploch všech bílých pruhů (kterých je celkem $\frac{1}{2}n$) liší se od součtu ploch všech vyčárkovaných pruhů o méně než $\frac{1}{2}n \,.\, 2M\varepsilon^2 = Mn\varepsilon^2 = MA\varepsilon$.

Je-li ε nekonečně malé, je také tento rozdíl nekonečně malý, t. j. úhrnná pravděpodobnost p že vyjde červená = = úhrnné pravděpodobnosti, že vyjde černá.

Kdybychom nic nevěděli o funkci $f(\vartheta)$, nemohli bychom nic počítati; jen proto, že něco o ní víme, můžeme tvrditi, že hledaná pravděpodobnost je rovna $\frac{1}{2}$.†)

Výsledek je pozoruhodný tím, že možno funkci $f(\vartheta)$ v širokých mezích libovolně voliti a že tyto změny nemají vlivu na konečný výsledek; při velkém počtu výsečí je p přibližně rovna jedné polovině, nechť je $f(\vartheta)$ jakákoli *(methoda libovolných funkcí)*.

Podle Frécheta pravíme, že zde nastává *regularisace pravděpodobnosti*; v jednoduchém výsledku $p = \frac{1}{2}$ neprojevují se podrobnosti z průběhu funkce $f(\vartheta)$. Tato funkce závisí obecně na konstrukci rulety a na individualitě hráčově; pro různé

---

*) Kdybychom jí udělili jen velmi malý náraz, takže by se otočila méně než o úhel ε, dovedli bychom předvídati výsledek; zjev by nebyl náhodný (srovnej s tím, co bylo řečeno o házení kostkou na začátku odst. 1).

**) n je tím větší, čím více výsečí má ruleta.

†) Uvedený důkaz pochází od *Poincaréa*. K důkazu stačí předpokládati, že $f(\delta)$ je spojitá nebo jen integrovatelná.

hráče bylo by třeba zavésti různé funkce $f(\vartheta)$, ale výsledek $p = \frac{1}{2}$ platí stejně pro všechny rulety a pro všechny hráče.

b) Methoda libovolných funkcí, která právě byla vyložena na problému rulety, je velmi obecná a dá se jí užíti takřka ve všech úlohách o počtu pravděpodobnosti; ukážeme to na příkladech v dalších odstavcích.

37. Pomocná věta o přírůstku funkce několika proměnných; zobecněná methoda libovolných funkcí. a) Budiž $f(x, y, z)$ kladná funkce spojitá v okolí bodu $x = a$, $y = b$, $z = c$ se spojitými parciálními derivacemi f_x', f_y' a f_z'. Položme

$$\varphi(t) = f(a + ht,\ b + kt,\ c + lt);$$

$\varphi(t)$ je spojitá funkce proměnné t se spojitou derivací. Platí tedy

$$\varphi(1) - \varphi(0) = (1 - 0)\,\varphi'(\Theta),\ 0 < \Theta < 1 \tag{1}$$

kde $\varphi'(t)$ značí derivaci funkce $\varphi(t)$. Poněvadž

$$\varphi(1) = f(a + h,\ b + k,\ c + l),\ \varphi(0) = f(a, b, c),$$
$$\begin{aligned}\varphi'(t) = {} & h\,f_x'(a + ht,\ b + kt,\ c + lt) + \\ & + k\,f_y'(a + ht,\ b + kt,\ c + lt) + \\ & + l\,f_z'(a + ht,\ b + kt,\ c + lt),\end{aligned}$$

je podle (1)

$$\begin{aligned} f(a + h,\ b + k,\ c + l) - f(a, b, c) = {} & \\ = h\,f_x'(a + \Theta h,\ b + \Theta k,\ c + \Theta l) & + \\ + k\,f_y'(a + \Theta h,\ b + \Theta k,\ c + \Theta l) & + \\ + l\,f_z'(a + \Theta h,\ b + \Theta k,\ c + \Theta l). & \end{aligned} \tag{2}$$

Rovnice (2) vyjadřuje *větu o přírůstku funkce* tří proměnných.*)

b) V odst. 36 byla vyložena Poincaréova methoda libovolných funkcí pro případ, ze hustota pravděpodobnosti $f(x)$ byla funkcí jedné proměnné. Vezmeme nyní v úvahu případ, že

*) Tento důkaz je uveden podle knihy *N. N. Luzin:* Differencialnoje izčislěnije (Moskva, 1946, p. 377—378).

hustota $f(x, y, z)$ pravděpodobnosti je spojitá funkce tří proměnných x, y, z se spojitými parciálními derivacemi f_x', f_y', f_z' v určitém oboru A. Předpokládáme, že A je část prostoru, v němž bod je určen pravoúhlými souřadnicemi x, y, z, omezená uzavřenou plochou. Pokud bod x, y, z je v A, nechť tyto derivace vyhovují podmínkám

$$|f_x'| < K, \ |f_y'| < K, \ |f_z'| < K \tag{3}$$

kde K je konstanta.

Rozdělme obor A na m oborů stejného objemu, které nazveme „elementární obory". Je-li A objem oboru A, má každý elementární obor objem

$$\varepsilon = \frac{A}{m}. \tag{4}$$

Při tom předpokládáme, že vzdálenost dvou bodů volených uvnitř téhož elementárního oboru je vždy kratší než délka l a že

$$\lim_{m \to \infty} l = 0. \tag{5}$$

Jinými slovy: roste-li m do nekonečna, blíží se všechny rozměry elementárního oboru nule.

Rozdělme pak každý elementární obor ve dvě části; každá z těchto částí může býti složena z menších dílů, jež leží odděleny jedny od druhých. Objem prvé části, kterou nazveme bílou, budiž $\lambda\varepsilon$ objem druhé části, kterou nazveme černou, je $(1 - \lambda)\varepsilon$. Poměr λ objemu bílé části k objemu celého elementárního oboru budiž konstantní; poměr ten je číslo obsažené mezi 0 a 1, které nezávisí ani na uvažovaném elementárním oboru ani na čísle m.

Zaveďme integrály I a I_1:

$$I = \iiint_A f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz, \quad I_1 = \iiint_{A_1} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

integrál I má za integrační obor A, integrační obor A_1 integrálu I_1 je složen ze všech bílých částí obsažených uvnitř A.

Hodnota integrálu I_1 závisí na čísle m. *Roste-li m do nekonečna, je*

$$\lim_{m \to \infty} I_1 = \lambda I. \tag{6}$$

Abychom dokázali rovnici (6), označme písmenem δ libovolný elementární obor sestrojený uvnitř A. Uvnitř δ je bod (x, y, z), ve kterém nabývá funkce $f(x, y, z)$ největší hodnoty M a bod $(x + \Delta x,\ y + \Delta y,\ z + \Delta z)$, ve kterém ta funkce nabývá své nejmenší hodnoty M'. Podle předpokladu je

$$|\Delta x| \leqq l,\ |\Delta y| \leqq l,\ |\Delta z| \leqq l.$$

Vzhledem k (2) a (3) je

$$\begin{aligned} M - M' = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - \\ - f(x, y, z) < 3lK. \end{aligned} \tag{7}$$

Násobme číslem λ tu část integrálu I, která patří k uvažovanému elementárnímu oboru δ; součin je menší než $\lambda M \varepsilon$, je-li ε objem oboru δ. Ta část integrálu I_1, která se vztahuje k bílé části oboru δ, je větší než $\lambda M' \varepsilon$. Rozdíl onoho součinu a této části integrálu I_1 je menší než

$$(M - M')\, \varepsilon \lambda < 3l\lambda K \varepsilon = \frac{3l\lambda KA}{m},$$

jak plyne z (7) a (4). Trojnásobný integrál $(\lambda I - I_1)$ je limita součtu m takových rozdílů; proto je

$$|\lambda I - I_1| < 3l\lambda KA. \tag{8}$$

Vzhledem k (5) konverguje $(\lambda I - I_1)$ k nule, roste-li m do nekonečna; tím je dokázána správnost rovnice (6).

Obdobný výsledek platí pro funkci libovolného počtu nezávisle proměnných. V případě, že f je funkce jen jedné nezávisle proměnné a že $\lambda = \frac{1}{2}$, vyjadřuje (6) Poincaréovu větu uvedenou v předešlém odstavci.

c) Vraťme se k funkci $f(x, y, z)$ tří proměnných a předpokládejme, že f nezávisí na z. Pak je třetí člen na pravé straně rovnice (2) roven nule a proto budeme míti na místo (7) nerovnost

$$M - M' < 2lK. \tag{9}$$

Předpokládejme nyní, že utvoříme integrály I a I_1 s trojrozměrnými integračními obory A resp. A_1 jako dříve, s tím rozdílem, že „elementární obory" budou míti s rostoucím m do nekonečna, nekonečně malé rozměry ve směrech Ox a Oy; připustíme však, že rozměry elementárních oborů nejsou nekonečně malé ve směru Oz. Bude tedy

$$|\Delta x| \leqq l, \ |\Delta y| \leqq l, \ \lim_{m\to\infty} l = 0,$$

bude platiti nerovnost (9), a z ní plyne, že (8) se promění na

$$|\lambda I - I_1| < 2l\lambda KA. \tag{10}$$

Z toho pak následuje, že rovnice (6) platí i v tomto případě: $f(x, y, z)$ nezávisí na z a rozměry elementárních oborů, měřené rovnoběžně k Oz, nemají za limitu nulu.

