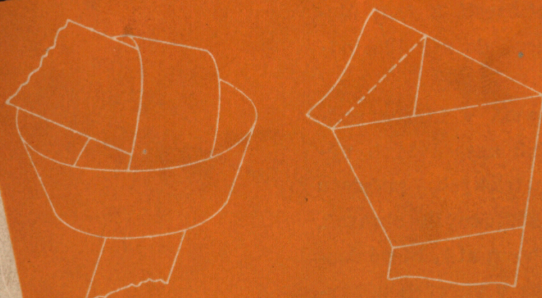
Geometrické hry a zábavy

Karel Čupr

Geometrické
hry a zábavy



Jč
m+f

CESTA K VĚDĚNÍ SVAZEK 38

Ph Dr KAREL ČUPR:

GEOMETRICKÉ HRY A ZÁBAVY

JEDNOTA ČESKOSLOVENSKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ

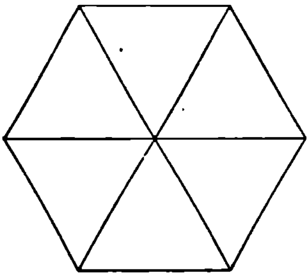
PŘEDMLUVA

Zásadami, jichž jsem užil při výběru a výkladu aritmetických her a zábav (viz 21. svazek této sbírky), řídím se i tentokráte. Za geometrickou hru nebo zábavu pokládám geometrický příklad, jenž čtenáře zaujme buď neobvyklým zněním nebo vtipným řešením nebo překvapujícím výsledkem; i historie úlohy třebas jinak prosté může býti velmi poutavá. Kladu tedy důraz na to, aby úloha byla řešitelna použitím nějaké geometrické methody nebo poučky. Zmíním se nejprve stručně o úlohách, které se velmi často nesprávně pokládají za geometrické hry a zábavy; užívají sice geometrických prvků i útvarů, avšak methoda, jež jest potřebná k jejich řešení, geometrická není; rovněž nejsou aplikací nějaké geometrické poučky jsouce spíše zkušebním kamenem přirozené inteligence. Mnohdy je snáze rozřeší praktik opírající se o zkušenost získanou ve svém denním povolání než školou a geometrickým výcvikem prošlý čtenář. Takové úlohy spíše lze nazvati psychotechnickými testy a jest jim věnována první naše kapitola, v níž je ve stručném výběru řadím do několika skupin.

Svému asistentu p. Dr *L. Frankovi* srdečně děkuji za vydatnou výpomoc při čtení korektur.

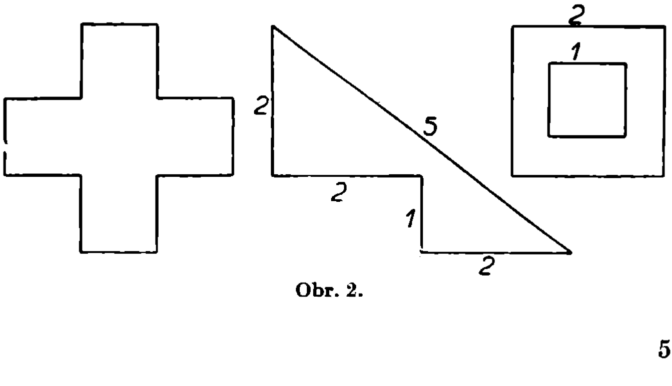
A) Hry s úsečkami. Úsečky bývají znázorněny tyčinkami stejné délky buď dřevěnými nebo kovovými, nejčastěji pak sirkami.

a) Ze šesti rovnostranných trojúhelníků přeložením tří sirek jest vytvořiti devět rovnoběžníků (obr. 1).



Obr. 1.

b) Plocha uvedeného křížového obrazce jest 5 čtverečních jednotek; sestrojte z téhož počtu sirek obrazec mající pouze plochu čtyř nebo tří čtverečních jednotek (obr. 2).

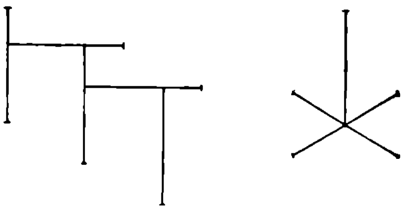


Obr. 2.

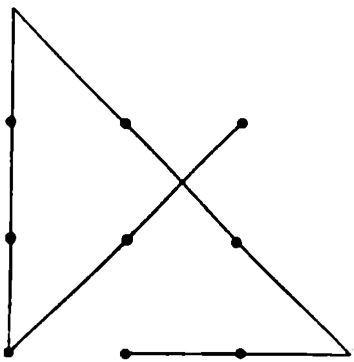
c) Přeložením jediné sirky změňte $\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{VII}}$ na 1 $\left(\text{řešení } \frac{\mathrm{I}}{\sqrt{\mathrm{I}}}\right)$.

d) A posléze dvě úlohy z „vyšší geometrie": Omezte jedinou sirkou jeden a třemi sirkami čtyři trojúhelníky. — Přiložte sirku k rohu stolu nebo k rohu papíru seříznutého do pravého úhlu; řešením druhé úlohy jest čtyřstěn, jehož základna však není sirkami vyznačena. Podobným obratem v prostoru řešte úlohu: Změňte polohu sirek v připojeném obrazci tak, aby svíraly mezi sebou osm pravých úhlů a vytvářely při tom souměrný obrazec (obr. 3).

B) Velmi četné jsou úlohy velící vésti daným počtem bodů jistý počet přímek hovících dané podmínce; na př. devíti body, seskupenými do čtverce po 3-kráte tři, jest vésti souvislý čtyrstranný tah, jdoucí každým bodem jen jednou (obr. 4).



Obr. 3.

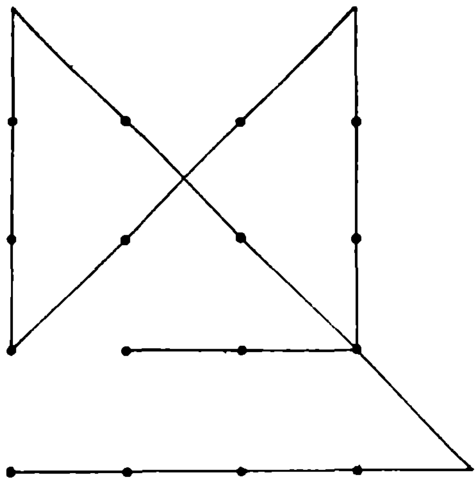


Obr. 4.

Málo složitější úloha jest: Čtyřikráte čtyřmi body vésti souvislý šestistranný tah jdoucí (s výjimkou jediného bodu) každým bodem jen jednou (obr. 5).

C) a) Nesčetné jsou úlohy o dělení obrazců za předepsaných podmínek; snad nejznámější z nich jest rozděliti tento obrazec na čtyři stejné díly mezi sebou i danému obr. podobné (obr. 6).

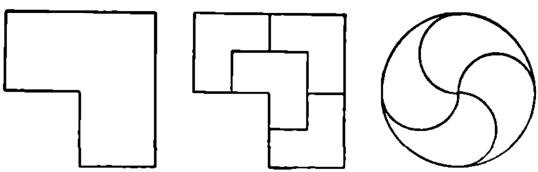
Třetí z obrázků ukazuje, jak možno rozděliti kruh na čtyři části stejné co do obvodu i co do obsahu, nikoliv však pomocí průměrů.



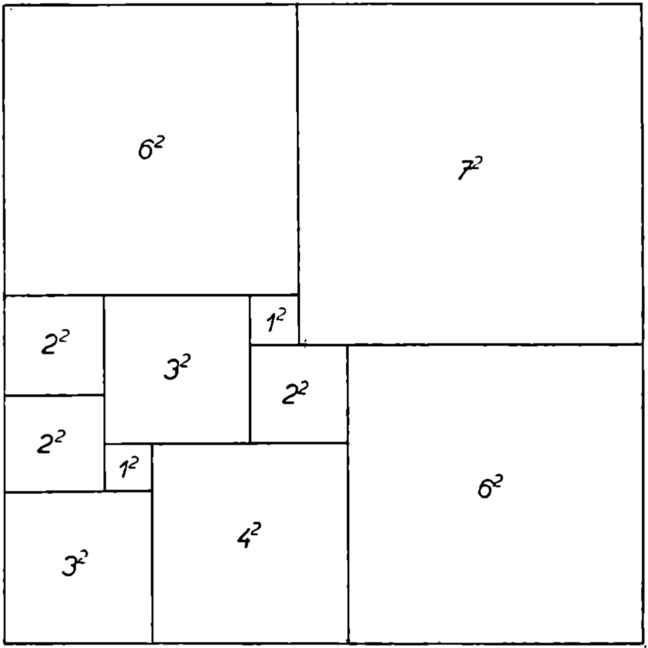
Obr. 5.

b) Dosti nesnadná jest úloha čtverec o straně 13 rozděliti na jedenáct čtverců, viz obr. 7.

c) Kruhový válec jest rozděliti třemi řezy na osm stejných částí (obr. 8).

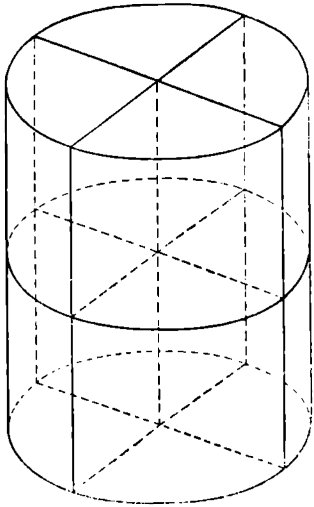


Obr. 6.



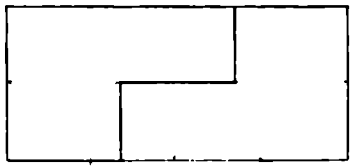
Obr. 7.

Velmi často se pro řešení takovýchto úloh předepisuje použití nůžek; na př. jest střihem přeměniti obdélník o stranách 4, 9 ve čtverec. Řešení lze provésti takto: Ukažte, je-li $a : b = (n + 1)^2 : n^2$, že lze přeměniti střihem tento obdélník ve čtverec za předpokladu, že n jest celistvé číslo, podél lomené čáry o n zubech, jichž délka jest $\frac{\sqrt{ab}}{n} = \frac{a}{n+1}$ a výška $\frac{b}{n}$.



Obr. 8.

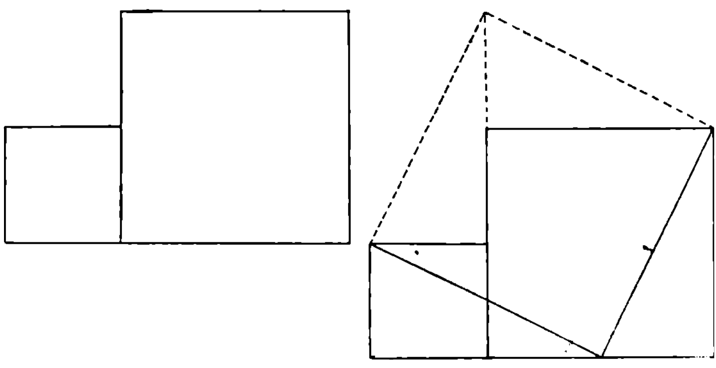
d) Dva čtverce jest rozstřihnouti tak, aby bylo možno z částí tak vzniklých sestrojiti čtverec jiný; jedná se tedy o jakýsi důkaz Pythagorovy věty pomocí nůžek. Obrazec



Obr. 9.

měřený danými čtverci nazývali Indové „křtem nevěstinným“ (obr. 10.

Před třemi až čtyřmi desítkami let byly velmi oblíbeny u malých i velkých t. zv. hlavolamy. Byly to ploché čtvercové skřínky, v nichž byly uloženy z kameninové hmoty

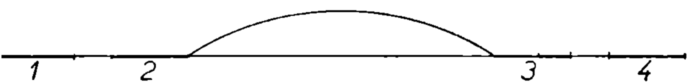


Obr. 10.

vyrobené útvary, omezené přímými i křivými čarami. Připojen byl sešitek s obrazci, jež se měly z kameninových útvarů sestrojit. Velmi oblíbené byly hlavolamy firmy *Richter*.

D) V rodokmenech význační předkové bývají zapsáni v kruzích, a jednotlivá jména bývají spojena úsečkami a tyto jednoduché geometrické útvary to asi byly, jež k matematickým hrám přičlenily úlohy o podivuhodných příbuznostech; byly dokonce vymyšleny i zvláštní algoritmy na řešení těchto úloh.

E) Daleko a daleko vzdálenějšími příbuznými matematických her jsou úlohy o převozu s překážkami, případně o přerovnání věcí z jistého pořadí do jiného za zvláště svízelných okolností. Nejstarší úloha toho druhu připisovaná *Alkuinovi*, vrstevníku a příteli *Karla Velikého*, zní takto: Převozník má loďkou převézti vlka, kozu a hlávku zelí, do malé loďky může však zároveň vzíti pouze jednoho z jmenovaných pasažerů. Jak uspořádá převoz? Jest to možno dvojím způsobem: Převeze kozu, vrátí se pro vlka, vlka nechá na druhé straně, kozu vezme zpět, převeze hlávku a vrátí se pro kozu; nebo: převeze kozu, vrátí se pro hlávku a kozu vezme zpět, převeze vlka, načež se vrátí pro kozu. Tak skutečně neublíží vlk koze a koza zelné hlávce.

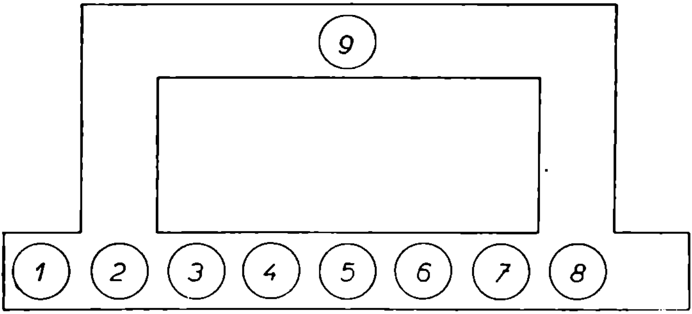


Obr. 11.

Přečetné jsou úlohy o přerovnání železničních vozů; opět uveďme úlohu co nejjednodušší. (Obr. 11.) Koleje jsou spojeny s odbočkou tak krátkou, že může býti na ni postaven pouze jeden vagon; jak uspořádati přesun, aby vagony *1*, *2* si vyměnily místa s vagony *4*, *3*?

K cíli dojdeme takto: *2* na odbočku, *3*, *4* k *1*, *2* vpravo, *4* na odbočku, *1* a *3* vpravo, *4* vlevo, *1* na odbočku, *3* vlevo, *1* vpravo. Možno ovšem začíti i vagonem *3*.

Jednou z nejsložitějších úloh tohoto druhu jest tato: V garáži jest osm aut, deváté jest ve spojovací chodbě; auta v garáži jest uvésti do pořadí právě opačného (viz obr. 12).



Obr. 12.

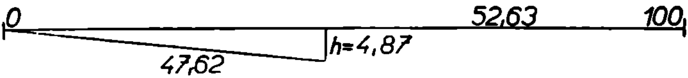
1 ... 7 úplně vlevo, *8* vpravo, *7*, *6*, *8* nahoru, *5* na pravý kraj, *8*, *6*, *7* vlevo dolů, *5* vedle *9*, *7* vpravo, *6*, *7*, *8* vpravo nahoru. Pořadí nyní jest: *9*, *5*, *6*, *7*, *8* ve spojovací chodbě, *1*, *2*, *3*, *4* v garáži. *4* na pravý kraj, *8*, *7* zpět, *1*, *2* vlevo vzhůru, *3* na levý kraj, *2*, *1* zpět a vpravo, *3* vpravo, *9* dolů; tak jsme docílili postavení *5*, *6* ve spojovací chodbě a *9*, *3*, *1*, *2*, *8*, *7*, *4* v garáži. Nyní: *4* k *6*, *7* k *4*, *8* k *7*, *3*, *1*, *2* na pravý kraj, *9* vlevo, *5*, *6*, *4* vlevo dolů, *9* nahoru, *4* na levý kraj, *5*, *6* nahoru, *4* k *3*, *6* a *5* k *4*, *9* na levý kraj, *7* k *6*, *2* nahoru, *1 ... 7* vpravo, *8* k *7*, *9* nahoru a na správné místo vložit *2*.

F) Těchto pět skupin bylo by možno ještě rozmnožiti o jiné skupiny; uveďme ještě tři příklady, jimž jest společnou vlastností úskok a lest vůči čtenáři přesvědčenému, že přímost a poctivost jest vlastností všude přítomnou.

1. Na staveniště obdélníkového tvaru o rozměrech 20 a 10 metrů má stavitel postaviti dva domky o délce dvaceti a hloubce 10 metrů, jak to učiní? (Každý domek bude míti trojúhelníkový půdorys o základně 20 a výšce 10 m).

2. V knihovně stojí vedle sebe dva díly téže knihy, první díl má 300 stran, druhý 400 stran, každá z desek má tloušťku rovnou 10 listům knihy. Červ, který se prokousal právě k první stránce prvního dílu a dává se do hlodání desky, bude ve své zhoubné činnosti pokračovati později i v druhém díle; potřebuje-li k prohlodání jednoho listu půl hodiny, jak brzo se octne na poslední stránce druhého dílu? Pozor, jak jsou vícesvazková díla řazena! Červa od cíle oddělují pouze dvoje desky v tloušťce 20 listů, na jichž prohlodání spotřebuje 20 půlhodin čili 10 hodin.

3. Dva dělníci kopou příkop 100 metrů dlouhý a pracují od obou konců. První má za metr 9,50 Kčs, druhý, poněvadž pracuje v obtížnějším terénu, 10,50 Kčs. Když se setkali, zjistili, že jim byla vyplacena tatáž mzda a to 500 Kčs. První tedy vykopal 500 : 9,5 = 52,63 m, druhý pak 500 : 10,5 = = 47,62, dohromady 100,25 m, tedy o čtvrt metru více, než příkop měl měřiti. Jak je to možno?



Obr. 13.

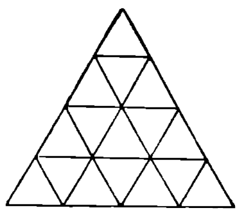
Na příklad tak, že druhý dělník kope po svahu a octne se tedy při setkání s prvním dělníkem ve větší hloubce než tento. Hloubku snadno vypočteme; jest totiž

$$h = \sqrt{47,62^2 - (100 - 52,63)^2} = 4,87 \text{ m}.$$

II. NĚKTERÉ ZAJÍMAVÉ PŘÍKLADY Z GEOMETRIE

A) Planimetrie. a) Rozdělme všechny strany rovnostranného trojúhelníka na n stejných dílů, tak obdržíme rovnostranné trojúhelníky různé velikosti. Kolik jest všech těchto trojúhelníků? Trojúhelníky jsou dvojího druhu, buď jsou vrcholem obráceny nahoru, počet jejich označme Δ_n, nebo dolů, jejichž počet označme ∇_n. (Obr. 14.)

Snadno ukážeme, značíme-li $s_k = 1 + 2 + 3 + \ldots + k$, že jest $\Delta_n = s_1 + s_2 + s_3 + \ldots + s_n$, což jest aritmetická řada druhého řádu o součtu $\Delta_n = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$.



Obr. 14.

Budiž nyní n sudé rovno 2ν a značme $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 1 + 2 + 3$, $\sigma_3 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$; pak jest $\nabla_n = \sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_\nu$, což jest opět řada aritmetická druhého řádu a má součet

$$\nabla_n = \frac{\nu(\nu+1)(4\nu-1)}{6} = \frac{n(n+2)(2n-1)}{24}.$$

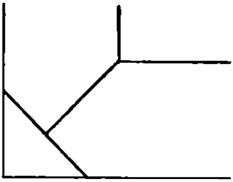
Jest tudíž úhrnem všech trojúhelníků

$$\Delta_n + \nabla_n = \frac{n(n+2)(2n+1)}{8}.$$

Ukažte podobným rozborem, že pro n liché jest počet trojúhelníků dán vzorcem

$$\Delta_n + \nabla_n = \frac{(n+1)(2n^2+3n-1)}{8}.$$

b) Čtvercová zahrada jest obehnána čtvercovým příkopem o šířce 2 m. Lze se do této zahrady dostati pomocí dvou prken o délce 2 m? Řešení ukazuje obr. 15. Střed prkna, pokládáme-li zevnější břehy příkopu za osy x a y, má souřadnice $(\frac{1}{2}\sqrt{2}; \frac{1}{2}\sqrt{2})$, vrchol zahrady pak (2; 2); vzdálenost těchto dvou míst jest $(2 - \frac{1}{2}\sqrt{2})\sqrt{2} = 1{,}82$ m, zbývajících 18 cm užijeme k upevnění prken na březích. Proveďte tuto úvahu čistě planimetricky pro délku prken $d_1 \leqq d$, $d_2 \leqq d$, kdež d jest šířka příkopu. Počítáme-li pro upevnění prkna na každé straně ε, musí býti, aby úloha byla řešitelna, (užijeme-li nejprve prkna d_1) $\frac{1}{2}d_1 + d_2 - 3\varepsilon \geqq d\sqrt{2}$; v našem případě jest $\varepsilon \leqq 6$ cm.

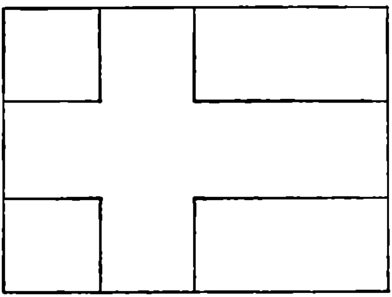


Obr. 15.

c) Dánská vlajka jest obdélník opatřený křížem o ploše rovné polovině obdélníka, stanovte šířku tohoto křížového pruhu! (Obr. 16.)

Úlohu řeší rovnice $ax + bx - x^2 = \frac{1}{2}ab$, kdež x jest šířka pruhu, a, b jsou rozměry vlajky; z kořenů jejích $x_{1,2} = \frac{(a + b) \pm \sqrt{a^2 + b^2}}{2}$ má význam pouze kořen, v němž odmocninu bereme se záporným znaménkem.

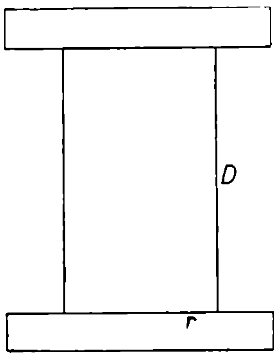
d) Gramofonová jehla pohybuje se po jisté spirále; stanovte délku této spirály, jejíž N závitů jest v mezikruží omezeném kružnicemi o poloměrech $r < R$. Spirálu jest možno velmi přibližně pokládati za N soustředných kruhů (předpokládáme, že i kružnicemi o poloměrech r, R



Obr. 16.

probíhá jehla). Poněvadž tyto kružnice jsou vesměs od sebe stejně vzdáleny, tvoří jejich obvody aritmetickou řadu, jejíž první člen jest $2\pi r$ a N-tý $2\pi R$; jest tudíž úhrnná délka $d = \pi(r + R)\,N$. Ve skutečnosti dráha jehly bude podstatně větší, jelikož nejedná se o geometricky dokonalé spirálové závity; na všech závitech při podrobnějším ohledání jest pozorovati veliké množství vlnek. Pro Smetanovu Bettinu polku (Esta č. 7855) jest $N = 239$, $R = 120$ mm, $r = 57$ mm, $d = 132{,}798$ m; pro třetí Slovanský tanec Dvořákův (Ultraphon č. 10526) $N = 258$, $R = 120$ mm, $r = 52$ mm, $d = 139{,}411$ m.

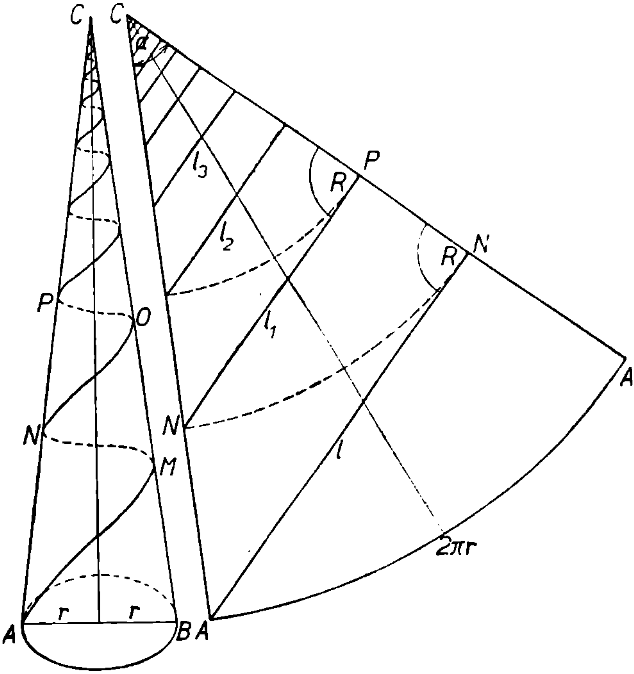
B) Stereometrie. a) Týmž zjednodušujícím předpokladem řešme tuto úlohu: Na cívce o průřezu naznačeném v obr. 17 jest navinuta nit. Jak jest dlouhá, je-li poloměr cívky $r = 25$ mm, délka $D = 250$ mm, $\delta = 0{,}25$ mm tloušťka nitě a $d = 50$ mm výška navinutých vrstev. Spirála určená nití má v každé vrstvě jistý počet závitů a lze je nahraditi kružnicemi a to v počtu $\frac{D}{\delta}$ a jejich poloměry od vrstvy k vrstvě stoupají o δ. I jest úhrnná délka nitě $2\pi r \,.\, \frac{D}{\delta} + 2\pi(r + \delta)\,\frac{D}{\delta} + {}$
$+ \ldots + 2\pi\left[r + \left(\frac{d}{\delta} - 1\right)\delta\right] \times$
$\times \frac{D}{\delta} = \frac{\pi D d}{\delta^2}\,.\,(2r + d - \delta)$ a pro naše údaje 19950π m $=$
$= 62643$ m.



Obr. 17.

b) Na kuželovitých lasturách lze pozorovati spirálovitou čáru, jež vede od nejširší části lastury k jejímu vrcholu. (Obr. 18.)

Rozvineme-li plášť kuželové plochy, obdržíme kruhovou úseč; je-li s strana kužele a r poloměr podstavy, α středový úhel úseče, platí úměra $2\pi s : 2\pi r = 360 : \alpha$, odkud $\alpha = \frac{360r}{s}$.

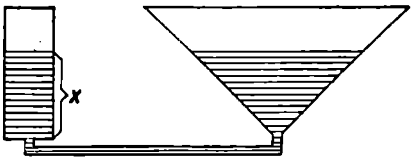


Obr. 18.

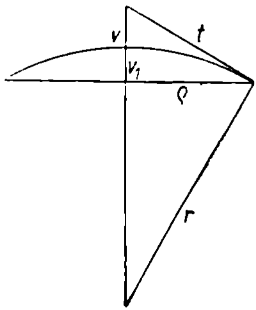
Máme stanoviti délku této čáry za předpokladu, že po rozvinutí jeví se závity jako kolmice na poloměr kruhové výseče; snadno odvodíme $d = s \sin \alpha + s \sin \alpha \cos \alpha + s$. $. \sin \alpha \cos^2 \alpha + \ldots = \frac{s \sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = s \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\alpha = s \operatorname{cotg} \frac{180r}{s}$.

Na příklad při jistém druhu vinutky jest $s = 34$ mm, $r = 4{,}5$ mm, $d = 77$ mm; při jistém druhu kotoučovce bylo naměřeno $s = 100$ mm, $r = 4{,}3$ mm, $d = 736$ mm.

c) Pro zjištění reálného kořene rovnice $x^3 + x - a = 0$ lze užíti tohoto přístroje: Spojité nádoby jsou vytvořeny válcem o podstavě s poloměrem 1 cm a kuželem, o jehož výšce x a poloměru ϱ platí $\frac{\varrho}{x} = \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha$, jeho objem



Obr. 19.



Obr. 20.

tedy jest $\frac{1}{3}\pi x^3 \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\alpha$. Volíme-li $\frac{1}{3}\pi \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\alpha = 1$, t. j. $\alpha = 88° 41'$, jest krychlový obsah kužele x^3. Zanedbejme vliv spojovací trubice; nalejeme-li nyní do kužele a cm³ kapaliny, ustálí se výška vody ve výši x cm, t. j. bude udávati přibližnou hodnotu reálného kořene dané rovnice.

d) Chlapec 150 cm vysoký stojí na loďce plující po rozsáhlém jezeře; oč uvidí z hladiny jezera více, stoupne-li si na špičky, t. j. zvýší-li se poloha jeho očí o 5 cm? (Obr. 20.)

Jde vlastně o obsah vrchlíku, který přehlédneme s výšky v, je-li tato velmi malá oproti poloměru koule. Dle věty Pythagorovy jest $(v + r)^2 = r^2 + t^2$, čili $v(v + 2r) = t^2$, poněvadž lze zanedbati v oproti r, jest $2vr = t^2$. Porovnáním obsahu pravoúhlého trojúhelníka obdržíme $(v + r)\varrho = rt$, odsud podobně $\varrho = t$. Z věty o výšce pravoúhlého trojúhelníka plyne $(v + v_1)(r - v_1) = \varrho^2 = t^2 = 2rv$ a dále $v + v_1 = 2v$, takže $v = v_1$ a obsah vrchlíku $2\pi rv$, tedy pro zeměkouli 40 000v km². Obhlédne tedy chlapec 150 cm vysoký plochu 40 000 . 0,0015 = 60 km², stojí-li na špičkách, obhlédne 40 000 . 0,00155 = 62 km², tedy o dva čtvereční kilometry více.

Podobnou úvahou lze řešiti i tuto úlohu: Piráti, aby unikli na svých bárkách čnějících $v_1 = 1$ m nad vodou, snažili se skrýti před pronásledujícími je koráby se strážními koši ve výšce $v_2 = 9$ m za vrchlík vytvořený hladinou moře, prchajíce nad to ještě ve směru kolmém na směr pronásledující je lodě. Kdy se mohli před ní cítiti v bezpečí? Spojnice koncových bodů úseček $r + v_1$, $r + v_2$ jdoucích středem země musí býti tečnou hlavní kružnice určené místy, kde se obě plavidla nalézají; o jejich vzdálenosti d platí

$$d = \sqrt{(r + v_1)^2 - r^2} + \sqrt{(r + v_2)^2 - r^2} \doteq \sqrt{2r}\,(\sqrt{v_1} + \sqrt{v_2}),$$

poněvadž v_1, v_2 vyjádřeno v metrech jest velmi malé proti r danému kilometry. Jest tedy

$$d = \sqrt{2\,.\,6{,}370}\,(\sqrt{v_1} + \sqrt{v_2}) = 3{,}57\,(\sqrt{v_1} + \sqrt{v_2})\ (\text{km})$$

a v našem případě:

$$d = 3{,}57\,(1 + 3) \doteq 14{,}3\ (\text{km}).$$

e) Jest dána krychle o straně rovné 8 jednotkám délky. Kolik jest všech krychlí o straně rovné celistvému násobku délkové jednotky obsažených v základní krychli? Krychlí o straně 1 s podstavou v podstavě původní krychle jest 8^2, o straně 2 pak 7^2, o straně 3 pak 6^2 a td., tedy všech krychlí s podstavou v podstavě krychle jest $8^2 + 7^2 + 6^2 + \dots 1^2$. Ve vrstvě následující jest pak těchto krychlí $8^2 + 7^2 + 6^2 + \dots + 2^2$ atd. Jest tedy všech krychlí

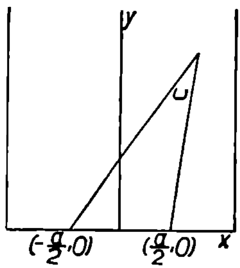
$$(8^2 + 7^2 + 6^2 + \dots + 1^2) + (8^2 + 7^2 + 6^2 + \dots 2^2) + \\ + (8^2 + 7^2 + 6^2 + \dots 3^2) + \dots + 8^2 = 8^3 + 7^3 + 6^3 + \\ + \dots 1^3 = \left(\frac{8\,.\,9}{2}\right)^2 = 36^2 = 1296.$$

Opírajíce se o výsledek v Aritmetických hrách a zábavách odst. 12 (21. číslo této sbírky), ukažte, že všech rovnoběžnostěnů v této krychli jest

$$\left(\frac{8\,.\,9}{2}\right)^2 (8 + 7 + 6 + \ldots + 1) = \left(\frac{8\,.\,9}{2}\right)^3 = 36^3 = 46\,656.$$

Pro krychli o straně rovné n jednotkám délky jest tudíž všech krychlí $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ a všech rovnoběžnostěnů $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^3$.

C) Analytická geometrie. Hráč běží po přímce rovnoběžné s delší stranou footballového hřiště, v kterém bodě své dráhy uvidí branku pod největším úhlem, takže — není-li jiných překážek — jest na místě, z něhož je možno nejlépe vstřeliti míč do branky? (Obr. 21.)



Obr. 21.

Brankou položme osu x a branka nechť jest ohraničena body $(\pm \frac{1}{2}a, 0)$. Hráč ať se právě nalézá v bodě o souřadnicích (x, y). Úhel ω, pod nímž vidí branku, jest dán vztahem

$$\operatorname{tg}\omega = \left(\frac{y}{x-\frac{1}{2}a} - \frac{y}{x+\frac{1}{2}a}\right) : \left(1 + \frac{y^2}{x^2 - \frac{1}{4}a^2}\right) = \frac{ay}{x^2 + y^2 - \frac{1}{4}a^2};$$

i jest nalézti maximum tohoto úhlu při pevném x a měnícím se y. Poslední rovnici přepišme do tvaru $y^2 - a \operatorname{cotg}\omega\, y + (x^2 - \frac{1}{4}a^2) = 0$; řešením dle y obdržíme $y = \frac{1}{2}(a \operatorname{cotg}\omega \pm \sqrt{a^2 \operatorname{cotg}^2\omega - 4x^2 + a^2})$. Má-li nastati extrémní hodnota, musí diskriminant této rovnice býti roven nule $a^2 \operatorname{cotg}^2\omega - 4x^2 + a^2 = 0$, takže extrémní hodnota jest $\operatorname{tg}\omega = \frac{a}{\sqrt{4x^2 - a^2}}$; jak z úlohy jest patrno, jest to maximum.

Dosadíme-li do základní rovnice, obdržíme

$$\frac{a}{\sqrt{4x^2-a^2}}=\frac{ay}{x^2+y^2-\frac{1}{4}a^2},$$

a po dalších úpravách

$$(x^2+y^2-\tfrac{1}{4}a^2)^2=(4x^2-a^2)y^2;\ (x^2-y^2-\tfrac{1}{4}a^2)^2=0$$

čili

$$x^2-y^2=\tfrac{1}{4}a^2,$$

což jest rovnoosá hyperbola, mající vrcholy v koncových bodech branky. Běží-li tedy hráč po přímce $x=c$, uvidí branku pod největším úhlem v průsečíku této přímky s vypočtenou rovnoosou hyperbolou. Proč úloha nemá smyslu, když $-\frac{1}{2}a\leqq x\leqq\frac{1}{2}a$?

D) Sférická trigonometrie. a) Uvažujeme dvě místa na zeměkouli, jejich zeměpisné šířky buďtež φ_1,φ_2 a délky d_1, d_2. Kdy vychází v obou těchto místech slunce současně? Polovina denního slunečního oblouku τ jest dána vzorcem:

$$\cos\tau=-\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\delta.$$

(*Vojtěch*, Geometrie pro VI. tř. šk. stř., IV. vyd., str. 134), kdež δ jest sluneční deklinace (viz Hvězdářskou ročenku), φ zeměpisná šířka. Pro daná dvě místa jest

$$\cos\tau_1=-\operatorname{tg}\varphi_1\operatorname{tg}\delta,\quad \cos\tau_2=-\operatorname{tg}\varphi_2\operatorname{tg}\delta;$$

slunce tedy vychází $\frac{1}{15}\tau_1$ resp. $\frac{1}{15}\tau_2$ hodin před polednem místního času. Nesmíme však zapomenouti na různost těchto místních časů, takže podmínka pro současný východ slunce jest

$$\tfrac{1}{15}(\tau_1-\tau_2)=\tfrac{1}{15}(d_1-d_2).$$

Dále jest

$$\cos(\tau_1-\tau_2)=\cos\tau_1\cos\tau_2+\sin\tau_1\sin\tau_2,$$

čili

$$\cos(d_1-d_2)=\operatorname{tg}\varphi_1\operatorname{tg}\varphi_1\operatorname{tg}^2\delta+$$
$$+\sqrt{(1-\operatorname{tg}^2\varphi_1\operatorname{tg}^2\delta)(1-\operatorname{tg}^2\varphi_2\operatorname{tg}^2\delta)};$$

další úpravy dávají

$$\cos(d_1 - d_2) - \operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2 \operatorname{tg}^2\delta =$$
$$= \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2\delta\,(\operatorname{tg}^2\varphi_1 + \operatorname{tg}^2\varphi_2) + \operatorname{tg}^2\varphi_1 \operatorname{tg}^2\varphi_2 \operatorname{tg}^4\delta},$$

umocněním a dalším zjednodušením obdržíme

$$\sin^2(d_1 - d_2) = \operatorname{tg}^2\delta\,[\operatorname{tg}^2\varphi_1 - 2\operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2 \cos(d_1 - d_2) +$$
$$+ \operatorname{tg}^2\varphi_2]$$

a odsud posléze

$$\operatorname{tg}\delta = \pm \frac{\sin(d_1 - d_2)}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\varphi_1 - 2\operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2 \cos(d_1 - d_2) + \operatorname{tg}^2\varphi_2}}.$$

Bližší rozbor udává toto pravidlo pro volbu znaménka: Leží-li jižnější místo východněji (západněji) než severní, jest δ severní (jižní) a $\operatorname{tg}\delta$ jest kladné (záporné). Současný východ slunce nastane pak pro daná místa (nastane-li vůbec) dvakráte do roka.

Určete tyto dny pomocí Hvězdářské ročenky pro dvojice míst daných zeměpisnými souřadnicemi: Praha š. 50° 05′, v. d. 14° 25′, Řím 41° 54′, v. d. 13°, Madrid š. 40° 24′, z. d. 3° 41′.

Pišme stručněji $d_1 - d_2 = d$; tažme se, pro která místa řešení skutečně existuje. Vzorec pro $\operatorname{tg}\delta$ upravme na kvadratickou rovnici:

$$\operatorname{tg}^2\varphi_2 - 2\operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2 \cos d + \operatorname{tg}^2\varphi_1 - \sin^2 d \operatorname{cotg}^2\delta = 0.$$

Jest nutno, aby měla reálná řešení a o jejím diskriminantě tedy musí platit

$$\operatorname{tg}^2\varphi_1 \cos^2 d - \operatorname{tg}^2\varphi_1 + \sin^2 d \operatorname{ctg}^2\delta = \sin^2 d\,(\operatorname{cotg}^2\delta -$$
$$- \operatorname{tg}^2\varphi_1) \geqq 0,$$

z týchž důvodů musí býti i

$$\operatorname{cotg}^2\delta - \operatorname{tg}^2\varphi_2 \geqq 0.$$

Omezme se na případ, kdy obě místa leží současně na severní nebo jižní polokouli, pak jest

$$\operatorname{cotg}^4\delta - \operatorname{tg}^2\varphi_1 \operatorname{tg}^2\varphi_2 \geqq 0$$

nebo též

$$(\operatorname{cotg}^2 \delta - \operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_2)(\operatorname{cotg}^2 \delta + \operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_2) \geqq 0$$

a poněvadž druhý z činitelů jest kladný:

$$\operatorname{cotg}^2 \delta - \operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_2 \geqq 0.$$

Do naší kvadratické rovnice zaveďme $\sin^2 d = 1 - \cos^2 d$; tak obdržíme kvadratickou rovnici pro $\cos d$:

$$\operatorname{cotg}^2 \delta \cos^2 d - 2 \operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_2 \cos d + \operatorname{tg}^2 \varphi_1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_2 - \\ - \operatorname{cotg}^2 \delta = 0.$$

Má-li i tato míti reálné kořeny, musí její diskriminant, jejž lze psáti ve tvaru $(\operatorname{tg}^2 \varphi_1 - \operatorname{cotg}^2 \delta)(\operatorname{tg}^2 \varphi_2 - \operatorname{cotg}^2 \delta)$ býti větší nebo roven nule. Tomu tak skutečně dle předchozích výkladů jest. Avšak to ještě nestačí, aby naše úloha měla řešení: podmínkou nutnou dále jest, aby poslední kvadratická rovnice měla aspoň jeden kořen absolutní hodnotou rovný nebo menší než jedna. Věta *Budan Fourierova* (viz autorovo *Numerické řešení rovnic*, této sbírky č. 27, odst. 4) pro kvadratické rovnice $ax^2 - 2bx + c = 0$, $a > 0$, $b > 0$ zní takto: Kvadratická rovnice má v intervalu 0,1 tolik kořenů, o kolik se zmenší počet měn v posloupnosti $a - 2b + c$, $a - b$, a u srovnání se změnami v posloupnosti c, $-2b$, a. V našem případě jest

$$a - 2b + c = (\operatorname{tg} \varphi_1 - \operatorname{tg} \varphi_2)^2 > 0, \; a - b = \operatorname{cotg}^2 \delta - \\ - \operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_2 \geqq 0, \; a > 0,$$

není tedy žádné změny znamének, to znamená, že kvadratická rovnice pro $\cos d$ má za předpokladu $\operatorname{cotg}^2 \delta - \operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_2 > 0$ buď jeden nebo dva kořeny v intervalu (0; 1) dle toho, zda $\operatorname{tg}^2 \varphi_1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_2 \lesseqgtr \operatorname{cotg}^2 \delta$.