38. Nové řešení úlohy o jehle. a) Na vodorovné rovině jsou narýsovány ekvidistantní rovnoběžky; vzdálenost dvou sousedních rovnoběžek budiž $2a$. Hodíme na rovinu jehlu o délce $2b$. Úlohou je vypočítati pravděpodobnost p, že jehla protne některou rovnoběžku.

Vyjádříme nejprve podrobně předpoklady, za kterých konáme pokusy: Rovnoběžky jsou narýsovány na vodorovném čtverci C, jehož strana má délku $2na$ (počet rovnoběžek $= n + 1$). Jeden vrchol čtverce je v počátku O pravoúhlých souřadnic a dvě jeho strany leží v osách Ox a Oy. Vrcholy čtverce mají tedy souřadnice

$$(0, 0), \ (2na, 0), \ (2na, 2na), \ (0, 2na).$$

Rovnoběžky narýsované na čtverci mají rovnice

$$y = 0, \ y = 2a, \ y = 4a, \ \ldots, \ y = 2na,$$

a dělí jej na n shodných obdélníků o rozměrech $2na$ a $2a$. Na začátku každého pokusu umístíme jehlu ve středu čtverce C tak, že její osa je svislá a udělíme jí pak určitou rychlost ve směru svislém vzhůru. Jehla ovšem není na počátku v naprosto přesně svislé poloze, počáteční náraz, kterým se jehla uvádí do pohybu, mění se od pokusu k pokusu co do směru i velikosti, třebaže jen v malých mezích. Proto dopadá jehla v různých pokusech na různá místa čtverce. Ale odchylky v počátečních podmínkách nesmějí býti příliš veliké, poněvadž jehla nemá padnouti mimo čtverec. Předpokládáme, že je málo pravděpodobno, že jehla dopadne na obvod čtverce. Budiž p_1 pravděpodobnost, že střed jehly dopadne dovnitř čtverce o straně 1 cm, jenž je narýsován poblíže středu čtverce C; budiž pak p_2 obdobná pravděpodobnost pro plošku 1 cm^2 položenou poblíž obvodu čtverce C. Patrně bude $p_1 > p_2$.

Nazveme x, y souřadnice bodu, do kterého padne střed jehly a písmenem ω prostou velikost její odchylky od osy Oy; při tom nepřihlížíme k orientaci jehly, takže je vždy $0 \leqq \omega \leqq \frac{1}{2}\pi$. Hustota pravděpodobnosti pro dopad středu jehly na určité místo x, y a pro určitý úhel ω budiž $f(x, y)$, nezávislá na ω. Funkce $f(x, y)$ je kladná, má spojité parciální derivace 1. řádu takové, že

$$|f_x'| < K, \ |f_y'| < K$$

a vyhovuje podmínce

$$\iiint_A f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}\omega = 1, \tag{1}$$

kde A značí obor všech možných případů určený podmínkami:

$$0 \leqq x \leqq 2na, \ 0 \leqq y \leqq 2na, \ 0 \leqq \omega \leqq \tfrac{1}{2}\pi.$$

b) Hledaná pravděpodobnost p je vyjádřena vzorcem

$$p = \iiint_{A_1} f(x, y,)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}\omega, \tag{2}$$

kde A_1 je obor všech případů, ve kterých jehla protne některou rovnoběžku. Je-li h vzdálenost středu jehly od té rovnoběžky, kterou protíná ($h \leqq b$), je

$$0 \leqq \omega \leqq \arccos \frac{h}{b};$$

obor A_1 je definován nerovnostmi

$$0 \leqq x \leqq 2na, \ 2\nu a \leqq y \leqq 2\nu a + b,$$

$$0 \leqq \omega \leqq \arccos \frac{y - 2\nu a}{b}$$

$$(\nu = 0, 1, 2, \dots, n - 1)$$

pro případ, že pořadnice y je větší než pořadnice proťaté (ν-té) rovnoběžky, a nerovnostmi

$$0 \leqq x \leqq 2na, \ 2\nu a - b < y < 2\nu a,$$

$$0 \leqq \omega \leqq \arccos \frac{2\nu a - y}{b}$$

$$(\nu = 1, 2, \dots, n)$$

pro případ, že pořadnice y je menší než pořadnice proťaté (ν-té) rovnoběžky.

Považujme x, y a ω za obyčejné pravoúhlé souřadnice bodu v prostoru a sledujme tvary oborů A a A_1. Obor A je pravoúhlý rovnoběžnostěn, jehož základnou je čtverec C a jehož výška se rovná $\frac{1}{2}\pi$. Rozdělíme obor A na n^2 elementárních oborů dvěma soustavami rovin kolmých k rovině čtverce C; jednak rovinami, které procházejí každá jednou z daných rovnoběžek:

$$y = 2\nu a, \ (\nu = 1, 2, \dots, n - 1),$$

jednak rovinami kolmými k předešlým:

$$x = 2\nu a, \ (\nu = 1, 2, \dots, n - 1).$$

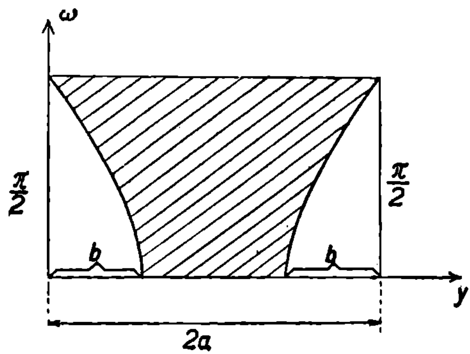
Každý elementární obor je tedy pravoúhlý hranol, jehož základna je čtverec o straně $2a$ a jehož výška je rovna $\frac{1}{2}\pi$. Rozdělme dále tyto elementární obory válcovými plochami (jichž hrany jsou rovnoběžné s osou Ox):

$$\omega = \arccos \frac{y - 2\nu a}{b}, \quad (\nu = 0, 1, \dots, n - 1; \; y > 2\nu a)$$

a

$$\omega = \arccos \frac{2\nu a - y}{b}, \quad (\nu = 1, 2, \dots, n; \; y < 2\nu a).$$

Každý elementární obor se tak rozdělí na dvě části. Jedna, kterou nazveme bílou je tvořena body (x, y, ω) znázorňujícími případy, kdy jehla protíná jednu ze dvou sousedních rovnoběžek; druhá, kterou nazveme černou, je tvořena zbytkem oboru. V obr. 18 je řez elementárního oboru rovinou kolmou k Ox; je patrno, že bílá část (nevyčárkovaná) se skládá ze dvou vzájemně nesouvisících dílů.



Obr. 18.

Obor A_1 je tvořen souborem všech bílých částí. Poměr bílé části k celému elementárnímu oboru je roven poměru bílé plochy v obr. 18 k celé ploše obrazce, tedy

$$\lambda = \left(2\int\limits_0^b \arccos\frac{h}{b}\,\mathrm{d}h\right) : 2a\tfrac{1}{2}\pi = \frac{2b}{\pi a}. \tag{3}$$

V označení nerovnosti (10) odst. 37 je

$$\lambda = \frac{2b}{\pi a},\quad z = \omega,\ m = n^2,\ l = 2a,\ A = 2n^2a^2\pi,$$

takže podle (10) bude

$$|\lambda I - I_1| < 16ba^2n^2\pi K.$$

Připusťme, že počet rovnoběžek n roste do nekonečna a že při tom se nemění ani poměr b/a ani plocha P čtverce C. Je tedy $P = 4a^2n^2$, $\lim a = 0$, $\lim b = 0$, takže platí podle (6) odst. 37

$$\lim_{n\to\infty}(\lambda I - I_1) = 0;$$

podle (1), (2) a (3) odst. 38 je

$$I = 1,\ p = \lim_{n\to\infty} I_1 = \lambda I = \lambda = \frac{2b}{\pi a}.$$

Výsledek vyjádříme takto: *Je-li počet rovnoběžek narýsovaných ve čtverci C velmi veliký, je za předpokladů uvedených v odst. 38a pravděpodobnost, že jehla protne některou rovnoběžku, rovna přibližně $2b : \pi a$.*

c) Kdyby hustota pravděpodobnosti, že střed jehly dopadne na dané místo čtverce C, byla konstantní $= f$, měli bychom místo (1)

$$f \,.\int\limits_{\omega=0}^{\frac{1}{2}\pi}\int\limits_0^{2na}\int\limits_0^{2na} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\omega = 2n^2a^2\pi \,.\, f = 1;$$

hledaná pravděpodobnost by byla vzhledem k (2) rovna

$$p = \frac{\iiint\limits_{A_1} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\omega}{\iiint\limits_{A} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\omega} = \lambda = \frac{2b}{\pi a},$$

neboť všechny elementární obory jsou stejné a poměr obou trojnásobných integrálů je totožný s poměrem bílé části elementárního oboru k celému oboru, kterýžto poměr je určen rovnicí (3). Tento výsledek se shoduje s dříve podaným důkazem Buffonova vzorce; viz rovnici (4) odst. 33.*)