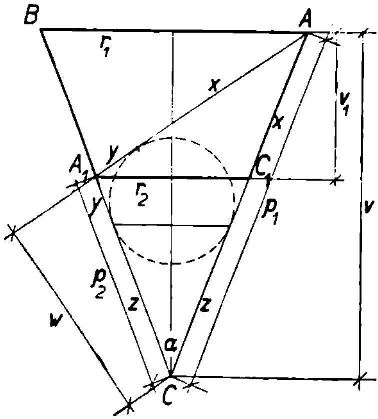
Ukažte, užívajíce obratů obvyklých při úpravě trigonometrických vzorců, že hranice stínu protíná rovník v délce d_3 dané vzorcem

$$\operatorname{tg}\left(\frac{d_1 + d_2}{2} - d_3\right) = \frac{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)}{\sin(\varphi_2 + \varphi_1)} \operatorname{tg} \frac{d_1 - d_2}{2}.$$

Je-li $d_1 = d_2$, platí o τ_1, τ_2 vztah $\cos^2 \tau_1 + \cos^2 \tau_2 = 1$, t. j. buď $\tau_1 + \tau_2 = \frac{1}{2}\pi$ nebo $\tau_1 + \tau_2 = \frac{1}{2}3\pi$.

b) Velmi často k určení severojižního směru se udává tento pokyn: Menší ručičku hodin s dvanáctinným dělením otoč k slunci, symetrála úhlu určeného hodinovou ručičkou a dvanáctou hodinou určuje hledaný směr. Důkaz toho se neuvádívá, ač jest velmi jednoduchý. Uvažujme nejprve hodinky s ciferníkem o 24 hodinách. Zacílím-li o půlnoci obě rafie směrem severojižním, ukazují směr, kde se slunce právě nalézá. Poněvadž hodinová ručička obejde ciferník jednou za 24 hodiny a rovněž slunce svoji zdánlivou pouť kolem země vykoná za tutéž dobu, ukazuje na ciferníku 0-tá hodina, směřuje-li hodinová ručička k slunci, severojižní směr. Důkaz pro dělení ciferníku ve dvanáct dílů jest nyní nasnadě: hodinová ručička takovýchto hodin se pohybuje dvakráte rychleji.

E) Deskriptivní geometrie. a) Protíná-li rovina všechny povrchové přímky rotační kuželové plochy, vytíná na této ploše elipsu. Kuželová plocha se rozpadá tak ve dvě části; o koulích vepsaných (i v případech obecnějších) platí věta *Queteletova-Dandelinova*, pravící, že tyto koule se roviny této elipsy dotýkají v jejích ohniskách. (*Vojtěch*, Geometrie pro VII. tř., IV. vydání, str. 99; *Ingriš-Klíma*, Deskr. geometrie pro VI. a VII. tř. r. g., str. 118). Této věty užijeme k rozřešení úlohy: Číše má tvar komolého kužele obráceného menší podstavou ke stopce. Číši jsem dopil do té míry, že se právě začíná ukazovat dno. Jak jest



Obr. 22.

veliký zbytek v číši a ve které výšce se ustálí kapalina, postavím-li číši opět na stůl?

Budiž $\overline{AA_1} = 2a$ velká osa elipsy, největší a nejmenší površka budiž p_1 a p_2; dle označení v obrázku jest $x + y = 2a$, $y + z = p_2$, $z + x = p_1$; známým obratem vypočteme z těchto rovnic $x = a + \frac{1}{2}(p_1 - p_2)$, a poněvadž též dle věty *Queteletovy-Dandelinovy* jest $x - a = e$, kdež e jest výstřednost elipsy, jest $e = \frac{1}{2}(p_1 - p_2) = \sqrt{a^2 - b^2}$. Tuto rovnici pišme ve tvaru $4(a^2 - b^2) = (p_1 - p_2)^2$ a uvažme, že platí dle věty *Carnotovy* (kosinové) $4a^2 = p_1^2 + p_2^2 - 2p_1p_2 \cos\alpha$. Z těchto rovnic plyne

$$4b^2 = 2p_1p_2(1 - \cos\alpha) = 4p_1p_2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha = 4p_1p_2 \frac{r_1^2}{p_1^2} =$$

$$= 4r_1 \frac{p_2 r_1}{p_1} = 4r_1 r_2,$$

takže $b^2 = r_1r_2$; a dále $4a^2 = (r_1 + r_2)^2 + v_1^2$. Vypočteme nyní krychlový obsah K_1 kužele, jehož osový řez jest AA_1C; i jest

$$K_1 = \tfrac{1}{3}\pi\, abw = \frac{\pi baw}{3} = \frac{\pi b p_1 p_2 \sin\alpha}{6} =$$

$$= \frac{\pi b p_1 p_2 \,.\, 2\sin\frac{1}{2}\alpha \cos\frac{1}{2}\alpha}{6} = \frac{\pi b p_1 p_2}{3} \,.\, \frac{r_1}{p_1} \,.\, \frac{v}{p_1} = \tfrac{1}{3} b\pi \,.\, \frac{p_2 r_1}{p_1} \,.$$

$$.\, v = \frac{\pi b r_2 v}{3} = \tfrac{1}{3}\pi b r_2 \,.\, \frac{v_1 r_1}{r_1 - r_2} = \tfrac{1}{3}\pi \frac{\sqrt{r_1 r_2}\, r_1 r_2 v_1}{r_1 - r_2} = \frac{\pi v_1}{3} \frac{(r_1 r_2)^{\frac{3}{2}}}{r_1 - r_2};$$

při tom jsme v nahradili veličinou v_1 dle vztahu

$$v : (v - v_1) = r_1 : r_2.$$

Část kužele o osovém řezu ABA_1 má krychlový obsah

$$K_2 = \tfrac{1}{3}\pi r_1^2 v - \tfrac{1}{3}\pi v_1 \frac{(r_1 r_2)^{\frac{3}{2}}}{r_1 - r_2} = \frac{\pi v_1}{3}\left(\frac{r_1^3}{r_1 - r_2} - \frac{(r_1 r_2)^{\frac{3}{2}}}{r_1 - r_2}\right) =$$

$$= \frac{\pi v_1 r_1^{\frac{3}{2}} (r_1^{\frac{3}{2}} - r_2^{\frac{3}{2}})}{3(r_1 - r_2)};$$

část kužele o osovém řezu AA_1C_1 má krychlový obsah

$$K_3 = \frac{\pi v_1}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) - K_2 = \frac{\pi v_1}{3}\left(\frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1 - r_2} - \right.$$

$$\left. - \frac{r_1^3}{r_1 - r_2} + \frac{(r_1 r_2)^{\frac{3}{2}}}{r_1 - r_2}\right) = \frac{\pi v_1 r_2^{\frac{3}{2}} (r_1^{\frac{3}{2}} - r_2^{\frac{3}{2}})}{3(r_1 - r_2)}.$$

Elipsa tedy dělí komolý kužel v poměru $K_2 : K_3 = r_1^{\frac{3}{2}} : r_2^{\frac{3}{2}}$. Naleji-li nyní množství K_3 do číšky, vytvoří komolý kužel o podstavách s poloměry r_2, $r_3 > r_2$ a o výšce v_3; i jest

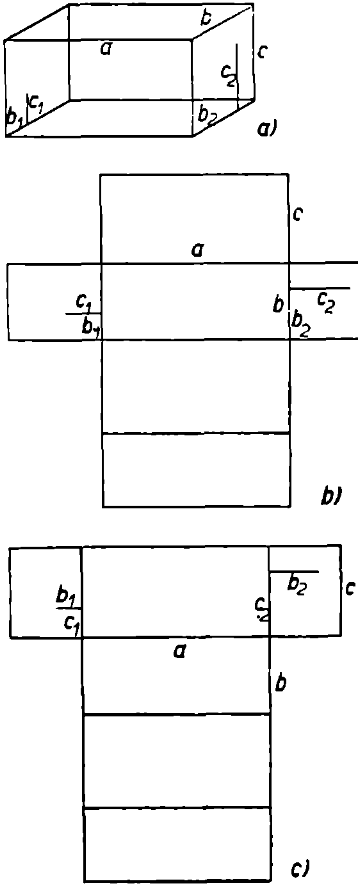
$$\frac{\pi v_1 ((r_1 r_2)^{\frac{3}{2}} - r_2^3)}{3(r_1 - r_2)} = \frac{\pi v_3 (r_3^3 - r_2^3)}{3(r_3 - r_2)}.$$

Osový řez komolým kuželem jest rovnoramenný lichoběžník; snadno z jeho vlastností odvodíme $v_1 : (r_1 - r_2) = v_3 : (r_3 - r_2)$, takže $(r_1 r_2)^{\frac{3}{2}} = r_3^3$ čili $r_3 = \sqrt{r_1 r_2}$, což jest délka vedlejší poloosy oné elipsy; posléze jest

$$v_3 = \frac{r_3 - r_2}{r_1 - r_2} \cdot v_1 = \frac{\sqrt{r_2}}{\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2}} \cdot v_1.$$

b) Síť šesti obdélníků, z nichž lze složiti kvádr, jest čtenáři jistě známá; jest více takových sítí? Zvolme si libovolnou stěnu za podstavu; tu a protější stěnu lze k rozvinutému plášti připojiti celkem 4krát čtyřmi, t. j. 16 způsoby; existuje tedy celkem $16 \cdot 6 = 96$ sítí, ovšem, že některé se mezi sebou nepodstatně liší. Řešme tuto úlohu: Jakou nejkratší cestou se dostane pavouk k mouše lezoucí po protější straně místnosti, jsou-li příslušné údaje dány obrazcem 23?

Předepišme cestu buď po podlaze nebo po stropu a rozviňme plášť rovnoběžnostěnu tak, že stěny, na nichž se pavouk a moucha nalézá, přiléhají k podlaze (23b.) Cesta pak jest dána přímkou spojující oba body a přímou zůstane, i když ze sítě složíme znovu rovnoběžnostěn. Délka této přímé cesty vykonané přes podlahu jest $d_1^2 = (a + c_1 + c_2)^2 + (b_1 - b_2)^2$, cesty pak vykonané přes strop $(a + c - c_1 + c - c_2)^2 + (b_1 - b_2)^2$. Když jest $c_1 + c_2 \lesseqgtr c$, jest i $d_1 \lesseqgtr d_2$.



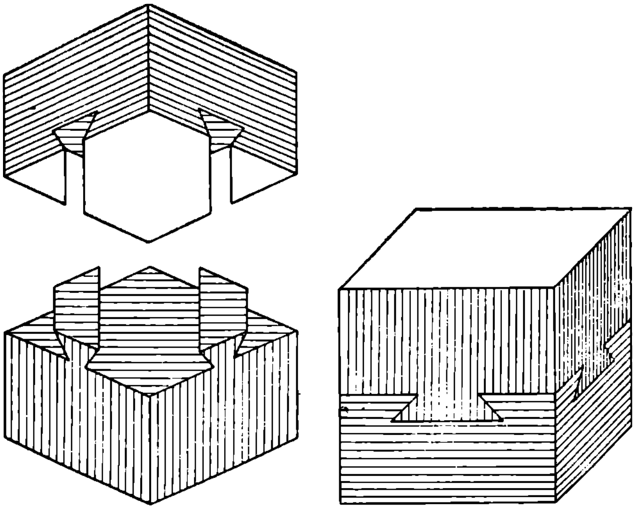
Obr. 23.

Nelze však říci, že by to byla cesta nejkratší, poněvadž, jak jsme ukázali, lze rovnoběžnostěn do sítě rozvinouti i jinými způsoby. A jsou-li údaje dány obecně, nelze obecně nejkratší cestu stanoviti, to se nám podaří jen pro údaje v číslech zvláštních. Rozvineme-li na př. rovnoběžnostěn, že stěny s pavoukem a mouchou připojíme k přední stěně (myšleno s hlediska divákova), viz obr. 23c, jest délka přímé cesty $d_3^2 = (a + b_1 + b_2)^2 + (c_1 - c_2)^2$, resp. $d_4^2 = (a + b - b_1 + b - b_2)^2 + (c_1 - c_2)^2$ a opět jest $d_3 \lesseqgtr d_4$ dle toho, zda $b_1 + b_2 \lesseqgtr b$.

Zabývejte se podrobněji případem, kdy moucha a pavouk jsou v koncových bodech tělesné úhlopříčky!

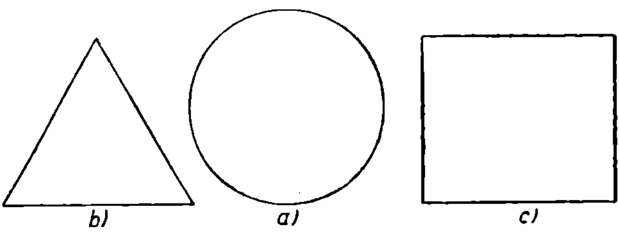
c) Jest možno krychli protnouti rovinou tak, aby vznikl řezem pravidelný šestiúhelník? Ano, jest to rovina určená středem krychle a půlícími body dvou sousedních hran, jejichž spojnice jest tedy strana tohoto šestiúhelníka.

d) Dle obr. 24 sestrojte si krychlovou krabici; nesnadno otevře ji ten, jenž jest zvyklý otvírati krabice tohoto tvaru pohybem rovnoběžným s hranami krychle.



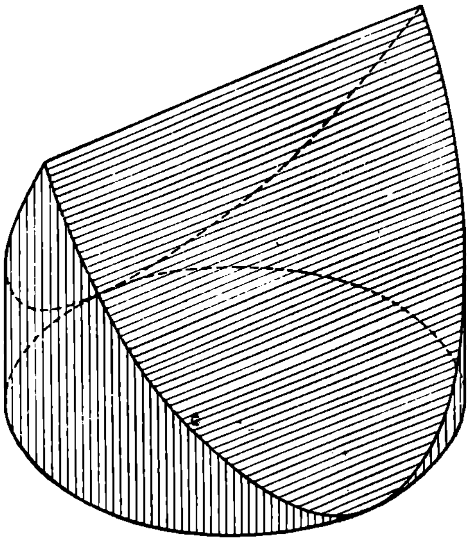
Obr. 24.

e) Existuje těleso, jež by bylo možno přesně prostrčiti všemi třemi otvory naznačenými v obr. 25? Ano, pokládejte obrysy otvorů za půdorys, nárys a bokorys tohoto tělesa, jež jest vyznačeno v obr. 25d.



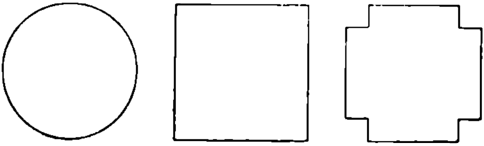
Obr. 25.

Pokuste se určiti těleso, jež může projíti třemi otvory naznačenými v obr. 26 nebo 27.



Obr. 25d.

f) Avšak ani geometrické rýsování, tento věrný a nerozlučný druh deskriptivní geometrie, nepřijde v tomto odstavci zkrátka. Jest vyplniti celou rovinu pravidelnými mnohoúhelníky jednoho, dvou, tří i více druhů. Vnitřní úhel pravidelného n-úhelníka jest $\frac{n-2}{n} \cdot 2R$. Máme-li tedy rovinu zaplniti jedním a týmž mnohoúhelníkem, musí býti plný úhel čili $4R$ dělitelen $\frac{n-2}{n} \cdot 2R$, t. j. musí býti $\frac{2n}{n-2}$ číslo celistvé. To jest však možno jen pro $n = 3, 4, 6$. Tedy rovinu lze vyplniti (též se říká parketovati, pokrýti mosaikou) rovnostrannými trojúhelníky, jichž v každém vrcholu se stýká šest, nebo čtverci v počtu po čtyřech, nebo posléze šestiúhelníky a to po třech. Grafické provedení této mosaiky jest snadné a tvoří pěkné cvičení geometrického rýsování.



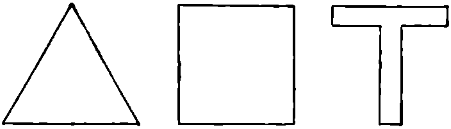
Obr. 26.

Jest možno, aby se vždy ve vrcholu stýkalo x trojúhelníků, y čtverců a z šestiúhelníků? Pak musí platiti

$$60x + 90y + 120z = 360,$$

čili

$$2x + 3y + 4z = 12.$$



Obr. 27.

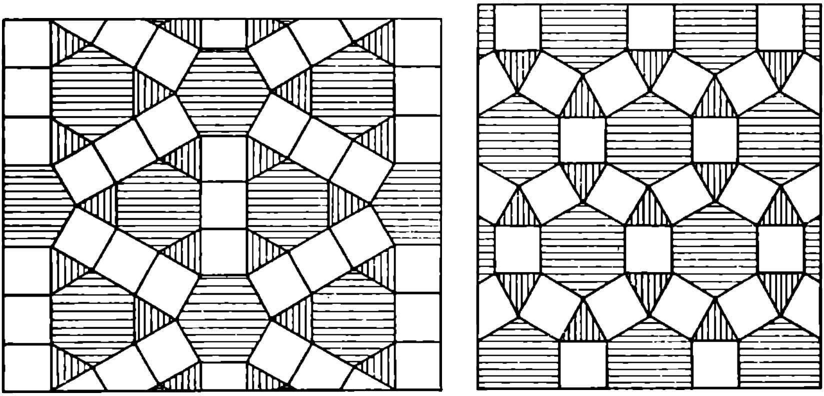
To jest rovnice neurčitá a její celistvá kladná řešení jsou:

$x=0,\ y=0,\ z=3$; $x=0,\ y=4,\ z=0$; $x=1,\ y=2,\ z=1$; $x=2,\ y=0,\ z=2$; $x=3,\ y=2,\ z=0$; $x=4,\ y=0,\ z=1$; $x=6,\ y=0,\ z=0$.

Jak patrno, jsou v této tabulce obsaženy všechny mosaiky, jež lze z trojúhelníků, čtverců a šestiúhelníků sestaviti. Nejsložitější případ jest $x = 1$, $y = 2$, $z = 1$, t. j. kombinace trojúhelníka, dvou čtverců a šestiúhelníka; ve dvou různých provedeních jest vyznačena v obr. 28.

Uvažovali jsme dosud nejjednodušší mnohoúhelníky, zkusme, je-li možno mosaiku sestaviti z mnohoúhelníků o počtu stran n_1, n_2, n_3, jichž vnitřní úhly jsou

$$\frac{n_1 - 2}{n_1} 2R, \quad \frac{n_2 - 2}{n_2} 2R, \quad \frac{n_3 - 2}{n_3} 2R.$$



Obr. 28.

Musí pak býti

$$\frac{n_1 - 2}{n_1} . 2R + \frac{n_2 - 2}{n_2} . 2R + \frac{n_3 - 2}{n_3} . 2R = 4R,$$

čili

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \tfrac{1}{2}.$$

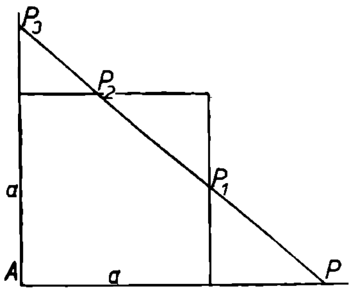
To jest rovnice neurčitá, jedno z jejích řešení nalezneme takto: Poněvadž jest $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$, jest $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$; hoví tedy naší rovnici $n_1 = 4$, $n_2 = 6$, $n_3 = 12$, t. j. mosaiku lze vytvořiti i ze čtverce, šesti- a dvanáctiúhelníka. Jsou však i jiná řešení, na př. $n_1 = 4$, $n_2 = 5$, $n_3 = 20$.

K řešení této úlohy lze užíti i mnohoúhelníků polopravidelných, tak na př. obdélníky dávají vznik obrazcům kladeným z parket na podlahu, obrazcům z cihel ve zdi; lze užíti i deltoidů i některých prvků odvozených z kruhu.

O souvislosti os symetrie bohatě členěných ornamentů (zejména orientálních) s grupami geometrických transformací viz Speiser: Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung (1. vyd. 1927), str. 77-96.