39. Valivý pohyb koule po vodorovné rovině. a) Na povrchu koule o poloměru a je dán sférický obrazec S omezený uzavřenou křivkou bez dvojného bodu. Položíme kouli na vodorovnou rovinu α tak, že z počátku bod O kulového povrchu dotýká se jí v bodě O_1; v dalším budeme značiti body ležící na povrchu koule písmeny $O, A, B, \ldots$ a body ležící v rovině α písmeny s indexy: $O_1, A_1, B_1, \ldots$. Udělme kouli vodorovný náraz, takže se valí po rovině a zastaví se posléze (vlivem tření a pod.) v určité konečné poloze; budiž T_1 bod dotyku, v němž se rovina α dotýká koule a T příslušný bod kulového povrchu, splývající v konečné poloze s T_1. Pravděpodobnost p, že T leží uvnitř obrazce S, vyjádříme za těchto předpokladů:

I. Počáteční poloha koule vůči rovině α je předepsána (bod O splývá s O_1).

II. Koule se valí po rovině bez klouzání a její počáteční rychlost nepřekročí určité meze, takže střed koule opíše úsečku ne delší než $2\pi na$ (koule se otočí nejvýše n-krát kolem vodorovného průměru). Bod O opisuje při tom cykloidu obsaženou ve svislé rovině procházející bodem O_1. Směr úsečky opsané středem koule může býti jakýkoli, ovšem vodorovný; n je veliké kladné celé číslo.

---

*) Výsledky uvedené v odst. 38 jsem uveřejnil v pracích Nové řešení Buffonovy úlohy o jehle (Rozpravy České Akademie, II. tř. R. 26, č. 13, 1917); Sur une nouvelle solution du problème de l'aiguille (Bulletin des sciences mathématiques, 2e série, t. 44, 126—136, 1920). *M. Fréchet* doplnil moje úvahy v článku Remarque sur les probabilités continues (Bull. des sc. math. 2e série, t. 45, 87—88, 1921). Viz též *Fréchet-Halbwachs:* Le calcul des probabilités à la portée de tous p. 49 (Paris, 1924); *Fréchet:* Recherches théoriques modernes sur le Calcul des probabilités, fasc. 1. (Paris, 1925).

III. p lze vyjádřiti integrálem

$$p = \iint_P F(\varrho)\, \varrho\, d\varrho\, d\varphi \tag{1}$$

kde ϱ a φ jsou polární souřadnice v rovině α s pólem v bodě O_1; $\varrho\, d\varrho\, d\varphi$ je element plošného obsahu v rovině; hustota pravděpodobnosti $F(\varrho)$ (t. j. pravděpodobnost připadající na 1 cm² roviny) je kladná spojitá funkce průvodiče ϱ, jejíž derivace je menší než daná konstanta K, a platí, že

$$\iint_C F(\varrho)\, \varrho\, d\varrho\, d\varphi = 2\pi \int_0^{2\pi n a} F(\varrho)\, \varrho\, d\varrho = 1, \tag{2}$$

kde C značí kruh opsaný v rovině α kolem bodu O_1 poloměrem $2\pi n a$. P značí obor všech příznivých případů, t. j. množství všech bodů, které mohou býti body dotyku T_1 roviny s koulí v její konečné poloze.

b) Všimněme si případu, že hustota $F(\varrho)$ pravděpodobnosti, která nezávisí na φ, nezávisí ani na ϱ. Položíme-li $F(\varrho) = c$, dá rovnice (2)

$$2\pi c \int_0^{2\pi n a} \varrho\, d\varrho = 4\pi^3 c n^2 a^2 = 1,$$

tedy

$$c = \frac{1}{4\pi^3 n^2 a^2}$$

a podle (1) bude

$$p = \frac{1}{4\pi^3 n^2 a^2} \iint_P \varrho\, d\varrho\, d\varphi. \tag{3}$$

Dvojnásobný integrál (3) se rovná plošnému obsahu „oboru příznivých případů"; ve jmenovateli je obsah kruhu C.

c) V některých případech, i když funkce $F(\varrho)$ není konstantní, lze počítati, aspoň přibližně, hodnotu p hledané pravděpodobnosti methodou obdobnou methodě vyložené v odst. 36 (zobecněná úloha o ruletě) nebo v odst. 38 (problém jehly). Místo elementárních oborů máme zde mezikruží, která vzniknou, dělíme-li kruh C kružnicemi o středu O_1 a poloměrech $2\pi a, 4\pi a, 6\pi a, \dots, (n-1)2\pi a$. Tři takové příklady jsou uvedeny v následujícím odstavci.

40. Tři příklady valivého pohybu koule. a) Na kouli narýsujeme hlavní kružnici, která dělí její povrch na dvě stejně veliké části; jednu „červenou" a druhou „bílou". Kouli položíme na vodorovnou rovinu α tak, aby střed O červené části splýval s bodem O_1 roviny, jenž je tedy bodem dotyku roviny a koule. Uveďme pak kouli do pohybu za podmínek uvedených v odst. 39. Jak veliká je pravděpodobnost p, že se koule zastaví v takové poloze, že se dotýká roviny bodem ležícím v červené části kulového povrchu?

Výpočet obdobný výpočtu v odst. 37—38 vede k výsledku:*)

$$|p - \tfrac{1}{2}| < 4\pi^3 n^2 a^3 K, \tag{1}$$

kde ve shodě s označením odst. 39 značí
a = poloměr koule,
n = největší počet obrátek, které koule při valivém pohybu může vykonati,
K = horní mez derivace hustoty pravděpodobnosti $F(\varrho)$,
p = je obecně dána rovnicí (1) odst. 39.

Je-li pravá strana nerovnosti (1) dosti malá, je p přibližně rovno $\frac{1}{2}$. V případě, že $F(\varrho) = \text{const}$, je $K = 0$, a tedy $p = \frac{1}{2}$.

b) Do koule je vepsána krychle o vrcholech $ABCDEFGH$. Sestrojme nad každou hranou krychle oblouk hlavní kružnice, takže se povrch koule rozdělí na šest křivočarých čtyřúhelníků, které označíme I, II, ..., VI. Čtyřúhelník VI budiž

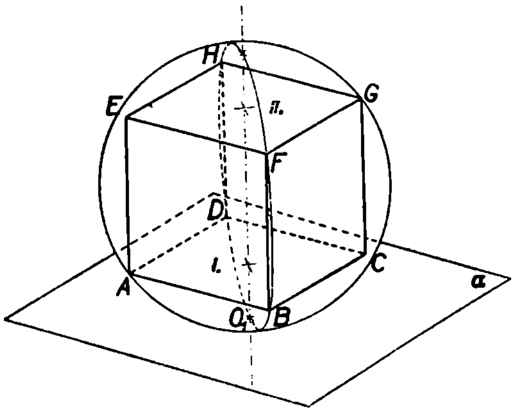
*) Uvádím zde jen výsledky; stran podrobností viz můj článek Sur la méthode des fonctions arbitraires (Acta Mathematica, 40, 95—113, 1926), moje spisy Geometrické pravděpodobnosti (Praha, 1926, odst. 40), Méthodes générales du Calcul des Probabilités (Mémorial des sciences mathém. 52, Paris, 1930, No 2).

protilehlý k I. V počáteční poloze nechť koule leží na rovině α tak, že střed čtyřúhelníku I splývá s O_1 (obr. 19). Pravděpodobnost p_I, že se koule zastaví tak, že bod dotyku bude v čtyřúhelníku I, rovná se příslušné pravděpodobnosti p_{VI} pro čtyřúhelník VI a platí

$$|p_I - \lambda| < 8\pi^3 n^2 a^3 K \lambda, \tag{2}$$

kde

$$\lambda = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \arcsin \sqrt{\frac{2}{3 + \sin 2\varphi}} \,.\, \mathrm{d}\varphi = 0{,}267\ldots$$



Obr. 19.

Je tedy, pokud pravá strana (2) je dosti malá,

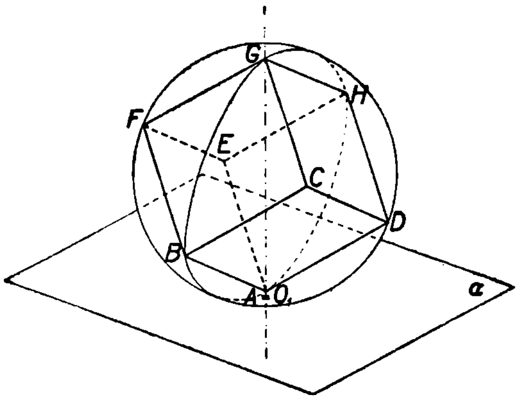
$$p_I = 0{,}267\ldots \tag{3}$$

Dále platí

$$p_{II} = p_{III} = p_{IV} = p_V = 1 - 2p_I = 0{,}466\ldots \tag{4}$$

Rovnice (3) a (4) platí přesně, je-li $F(\varrho) = \text{const}$, tedy $K = 0$.

c) Do koule je zase vepsána krychle jako v předešlé úloze. V počáteční poloze dotýká se koule roviny α ve vrcholu A krychle (viz obr. 20). Pravděpodobnost, že bod dotyku koule s rovinou bude ležeti v jednom ze šesti křivočarých čtyřúhelníků je stejná pro všech šest čtyřúhelníků a rovná se, pro případ, že $F(\varrho) =$ const, jedné šestině.*)



Obr. 20.

*) Je-li $F(\varrho)$ konstantní, vede výpočet pravděpodobnosti p pro kterýkoli ze šesti čtyřúhelníků k hodnotě

$$p = \frac{1}{\pi^2} \int\limits_0^{\frac{1}{3}\pi} \arcsin \frac{2}{\sqrt{5 - \sin(\frac{1}{6}\pi + 2\varphi)}} \, d\varphi;$$

arcsin je určen podmínkou, že s rostoucím φ v intervalu $(0, \frac{1}{3}\pi)$ stále roste a rovná se $\frac{1}{2}\pi$, když φ se rovná $\frac{1}{6}\pi$. Poněvadž součet šesti pravděpodobností je 1, musí býti $p = \frac{1}{6}$. Pan prof. O. Borůvka mně sdělil (v dopise ze dne 8. září 1925) důkaz, kterým se přímo odůvodňuje, že uvedený integrál se rovná $\frac{1}{6}\pi^2$, takže $p = \frac{1}{6}$.

41. Poznámky o geometrických pravděpodobnostech. V odstavci 37—40 jsme ukázali, jak se „regularisace“ zavedená Poincarém v úloze o ruletě (odst. 36) přenáší na jiné úlohy o geometrických pravděpodobnostech. I když hustoty pravděpodobností, ze kterých se vychází (n. př. pro zastavení roztočené rulety nebo pro dopad středu jehly) nejsou konstantní, lze odůvodniti, že hledané pravděpodobnosti (že ruleta se zastaví u červené výseče, že jehla protne některou rovnoběžku) mají přibližně takové hodnoty, jaké jim přisuzuje elementární theorie založená na počtu s konstantními hustotami pravděpodobnosti. Elementární definice geometrických pravděpodobností (odst. 26, 27) založené na obdobě s původní definicí pro nejjednodušší úlohy (odst. 1) se doplňují zvláštními vztahy, které v odst. 36—40 byly odvozeny mezi určitými pravděpodobnostmi s proměnnou hustotou a pravděpodobnostmi hledanými. Srovnajíce elementární způsob s tímto obecnějším docházíme k odůvodnění a vysvětlení pojmu „stejně pravděpodobných případů“, které n. př. pro hod kostkou shrneme takto: vržená kostka koná složitý valivý pohyb než se zastaví a počítáme s tím, že je nekonečně mnoho poloh, ve kterých se může na konec zastaviti a že každá z nich má obecně jinou pravděpodobnost. Přece však usuzujeme, že pravděpodobnost kteréhokoli počtu ok je rovna $\frac{1}{6}$. Nebylo by snadné vzíti do počtu valivý pohyb kostky a podrobně odůvodniti, proč čekáme se stejnou pravděpodobností každý ze šesti případů. Ale cesta k tomuto cíli je naznačena řešením úlohy (viz hlavně odst. 40c) o valivém pohybu koule po rovině; povrch koule je rozdělen na šest shodných sférických čtyřúhelníků, jichž vrcholy jsou zároveň vrcholy krychle vepsané do koule. S tohoto hlediska jsou nejen úlohy o vrhu kostkou nebo penízem, nýbrž vůbec všechny úlohy o pravděpodobnostech týkající se pohybu těles úlohami o geometrických pravděpodobnostech; ačkoli nás zajímá pravděpodobnost zjevu zdánlivě zcela jednoduchého (kolik ok padne při hodu kostkou, padne-li peníz na líc či na rub), nezapomínáme, že možných případů je nekonečně mnoho.*)

---

*) O geometrických pravděpodobnostech jednají mimo knihy již dříve uvedené, tyto spisy:

Crofton: Probability (článek v Encyklopedia Britannica).

Czuber: Geometrische Wahrscheinlichkeiten und Mittelworte (Leipzig, 1889). Vyšlo též francouzsky:

Czuber-Schuermans: Probabilités et moyennes géométriques (Paris, 1902).

Hostinský: Sur les probabilités géométriques (Spisy vydávané přírodovědeckou fakultou Masarykovy university č. 50, Brno, 1925).

Hostinský: Geometrické pravděpodobnosti (Praha, 1926).

Deltheil: Probabilités géométriques (Paris, 1926).

KAPITOLA ČTVRTÁ

RŮZNÉ ÚLOHY

42. Pravděpodobnosti složitých zjevů. a) Budiž p_1 pravděpodobnost, že se vyskytne zjev E_1, p_2, pravděpodobnost, že se vyskytne E_2 a p_3, pravděpodobnost, že se vyskytne E_3. Při tom nepředpokládáme nic o tom, jsou-li zjevy E_i závislé jeden na druhém, nevylučují-li se vzájemně; současně s jedním z nich může se vyskytnouti i druhý z nich nebo oba zbývající. Budiž pak p_k' pravděpodobnost, že E_k se vyskytne sám (bez druhých dvou); $k = 1, 2, 3$. Obdobně označíme znakem $p_{ik} = p_{ki}$ pravděpodobnost, že se vyskytnou E_i a E_k (bez ohledu na to, vyskytne-li se třetí zjev) a znakem $p_{ik}' = p_{ki}'$ pravděpodobnost, že se vyskytnou jen E_i a E_k s vyloučením třetího; $i, k = 1, 2, 3, i \neq k$. Konečně budiž p_{123} pravděpodobnost, že se vyskytnou všechny tři zjevy E_1, E_2, E_3.

Poněvadž E_1 se vyskytne buď sám, nebo doprovázen zjevem E_2, nebo doprovázen zjevem E_3, nebo konečně doprovázen oběma zjevy E_2 i E_3, platí rovnice

$$p_1 = p_1' + p_{12}' + p_{13}' + p_{123}.$$

Poněvadž zjevy E_1 a E_2, vyskytnou-li se oba, buď nejsou nebo jsou doprovázeny zjevem E_3, je

$$p_{12} = p_{12}' + p_{123}, \quad p_{13} = p_{13}' + p_{123}$$

a máme, vyloučíce z první rovnice p_{12}' a p_{13}',

$$p_1' = p_1 - p_{12} - p_{13} + p_{123}$$

$$p_{12}' = p_{12} - p_{123}, \quad p_{13}' = p_{13} - p_{123}.$$

Podobné rovnice bychom odvodili záměnou indexů pro p_2', p_3' a pro p_{23}'.

Pravděpodobnost $P^{(1)}$, že se vyskytne jediný ze zjevů E_1, E_2, E_3 bez druhých dvou (není dáno, který), je

$$P^{(1)} = p_1' + p_2' + p_3' =$$

$$= p_1 + p_2 + p_3 - 2(p_{12} + p_{13} + p_{23}) + 3p_{123}.$$

Pravděpodobnost, že se vyskytnou jen dva z uvažovaných tří zjevů bez třetího (není dáno, které dva), je

$$P^{(2)} = p_{12}' + p_{13}' + p_{23}' = p_{12} + p_{13} + p_{23} - 3p_{123}.$$

Pravděpodobnost P, že se vyskytne aspoň jeden ze zjevů E_1, E_2 a E_3, je

$$P = P^{(1)} + P^{(2)} + p_{123} =$$

$$= p_1 + p_2 + p_3 - (p_{12} + p_{13} + p_{23}) + p_{123}.$$

b) Vezmeme-li v úvahu n různých zjevů $E_1, E_2, \ldots, E_n$, lze odvoditi rovnice, obdobné předešlým, které vyjadřují různé pravděpodobnosti jako funkce pravděpodobností p_i (že se vyskytne vůbec zjev E_i), p_{ik} (že se vůbec vyskytnou dva zjevy E_i a E_k), p_{ikl}, (že se vyskytnou vůbec tři zjevy E_i, E_k a E_l) atd. Budiž p_i' pravděpodobnost, že se vyskytne jen zjev E_i s vyloučením ostatních, p_{ik}' pravděpodobnost, že se vyskytnou jen E_i a E_k s vyloučením ostatních; $P^{(1)}$ budiž pravděpodobnost, že se vyskytne jen jeden ze zjevů E_i (není dáno, který), $P^{(2)}$ pravděpodobnost, že se vyskytnou jen dva z nich (není dáno, které); budiž konečně P pravděpodobnost, že se vyskytne aspoň jeden ze zjevů E_1, $E_2, \ldots, E_n$.