III. GRAFICKÉ ŘEŠENÍ NĚKTERÝCH ÚLOH Z FORONOMIE

A. (Srovnej Aritmetické hry a zábavy, odstavec 10). Čtenáři snad jest divno, že v předchozím odstavci byly pominuty konstruktivní úlohy z planimetrie. Jsou jistě mezi nimi příklady velmi zajímavé, snadné i nesnadné, úlohy, jimiž se zabýval starověk, jež potřeboval kamenický mistr při konstrukci gotických kružeb i oken, i úlohy data mnohem mladšího. K první skupině patří proslulý problém *Apoloniův*: Sestrojiti kružnici, jež se dotýká tří daných kružnic. Některé z těchto kružnic mohou přejíti v body i přímky a tak docházíme k desíti různým úlohám: *K*, *K*, *K*; *K*, *K*, *P*; *K*, *P*, *P*; *P*, *P*, *P*; *K*, *K*, *b*; *K*, *b*, *b*; *b*, *b*, *b*; *K*, *P*, *b*; *P*, *P*, *b*; *P*, *b*, *b*, z nichž první jest značně nesnadná (viz č. 4 této sbírky: *Holubář*: O methodách rovinných konstrukcí), kdežto jiné, na př. *b*, *b*, *b*, patří mezi elementární úlohy. K těmto desíti úlohám *Apoloniovým* již starověk přidružil šest úloh *Pappusových*, v nichž jest dán bod dotyku hledané kružnice buď na kružnici nebo na přímce: *K*(*b*), *K*; *K*(*b*), *P*; *K*(*b*), *b*; *P*(*b*), *K*; *P*(*b*), *P*; *P*(*b*), *b*. Téměř o dva tisíce let mladší jest úloha *Malfattiova*: Do daného trojúhelníku vepsati tři kružnice, jež se dotýkají dvou stran a zároveň po dvou mezi sebou. (Viz *Vil. Rychlík*, Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, roč. XL.). V poslední době se častěji projevil zájem o tuto úlohu: Jest sestrojiti čtverec, jehož strany jdou čtyřmi danými body. Není to úloha právě snadná, řešení velmi jednoduše se dovodí, leží-li tyto čtyři body na přímce. Pak jest (obr. 29)

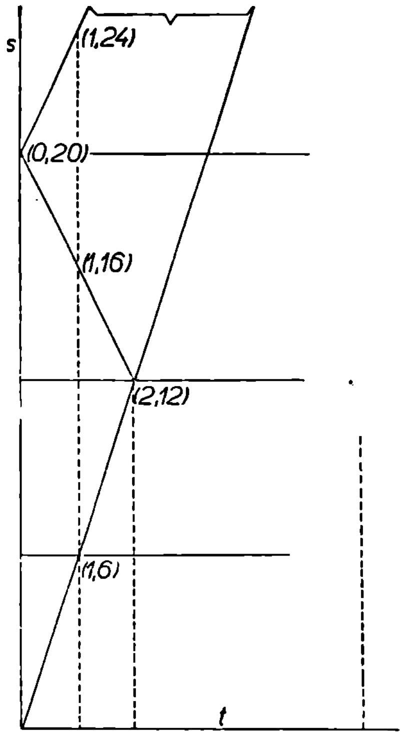


Obr. 29.

$\overline{PA} : a = \overline{PP_3} : \overline{P_1P_3}$, $\overline{P_3A} : a = \overline{PP_3} : \overline{PP_2}$, odkudž $\overline{AP}$: : $\overline{AP_3} = \overline{PP_2} : \overline{P_1P_3}$; při tom jest a strana hledaného čtverce, $\overline{PP_3}$ průměr kružnice, na jejímž obvodě leží jeden vrchol čtverce. Jest tedy nad danou přeponou sestrojiti pravoúhlý trojúhelník, jehož odvěsny jsou v poměru známých úseček.

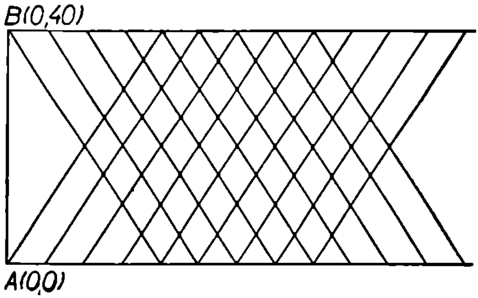
B. Než na tom dosti; ukažme raději, jak možno nejjednoduššími konstrukcemi řešiti některé lineární rovnice.

Narýsujme dvě k sobě kolmé přímky; na přímku vodorovnou nanesme čas v určitých jednotkách, jmenujme ji osou času t, na přímku kolmou nanášejme vykonanou dráhu, jmenujme ji osou dráhy s. Pak pohyb rovnoměrný bude znázorněn přímkou, jejíž směrnice jest dána rychlostí tohoto rovnoměrného pohybu. Rozřešme dvě základní úlohy o pohybu: 1. Dvě tělesa počnou se současně pohybovati proti sobě ze vzdálenosti 20 km, a to první rychlostí 6 km a druhé 4 km, kde a kdy se setkají? 2. Táž tělesa z téže vzdálenosti a o týchž rychlostech se pohybují za sebou (první za druhým), kdy se setkají? (Obr. 30.)



Obr. 30.

První těleso za hodinu dostihne bodu (1; 6), tím jest určena přímka znázorňující pohyb prvního tělesa. Druhé těleso počne se pohybovati z bodu (0; 20) a za první hodinu dostihne v prvním případě bodu (1; 16), v druhém pak bodu (1; 24). Tyto body určují přímky znázorňující pohyb druhého tělesa. Jejich průsečíky s přímkou znázorňující pohyb prvního bodu svými úsečkami udávají dobu setkání obou těles, svými pořadnicemi pak vzdálenost, ve které se setkají; tedy v prvním případě se setkají za dvě hodiny 12 km od místa, z něhož se počalo pohybovat první těleso, v druhém případě se setkají za 10 hodin 60 km od tohoto bodu. To jest základní myšlenka, jež nám umožní řešiti úlohy mnohem složitější.

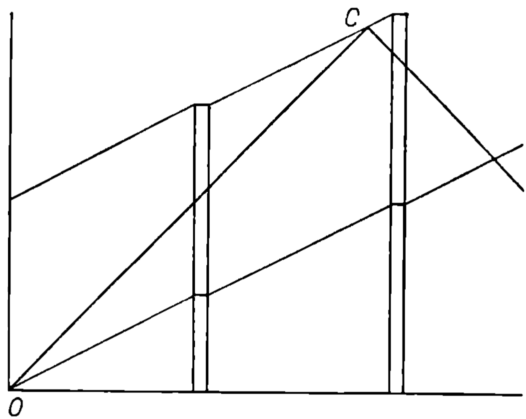


Obr. 31.

a) Z místa A vyjíždějí v každou půlhodinu vlaky do místa B vzdáleného 40 km; současně s každým tímto vlakem vyjíždí z místa B toutéž rychlostí vlak do A. Je-li tato rychlost 20 km za hodinu, kolik který vlak potká vlaků vyjíždějících z protější stanice? Odpověď vyčte čtenář z obrázku 31. Místo A jest vyznačeno počátkem, místo B bodem (0; 40). Dráhy vlaků vyjíždějících z A jsou dány přímkou $s = 20t$ a rovnoběžkami k této přímce, dráhy vlaků vyjíždějících z B přímkou $s = 40 - 20t$ a rovnoběžkami v bodech, jichž úsečky jsou tytéž jako dříve. (Obr. 31.)

b) Oddíl vojska 20 km dlouhý táhne po silnici rychlostí 5 km za hodinu, po hodině pochodu následuje vždycky pět minut oddechu. Velitel kolony, jenž jest na konci skupiny, vyšle na čelo skupiny cyklistu jedoucího rychlostí 20 km za hodinu, kdy se cyklista vrátí zpět? (Obr. 32.)

Tento obrázek vyznačuje dráhu čela i zádě kolony, vodorovná úsečka vyznačuje oddech. Přímka znázorňující dráhu cyklistovu protne v jistém bodě dráhu čela; úsečka tohoto

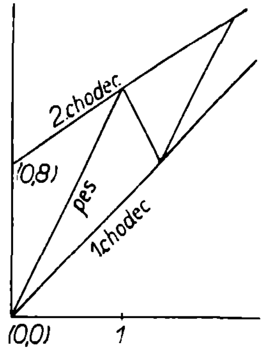


Obr. 32.

bodu udává čas, kdy cyklista dojel k čelu kolony. Vedeme-li nyní přímku bodem C souměrně položenou k přímce OC dle přímky určující pořadnici bodu, obdržíme cestu cyklisty zpět, která nám protne dráhu zádě kolony v bodě o úsečce asi 2 hod. 32 min.

c) Dva přátelé vyšli z míst, jež si znázorníme body (0; 0) a (0; 8), první jde rychlostí 6 km a druhý 4 km za hodinu.

S prvním chodcem vyběhne zároveň pes rychlostí 10 km a běží k druhému chodci, od něho zase k prvnímu atd. Kdy



Obr. 33.

dobíhá pes k oběma chodcům? Jakou dráhu urazí celkem? Řešení snadno srozumitelné udává obr. 33. Jak se úloha změní, vyběhne-li pes nejdříve od chodce druhého? Co se týče délky dráhy proběhnuté psem, není nutno snad počítati délku lomené čáry. Uvažujme takto: pes běhá, pokud první chodec nedostihne druhého, to se stane za 4 hodiny (proč?), uběhne pes tedy celkem dráhu 4 . 10 km = 40 km.

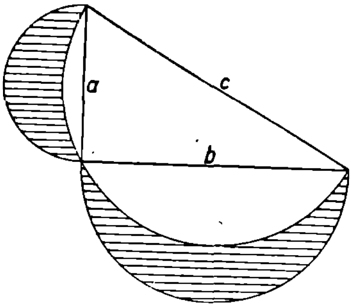
Řešte touto methodou některé úlohy z Aritm. her a zábav (této sbírky č. 21, kapitola 10) zejména př. *g*.

IV. KRUH A KOULE

Na oba útvary dovedl starověk i středověk vzhlížeti velmi romanticky a obdivoval se jim z několika důvodů.

Kruh prý jest obrazec nejdokonalejší a nejdůležitější; příroda sama ho napodobí, nebesa a jiná tělesa jsou okrouhlá, poněvadž v kruhu jest jedině dokonalost. Člověk rovněž své výrobky nejraději krouží do kruhu a koule (nádoby, číše a j.). Jinou význačnou vlastnost, kterou přiřkli kruhu, byl největší obsah, poněvadž kruh nemá žádných koutů ani rohů. A hle: po tisíciletí stál člověk bezradně nad tímto nejdokonalejším útvarem, chtěl-li řešiti úlohu, která se mu vnucovala vždy, setkal-li se s útvarem rovinným i prostorovým: seznati obvod, obsah, povrch, krychlový obsah. Tuto úlohu rozřešil vzorci někdy velmi složitými (*Heronův* vzorec pro obsah trojúhelníka daného stranami nebo obdobný vzorec pro obsah čtyřúhelníka tětivového). Při svém nejobdivovanějším útvaru musil se spokojiti hrubším či jemnějším odhadem. Již v tom byl veliký pokrok, když otázka byla formulována do věty: kolikráte lze nanésti průměr kruhu na obvod? Velmi záhy se však vědělo, že ze známé délky průměru kruhu lze vypočísti jeho obsah a obvod. Nejhrubší odpovědí na tuto otázku bylo, že průměr na obvod lze nanésti třikráte. Ve Starém Zákoně v třetí knize Královské (7,23) čteme líčení o vnitřním zařízení chrámu *Šalamounova*, stavěného asi tisíc let před Kristem ... „Dále udělal moře lité deset loket od kraje ke kraji okrouhlé vůkol ... provazec na třicet loket bylo dlužno ovinouti kolem něho". (*Hejčl*, Bible česká, 932). Egyptský *Ahmes*, žijící asi pět set let před biblickým *Abrahamem*, určil poměr obvodu kruhu a průměru jeho na $(\frac{16}{9})^2 = 3{,}1605$; nejdokonaleji určil tento poměr v třetím století před Kristem *Archimedes*, sevřev ho nerovninou $3\frac{10}{71} < p < 3\frac{1}{7}$ čili $3{,}1408 < p < 3{,}1428$, takže aritmetický střed obou mezí jest 3,1418, tedy o $0{,}07\,^0/_{00}$ více než hodnota, kterou známe my. Přibližné hodnoty $\frac{22}{7}$ užívá se pro zběžné výpočty.

Archimedes též věděl, že povrch koule jest čtyřikráte tak velký jako obsah největšího jejího kruhu. I divili se Řekové nemálo, že existují rovinné útvary omezené kruhovými oblouky, jichž obsah lze přesně vypočísti. Nejproslulejším útvarem tohoto druhu jsou t. zv. *Hippokratovy měsíčky* (viz obr. 34), obsah obou měsíčků jest totiž $\frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2\right) + \frac{1}{2}ab - \frac{1}{8}\pi c^2 = \frac{1}{2}ab$, rovná se tedy obsahu daného pravoúhlého trojúhelníka. Jiné útvary, které Řeky zajímaly, rovněž pocházejí od *Hippokrata*, jest to arbelos (nůž, knejp; viz obr. 35) a salinon (snad mořské vlny).

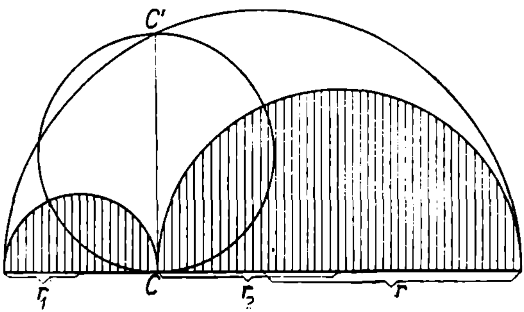


Obr. 34.

Obsah prvního jest

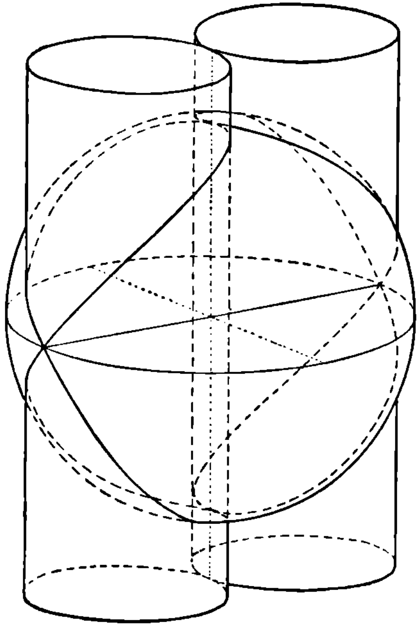
$$\frac{1}{2}\pi\left(r^2 - r_1^2 - r_2^2\right) = \frac{1}{2}\pi\left(r^2 - (r_1 + r_2)^2 + 2r_1r_2\right) = \pi r_1 r_2 =$$
$$= \pi\,\frac{1}{2}\left(\sqrt{2r_1(2r - 2r_1)}\right)^2,$$

tedy jest tak velký jako kruh nad úsečkou $\overline{CC'}$ sestro-



Obr. 35.

jený jako nad průměrem; délka druhého útvaru jest polovina obvodu dané kružnice. Podobně se téměř o dva tisíce let později podivoval italský matematik *Viviani* tomu, že plocha, jež z polokoule o poloměru *r* zbude vytnutím dvou



Obr. 36.

okének (po něm zvaných Vivianiho) s pomocí dvou rotačních válců majících podstavu na společné hlavní kružnici o poloměru rovném polovině poloměru daného kruhu, jest rovna čtverci nad průměrem tohoto kruhu. (Důkaz se provádí integrálním počtem). (Obr. 36.)

I vinuly se snahy matematiků od nejstarších dob až po naše dvěma směry; někteří snažili se číselně co nejpřesněji určiti tento poměr, druzí hledali souvislost mezi obsahem kruhu a obsahem jiného útvaru, jemuž starověká mystika a středověká romantika rovněž přiřkla vyšší dokonalost, totiž se čtvercem; nalézti čtverec, jenž by svým obsahem rovnal se obsahu daného kruhu, bylo předmětem úvah nesčetných matematiků; jest to t. zv. kvadratura kruhu nelišící se podstatně od rektifikace kružnice nebo její části. Toto usilování vyvrcholilo koncem století šestnáctého, kdy (na př. *Vieta*) vypočetli hledaný poměr na deset, dvacet i více desetinných míst. Stanovení tohoto poměru i jeho pojmenování zůstane spjato s jménem holandského matematika a vojenského stavitele *Ludolfa van Ceulen* (též *Keulen*, *Collen*). Poměru tomu se dostalo označení π a názvu číslo *Ludolfovo*. *Ludolf* sám vypočetl toto místo na 35 desetinných míst.

Poznamenejme, že tento vědecký zápas o stanovení čísla π našel odezvy i v *J. A. Komenského* Labyrintu světa a lusthausu srdce v 10. odstavci XI. kapitoly: „Kteří mezi nimi nejučenější byli sestupovali se do prostřed a pokoušeli se očsi velmi úsilně, načež viděl jsem, že jiní všichni s otevřenými ústy očekávají; a bylo o tom řečí mnoho, jak by to nade všeho světa subtilnosti divnější bylo, a kdyby se vynalezlo, že by již nic nebylo nemožného. Já tedy, co to jest, věděti žádostiv jsa, přistoupil jsem a spatřil, že kolo mezi sebou mají, o něž otázka jest, jak by z něho quadrát udělán býti mohl .... Tožť po malé chvíli nenadále jeden vyskočí volaje: Mám, mám tajemství odkryté, mám! I shlukli se k němu všichni, viděti a diviti se chvástajíce. A on vynesa velikou knihu in folio, ukazoval jim. I stali se hlasové a pokřikování, jakéž po vítězství bývá. Ale tomu plesání jiný hned brzy přítrž učinil, co hlasu měl, křiče, aby se mámiti nedali, že quadrát není, a postaviv ještě větší knihu, všecky onoho domnělé quadráty zase v kola obrátil, mocně to provodě, že, oč se onen pokusil, toho člověku dovésti možno není. I sklopili všichni hlavy a navrátili se k čarám svým“.

Výpočet *Ludolfův* udává číslo s přesností pro praktické potřeby až zbytečnou, vždyť použijeme-li pouze prvních

pěti desetinných míst $\pi = 3{,}14159$, dopustíme se, počítajíce obvod kružnice o poloměru 1 km, chyby pouze asi 15 mm. *Ludolfův* výpočet se stal jakýmsi pravzorem početního ne-li matematického výkonu vůbec a celé generace učily se těchto třicet pět desetinných míst zpaměti. Aby se tato dlouhá řada číslic snáze pamatovala, byly vymyšleny — a to ve všech jazycích — různé mnemotechnické pomůcky. Jedna z nich založena jest na tom, že se tvoří věty složené ze slov, jež mají stejný počet hlásek jako má jednotek odpovídající číslice, na příklad: Mám, ó Bože, ó věčný, *Ludolfovo* pí paměti
3 1 4 1 5 9 2 6
slabé své podat atd.
5 3 5

Ovšem tato pomůcka má svoji vadu, nelze jí použít přes 31. desetinné místo, jelikož na dalším místě stojí 0 a recitátor musí zmlknout. Proto pomůcka podati věty, jichž slova začínají touž hláskou jako příslušná číslice, jest poněkud lepší: slova počínající písmenou ř značí 9: Takto jednou člověk jeden pěknou řadu dlouhou špatné
3 1 4 1 5 9 2 6
paměti, tvrdošíjné, připomněl: Opakoval řádně slov řadu
5 3 5 8 9 7 9
tuto, došel této odměny: Čas šťastně drahý šetřil. Člověk ten
3 2 3 8 4 6 2 6 4 3
totiž opět třetího dne sumu řekl. Pak délku nezapomněl
3 8 3 2 7 9 5 2 0
obvodu, obsah.
8 8

Výpočet čísla na 35 míst byl mnohokráte a znamenitě předstižen; před sedmdesáti lety byl proveden na více než sedm set míst (u nás dokonce před několika lety byl uveřejněn výpočet čísla π na více než tisíc míst, ale ten již v prvních desíti místech se lišil od správného výpočtu). Vytrvalost těchto počtářů opravdu lepší věci hodná snad tkvěla v touze podati něco bližšího o aritmetické povaze čísla π, není-li přece jen vyjádřeno číslem konečným nebo periodickým zlomkem; v obou případech by bylo číslem racionálním, t. j. takovým, že by je bylo možno znázorniti podílem dvou čísel celistvých kladných; pak by ovšem kvadratura kruhu nebo rektifikace obvodu aspoň theoreticky byla možná. Souběžně s těmito výpočty (a již dlouho před nimi) usilují praktikové aspoň o různé přibližné konstrukce, z nichž velmi jednoduchá a zároveň postačitelně přesná jest konstrukce *Kochańskiho* (viz *Hruška*: Konstrukce s omezenými prostředky, této sbírky č. 7, str. 53), udávající $\pi =$ $= 3{,}141533$; ještě lepší (avšak složitější, takže přesnost výsledku jest ohrožena složitostí konstrukce) jest návod *Spechtův* (viz *Sobotka*, Deskriptivní geometrie promítání parallelního, Sborník Jednoty č. matematiků a fysiků, X., str. 612) podávající $\pi = 3{,}1415919$. Avšak tímto jednoduchým způsobem nebylo možno dosíci vědomosti o aritmetických vlastnostech čísla π, to stalo se methodami vyššími: *Lambert* (1770) ukázal, že π jest číslo irracionální; totéž pro π^2 odvodil *Legendre* (1794). *Lindemann* pak před šedesáti lety ukázal, že *Ludolfovo* číslo nemůže býti kořenem žádné algebraické rovnice, jejíž koeficienty jsou čísla celistvá, tedy že jest číslo, jak se stručně říká, transcendentní. A tím byl vlastně vynesen rozsudek o domnělé správnosti laických konstrukcí kvadratury i rektifikace. Škoda, že nedolehl až ke stolům a rýsovacím prknům pilných počtářů a konstruktérů i naší doby, kteří své objevy sdělují i na korespodenčních lístcích i na rysech někdy o ploše i několika čtverečních metrů a není pro ně dost přesvědčivých slov.