Platí tyto vztahy.*)

*) *G. Castelnuovo:* Calcolo delle Probabilità, seconda ediz. I., 29, Bologna. — *H. Poincaré:* Calcul des Probabilités, 2ième édition, 60; Paris, 1912. — *M. Fréchet:* Recherches théoriques modernes sur la Théorie des probabilités, premier livre, 12, Paris, 1937. O řadě podobných úloh jedná spis *M. Fréchet:* Les probabilités associées à un système d'évenements compatibles et dépendants (Actualités scientifiques et industrielles No 859, 942, Paris, 1940—43).

$$p_1' = p_1 - \sum_i p_{1i} + \sum_{ik} p_{1ik} \cdots \tag{1}$$

$$p_{12}' = p_{12} - \sum_i p_{12i} + \sum_{ik} p_{12ik} \cdots \tag{2}$$

$$P^{(1)} = \sum_i p_i' = \sum_i p_i - 2\sum_{ik} p_{ik} + 3\sum_{ikl} p_{ikl} \cdots \tag{3}$$

$$P^{(2)} = \sum_{ik} p_{ik}' = \sum_{ik} p_{ik} - (3)_2 \sum_{ikl} p_{ikl} + (4)_2 \sum_{iklm} p_{iklm} \cdots \tag{4}$$

$$P = \sum_i P^{(i)} = \sum_i p_i - \sum_{ik} p_{ik} + \sum_{ikl} p_{ikl} \cdots \tag{5}$$

kde součty vztahují se ke všem kombinacím indexů 1, 2, 3, ..., n bez opakování. K odůvodnění rovnic (1) a (2) připomeňme samozřejmé rovnice

$$p_1 = p_1' + \sum_i p_{1i}' + \sum_{ik} p_{1ik}' + \cdots$$

$$p_{1i} = p_{1i}' + \sum_k p_{1ik}' + \sum_{kl} p_{1ikl}' + \cdots \tag{6}$$

$$p_{1ik} = p_{1ik}' + \sum_l p_{1ikl}' + \sum_{lm} p_{1iklm}' + \cdots; \tag{7}$$

zde značí $p_1'{}_{ik}$, $p_1'{}_{ikl}$, ... pravděpodobnosti, že se vyskytnou jen zjevy E_1, E_i, E_k, resp. jen E_1, E_i, E_k, E_l atd. Utvoříce sečítáním rovnic tvaru (6) a (7) součty

$$\sum_i p_{1i}, \ \sum_{ik} p_{1ik}$$

a vyloučíce pak součty

$$\sum_i p_{1i}', \ \sum_{ik} p_{1ik}'$$

dostaneme vztahy (1) a (2).

c) V osudí je n koulí očíslovaných čísly 1, 2, ..., n. Koule se vytahují postupně jedna po druhé, vytažené se nevkládají zpět. Jak velká je pravděpodobnost P, že aspoň v jednom z těchto n tahů se shodne jeho pořadové číslo s číslem vytažené koule?

Budiž p_i pravděpodobnost, že při i-tém tahu vyjde koule s číslem i; p_{ik}, že při i-tém vyjde i-tá a při k-tém k-tá atd. Pak je podle (5)

$$P = \sum_i p_i - \sum_{ik} p_{ik} + \sum_{ikl} p_{ikl} \dots$$

Zde je pro libovolné $i, k, \dots$

$$p_i = \frac{1}{n}, \quad p_{ik} = \frac{1}{n(n-1)}, \quad p_{ikl} = \frac{1}{n(n-1)(n-2)}, \dots$$

a tedy

$$P = n \cdot \frac{1}{n} - (n)_2 \cdot \frac{1}{n(n-1)} + (n)_3 \frac{1}{n(n-1)(n-2)} \dots$$

nebo

$$P = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n!}.$$

43. Vytvořující funkce. V některých úlohách je výhodné považovati hledané pravděpodobnosti $P_1, P_2, P_3, \dots$ za koeficienty určitého mnohočlenu $F(x)$ proměnné x. Dovedeme-li sestrojiti mnohočlen $F(x)$, určíme hledané pravděpodobnosti jako jeho koeficienty.

Tak pravděpodobnost P_N, že k kostkami vrhneme součet ok rovný N, je podle odst. 7e rovna koeficientu při x^N v rozvoji mnohočlenu $F(x)$, kde

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{6^k}(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^k = \\ &= P_k x^k + P_{k+1} x^{k+1} \dots + P_{6k} x^{6k}. \end{aligned} \tag{1}$$

V tomto rozvoji se nevyskytují mocniny proměnné x nižší než k-tá ani vyšší než $6k$-tá. Patrně je

$$P_k = \frac{1}{6^k}, \quad P_{6k} = \frac{1}{6^k}.$$

Jiný příklad poskytuje rozvoj dvojčlenu podle binomické věty v úloze o pravděpodobnostech při opětovaných pokusech. Budiž p pravděpodobnost, že se pokus podaří, a položme

$$F(x) = (px + 1 - p)^n = P_0 + P_1 x + P_2 x^2 + \ldots + P_n x^n; \quad (2)$$

koeficient při x^m, totiž

$$P_m = (n)_m p^m (1 - p)^{n-m}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, n,$$

je podle (1) odst. 13 roven pravděpodobnosti, že v řadě n pokusů se vyskytne m zdařených a $(n - m)$ nezdařených.

Funkce $F(x)$ (mnohočlen), jejíž koeficienty se rovnají hledaným pravděpodobnostem, se nazývá podle Laplacea *vytvořující funkcí*. Mnohočlen (1) je vytvořující funkcí v úloze o součtu ok na k kostkách, mnohočlen (2) je vytvořující funkcí v úloze o opakovaných pokusech.

44. Andréův princip souměrnosti. a) Vraťme se k úloze o opakovaných pokusech (odst. 13) za předpokladu, že $p = \frac{1}{2}$. Někdo hází penízem; padne-li líc, získá 1 Kčs, padne-li rub, ztrácí 1 Kčs. Budiž n počet hodů v jedné „partii“,

m ... počet hodů, kdy peníz padne na líc

m' ... počet hodů, kdy peníz padne na rub

$$m + m' = n;$$

úchylka h je definována rovnicí

$$h = m - \tfrac{1}{2}n,$$

takže

$$m = \tfrac{1}{2}n + h, \quad m' = \tfrac{1}{2}n - h. \quad (1)$$

Hráčův zisk na konci partie o n hodech je

$$m - m' = 2h. \quad (2)$$

Pravděpodobnost P_m, že v partii o n hodech bude m hodů příznivých (hodů na líc) je podle (1) odst. 13 pro $p = \frac{1}{2}$;

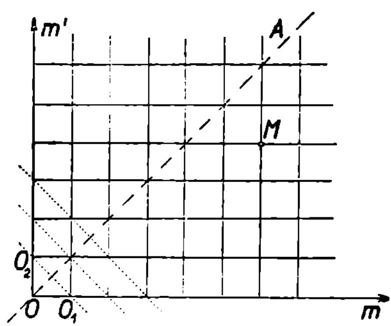
$$P_m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{(m + m')!}{m!m'!} \cdot \frac{1}{2^{m+m'}}.$$

V tomto vzorci je první činitel, totiž

$$\frac{(m+m')!}{m!m'!} \tag{3}$$

roven počtu partií o celkovém počtu $m + m'$ hodů s m hody příznivými; 2^n je počet všech možných různých partií o n hodech.

Znázorněme všechny možné partie diagramem (obr. 21). Na osy Om a Om' naneseme, počínajíce bodem O, stejně veliké díly o délce a; vedeme pak dělícími body rovnoběžky k osám, takže se celá rovina rozdělí na čtvercovou síť. První hod budiž znázorněn úsečkou OO_1, padne-li peníz na líc, a úsečkou OO_2, padne-li na rub. Každý další hod bude znázorněn úsečkou o délce a rovnoběžnou buď s Om nebo s Om' podle toho, padne-li peníz na líc nebo na rub. Obrazem partie bude lomená čára začínající v O a končící v bodě M o souřadnicích m, m'. Počet hodů v partii je $m + m' = n$ (v obrazci je bod M volen tak, že $m = 6$, $m' = 4$, $n = 10$). Podle (2) je hráčův zisk odpovídající takové partii roven $m - m'$ (pro zobrazený bod M je $m - m' = 2$). Pohybujeme-li se po lomené čáře od O směrem k M, jdeme vždy buď v kladném směru Om nebo v kladném směru Om', nikdy v záporném. Úhrnný počet všech lomených čar takto sestrojených, které začínají v O a končí v $M(m, m')$, se rovná výrazu (3). Kdybychom ke každému vrcholu sítě připsali příslušnou hodnotu výrazu (3), dostali bychom Pascalův trojúhelník (viz odst. 3c); vrchol trojúhelníka je v bodě O a jednotlivé řádky ve schematu na str. 11 odpovídající hodnotám $n = 1$, $n = 2$,



Obr. 21.

$n = 3$, jeví se v obr. 21 jako příčky kolmé k OA (první tři jsou v obrazci vytečkovány).

b) Sledujme, jak se postupně mění hráčův zisk průběhem partie znázorněné lomenou čarou OM: jak veliký je po prvním hodu, jak po druhém atd. Zisk může býti po některých hodech roven nule (když příslušný vrchol lomené čáry leží na OA) nebo záporný (když příslušný vrchol leží nad úsečkou OA); leží-li příslušný vrchol pod OA, je zisk kladný.

Položme si otázku: Je-li bod M pod OA (jako v obr. 21), kolika lomenými čarami lze spojiti O s $M(m, m')$ tak, aby celá čára zůstala (nehledě k bodu O) pod OA? Jinými slovy: kolik partií, každá o $m + m'$ hodech, má tu vlastnost, že průběhem partie zůstává zisk stále kladný a že na konec má hodnotu $2h = m - m'$, kde m je počet příznivých hodů a m' počet nepříznivých? (m a m' jsou daná celá čísla, $m > m'$).

D. André rozřešil úlohu tím, že vzal v úvahu ke každé lomené čáře OM, která protíná úsečku OA, čáru k ní souměrnou podle OA. Budiž x hledaný počet lomených čar OM, které neprotínají OA. Nechť O_1 je bod $(a, 0)$ a O_2 bod $(0, a)$; viz obr. 21. Počet všech čar, které začínají v O_2 a končí v M, je podle (3) roven

$$\frac{(m + m' - 1)!}{m!(m' - 1)!}. \qquad (4)$$

Tyto všechny čáry protínají OA. Je-li P poslední průsečík čáry s OA, nahraďme její část omezenou body O_2 a P čarou souměrně položenou podle OA. Tak dostaneme čáru O_1M, která protíná OA. Počet všech čar OM, které protínají OA a z nichž každá začíná buď úsečkou OO_1 nebo úsečkou OO_2, rovná se tedy dvojnásobně vzatému číslu (4); abychom dostali x, odečteme od (3) dvojnásobně vzaté číslo (4):

$$x = \frac{(m+m')!}{m!m'!} - 2\frac{(m+m'-1)!}{m!(m'-1)!} =$$
$$= \frac{(m+m')! - 2m'(m+m'-1)!}{m!m'!},$$

nebo po snadné úpravě

$$x = \frac{(m+m')!}{m!m'!} \cdot \frac{m-m'}{m+m'}. \tag{5}$$

Pravděpodobnost, že průběhem partie, která se skládá z m příznivých hodů a m' nepříznivých ($m > m'$), *bude míti hráč stále kladný zisk*, je

$$Q_m = \frac{(m+m')!}{m!m'!} \cdot \frac{1}{2^{m+m'}} \cdot \frac{m-m'}{m+m'}.$$

nebo

$$Q_m = P_m \cdot \frac{m-m'}{m+m'},$$

kde P_m značí pravděpodobnost, že partie se skládá z m příznivých hodů a m' nepříznivých bez podmínky, že zisk má býti stále kladný průběhem partie.

c) Právě řešená úloha je v jádře totožná s Andréovou *úlohou o volebním osudí*: při volbě dostane z celkového počtu hlasů kandidát A m hlasů a kandidát B m' hlasů ($m > m'$). Jak velká je pravděpodobnost P, že, když hlasovací lístky jsou jeden po druhém vybírány z osudí, je ve prospěch kandidáta A stále většina vytažených lístků?

Počet všech možných pořadí, ve kterých mohou býti lístky jeden po druhém z osudí vybrány, rovná se výrazu (3); počet příznivých pořadí, t. j. těch, při kterých má A stále většinu, je roven číslu x danému rovnicí (5). Je tedy hledaná pravděpodobnost P rovna

$$P = \frac{(m+m')!}{m!m'!} \cdot \frac{m-m'}{m+m'} : \frac{(m+m')!}{m!\,m'!},$$

nebo*)

$$P = \frac{m - m'}{m + m'}.$$

45. Gaussův zákon chyb. a) Měříme-li n. př. nějakou délku milimetrovým měřítkem, odečteme na něm celé milimetry a odhadneme desetiny milimetru. Při měřeních se dopouštíme chyb**); kdo je zběhlý v měření, nedělá velké chyby, nýbrž jen malé (v desetinách mm). Statistiky chyb (zejména v astronomii a v geodesii při měření úhlů) ukázaly, že pravděpodobnost chyby je tím menší, čím je chyba větší. Docházíme tak k pojmu „zákona chyb", který, připouštíme-li, že hustota pravděpodobnosti je spojitá funkce $f(x)$ velikosti x chyby, je vyjádřen takto: Pravděpodobnost, že chyba leží mezi x a $x + dx$, kde dx značí nekonečně malou veličinu, je vyjádřena vzorcem

$$f(x)\,dx.$$

Gauss volil funkci $f(x)$ zvláštním způsobem, který lze pochopiti, připustíme-li tento předpoklad: Každá chyba x rovná se algebraickému součtu malých „elementárních" chyb, které mají všechny stejnou prostou velikost ε; připouštíme, že pravděpodobnost, že chyba je kladná rovná

---

*) O Andréově úloze psali v pařížských Comptes Rendus de l'Académie des Sciences t. 105 (1887) *J. Bertrand* (p. 369, 437), *E. Barbier* (407), *D. André* (436). Mimo to: *G. Dumas* (Nouvelles Annales de math. 4e série, 7, 1907, p. 546, *Bertrand* (Calcul des probabilités, Paris, 1889, p. 17), *H. Poincaré* (Calcul des probabilités, Paris, 1912, 2e édition, p. 44), *Czuber* (Die Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung, 3 Aufl., Leipzig, 1914—21, Bd. I, p. 37). Andréův princip souměrnosti má význam pro řešení rozmanitých úloh; viz o tom *P. Lévy:* Sur les processus stochastiques homogènes (Compositio mathematica vol. 7, 1939, p. 283—339).

**) Chybou nazýváme rozdíl pravé hodnoty z hodnoty nalezené měřením. Předpokládáme ovšem, že lze pravou hodnotu zjistiti. Tak n. př. stanovíme-li součet úhlů v trojúhelníku tak, že změříme jeho tři úhly a pak tato tři měrná čísla sečteme, je chyba v součtu rovna tomu, kolik chybí do „pravé hodnoty", t. j. do 180°. V jiných případech musíme vhodnými kombinacemi měření odvoditi „pravé hodnoty".

se pravděpodobností, že je záporná ($=\frac{1}{2}$). Přirovnáváme zde vznik elementární chyby k tahu z osudí, ve kterém je tolik bílých koulí kolik černých. Tah bílé koule znamená elementární chybu ε kladnou, tah černé zápornou $-\varepsilon$. Pravděpodobnost chyby bude tedy totéž co pravděpodobnost úchylky (viz. odst. 15), která se vyskytuje v serii obsahující n tahů; po každém tahu klademe vytaženou kouli zpět do osudí. Úchylka h souvisí s chybou x podle rovnice

$$x = 2h\varepsilon.$$

neboť celkem $\frac{1}{2}n + h$ tahů vede k elementární chybě $+\varepsilon$, a $\frac{1}{2}n - h$ tahů k chybě $-\varepsilon$. Je-li n velmi veliké číslo a není-li h řádově větší než $\sqrt{n}$, platí podle rovnice (3) odst. 20, (klademe $p = \frac{1}{2}$)

$$P(h_1 < h < h_2) = \int_{h_1}^{h_2} \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \, . \, e^{-\frac{2u^2}{n}} \, du;$$

položíme-li

$$h = \frac{x}{2\varepsilon}, \quad h_1 = \frac{x_1}{2\varepsilon}, \quad h_2 = \frac{x_2}{2\varepsilon}, \quad u = \frac{y}{2\varepsilon}, \quad du = \frac{dy}{2\varepsilon},$$

$$k = \frac{1}{\sqrt{2n\varepsilon}},$$

obdržíme

$$P(x_1 < x < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{k}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2y^2} \, dy,$$

což je *Gaussův zákon chyb*. Pravděpodobnost, že chyba leží v mezích x až $x + dx$, je

$$\frac{k}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2x^2} \, dx. \tag{1}$$

Veličina k se nazývá *přesností* měření. Křivka udávající „hustotu pravděpodobnosti"

$$f(x) = \frac{k}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2x^2},$$

jako funkci velikosti chyby x má tvar „zvonu" (viz odst. 20b, obr. 1). Pravděpodobnost, že chyba má absolutní hodnotu nejvýše rovnou x, je rovna integrálu

$$\int_{-x}^{+x} \frac{k}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2y^2} dy = 2 \int_{0}^{kx} \frac{e^{-z^2}}{\sqrt{\pi}} dz = \Theta(kx); \tag{2}$$

$\Theta(t)$ značí funkci dříve zavedenou (odst. 21a).