Ale přece moderní doba dala starým v něčem za pravdu, ovšem otázky, které si kladli oni, poněkud pozměnila. Nikoliv kruh, nýbrž poměr jeho obvodu k jeho průměru, jest číslem podivuhodným a objevujícím se při nesčetných příležitostech a matematických úvahách. Jest vyjádřeno řadami i součiny, podivuhodnými pro jejich pravidelnou vnitřní stavbu, na př. *řadou Leibnizovou*

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \ldots$$

nebo z ní plynoucí řadou

$$\frac{\pi}{8} = \frac{1}{1 . 3} + \frac{1}{5 . 7} + \frac{1}{9 . 11} + \dots$$

Jiné řady jsou:

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$$

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 . 3}{2 . 4}\right)^2 + \left(\frac{1 . 3 . 5}{2 . 4 . 6}\right)^2 + \dots$$

Uveďme ještě nekonečný součin *Wallisův*:

$$\frac{2}{\pi} = \frac{1 . 3}{2 . 2} \cdot \frac{3 . 5}{4 . 4} \cdot \frac{5 . 7}{6 . 6} \dots$$

S jakou přesností určuje *Leibnizova* řada π, sečteme-li 50 000 jejích členů? Pro skutečný výpočet se proto užilo jiných řad, z této řady odvozených.

Rovněž myšlenka starých, že kruh jest figura capacissima, útvar nejobsažnější, ozvala se v moderním pojetí isoperimetrického problému, který hledá obrazec největšího obsahu při daném obvodě, ovšem za jistých předpokladů. Jeden z nich jest, že obrazec jest uzavřeným útvarem konvexním (oválem); každá přímka, která jej protíná, činí tak jen ve dvou bodech. Vyloučíme-li ze vztahů určujících obvod O a obsah P kruhu poloměr r, obdržíme vztah $O^2 = 4\pi P$. Pro jiné konvexní útvary rovinné pak platí $O^2 > 4\pi P$. Podobně pro povrch a krychlový obsah koule P a K platí $P^3 = 36\pi K^2$, kdežto pro ostatní konvexní tělesa (podobně definovaná jako konvexní rovinné útvary) jest $P^3 > 36\pi K^2$. Soustavně o tomto problému pojednal na př. *Blaschke*: Kreis und Kugel, 1916.

a) Uveďme ještě několik příkladů o kruhu a kouli. Súčastněme se tohoto myšlenkového pokusu: Rovník má délku 40 000 km = 40 000 000 m; načechráme-li niť o délce o 10 m větší než jest rovník všude stejně vysoko nad rovníkem, vznikne jistá mezera; stačí její šířka, aby jí proklouzla myš? Šířka této mezery (mezikruží) jest

$$\frac{40000010}{2\pi} - \frac{40000000}{2\pi} = 10 \text{ m} : 2\pi \doteq 1{,}6 \text{ m},$$

tedy projde jí i prostředně velký člověk. Řešte tutéž úlohu v tom případě, že o 10 m delší nit načechráváme kol hrachu, jehož poloměr jsou 3 mm. Jinou úpravu téže úlohy lze čísti u *Jul. Vernea*: O kolik delší dráhu vykoná hlava dvoumetrového obra, obejde-li zeměkouli po rovníku?

b) Do kopacího míče o poloměru r vpravíme ještě k cm³ vzduchu, oč se zvětší jeho povrch, je-li k vůči původnímu krychlovému obsahu dosti malé? Je-li poloměr původní koule r, jest její krychlový obsah $\frac{4}{3}\pi r^3$, poloměr koule po vpuštění k cm³ jest určen rovnicí

$$\tfrac{4}{3}\pi r^3 + K = \tfrac{4}{3}\pi r_1^{\,3},$$

odkud

$$r_1 = \left(r^3 + \frac{3K}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \doteq r + \frac{K}{4\pi r^2}.$$

Plošný povrch této koule jest přibližně $4\pi\left(r^2 + \dfrac{K}{2\pi r}\right)$, takže se proti původnímu stavu zvětšil o $\dfrac{2K}{r}$.

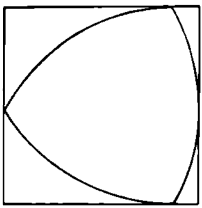
c) Podél rovníku nasypeme násep o šířce 5 m a výšce 2 m; oč se zvětšila váha zeměkoule? Krychlový obsah tohoto prstence lze počítati jako rozdíl dvou válců; než bude čtenář pokračovati v řešení této úlohy, ať si rozmyslí, odkud vezmeme stavivo na tento násep.

d) Narýsujeme-li v každém vrcholu čtverce o straně a kružnici o poloměru $\frac{1}{2}a$, ohraničí tyto kružnice plochu o obsahu $a^2 - \frac{1}{4}\pi a^2 = a^2\,(1 - \frac{1}{4}\pi) \doteq 0{,}215a^2$; vedeme-li kružnice z vrcholů kosočtverce o ostrém úhlu 60°, vznikne tak plocha o obsahu $\frac{1}{2}a^2\sqrt{3} - \frac{1}{4}\pi a^2 = a^2\,(\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{4}\pi) \doteq 0{,}081a^2$. V prvním případě pravíme, že jsou kružnice uloženy nejvolněji, v druhém případě pak nejtěsněji.

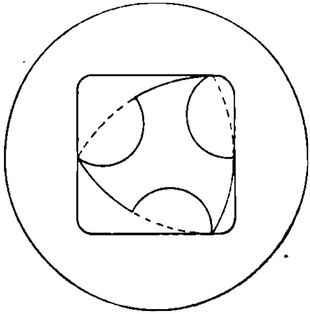
e) Obdobná úloha v prostoru o krychli a osmi koulích sestrojených ve vrcholech krychle a o poloměru rovném polovině hrany vede k objemu $a^3 - \frac{4}{3}\pi\left(\frac{1}{2}a\right)^3 = a^3\left(1 - \frac{1}{6}\pi\right) \doteq$ $\doteq 0{,}476a^3$. Uvažujeme-li klenec omezený šesti shodnými kosočtverci o ostrém úhlu 60°, vznikne mezera $a^3\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{6}\pi\right) \doteq$ $\doteq 0{,}173a^3$. Opět mluvíme o nejvolnějším a nejtěsnějším uložení koulí v prostoru. Zejména druhý případ zajímá i praxi, jde totiž o uložení drobného písku, jímž prochází voda nebo o složení z drobných částiček různých kalů v cukrovarnictví (na př. *Burmester*, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik IV., str. 33., *Dr. J. Hrubíšek*, Kolloidbeihefte, Bd. LIII., str. 385). Při nejtěsnějším uložení (stejných) koulí se každá vnitřní dotýká dvanácti vnějších, body dotyku pak určují kubooktaeder, v němž ve velmi vzácných případech krystalisuje galenit čili leštěnec olovnatý. Těchto dvanáct bodů lze však též považovat za body dotyku dvanáctistěnu kosočtvercového, v němž krystaluje granát, odsud jiný název tohoto tělesa — **granátotvar.**

f) Nejprve malou poznámku z logiky. Čtenář, jenž se jí na střední škole zabýval, ví, že obrátíme-li soud „z *S* plyne *P*“, obdržíme soud „z *P* plyne *S*“; méně učeněji a na výstižném příkladě: Každý sextán jest student, není však každý student sextánem. Správně obraceti soudy v geometrii jest velmi důležito i prospěšno; tak mnohé věty se dostávají teprve do pravého světla. Na př. Obvodové úhly v kružnici nad touž tětivou jsou stejné, ale platí opačně: Geometrickým místem bodů, z nichž lze danou úsečku viděti pod týmž úhlem, jsou dva kruhové oblouky. Jest tedy věta o úhlech obvodových výrokem do jisté míry charakterisujícím kružnici, podobné vlastnosti žádná jiná křivka nemá.

Tažme se, zda vlastnost kružnice, že jest všude stejně „široká“, t. j. že má všechny průměry stejně dlouhé, jest jejím charakteristickým znakem. K svému nemalému překvapení zjistíme, že nikoliv, že existují i jiné křivky, které mají vesměs stejnou „šířku“. Nutno si především pojem šířky podrobněji definovat. Omezme se jen na útvary konvexní omezené (ovály). Vytkněme si mimo tuto křivku směr S a promítněme do přímky kolmo stojící k tomuto směru všechny body obvodu našeho oválu. Paty těchto promítajících rovnoběžek vyplní úsečku, její délku pak nazýváme šířkou křivky dle směru S. Tato šířka jest na př. u kružnice pro všechny směry rovna průměru této kružnice, u elipsy o poloosách a, b kolísá mezi $2a$ a $2b$. Sestrojme si nyní obrazec omezený oblouky téhož polo-



Obr. 37.



Obr. 38.

měru a patřícími k středovým úhlům 60°. Snadno ukážeme, že tento ovál má rovněž touž šířku rovnou poloměrům kružnic, jejichž oblouků jsme užili k sestrojení tohoto obrazce. Vyrobíme-li si na př. dřevěnný model tohoto trojúhelníka a uložíme-li jej do čtvercové krabice o straně rovné šířce tohoto oválu, můžeme tímto trojúhelníkem pohybovati uvnitř čtverce právě tak bez závady jako s kruhem. Této myšlenky bylo užito k sestrojení vrtáku vrtajícího čtvercové otvory; vrcholy čtverce pak jsou poněkud zaobleny*). (Obr. 38.)

Ukažte, že i pětiúhelník i sedmiúhelník atd. jsou křivky stejné šířky.

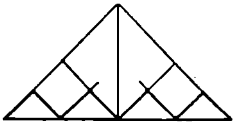
*) *Rud. Beyer:* Technische Kinematik, 1931, str. 18 a 19.

V. GEOMETRICKÁ SOFISMATA A PARADOXA

I o těchto záludnostech platí, co bylo řečeno o podobných problémech v Aritmetických hrách a zábavách (odst. 14). Jsou založena na neúplném nebo nesprávném použití správných vět, nesprávnost „důkazu“ bývá ukrývána buď zdlouhavostí postupu nebo různými zbytečnými oklikami. Celkem však lze říci, že geometrická sofismata jsou nesnadnější než aritmetická, dále že nelze přesně rozlišiti tyto oba druhy od sebe.

a) Bod se pohybuje a m vpřed, potom a m vzad, a m vpřed, a m vzad atd. Kde jest po takových n pohybech? Je-li n sudé, jest ve svém východišti, je-li n liché, jest na konečné stanici své dráhy. Proč nelze uvažovati takto: Celková dráha jest dána výrazem $a - a + a - a + a - a + \ldots = a - (a - a + a - a + \ldots)$. Roste-li n ustavičně a označíme-li levou stranu této rovnice x, jest $x = a - x$ a odsud $x = \frac{1}{2}a$. Vysvětlení jest nasnadě: Abychom mohli nějakou veličinu označiti algebraickým výrazem, musí příslušná hodnota skutečně existovati a to určitě, jednoznačně, a tomu v našem případě tak není, jelikož levá strana této rovnice nabývá jednou hodnoty 0, po druhé a. Této úloze podobná jest tato: Karel a Pavel jsou dva nerozluční přátelé; na vycházku do parků, z nichž jest jeden po levé a druhý po pravé straně řeky tekoucí jejich bydlištěm, chodí jen výlučně spolu. Jednou počítají, kolikráte přešli již most: zjistí, že číslo udávající přechod přes most jest u jednoho sudé, u druhého liché; jak jest to možno, když jindy než na vzájemnou návštěvu nechodí přes most? Jednoduše: Přátelé nebydlí na téže straně řeky, ten, jenž napočetl lichý počet přechodů, jest právě návštěvou u druhého.

b) Nad danou úsečkou o délce a jako nad přeponou sestrojme rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník, součet jeho ramen jest $a\sqrt{2}$. Rozdělme tuto úsečku na dvě stejné části a nad každou z nich opět sestrojme rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník; součet ramen těchto dvou trojúhelníků jest $2 \cdot \frac{1}{2}a\sqrt{2} = a\sqrt{2}$. (Obr. 39.)



Obr. 39.

K témuž výsledku dojdeme, rozdělíme-li úsečku na 3, 4, ... n dílců a konstrukci opakujeme. A nyní pozor, chci stylisací čtenáře ošáliti. Necháme-li n ustavičně vzrůstati, lomená čára určená rameny pravoúhlých rovnoramenných trojúhelníků, stále majíc délku $a\sqrt{2}$, posléze splyne s úsečkou, o níž jsme předpokládali, že má délku a. Jest tedy $a\sqrt{2} = a$, čili $\sqrt{2} = 1$, $2 = 1$ atd. Chyba ve výkladě jest tato: Stále uvažujeme délky různých lomených čar a to stejně velké $a\sqrt{2}$, pojednou však opustíme obsah svých úvah a tážeme se, jaký tvar má mezní útvar a jakou polohu zaujímá. Mezní útvar není úsečkou, nýbrž křivkou (lépe řečeno zase lomenou čarou), jež v každém i sebe menším intervalu má jistý počet oscilací. Takovýchto paradox lze vymysleti více; jak se na př. naše úvaha změní, nahradíme-li ramena pravoúhlého trojúhelníka polokružnicí? Rozdělte čtverec na n-kráte n menších stejných čtverců a do každého vepište kružnici o poloměru $\frac{a}{2n}$; součet ploch všech těchto kružnic pro každé n jest roven $\frac{1}{4}\pi a^2$. Zvětšuje-li se n ustavičně, přejdou kružnice v pouhé body vyplňující plochu čtverce daného, jak by se zdálo při povrchní úvaze. Jak zní toto paradoxon, zřídíme-li nad každým kroužkem o poloměru $\frac{a}{2n}$ polokouli a hledáme-li součet povrchů těchto polokoulí? V prostoru: Rozdělte krychli na n^3 menších krychliček a do každé vepište kouli o poloměru $\frac{a}{2n}$; který jest obsah těchto malých koulí, roste-li n nad každou mez? Přejdou v obsah krychle?

c) Definujme těžiště bez ohledu na jeho mechanický význam jako průsečík těžnic, jež definujeme jako spojnice vrcholů daného trojúhelníka s půlicím bodem protější strany. K vůli jednoduchosti uvažujme trojúhelník rovnoramenný o vrcholech $(0; 0)$, $(p; q_n)$, $(p; -q_n)$. Rovnice těžnic pak jsou

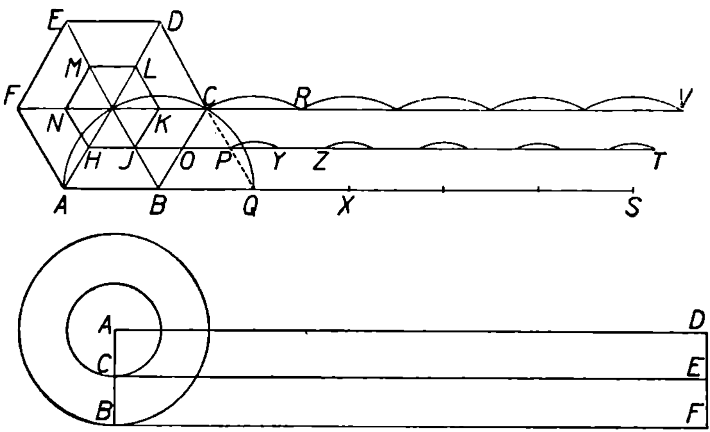
$$3q_nx - py - 2pq_n = 0, \quad y = 0, \quad 3q_nx + py - 2pq_n = 0$$

a protínají se v bodě $(\frac{1}{3}2p; 0)$, jehož souřadnice vůbec nezávisí na q_n. Nechť nyní q_n kladnými hodnotami se blíží k nule, jak jest jen možno; těžiště trojúhelníků stále užších a užších jsou v témž bodě; posléze trojúhelníky přejdou ve výšku společnou všem trojúhelníkům, jejíž těžiště — jelikož jest to úsečka — jest právě v polovině, kdežto tato úvaha umisťuje těžiště do dvou třetin výšky, počítaje od bodu $(0; 0)$. Jak vysvětlíme tento rozpor? Velmi jednoduše: původní konstrukce těžiště pozbývá významu pro $q_n = 0$ a rovněž analytický výpočet nelze v tomto případě provésti; řešíme-li totiž společně rovnice prvních dvou těžnic, obdržíme dosazením z druhé do první $3q_nx - 2pq_n = 0$ a tuto rovnici nelze za předpokladu $q_n = 0$ krátiti.

Ale i jednoduchou úvahou logickou lze tento spor vysvětliti. Pojem jest určen svými znaky, a jedním ze znaků jest i forma, jakou jsou znaky spojeny. Z pojmů „cesta“ a „město“ lze s pomocí předložek „na“ a „do“, které představují formu spojení obou pojmů, složiti dva pojmy: „cesta do města“ a „město na cestě“. Tyto pojmy jistě nejsou ekvivalentní právě tak, jako jimi nemusí býti (a v našem případě také skutečně nejsou) „mezní poloha těžiště“ a „těžiště mezní polohy“.

Při mechanickém pojetí těžiště jest věc ještě složitější: zmenšuje-li se ustavičně základna trojúhelníka a tím i jeho plocha, jest nutno říci, co se děje s hmotou původního trojúhelníka hmotného, zdaž a jak se koncentruje či dokonce nemizí-li zároveň s plochou trojúhelníka. Jinak nemá úloha vůbec smyslu. Velmi jednoduchý jest předpoklad, kdy se zmenšující se plochou hmota se v úsečkách rovnoběžných s půdicí oběma směry koncentruje do bodů ležících na výšce. Snadná úvaha vede k tomu, že těžiště takto vzniklé hmotné úsečky s hmotou rostoucí přímo úměrně se vzdáleností od bodu $(0; 0)$ jest v bodě $(\frac{1}{3}2p; 0)$.

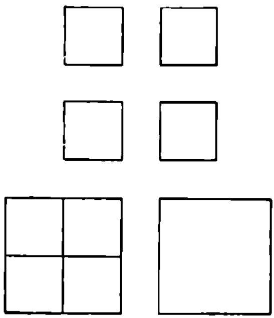
d) Nejstarším z geometrických sofismat (vedle *Achila* závodícího se želvou, viz Ar. hry a zábavy, odst 14) jest rota Aristotelis, kolo Aristotelovo. Na své správné rozřešení čekalo dva tisíce let a podal je až *Galileo Galilei* hned v prvních kapitolách svých proslulých Discorsi (Rozmluvy), v nichž *Salviati*, *Sagredo* a *Simplicio* rozmlouvají o různých mechanických otázkách (německý překlad viz *Ostwald's Klassiker*, XI., str. 20 a n.). *Aristoteles* uvažuje dva kruhy pevně spojené o poloměrech r, R, $r < R$. Když větší kruh se odvalí po přímce až se jí znovu dotkne tímtéž bodem, vzdálil se tento bod od svého původního místa o $2\pi R$. Menší kruh s ním pevně spojený se odvalil rovněž jen jednou, vykonal



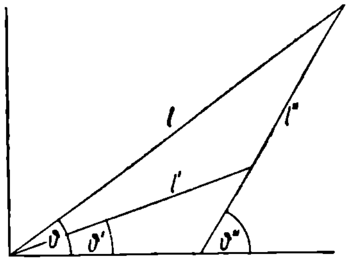
Obr. 40.

tedy dráhu $2\pi r$. Poněvadž oba body jsou opět na téže kolmici k přímce, musí býti $2\pi r = 2\pi R$, čili $r = R$, to jest: všechny kruhy mají týž poloměr. (Obr. 40.)

Galileo Galilei uvažuje nejprve dva pevně spojené šestiúhelníky; otočí-li se větší z nich kol bodu B, až strana $\overline{BC}$ dolehne na danou přímku, vykonává bod J jistou kruhovou dráhu a to se opakuje při dalších otočeních velkého šestiúhelníka. Vrcholy malého šestiúhelníka se tedy též *posunují*, úvaha zůstává v platnosti i pro osmiúhelník, desítiúhelník ... a v mezném případě i pro kruh. Odvaluje-li se tedy větší kruh po dané přímce, tu menší kruh kromě odvalování vykonává ještě další pohyb, posunuje se totiž. Pokuste se o vysvětlení, když za základní pohyb volíte skutečné odvalování menšího kruhu.



Obr. 41.



Obr. 42.

e) Aby číslo udávalo, zdaž počet předmětů jest větší nebo menší než jiný, jest nutno, aby počet uvažovaných předmětů byl konečný. Jinak tato otázka nemá smyslu; nelze říci, že by na úsečce o délce 1 cm bylo méně bodů než jest na celém rovníku; v jistém slova smyslu lze říci, že bodů tu i tam jest stejně; každému bodu na rovníku lze přiřaditi bod na úsečce a naopak a to jednoznačně.