b) Střední hodnota chyby je (viz. odst. 32a)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{kx}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2x^2} dx = \left[-\frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-k^2x^2} \right]_{x=-\infty}^{x=+\infty} = 0.$$

Střední hodnota čtverce chyby je (viz rovnici (2) odst. 19 pro $m = 1$).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{kx^2}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y^2}{k^2\sqrt{\pi}} e^{-y^2} dy =$$

$$= \frac{2}{k^2\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} y^2 e^{-y^2} dy = \frac{1}{2k^2}.$$

je tedy tím větší, čím je k menší. Odmocnina z této hodnoty se nazývá *střední kvadratická chyba* μ. Je tedy

$$\mu = \frac{1}{k\sqrt{2}}, \quad k = \frac{1}{\mu\sqrt{2}}. \tag{3}$$

Pravděpodobnost, že chyba je nejvýše rovna μ, je podle (2)

$$\Theta(k\mu) = \Theta\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \Theta(0{,}707\ldots) = 0{,}683\ldots.$$

Pravděpodobnost, že chyba je rovna nejvýše 3μ, je

$$\Theta(3k\mu) = \Theta\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right) = \Theta(2{,}121\ldots) = 0{,}997\ldots.$$

Pravděpodobnost, že chyba je rovna nejvýše 4μ, je

$$\Theta(4k\mu) = \Theta\left(\frac{4}{\sqrt{2}}\right) = \Theta(2{,}82\ldots) = 0{,}9999\ldots.$$

c) Buďte X a Y dvě veličiny závislé na náhodě. První nechť se řídí Gaussovým zákonem chyb s přesností k, druhá pak Gaussovým zákonem s přesností l; je tedy

$$P(x < X < x + \mathrm{d}x) = \frac{k}{\sqrt{\pi}}\, \mathrm{e}^{-k^2x^2}\, \mathrm{d}x,$$

$$P(y < Y < y + \mathrm{d}y) = \frac{l}{\sqrt{\pi}}\, \mathrm{e}^{-l^2y^2}\, \mathrm{d}y.$$

Hledáme pravděpodobnost $P = P\ (z < X + Y < z + \mathrm{d}z)$, že součet $X + Y$ jest obsažen v mezích z a $(z + \mathrm{d}z)$ předpokládajíce, že X a Y jsou dvě vzájemně nezávislé veličiny. Pak je podle věty o násobení pravděpodobností

$$P = \iint_A \frac{kl}{\pi}\, \mathrm{e}^{-k^2x^2-l^2y^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y,$$

kde integrační obor A v rovině Oxy je dán nerovnostmi

$$z < x + y < z + \mathrm{d}z.$$

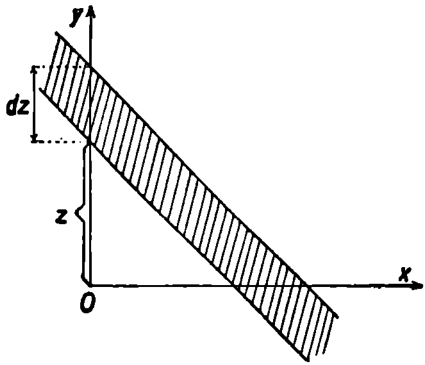
Je to pruh omezený dvěma rovnoběžkami o směrnici $= -1$, jejichž průsečíky s osou Oy mají pořadnice z a $z + \mathrm{d}z$ (viz obr. 22; obor A je vyčárkován).

Zaveďme na místo y novou integrační proměnnou u rovnicí

$$y = u - x,$$

takže v transformovaném integrálu budou integračními proměnnými x a u. Poněvadž

$$\frac{D(x, y)}{D(x, u)} = \begin{vmatrix} 1, & 0 \\ -1, & 1 \end{vmatrix} = 1,$$



Obr. 22.

je

$$P = \frac{kl}{\pi} \int\limits_{u=z}^{z+dz} \int\limits_{x=-\infty}^{+\infty} e^{-k^2x^2-l^2(u-x)^2} \, dx \, du.$$

Zaveďme dále místo x proměnnou ξ rovnicí

$$x\sqrt{k^2+l^2} - \frac{l^2u}{\sqrt{k^2+l^2}} = \xi.$$

Vychází

$$P = \frac{kl}{\pi\sqrt{k^2+l^2}} \int\limits_{z}^{z+dz} e^{-\frac{k^2l^2u}{k^2+l^2}} \, du \, . \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} \, d\xi;$$

poněvadž pak (viz odst. 19a)

$$\int_z^{z+dz} f(u)\,du = f(z)\,dz, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2}\,d\xi = \sqrt{\pi},$$

je

$$P = \frac{H}{\sqrt{\pi}}\,e^{-H^2z^2}\,dz, \tag{4}$$

kde

$$\frac{1}{H^2} = \frac{1}{k^2} + \frac{1}{l^2}. \tag{5}$$

Smysl rovnice (4) vyjádříme takto:

Součet $X + Y$ dvou veličin, které se řídí Gaussovým zákonem s přesnostmi k resp. l, řídí se týmž zákonem s přesností H, která je dána rovnicí (5).

Kdybychom nazvali μ a μ' střední kvadratické chyby pro X resp Y a μ'' střední kvadratickou chybu pro $(X + Y)$, dostali bychom — viz (3) — rovnici (5) ve tvaru

$$\mu''^2 = \mu^2 + \mu'^2.$$

Ve zvláštním případě, že X i Y řídí se Gaussovým zákonem s toutéž přesností k, je $h = k$ a tedy

$$\frac{1}{H^2} = \frac{2}{k^2}, \quad H = \frac{k}{\sqrt{2}};$$

místo (4) máme pak

$$P(z < X + Y < z + dz) = \frac{k}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{k^2z^2}{2}}\,dz. \tag{6}$$

46. Dvě věty o střední hodnotě chyby. a) Rozdělme měřenou délku na n částí (přibližně stejných) o délkách $a_1, a_2, \ldots, a_n$ a hledejme střední hodnotu čtverce chyby, které se dopustíme, vezmeme-li součet nalezených hodnot (x_i značí hodnotu nalezenou měřením délky a_i) za hledanou délku. Předpokládáme, že s. h. chyby při měření každé jednotlivé délky a_i je rovna nule a že s. h. čtverce chyby při měření délky a_i je rovna konstantě μ^2 a že jednotlivá měření délek a_i nezávisí jedno na druhém. Z rovnic

$$\text{s. h. } (a_i - x_i) = 0, \quad \text{s. h. } (a_i - x_i)^2 = \mu^2, \qquad (1)$$

plyne výpočtem obdobným tomu, který jsme provedli v odst. 15b, že hledaná s. h. čtverce chyby je

$$\text{s. h. } [(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) - (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)]^2 =$$
$$= \text{s. h. } [(a_1 - x_1) + (a_2 - x_2) + \ldots + (a_n - x_n)]^2 = n\mu^2.$$

Tedy: *Střední hodnota čtverce chyby, která vznikne, rozdělíme-li danou délku na n části, měříme-li každou část zvláště a výsledky sečteme, je n-krát větší než střední hodnota čtverce chyby vzniklé při měření jednotlivé části.*

b) Měříme-li nějakou délku a n-krát a je-li při každém jednotlivém měření (x_i značí hodnotu nalezenou při i-tém měření)

$$\text{s. h. } (a - x_i) = 0, \quad \text{s. h. } (a - x_i)^2 = \mu^2, \qquad (2)$$

jak veliká je s. h. čtverce chyby, které se dopustíme, vezmeme-li aritmetický střed měření

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

za pravou délku?

Hledaná s. h. čtverce chyby je

$$\text{s. h. } \left[a - \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right]^2 =$$
$$= \text{s. h. } \frac{[(a - x_1) + (a - x_2) + \ldots + (a - x_n)]^2}{n^2}.$$

Výpočet obdobný výpočtu v odst. 15 b vede k výsledku, že hledaná s. h. je rovna

$$\frac{\mu^2}{n}.$$

Tedy: *Měříme-li nějakou délku n-krát a vezmeme-li za hledanou hodnotu aritmetický střed všech měření, je střední hodnota čtverce chyby, které se tak dopustíme, n-krát menší než střední hodnota čtverce chyby vzniklé při jediném měření.*

Poznamenejme, že obě věty dokázané v tomto odstavci byly dokázány jen na základě nezávislosti chyb vznikajících při jednotlivých měřeních a na základě rovností (1) resp. (2); platí obecně, i když rozdělení chyb se neřídí Gaussovým zákonem uvedeným v odst. 45.*)

47. Borelova věta o spočetných pravděpodobnostech. a) V neomezené posloupnosti navzájem nezávislých pokusů budiž pravděpodobnost, že se pokus zdaří, rovna $\frac{1}{2}$. Pak je podle (1) odst. 13 ($p = \frac{1}{2}$)

$$P_m = (n)_m \cdot \frac{1}{2^n}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

pravděpodobnost, že mezi prvními n pokusy bude m zdařených.

$$A_0 = \lim_{n \to \infty} P_0 = 0$$

je pravděpodobnost, že se nezdaří ani jeden pokus.

$$A_1 = \lim_{n \to \infty} P_1 = 0$$

je pravděpodobnost, že se zdaří jen jeden pokus atd. Obecně je pro $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$A_k = \lim_{n \to \infty} P_k = \lim_{n \to \infty} \left[(n)_k \cdot \frac{1}{2^n} \right] = 0 \qquad (1)$$

pravděpodobnost, že se zdaří právě k pokusů. Pravděpodobnost, že bude více než m zdařených mezi prvními n pokusy,

*) Čtenář najde podrobnější výklad o theorii chyb v knize: *B. Kladivo:* Měřické chyby a jejich vyrovnávání (Cesta k vědění, sv. 24, 1943); viz též *Zd. Horák:* Praktická fysika, 1947.

je $$1-(P_0+P_1+P_2+\ldots+P_m).$$

Roste-li n do nekonečna, je vzhledem k (1)

$$1-(A_0+A_1+A_2+\ldots)=1 \tag{2}$$

pravděpodobnost, že v neomezené řadě bude nekonečně mnoho zdařených pokusů.

b) Budiž v neomezené řadě nezávislých pokusů $\frac{1}{2}$ pravděpodobnost, že se první zdaří, $(\frac{1}{2})^2$ pravděpodobnost, že se druhý zdaří, $(\frac{1}{2})^3$ pravděpodobnost, že se třetí zdaří atd. Pravděpodobnost, že se nezdaří ani jeden pokus je

$$A_0=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{2^3}\right)\ldots; \tag{3}$$

nekonečný součin je konvergentní, má určitou kladnou hodnotu. Pravděpodobnost A_1, že se jen jeden pokus zdaří, dostaneme, nahradíce v součinu A_0 jeden činitel $\left(1-\frac{1}{2^m}\right)$ činitelem $\frac{1}{2^m}$, a sečtouce pak všechny tak vzniklé součiny.

Tedy
$$A_1=A_0\cdot\sum_{m=1}\frac{\frac{1}{2^m}}{1-\frac{1}{2^m}}=A_0\cdot\sum_{m=1}\frac{1}{2^m-1}.$$

Pravděpodobnost, že se zdaří jen dva pokusy, je

$$A_2=A_0\cdot\sum_{m,n}\frac{\frac{1}{2^m\cdot2^n}}{\left(1-\frac{1}{2^m}\right)\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}=$$

$$=A_0\cdot\sum_{m,n}\frac{1}{(2^m-1)(2^n-1)},$$

kde součet se vztahuje ke všem kombinacím dvou různých kladných celých čísel m, n. Podobně se určí pravděpodobnosti $A_3, A_4, \ldots$, že se zdaří jen tři nebo jen čtyři pokusy atd.

Máme tedy

$$A_0 + A_1 + A_2 + \ldots = A_0 \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m - 1} + \right.$$

$$+ \sum_{m,n} \frac{1}{(2^m - 1)(2^n - 1)} + \sum_{m,n,p} \frac{1}{(2^m - 1)(2^n - 1)(2^p - 1)} +$$

$$\left. + \ldots) \right] = A_0 \left(1 + \frac{1}{2 - 1} \right) \left(1 + \frac{1}{2^2 - 1} \right) \left(1 + \frac{1}{2^3 - 1} \right) \ldots . \quad (4)$$

Poněvadž pak

$$\left(1 - \frac{1}{2^n} \right) \left(1 + \frac{1}{2^n - 1)} \right) = \frac{(2^n - 1)2^n}{2^n(2^n - 1)} = 1,$$

je vzhledem k (3) a (4)

$$A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + \ldots = 1,$$

a tedy pravděpodobnost, že v neomezené řadě bude nekonečně mnoho zdařených pokusů, je

$$1 - (A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + \ldots) = 0. \quad (5)$$

c) Příklady právě uvedené objasňují obecnou větu, podle níž levá strana rovnice (4) nebo (5) nemůže míti jinou hodnotu než nulu nebo jednu: *V neomezené posloupnosti nezávislých pokusů budiž p_k pravděpodobnost, že k-tý pokus se podaří;* $0 < p_k < 1$, $(k = 1, 2, 3, \ldots)$. *Je-li řada*

$$p_1 + p_2 + p_3 + \cdots,$$

divergentní, je pravděpodobnost P, že se vyskytne nekonečně mnoho zdařených pokusů, rovna 1; je-li ona řada konvergentní, je P $= 0$.*)

---

*) *E. Borel:* Sur les probabilités dénombrables (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo t. 27, 1909; viz též *E. Borel:* Traité du Calcul des Probabilités et de ses Applications, T. I. Fascicule 1. (Paris, 1924), p. 24.

OBSAH

Předmluva 3

Kapitola první: JEDNODUCHÉ ÚLOHY A DEFINICE

1. Náhodné zjevy a statistické zákonitosti. Elementární definice pravděpodobnosti 5
2. Jednoduché úlohy 8
3. Permutace, variace a kombinace 9
4. Pravděpodobnost úhrnná. Věta o sčítání pravděpodobností . 13
5. Pravděpodobnost složená. Věta o násobení pravděpodobností. Závislé a nezávislé veličiny 14
6. Obecnější pojem pravděpodobnosti. Dvě základní věty o počítání s pravděpodobnostmi 15
7. Příklady na užití základních vět 16
8. Matematická naděje čili střední hodnota proměnné veličiny závislé na náhodě 18
9. Matematická naděje při hazardních hrách 22
10. Dvě obecné věty o středních hodnotách 24
11. Střední hodnota druhé mocniny 26
12. Věta Bienayméova-Čebyševova 27

Kapitola druhá: OPĚTOVANÉ VZÁJEMNĚ NEZÁVISLÉ POKUSY

13. Pravděpodobnost různých výsledků v řadě opakovaných vzájemně nezávislých pokusů 30
14. Střední hodnota počtu zdařených pokusů 32
15. Střední hodnota druhé mocniny úchylky 34
16. Bernoulliova věta 36
17. Wallisova formule 37
18. Stirlingova formule 39
19. Laplaceův integrál a jiné pomocné vzorce 41
20. Přibližný vzorec pro P_m. Zavedení spojité proměnné 43
21. Laplaceova věta. — Číselné příklady 49
22. Srovnání theoretických vzorců s výsledky pokusů 52
23. Zobecnění Laplaceovy věty 54
24. Zákon velkých čísel. Markovova věta 57
25. Náhodné rozdělování předmětů do přihrádek 60

Kapitola třetí: GEOMETRICKÉ PRAVDĚPODOBNOSTI

26. Definice geometrické pravděpodobnosti v nejjednodušších úlohách ... 62
27. Přímky v rovině ... 65
28. Úhrnná a složená pravděpodobnost geometrická ... 66
29. Pravděpodobnost, že směr volený v prostoru vyhovuje daným podmínkám ... 70
30. O pravděpodobnostech závislých na čase ... 71
31. Zobecnění původní definice. Hustota pravděpodobnosti ... 73
32. Střední hodnoty při geometrických pravděpodobnostech ... 76
33. Sečny konvexní křivky v rovině. Buffonova úloha o jehle .. 79
34. Bertrandovo paradoxon a jeho výklad podle Borela ... 83
35. Statistické ověření vzorců pro geometrické pravděpodobnosti ... 87
36. Methoda libovolných funkcí. Regularisace pravděpodobnosti 88
37. Pomocná věta o přírůstku funkce několika proměnných; zobecněná methoda libovolných funkcí ... 91
38. Nové řešení úlohy o jehle ... 94
39. Valivý pohyb koule po vodorovné rovině ... 99
40. Tři příklady valivého pohybu koule ... 101
41. Poznámky o geometrických pravděpodobnostech ... 104

Kapitola čtvrtá. — RŮZNÉ ÚLOHY

42. Pravděpodobnosti složitých zjevů ... 106
43. Vytvořující funkce ... 109
44. Andréův princip souměrnosti ... 110
45. Gaussův zákon chyb ... 114
46. Dvě věty o střední hodnotě chyby ... 119
47. Borelova věta o spočetných pravděpodobnostech ... 121

CESTA K VĚDĚNÍ

Výklady autorovy mají dva význačné body: Především je to theorie pravděpodobnosti opakovaných, vzájemně nezávislých zjevů se zákonem velkých čísel. Druhým důležitým bodem je kapitola o geometrických pravděpodobnostech, v níž autor uložil řadu původních myšlenek.

Klasické úlohy, jichž řešení vyžaduje někdy odvození pomocných analytických vzorců, předkládá čtenáři zajímavou, lehkou formou a umožňuje mu tak stále sledovat užití základního principu. Tu ovšem bylo potřebí, aby někde přesnost nahradil názorným výkladem.

Tak seznamuje čtenáře s poměrně hlubokými větami počtu pravděpodobnosti, učí jej řešit rozmanité úlohy a připravuje jej k studiu zejména závislých pravděpodobností a Markovových řetězů, kterým je věnována druhá část.

JČMF Brož. Kčs 47,—