Rovněž nelze porovnávati co do velikosti počet bodů na úsečce a v uzavřené ploše, na př. ve čtverci nebo ve dvou čtvercích. Zdánlivé rozpaky z toho plynoucí demonstroval *Bolzano* na tomto příkladě. Čtyři stejně veliké čtverce o straně a mají o body, ležící na úsečce $4a$, více než čtverec o straně $2a$, ač obsahy těchto útvarů jsou stejné. (Obr. 41.)

f) Dle obr. 42 (str. 51) platí o průmětech úseček l, l', l'':

$$l \sin \vartheta = l' \sin \vartheta' + l'' \sin \vartheta'', \quad l \cos \vartheta = l' \cos \vartheta' + l'' \cos \vartheta''$$

a odtud dělením a další úpravou:

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{l' \sin \vartheta' + l'' \sin \vartheta''}{l' \cos \vartheta' + l'' \cos \vartheta''} = \frac{n \sin \vartheta' + \sin \vartheta''}{n \cos \vartheta' + \cos \vartheta''},$$

kde $n = l' : l''$ může nabývati všech hodnot od nuly do nekonečna. Klademe-li $n = 0$, jest $\operatorname{tg} \vartheta = \operatorname{tg} \vartheta''$, volíme-li $n = \infty$, jest $\operatorname{tg} \vartheta = \operatorname{tg} \vartheta'$, tedy $\vartheta = \vartheta' = \vartheta''$. Vysvětlení jest nasnadě: V prvním případě jest vlastně $l' = 0$, úhel ϑ' nemá smyslu a tím ani soustava dvou rovnic, v druhém pak $l'' = 0$ a nulou nelze děliti.

g) Dosti zavilé jest toto sofisma: Oblouk $\overset{\frown}{AB}$ jest třikráte tak velký jako oblouk $\overset{\frown}{A'B'}$, poněvadž jeho poloměr jest třikráte větší. *Proto* jest oblouk $\overset{\frown}{A'B'}$ třetina oblouku, čili provedli jsme velmi jednoduše dávno a marně hledanou trisekci (třetění) libovolného úhlu. Abychom mohli porovnávati délku oblouku, musí míti stejné poloměry. Úhel $AOC = s$, $\overline{AC} = \overline{A'B'}$ vypočteme takto: Volme si $\alpha = 60°$; pak rovnice dvou kružnic určujících bod C jsou $x^2 + y^2 = 9a^2$, $(x - 3a)^2 + y^2 = a^2$, souřadnice bodu C jsou $(\frac{1}{6}17a; \frac{1}{6}a\sqrt{35})$, takže $\operatorname{tg} s = \frac{\sqrt{35}}{17}$, $s = 19° 10'$ místo $20°$. (Obr. 43.)

h) Způsobem velmi jednoduchým lze určiti obsah plochy uzavřené křivkou $y = \sin^2 x$, osou x a přímkou $x = \frac{1}{2}\pi$ (obr. 44).

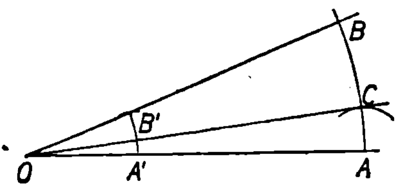
Rozdělme interval $(0; \frac{1}{2}\pi)$ na $(2n + 1)$ stejných dílců; šířka každého z nich jest $\frac{\pi}{2(2n+1)}$, výšky obdélníčků vepsaných (též proužků zvaných) jsou

$$\sin^2 \frac{0 \,.\, \pi}{2(2n+1)},\ \sin^2 \frac{1 \,.\, \pi}{2(2n+1)}, \ldots \sin^2 \frac{2n\pi}{2(2n+1)},$$

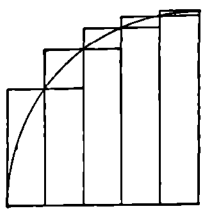
a součet obsahů těchto proužků jest

$$S_1 = \frac{\pi}{2(2n+1)} \left(\sin^2 \frac{\pi}{2(2n+1)} + \sin^2 \frac{2\pi}{2(2n+1)} + \ldots + \right.$$
$$\left. + \sin^2 \frac{2n-1}{2(2n+1)} \,.\, \pi + \sin^2 \frac{2n\pi}{2(2n+1)} \right).$$

Poněvadž sčítanci stejně od konců vzdálení dávají součet 1, jest $S_1 = \frac{\pi n}{2(2n+1)} = \frac{1}{4}\pi - \frac{\pi}{4(2n+1)}$. Součet proužků opsaných jest pak o poslední proužek o obsahu $\frac{\pi}{2(2n+1)}$ větší, jest tedy $S_2 = \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{4}\frac{\pi}{2n+1}$. Roste-li n ustavičně, blíží se S_1 i S_2 a tím i hledaný obsah $\frac{1}{4}\pi$. Jest tedy tento obsah aritmetickým středem obou přibližných hodnot, avšak nelze to říci o jednotlivých opsaných a vepsaných proužcích a proužku omezeném obloukem křivky; který útvar má tuto vlastnost?

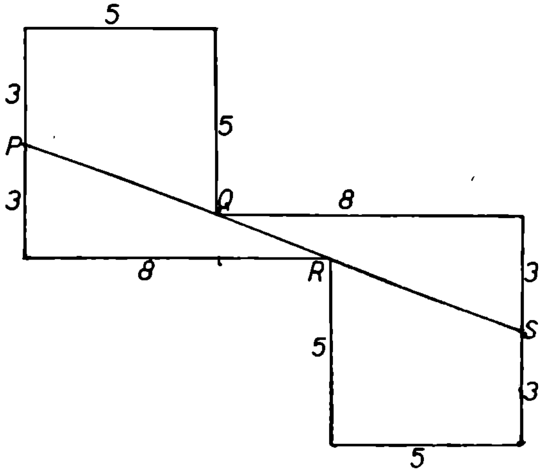


Obr. 43.



Obr. 44.

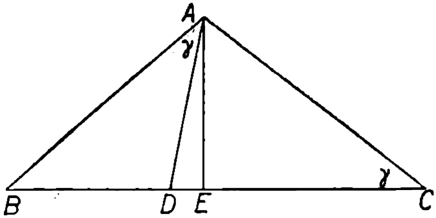
i) V Aritm. hrách a zábavách (odst. 5) byl podán „důkaz“, že 64 = 65. Z týchž ústřižků jako na uvedeném místě lze složit obrazec 45 mající pouze 63 plošných jednotek. Zjištěte, zdaž body *PQRS* jsou na přímce, užijte postupu



Obr. 45.

jako při důkazu svrchu uvedeném. Sestrojte pomocí jiných *Fibonacciho* čísel podobné obrazce.

k) V nerovnostranném trojúhelníku *ABC* budiž α největší úhel. Úhel γ nanesme ve vrcholu *A*, takže jest $BAD = \gamma$. Trojúhelníky *ABC* a *DBA* mají všechny úhly mezi sebou rovny, proto jsou si podobny a jejich obsahy se mají k sobě jako čtverce příslušných stran: $\triangle\, ABC : \triangle\, DBA = \overline{AC}^2 : \overline{AD}^2$. Avšak oba trojúhelníky mají touž výšku, proto jsou jejich obsahy v poměru základen: $\triangle\, ABC : \triangle\, DBA = \overline{BC} : \overline{BD}$. Jest tedy $\overline{AC}^2 : \overline{BC} = \overline{AD}^2 : \overline{BD}$. Známou větu kosinovou lze říci též takto: Čtverec strany ležící proti ostrému úhlu jest roven součtu čtverců druhých dvou stran zmenšenému o dvojnásobný obsah obdélníka vytvořeného z jedné těchto stran a z průmětu druhé strany na tuto stranu.



Obr. 46.

Lze tedy psáti:

$$\frac{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{BC}\,.\,\overline{BE}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 - 2\overline{BD}\,.\,\overline{BE}}{\overline{BD}}.$$

Proveďme naznačené dělení, — $2\overline{BE}$ se ruší a máme

$$\frac{\overline{AB}^2}{\overline{BC}} + \overline{BC} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{BD}} + \overline{BD};$$

převedeme-li $\overline{BC}$ a $\overline{BD}$ na druhou stranu, je po další úpravě:

$$\frac{\overline{AB}^2 - \overline{BC}\,.\,\overline{BD}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AB}^2 - \overline{BC}\,.\,\overline{BD}}{\overline{BD}};$$

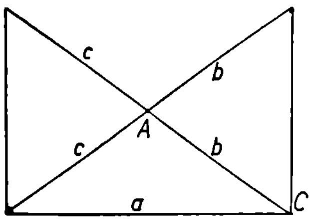
čitatelé těchto zlomků jsou rovny, proto se rovnají i jmenovatelé: $\overline{BC} = \overline{BD}$, to jest úsečka se rovná své části. Vše jest v pořádku, až na poslední výkon: $\overline{AB}^2 - \overline{BC}\,.\,\overline{BD}$ jest rovno nule (proč?) a nulou nelze krátiti.

l) V obecném trojúhelníku ABC s úhly α, β, γ prodlužme strany b, c za vrchol A dle obrázku 47, pak jest dle sinové věty

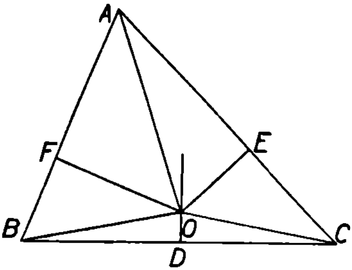
$$\sin(\beta + \tfrac{1}{2}\alpha) = \frac{b+c}{a}\sin\tfrac{1}{2}\alpha, \quad \sin(\gamma + \tfrac{1}{2}\alpha) = \frac{b+c}{a}\sin\tfrac{1}{2}\alpha,$$

takže $\sin(\beta + \frac{1}{2}\alpha) = \sin(\gamma + \frac{1}{2}\alpha)$ a dále: $\beta = \gamma$. Jest tedy každý trojúhelník rovnoramenný, a poněvadž podobnou konstrukci a úvahu můžeme provésti i u vrcholu B nebo C, jest i $\alpha = \beta = \gamma$ čili každý trojúhelník jest rovnostranný. Kde je chyba?

Správně jest: Platí-li $\sin\varphi = \sin\psi$, nemusí býti $\varphi = \psi$, může též býti $\varphi = \pi - \psi$. Skutečně v našem případě jest $\beta + \frac{1}{2}\alpha = \pi - (\gamma + \frac{1}{2}\alpha)$.

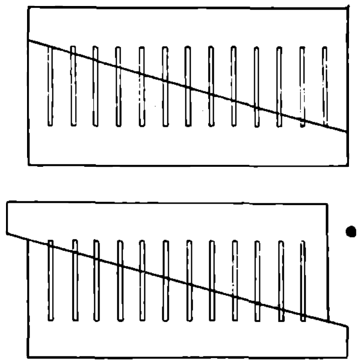


Obr. 47.



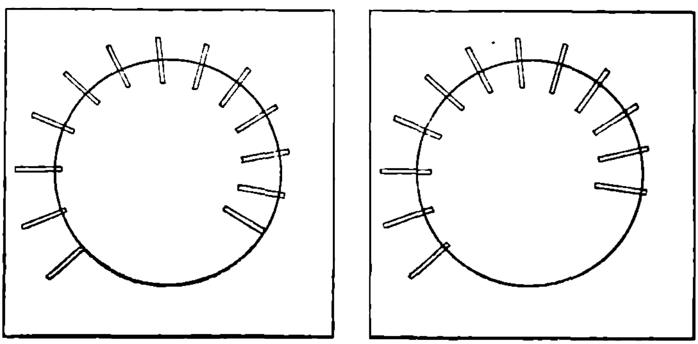
Obr. 48.

m) Pro začátečníka svůdnou, ale také i velmi nebezpečnou dokazovací methodou jest názor, to jest opírati se při provádění důkazu o vlastnosti a vztahy narýsovaného obrazce. Větu vyřčenou v odstavci předchozím dokážeme nyní planimetricky (viz obr. 48), kdež $\overline{AO}$ jest osa úhlu při A, $\overline{DO}$ pak osa strany $\overline{BC}$, obě se protínají v bodě O, jejž spojíme s vrcholy A, B, C a s něhož spustíme kolmice na strany $\overline{AB}$ a $\overline{AC}$. Trojúhelníky — jak snadno ukážeme dle základních vět o shodnosti trojúhelníků — AFO a AEO, dále trojúhelníky ODB a ODC jsou shodny, z této shodnosti plyne $\overline{OF} = \overline{OE}$ a $\overline{OB} = \overline{OC}$, proto jsou shodné i trojúhelníky OBF a OCE, skutečně úhel pravý leží proti větší z uvažovaných stran. Z těchto shodných trojúhelníků dále plyne $\overline{AF} = \overline{AE}$ a $\overline{FB} = \overline{EC}$ a sečtením těchto rovnic $\overline{AB} = \overline{AC}$, t. j. tento trojúhelník jest rovnoramenný a opakujeme-li celý postup pro vrchol B, ukážeme, že jest tento trojúhelník a každý jiný rovnostranný. Nechť čtenář si pečlivě narýsuje předepsané výkony a k svému podivení zjistí, že bod O při různostranném trojúhelníku jest *mimo* plochu trojúhelníka. Nesčetněkráte názor vedl k nesprávným důsledkům; před sedmdesáti lety ohromil *Weierstrass* své současníky správným důkazem, že existují křivky, jež nemají nikde tečny; ovšem byla to geometrická interpretace toho že spojitá funkce nemusí míti buď v nekonečně mnoha bodech nebo dokonce v žádném bodě derivaci; poznatek tento učinil již několik desítek let před *Weierstrassem* pražský rodák *Bernard Bolzano*.



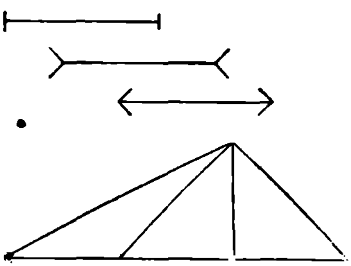
Obr. 49.

n) Jedním z nejkrásnějších paradox jest zmizení úsečky před zraky čtenářovými. Narýsujte si přesně dle obr. 49



Obr. 50.

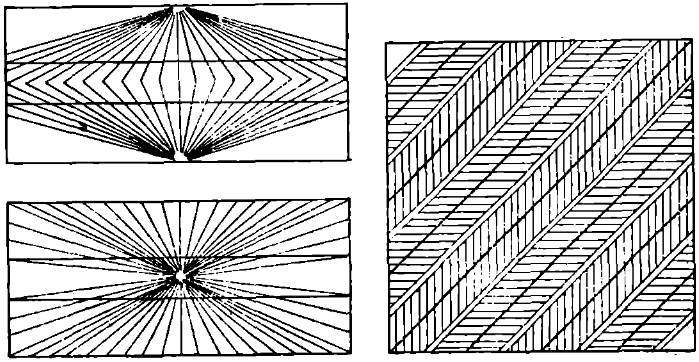
třináct stejných úseček a rozstřihněte papír s tímto nákresem přesně dle udané úsečky. Posunete-li oběma částmi nákresu dle obr. 49, obdržíte místo třinácti úseček pouze dvanáct.



Obr. 51.

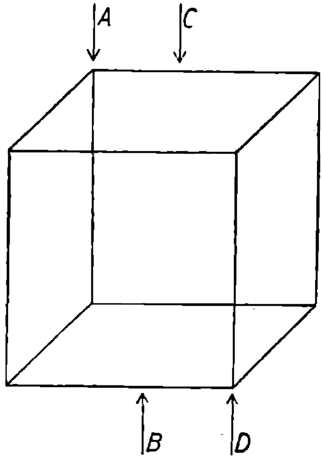
Vysvětlení jest nasnadě; délka každé nové úsečky jest třináct dvanáctin úsečky původní. Tyto úsečky lze uspořádati do kruhu (obr. 50), a toto uspořádání jest základem japonských a čínských obrázků třinácti osob, z nichž jedna při pootočení zmizí a při zpětném pohybu se opět objeví.

o) Již předchozím příkladem jsme se octli na hranicích optických klamů, které mylně bývají přidružovány ke geometrickým hrám, třeba užívají četných geometrických prvků. Avšak při vysvětlení těchto klamů jest nutno znáti též fysiologii oka; i omezíme se jen na ukázku několika nejjednodušších příkladů. Která z úseček a základen tří troj-



Obr. 52.

úhelníků jest nejdelší, která nejkratší? (Všechny úsečky jsou stejně velké). V obr. 52 soustavy rovnoběžek jeví se jako nerovnoběžky nebo dokonce jako křivky, a to vlivem protínajících je paprsků nebo úseček. V obr. 53 lze pozorovati dvě různé krychle, dle toho, ve kterém směru určeném šipkami hledíme.



Obr. 53.

VI. GEOMETRIE NA SCESTÍ

Proti matematice lze hřešiti dvojím způsobem; buď v ní hříšník vidí pouze jakési klikyháky, s nimiž si zarputilí blouznivci v prostorách úplně odloučených od potřeb tohoto světa pohrávají – pokud ovšem nezkoušejí – nebo se její význam nesmírně přeceňuje a projevuje se snaha užíti matematiky i tam, kde jí naprosto použíti nelze, na př. v psychologii (*Herbart* a jeho stoupenci). A tito nadšenci to byli, kteří svoji obdivovanou scientiam amabilem zavedli na scestí.

a) Nauka o *zlatém řezu* (sectio aurea, divina) jest odedávna uzavřená kapitola elementární geometrie. Jest to úloha rozděliti úsečku tak, aby menší část se měla k větší jako tato k celku; značí-li x menší část úsečky, má tedy býti $x : (a - x) = (a - x) : a$; jest tedy x určeno spojitou úměrou, proto se též zlatý řez nazývá někdy dělením spojitým. Z úměry plyne kvadratická rovnice $x^2 - 3ax + a^2 = 0$, jejíž kořeny jsou $\frac{1}{2}(3a \pm a\sqrt{5})$, úloze pak vyhovuje menší kořen $a\,\frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$; větší část úsečky pak jest $a\,\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$, takže $x : (a - x) = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$. Tuto hodnotu lze vyjádřiti řetězovým zlomkem

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}}}$$

postupnou úpravou obdržíme tyto přibližné hodnoty:

$$\tfrac{1}{1},\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{2}{3},\ \tfrac{3}{5},\ \tfrac{5}{8},\ \tfrac{8}{13},\ \tfrac{13}{21}.$$

(Všimněte si, že čitatelé i jmenovatelé tvoří řadu *Fibonacciových* čísel, viz Aritm. hry a zábavy str. 18). V praxi užívá se poměrů $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{8}{13}$. Konstrukce založená na větě o mocnosti bodu ke kružnici jest jednoduchá. Na jednom konci dané úsečky vztyčíme kolmici a naneseme polovinu této úsečky, s bodu tak vzniklého vedeme kružnici o poloměru rovném polovině dané úsečky, nyní druhý koncový bod spojen se středem kružnice vytíná na kružnici dva body; vzdálenost bližšího z nich druhému koncovému bodu přeneseme na danou úsečku, čímž jsme dosáhli dělení dle zlatého řezu. Zlatého řezu se užívá při některých konstrukcích, na př. strana pravidelného pětiúhelníka a desítiúhelníka jest větší část úhlopříčky pětiúhelníka resp. poloměru kružnice desítiúhelníku opsané; již *Eudoxos* (4. stol. př. Kr.) znal větu, značí-li a_6, a_5, a_{10}, strany šestiúhelníka, pětiúhelníka a desítiúhelníka témuž kruhu vepsaného, že platí $a_5^2 = a_6^2 + a_{10}^2$. Rozdělíme-li obě části úsečky rozdělené opět zlatým řezem a značíme-li části menší úsečky $a_{11} < a_{12}$, druhé pak $a_{21} < a_{22}$, platí uměra $a_{11} : a_{12} = a_{21} : a_{22}$ a nad to jest $a_{12} = a_{21}$.

Pětiúhelník a jeho pět úhlopříček odedávna zajímal člověka; jest to jediný mnohoúhelník, jenž má týž počet úhlopříček jako stran, jest nejnižším mnohoúhelníkem, jehož strany i úhlopříčky lze vésti jediným tahem; již *Pythagorovi* bylo známo, že každá z úhlopříček pravidelného pětiúhelníka jest protínající ji další úhlopříčkou rozdělena dle zlatého řezu. O konstrukcích pětiúhelníka a z něho jednoduše odvozeného desítiúhelníka jsme se již zmínili. Obrazec určený pěti úhlopříčkami pětiúhelníka stává se a dlouho ještě zůstává podivuhodným, tajuplným i zázračným útvarem; u nás „muří noha“, v německé mytologii „Drudenfuss“ jest odznakem čarodějníků a čarodějnic, muří noha stává se odznakem různých společností atd.

Tak v Goetheově Faustu ve scéně, kdy se Faust po prvé setkává s Mefistofelem, čteme tuto rozpravu:

Mef.: Bych mohl ven, ti řeknu ve důvěře,
mně vadí cosi, hloupost jen,
ta můří noha na tvém prahu.

Faust: Ten pětiroh tě trudí? Hleď
a pověz, synu z pekel svahů,
jaks přišel sem, když ten tě drží teď?

Mef.: Jen pohleď. Špatně nakreslena jesti,
ten zvenčí jeden nedotažen roh
a trochu otevřený zeje.

(Dle překladu *Jar. Vrchlického*).

A geometrická souvislost pětiúhelníka se zlatým řezem to byla, jež vnesla do nauky o zlatém řezu naprosto neodůvodněnou mystiku, jejíž nikoliv jedinou obětí stala se estetika. Zejména v renaisanci pěstuje se a udržuje se mínění, že nejkrásnější jsou ony útvary, v nichž lze vystopovati zlatý řez. Učitelé svým malířským učňům radí konstruovati lidské tělo dle zlatého řezu: obočí prý dělí tvář zlatým řezem, v článcích prstů se prý objevuje toto dělení; známý obraz *Leonardo da Vinci* Poslední večeře Páně proto prý jest tak působivý, že postavy na něm bílým ubrusem jsou rozděleny dle zlatého řezu. Později se šlo ještě dále: Malíři — aniž snad vědí o zlatém řezu — malují své obrazy na obdélníkových plátnech a vpravují je do obdélníkových rámů zachovávajíce rozměry určené zlatým řezem; šířka a výška jsou části úsečky rozdělené zlatým řezem, horizont obrazu dělí výšku dle zlatého řezu a pod. I proměřil německý lékař *Fechner* několik set obrazů asi ve dvaceti obrazárnách, avšak výsledky ani zdaleka nepotvrdily toto mystické učení o zlatém řezu; jediným kladným výsledkem měření *Fechnerových* bylo to, že byl tak dán podnět k vybudování experimentální estetiky. Jedním z nejhorlivějších stoupenců o estetickém významu zlatého řezu, jenž prý se uplatňuje i při stavbě houslí, byl *Zeising*; o jeho činnosti se vyslovuje *Otakar Hostinský* takto:

„Tento určitý matematický poměr prohlášen však byl *Zeisingem* nejen za absolutní prvek estetický, nýbrž i za jakýsi *kosmický zákon*, v němž *Zeising* ovšem daleko přestřelil. Ukazoval na to, že nejen na stavbách, antických sochách a jiných plastikách, ale i v dramatech, dále v přírodě na rostlinách i v chemii při složení součástek nalezneme zlatý sek, takže jest to zákon, na němž spočívá a jímž se řídí celý mikrokosmos.... Jisto jest, že *Zeising*, aby zákon zlatého seku všude našel, mnoho z jeho přísného znění slevoval a již jen pouze přibližný poměr za zlatý sek vydával, dále pak že dedukce konstruoval často i věcně chybně, takže dal si na př. sestrojiti dřevoryt *Apollona Belvederského*, který však pravé soše nijak neodpovídal. *Mir. Tyrš* zabýval se podrobně těmito výsledky *Zeisingovými* a dospěl k poznání, že všechno to, čeho se *Zeising* dovolával, jest nesprávno. Měřil sám za tím účelem mnoho antických soch, půdorysy staveb a pod. a shledal, že ani tehdy, když připustíme mnoho z licencí *Zeisingových*, nenalezneme zákon zlatého seku, takže snad jediná Sixtinská madonna *Rafaelova* by tomuto poměru odpovídala, ovšem bez úmyslu svého tvůrce." (Esthetika I., str. 292).

Jak patrno z tohoto citátu, hledali vyznavači zlatého řezu oporu pro své tvrzení i ve výtvarném umění, studujíce plány architektur všech dob i slohů. Ale zde se setkávali s konkurující ideí; jiní opět v plánech domnívali se poznávati vztahy odvozené z rovnostranného trojúhelníka, tedy odvozené z $\sqrt{3}$; jiní zase drželi se poměru čtverce a jeho úhlopříčky, tedy $\sqrt{2}$. O rovnostranném trojúhelníku viz na př. *Hejčl*, Bible česká (I. str. 930-31), kdež jistě nesprávně praví: „Tento klíč ($\frac{1}{2}\sqrt{3}:1$) je vzat z rozměrů lidského těla stanovených samým stvořitelem". Památný kostel na Zelené Hoře u Města Žďáru jest stavěn do pětiúhelníkového půdorysu a číslo pět jest tam mnohokráte zdůrazněno; pět bran, pět vchodů, pět oltářů, pět zvonů atd.; ale zde důvod jest jiný: tato stavba jest apoteosa pěticípé svatojánské hvězdy.

Největší památník zlatého řezu někteří badatelé vidí v *Cheopsově* pyramidě. Tento kamenný masiv tvaru pravidelného čtyřbokého jehlanu o základně mající stranu 115,17 m o tělesné výšce 146,71 m jest až na nepatrné úchylky 2′ — 3′ přesně orientován dle světových stran; dodnes není známo, jakému účelu měl vlastně sloužiti. Měla to býti hrobka královská? Ale proč potom v těchto více než $2\frac{1}{2}$

milionech kubických metrů zdiva jsou tři prostory nad sebou místo jedné a od počátku prázdné? Jsou domněnky, že to měla býti vodní nádrž pro Memfis nebo ochrana proti písečným bouřím, měl to prý býti chrám zasvěcený božstvu Slunce nebo Měsíce, snad to byla pokladnice faraonova nebo sýpka pro celý Egypt — houževnatě však se udržuje výklad, že to byl monumentální pomník matematických vědomostí starých Egypťanů, kteří prý do tohoto zdiva uložili své vědomosti o čísle π nebo o zlatém řezu nebo své vědomosti hvězdářské. Podíl $4a : h$ udává velmi přibližně číslo *Ludolfovo*, přátelé theorie o zlatém řezu uvádějí, že podstava této pyramidy má se k jejímu plášti jako plášť k jejímu celému povrchu. Je-li c výška boční stěny, jest dle *Pythagorovy* věty $c^2 = a^2 + h^2$ a dle onoho tvrzení je $4a^2 : 4ac = 4ac :$ $: (4a^2 + 4ac)$ čili $c^2 = a^2 + ac$, $h^2 = ac$, $a : h = h : c$. Ve skutečnosti jest $a : h = 0,785$, $h : c = 0,786$, což jest shoda skutečně nápadná, ale její předpoklady jsou příliš umělé a jistě neodpovídají citu tehdejšího obyvatelstva a stavu tehdejší geometrie.

α) Líbí se vám obdélník sestrojený dle návodu ve Sbírce příkladů geometrických od *A. Macha* více než jiný? Jde o obdélník, jehož půl šířky jest menší úsek výšky rozdělené zlatým řezem.

β) Je-li r poloměr podstavy, s strana, v výška rotačního kužele a platí-li $r : v = v : s$, dělí plášť povrch kužele dle zlatého řezu.

γ) Normalisovaný formát jest dán obdélníkem, jenž přehnut rovnoběžně s kratší stranou dává obdélník původnímu podobný; jest tedy $a : b = b : \frac{1}{2}a$, odkuž $b = a\,\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Sestavte serii normalisovaných formátů vycházejíce z $a = 1000$ mm.

Geometrie však přece jen hluboko zasáhla do vývoje výtvarného umění a to jednou z kapitol projektivní geometrie, totiž perspektivou. Viz o tom tři monografie prof. *F. Kadeřávka*: Perspektiva, 1922; Relief, 1925; Geometrie a umění v dobách minulých 1935; též *G. Wolff*: Mathematik und Malerei; *Lietzmann*: Mathematik und bildende Kunst. Dle zásad perspektivy byly proměřeny různé slavné obrazy a byly objeveny četné chyby proti správným konstrukcím, které necvičené oko pravidelně nepostřehne. Proslulý svou krásou a již zde zmíněný obraz *Leonardo da Vinci* Poslední večeře Páně znázorňuje na př. místnost, jež by se ve skutečnosti divákovi velmi málo líbila; nepříliš hluboká, zato nadměrně dlouhá, spíše chodba než důstojná prostora. Staří mistři prováděli okna v různých poschodích tak, aby s jistého místa se okna jevila stejně vysoká, jak to asi činili? Zorné úhly úseček jevících se stejně velké jsou si rovny.

K této stručné stati o geometrii v umění budiž dovoleno připojiti zmínku o některých náhrobcích s geometrickým obsahem. Na náhrobku *Archimedově* byl prý narýsován osový řez rovnostranným válcem, kuželem o téže základně a výšce a řez koule vepsané do válce na památku *Archimedova* objevu, že o krychlovém obsahu těchto těl s platí:

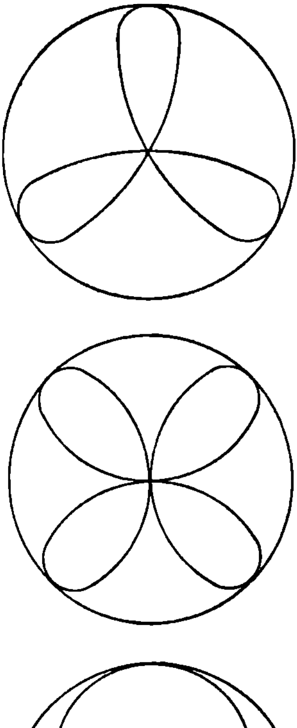
$$\tfrac{1}{3}\pi r^2 \,.\, 2r : \tfrac{4}{3}\pi r^3 : \pi r^2 \,.\, 2r = 1 : 2 : 3.$$

Na náhrobku jednoho člena z rodiny *Bernouillů* byla narýsována spirála, jež byla předmětem jeho četných studií; pomník *C. F. Gausse* v Göttinkách stojí na základně vytvořené pravidelným sedmnáctiúhelníkem; tato konstrukce opírající se o číselně theoretické úvahy o binomické rovnici $x^{17} - 1 = 0$ jest totiž jedním z nejkrásnějších *Gaussových* objevů. Na náhrobku *Diofantově* prý byl vyryt životopis tohoto matematika ve formě slovní rovnice: Šestinu svého věku byl chlapcem, za další dvanáctinu vyrostl mu vous, za další sedminu se oženil; syn, který se mu narodil o pět let později, zemřel, když dosáhl právě poloviny celého otcova věku; jak byl stár tento řecký matematik, zemřel-li čtyři léta po svém synovi?

$$\tfrac{1}{6}x + \tfrac{1}{12}x + \tfrac{1}{7}x + 5 + \tfrac{1}{2}x + 4 = x, \; x = 84.$$

Pomník *Miloslava Pelíška*, profesora čes. vysoké školy technické (narozen 19. XI. 1855 v Krouné, zemř. v Brně

6. XI. 1940) v urnovém háji brněnského hřbitova jest vytvořen parabolickou úsečí o základně 148 cm a výšce 122 cm; jaký jest parametr této paraboly? ($2p = 44,88$).



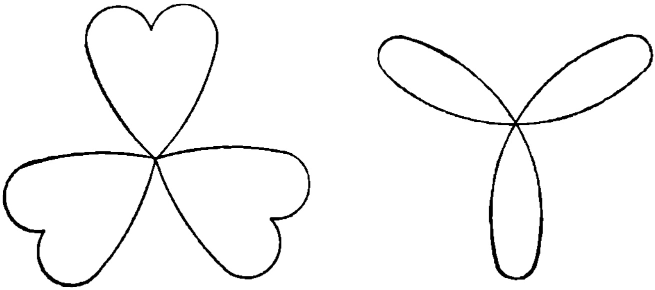
Obr. 54.

b) Listy i květy rostlin bývají symetricky vyvinuty, zejména pak květy bývají uspořádány do kruhu. I objevila se velmi záhy myšlenka — již za dob *Leibnizových* — nebylo-li by lze kontury listů a květů vyjádřiti jako křivky pomocí rovnice. V obr. 54 jsou nakresleny t. zv. růžice, jejich rovnice postupně jsou v polárních souřadnicích:

$$\varrho = R \sin 3\varphi,$$
$$\varrho = R \sin 2\varphi,$$
$$\varrho = R \sin \tfrac{1}{2}\varphi.$$

Asi před padesáti lety *Bodo Habenicht* pokusil se odvoditi polární rovnice listových okrajů pomocí trigonometrických polynomů; myšlenka to byla v zásadě velmi správná, povážlivější však byly některé důsledky z toho činěné; v obr. 55 znázorněn jest list komonice rostoucí na slunci a list šťavele kyselého, vyhledávajícího lesní stín a chlad. Rovnice první křivky jest $r = 4 (1 + \cos^3 \varphi) + 4 \sin^3 \varphi$, křivky druhé $r = 4 (1 + \cos^3 \varphi) - 4 \sin^3 \varphi$. Jsou tedy až na znaménko téhož tvaru, i domnívá se *Habenicht*, že různost toho znaménka souvisí s množstvím zachyceného slunečního záření.

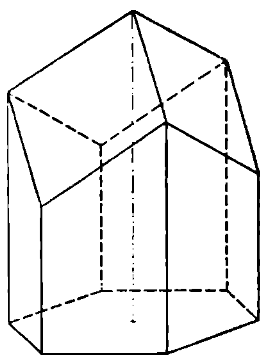
I nauku o zlatém řezu chtěli někteří botanikové aplikovati na umístění listů na lodyze; zajímavé poznámky



a) Obr. 55. *b)*

o souměrnosti listů, o spirálovitém seřazení slunečnicových jader viz: *Lietzmann*: Lustiges und Merkwürdiges von Zahlen und Figuren, str. 290 a n.

c) Velikou pozornost — a ne právě zaslouženou — vzbudilo pozorování některých biologů a matematiků o práci hmyzu, jež se jevila pozorovatelům jako projev matematických znalostí na př. včel.



Obr. 56.

Stavba včelích buněk jest problém opředený přímo vzrušujícími dobrodružstvími, v nichž jest nesnadno rozeznati pravdu od básně; podrobněji viz o tom *Dr. Pospíšil*: Filosofie podle sv. Tomáše Akvinského, (str. 1025). Matematický obsah této úlohy jest takový: Včely své buňky staví do pravidelných šestibokých hranolů, které jsou třemi rovinami protínajícími se v témž bodě na ose tohoto hranolu zkoseny. Tak vzniká těleso o jistém krychlovém obsahu K. Jest otázka, pod jakými úhly nutno zkosit tento hranol, aby jeho povrch (s nímž souvisí spotřeba vosku ke stavbě buňky) byl při daném K minimální. Úloha vede tedy ke stanovení minima a jest řešena na př. v *Dorrie*: Triumph der Mathematik, str. 371. Řešení pak jest toto (viz obr. 56): Hranol nutno zkositi třemi kosočtverci, jejichž úhly jsou velmi přibližně 110° a 70°; tento početní výsledek velmi dobře souhlasí s měřením na skutečných buňkách. Problém včelích buněk k sobě přivábil z hvězdářů *Keplera* a *Maraldiho*, z matematiků *S. Königa* a *Mac Laurina*, z fysiků *Réaumura*; rovněž přírodopisci jsou zastoupeni skvělými jmény *G. de Buffon*, *Charles R. Darwin*; rovněž filosofové (*Voltaire*) projevili zájem o toto řešení, bádajíce o účelnosti v přírodě, jevící se i ve zvířecím pudu.

Ve skutečnosti jest problém buněk komplikovanější: *Darwin* zjistil, že to nejsou jednoduchá geometrická tělesa, dno mají silnější, stěny jsou vlasově tenké a jejich vnější okraj je ovrouben silnějším rámcem a hrany jsou vyztuženy sloupky; jest to jakási konstrukce z pevnějšího materiálu, vyztužená tenkým zdivem.

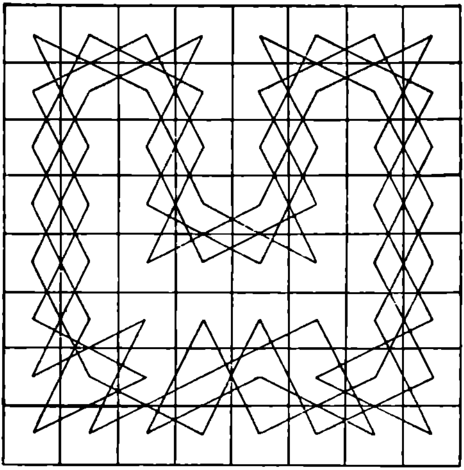
Jak vysvětlíme tuto zajímavou práci a včel? Jest to zjemnělý a vlivem sta a tisíce generací vypěstovaný pud, jenž velí bobrům stavěti vodní tvrze tak a ne jinak; týž učí zavěšovati pavouky pavučiny na týchž principech jako my stavíme řetězové mosty a týž nutí ptáky jak ke stavbě hnízd, namnoze velmi dokonalých a podivuhodných, tak ke stěhovavým letům ve směrech po staletí a tisíciletí zachovaných. Formulovati tyto zjevy tak, že včely řeší úlohy stereometrické jest totéž, jako se domnívati, že foxterier Dášenka k nabízenému pamlsku proto běží po přímce, jelikož jest jí znám axiom, dle něhož jest úsečka nejkratší spojnicí dvou bodů.

VII. HRY NA ŠACHOVNICI

a) Mnohé a skutečné hry ve velkém rozsahu užívají jednoduchých geometrických prvků (úseček, čtverců, jejich úhlopříček i stran) a přece je nelze dobře nazvati hrami geometrickými. Jsou to zejména hry na šachovnici (vlk a ovce, volná dáma a její opak rychlá dáma a j.); zde stručně se zmíníme o dvou úlohách vyrostlých ze známé hry šachové, asi nejdokonalejší z her vůbec. Jak známo, hraje se na šachovnici o osmkráte osmi polích, působnost figur jest určena úsečkami rovnoběžnými se stranami čtverce i jeho úhlopříčkami; pohyb koníčka jest dán úhlopříčkou obdélníka o stranách dvou a tří základních dílců. Jest mnoho zevnějších důvodů, pro něž laik přisuzuje šachové hře vlastnosti hry matematické; úspěch ve hře šachové i v matematickém bádání vyžaduje jak přesného logického uvažování, tak jisté intuice. Není náhodou, že z dosavadních pěti mistrů světa (*Steinitz*, *Lasker*, *Capablanca*, *Alechin*, *Euwe* a opět *Alechin*) byli dva matematikové i vědecky činni (*Lasker*, *Euwe*). Laika klame dále i notace této hry upomínající na algebraické výrazy i číselné hodnocení figurek, vyhraných i prohraných partií.

Dvě veliká jména matematická jsou spojena s úlohami na šachovnici; jest to *L. Euler* a *C. F. Gauss*. *Euler* zabýval se úlohou, jež jest mnohem starší než jeho zájem o ni. Jde o to, koníčkovým skokem projíti souvislou lomenou čarou všemi poli obyčejné šachovnice, a to každým polem jen jedenkráte. Jedno z *Eulerových* řešení znázorňuje obr. 57a. Všimněme si, že při tomto řešení lomená čára jest uzavřena, takže za výchozí pole lze voliti kterékoliv pole.

Velmi dobře lze užíti tohoto pravidla *Warnsdorfova*: Koníčka postavíme na takové místo, s něhož má potom pokud možno nejmenší možnost dalších tahů; je-li takových míst více, jest lhostejno, pro které z nich se rozhodneme. (Viz obr. 57b, kde jsou jednotlivé tahy očíslovány podle



a)

54	21	34	9	58	19	32	7
35	10	55	20	33	8	57	18
22	53	64	59	56	45	6	31
11	36	49	46	63	60	17	44
50	23	52	61	40	47	30	5
37	12	25	48	27	62	43	16
24	51	2	39	14	41	4	29
1	38	13	26	3	28	15	42

b)

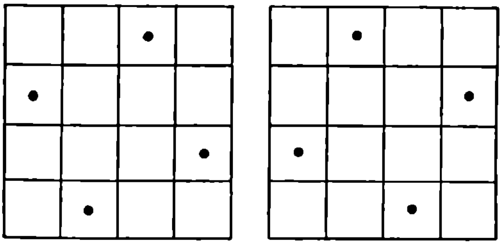
Obr. 57.

pořadí. Lze tedy obecně říci, že se obsazují nejdříve místa co nejblíže krajům. Při tom je možno tahy voliti tak, aby při zavedeném očíslování vznikl na šachovnici čtverec, v němž součty čísel v každé řadě i v každém sloupci jsou stejné. (Viz obr. 57b). Lomené čáry, znázorňující pohyb koníčka po šachovnici, mají různé symetrické vlastnosti; této vlastnosti užívají již od sta let hádankářské rubriky k sestrojování t. zv. koníčků. Normální šachovnici lze nahraditi i obdélníky ba i komplikovanějšími útvary stylisovanými do tvarů písmen, květů a pod. Byly řešeny i úlohy mnohem obecnější, na př. *Fitting* (Mathem. Mussestunden) uvádí obdobnou úlohu pro krychli o $4 \times 4 \times 4$ polích; koníčka lze nahraditi figurou, jejíž pohyb se děje po úhlopříčce obdélníka o stranách 3, 4 atd. Uvažujme šachovnici o 3×3 polích, pole očíslujme od levého rohu nahoře počínaje čísly *1* až *9*. Na *1*. a *3*. pole postavme koníčky bílé, na pole *7*. a *9*. pak černé. Jest koníčkovým skokem vyměniti jezdce *1*, *3* za jezdce *7*, *9* a tyto jest zase umístiti na *1*, *3*. Pořadí tahů jest toto: *1*, *8*; *3*, *4*; *9*, *2*; *7*, *6*; *4*, *9*; *6*, *1*; *2*, *7*; *8*, *3*. Tím jsme seskupení koníčků vlastně otočili o 90°, opakujeme-li tedy ještě jednou uvedené tahy, obdržíme žádanou posici. Jsou-li koníčky stejné barvy v koncových bodech úhlopříčky, stačí provésti toto pořadí tahů jen jednou.

Ukažte, je-li o obvod šachovnice, že celková dráha koníčka při této úloze jest $2o\sqrt{5}$; předpokládáme, že figurku klademe vždy do středu pole.

Za téhož předpokladu úhrnná délka, kterou vykonají figurky bílého při známé „nesmrtelné partii“ (*Zmatlik*, Šachy, III. vyd., str. 175-76), jest rovna $13 + 6\sqrt{2} + 6\sqrt{5} \doteq$ $\doteq 49$ stranám pole, dráha černých figur pak $8 + 22\sqrt{2} + 6\sqrt{5} \doteq$ $\doteq 52{,}5$ stran pole, tedy o 3,5 větší. Změřte takto „délku“ i jiných šachových partií.

b) O sto let později a ke sklonku svého života zabýval se *C. F. Gauss* jinou úlohou na šachovnici: postaviti na normální šachovnici osm královen tak, aby se navzájem nemohly bráti. Ihned jest zřejmo, že nutnou podmínkou jest, aby na žádném sloupci ani v žádném řádku nestála než jedna královna. Na jednoduchém případě popíšeme *Gaussovu* methodu methodického pokusu. Nejmenší šachovnice, na níž jest úloha řešitelna, jest šachovnice o 4 × 4 polích. Postavíme-li královnu na *a1*, zbývají nám pole *c2*, *d2*, *b3*, *d3*, *b4*, *c4*. Postavíme-li však nyní další královnu na *c2* nebo *d2*, snadno se přesvědčíme, že bychom mohli již postaviti jedinou královnu; nevede tedy předpoklad o krá-



Obr. 58.

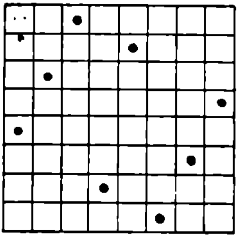
lovně na *a1* k cíli. Královna na *b1* pak umožňuje toto postavení: *d2*, *a3*, *c4*, královna na *c1* pak dává řešení *a2*, *d3*, *b4*. Předpoklad o královně na *d1* pak opět nevede k cíli. Jsou tedy pro $n = 4$ tato dvě řešení (obr. 58).

Všimněme si, že druhé řešení jest zrcadlovým obrazem prvního, ať již dle vodorovné nebo svislé hrany této šachovnice.

Poněvadž ani na hlavní ani na vedlejší úhlopříčce nestojí žádná z královen, obdržíme řešení pro šachovnici o 5 × 5 polích, obložíme-li šachovnici o 4 × 4 polích dalším sloupcem a další řádkou a na pole jim společné postavíme pátou královnu. Tak z každého řešení pro šachovnici 4 × 4 obdržíme 4 řešení, tedy celkem 8 řešení pro šachovnici 5 × 5. Avšak lze též pátý sloupec a řádek vložiti mezi 2. a 3. sloupec resp.

řádek a na společné jim místo položiti královnu; tak obdržíme dvě další řešení, takže na šachovnici 5 × 5 jest možno deset různých řešení. Podobnými úvahami, jichž složitost ovšem roste s počtem polí, bylo zjištěno, že pro $n = 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$ existuje postupně 4, 40, 92, 352, 724, 2680, 14032 řešení.

Některá z těchto řešení slují základní; další z nich lze odvoditi elementárními geometrickými transformacemi (zrcadlení, otočení a pod.). Uveďme ještě řešení pro $n = 8$; k zapamatování jest velmi přehledné:



Obr. 59.

Ve vzájemném postavení jakéhokoliv počtu královen řešících danou úlohu lze vystopovati různé symetrie i jiné vztahy, jež se staly předmětem četných a složitých úvah užívajících namnoze honosně matematického názvosloví (na př. dvojperiodické řešení) avšak jejich obsah po matematické stránce jest dosti chudý, třebas *Pólya* uvedl tyto úlohy ve složitý systém nerovností a kongruencí.

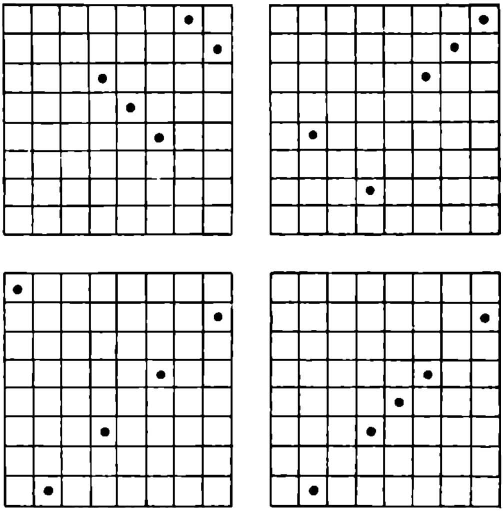
Ukažte, že n věží na šachovnici o $n \times n$ polích lze celkem umístiti n krát tak, aby se navzájem nemohly vzíti.

c) Jakýmsi protějškem úlohy o královnách jest vyšetřiti, kolika královnami lze ovládnouti všechna pole na šachovnici o $n \times n$ polích; při tom nečiňme rozdílu, zdaž místo, na němž

Rozsah šachovnice:	Počet královen:	Počet řešení:
2 × 2	1	4
3 × 3	1	1
4 × 4	2	12
5 × 5	3	182
6 × 6	4	120
7 × 7	4	?
8 × 8	5	4860

královna stojí, pokládáme za napadené či ne. Tento úkol jest, ve srovnání s oběma předchozími, data mnohem mladšího; několik výsledků v tabulce na str. 73.

Uveďme několik zajímavých postavení na normální šachovnici (obr. 60):



Obr. 60.

Ukažte, že na obdélníkové šachovnici o p, q polích lze provésti věží celkem $pq\,(p + q - 2)$ tahů, tedy na normální šachovnici celkem 896 tahů.

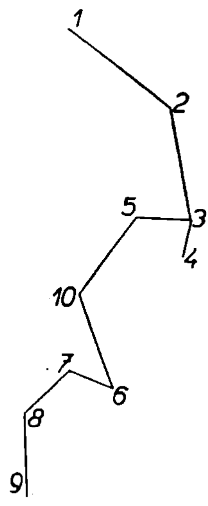
a) Počneme úlohou, jejíž řešení dosud nebylo podáno. Poštovní posel prochází denně n vesnicemi, jest nalézti nejkratší jeho cestu mezi vesnicemi, při čemž smí projíti každou jen jedenkráte.

Jak jest úloha nesnadná, vidno z této poznámky: Snadno stanovíme nejkratší cestu, jsou-li dány tři vesnice (body) A, B, C tvořící trojúhelník. Nechť posel vyjde z bodu A přes bod B do C; avšak jeho nejkratší cesta zpět vede přímo z C do A.

b) V rovině jest dáno n bodů, jichž vzdálenosti jsou mezi sebou vesměs různé. Jest je spojiti sítí tak, aby každé dva body byly spojeny buď přímo nebo prostřednictvím jiných a aby celková délka sítě byla co nejmenší. Tato úloha má svůj praktický význam při budování sítí elektrovodných. (Viz *Ot. Borůvka*: O jistém problému minimálním, Práce Moravské přírodovědecké společnosti, svazek III, spis 3.; Příspěvek k řešení otázky ekonomické stavby elektrovodných sítí, Elektrotechnický obzor, roč. XV., 1926). Předpis, jenž vede k řešení, jest:

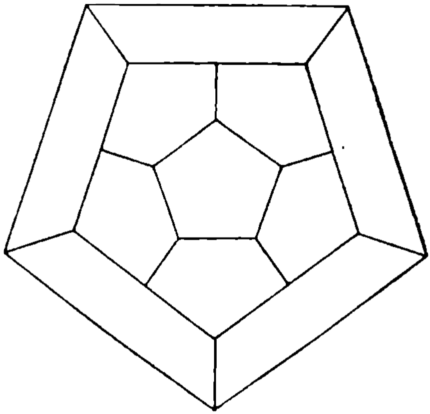
1. Každý bod se spojí s nejbližším.

2. Tak povstane řada tahů a každý z tahů se zase spojí s nejbližším. Na př. v obr. 61 jde o spojení desíti bodů; spojíme *1* s *2*, *2* s *3*, *3* s *4*, *5* s *3*, vytvoříme tah *6*, *7*, *8*, *9*, *10* spojíme s *6*, a *10* s *5*.



Obr. 61.

c) Známou hrou na síti vytvořené třemi čtverci a spojujícími úsečkami jest malý a velký mlýnek; nejslavnější hrou tohoto druhu jest pak hra na dvanáctistěnu. Pravidelný dvanáctistěn má 12 stěn (pravidelných pětiúhelníků), 20 vrcholů a třicet hran (dle věty *Eulerovy* skutečně jest $s + v = h + 2$). Úkol pak zní: Jest souvislým tahem projíti všemi vrcholy dvanáctistěnu, každým jednou a každou spojující hranou lze jíti nejvýše jedenkráte, t. j. buď jednou nebo jí vůbec nepoužíti. Dvanáctistěn lze nahraditi obrazcem



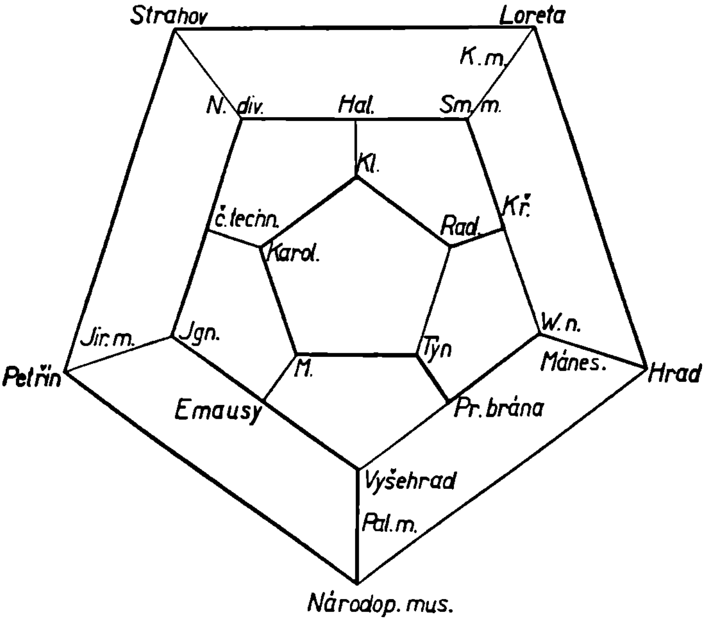
Obr. 62a.

v rovině (viz obr. 62a, b), neboť nám nezáleží na vzájemné velikosti jednotlivých útvarů, nýbrž jen na vzájemné poloze.

Naší úloze dáme domácnější roucho. Návštěvník přijel do Prahy na Wilsonovo nádraží; chce navštíviti Hrad a Petřín, chce viděti Českou techniku, Národní divadlo, Staroměstskou radnici, Klementinum, Karolinum a Prašnou bránu, z chrámů pak Loretu, Strahov, Vyšehrad, Emausy, Křižovníky, sv. Ignáce na Karlově náměstí, sv. Martina ve zdi a Týn; z menších museí chce shlédnouti Národopisné museum pod Petřínem, u Halánků a Smetanovo. Jak uspořádá svoje putování a kterých z mostů Karlova, Legií

Jiráskova, Palackého a Mánesova použije, aby vykonal svou cestu nepřetržitě, nevraceje se již k navštívenému místu?

Jedno z možných řešení znázorňuje obr. 62b; procházka začíná na Wilsonově nádraží a prvním cílem jest Hrad.



Obr. 62b.

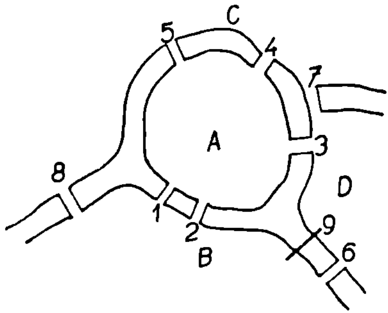
Zřejmo, že východiskem by mohlo býti kterékoliv z udaných míst.

Byla odvozena různá pravidla, dle nichž jest cestu upraviti; jedno z nich jest dáno schematem *lppplllplplppplllplp*; při něm jest východisko ve vrcholu, do něhož jsme položili Wilsonovo nádraží, *l* pak značí, že se dáme cestou vlevo, *p* pak vpravo. Uvedené schema lze napsati i na obvod kružnice a pak kdekoliv začíti, takže jsou-li dány první dvě stanice (v našem případě nádraží a Hrad), jest možno 10 různých cest směrem nádraží Hrad a 10 cest směrem nádraží Prašná brána, tedy celkem dvacet různých cest, poněvadž schema, jímž se řídíme, lze napsati v pořadí o dvou cyklech: *ppplllplplppplllplpl*. Hru lze různě obměniti: jsou-li předepsány tři první stanice, jest celkem 10 řešení, jsou-li dány první čtyři stanice, je řešení 6 nebo 4, je-li dáno 5 stanic, jest řešení 4 nebo 2.

Duálním tělesem k dvanáctistěnu jest dvacetistěn, který má dvacet stěn tvaru rovnostranného trojúhelníku, 12 vrcholů, 30 hran (všimněte si, že zákon duality v *Eulerově* rovnici $s + v = h + 2$ se projevuje záměnností sčítanců); duální úloha k naší pak zní: Jest navštíviti všech dvacet stěn, každou jen jednou a každou hranou pak pouze jednou projíti. Podobné úlohy lze žádati i pro krychli a osmistěn i čtyřstěn, jenž jest duální sám k sobě.

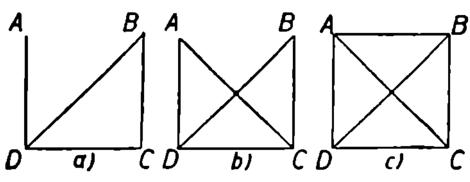
Mytický *Midas* svým dotekem vše měnil ve zlato; a čeho se dotkla geniální mysl *Eulerova*, to měnilo se v matematický problém. Uvedeme úlohu, jež jest jednou z prvních řešenou v topologii (analysis situs); jest to část matematiky, jež se zabývá uspořádáním geometrických útvarů v prostoru. Takovým problémem jest i jiná úvaha *Eulerova*, a to o počtu stěn, hran a vrcholů jistých mnohostěnů, vyjádřená vztahem $s + v = h + 2$.

a) Město Královec jest protékáno řekou, jež vytvořuje ostrov (viz obr. 63); přes ramena této řeky vedlo za časů *Eulerových* sedm mostů (v obr. jsou označeny 1, 2, . . ., 7). I byla nadhozena úloha, zdaž jest možno jedinou procházkou projíti všemi mosty, avšak každým jen jednou. *Euler* dokázal, že nikoliv. Jeho tvrzení objasníme na jednoduchých příkladech.



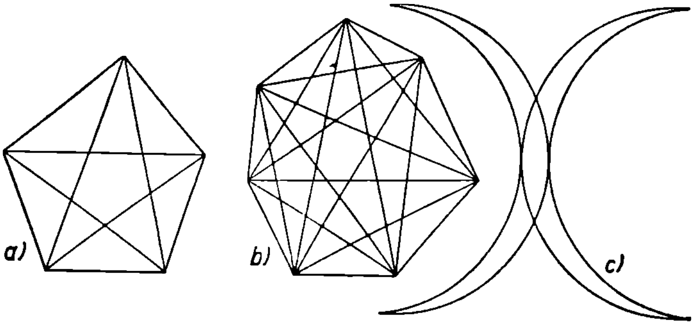
Obr. 63.

Obrazec 64a snadno nakreslíme jedním tahem, vyjdeme-li z bodů A neb D; rovněž obr. 64b nám nečiní žádných nesnází,



Obr. 64.

musíme však vyjíti z bodu C nebo D. Avšak obr. 64c jedním tahem nakresliti se nám nepodaří, vždy nejméně jedna z úseček zůstane nedokreslena. Všimněme si, že v obr. 64a a 64b jsou vždy dva vrcholy, v nichž se stýká lichý počet úseček, totiž body A, D, resp. C, D a právě ty jsme volili za bod výchozí a konečný. Obr. 64c pak obsahuje čtyři body, v nichž se stýká lichý počet úseček. Vyšetřte si, zdaž lze pětiúhelník i s jeho úhlopříčkami nebo sedmiúhelník i s úhlopříčkami, nebo obr. 65c („znak Mohamedův") nakreslit jedním tahem.

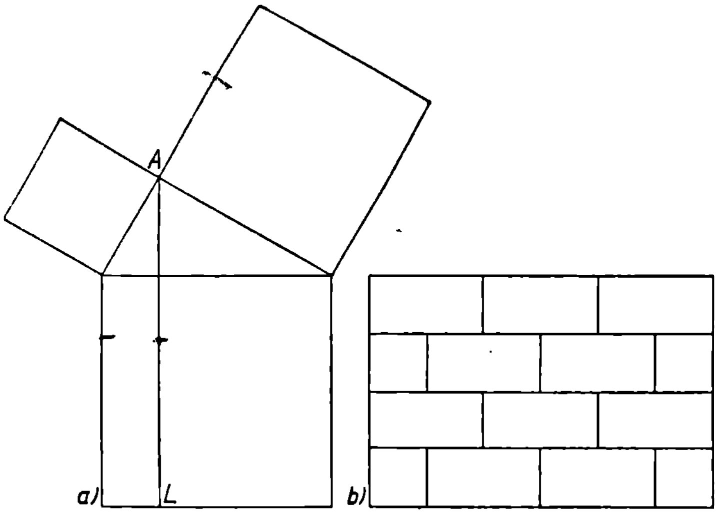


Obr. 65.

Ve všech těchto třech obrazcích ve všech bodech se stýká pak sudý počet úseček. *Eulerovo* pravidlo pak zní: Obrazce, které neobsahují žádných bodů, v nichž by se stýkal lichý počet úseček nebo které obsahují pouze dva takové body, lze nakresliti jedním tahem. Takové obrazce na př. jsou: 66a, není jím obrazec 66b znázorňující spáry ve zdi, poněvadž až na čtyři vrcholy má vesměs body, v nichž se stýkají tři úsečky.

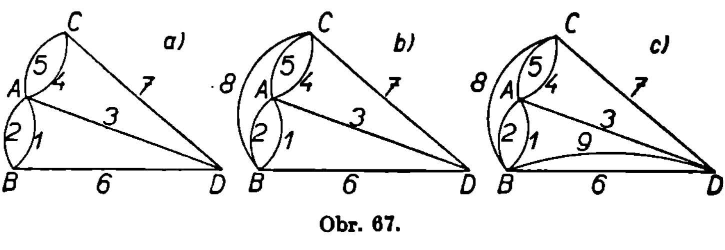
Vraťme se nyní k úloze *Eulerově*. Prostory A, B, C, D lze nahraditi prostě body, takže dospějeme k obrazci 67a a poněvadž tento má ve všech bodech lichý počet úseček, jest úloha neřešitelná. Později byl postaven most osmý a ještě později devátý; ukažte, že v těchto případech úloha řešitelná jest (obr. 67b, c).

Jest zajímavo, že úloha „jedním tahem“ se vyskytuje i v hádankách lidových; uveďme zde tyto tři: Do prkna jest



Obr. 66.

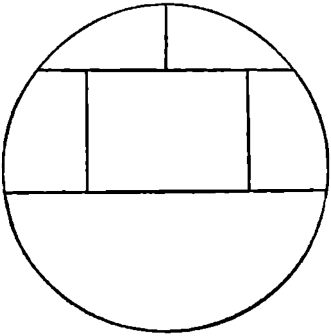
zaraženo pět hřebíčků, tvořících pětiúhelník; jest na ně napjati nit tvořící strany i uhlopříčky pětiúhelníka, avšak tak, že mezi každými dvěma hřebíčky jde nit jen jednou.



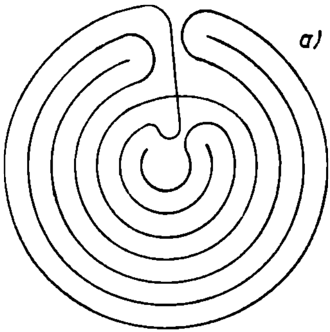
Obr. 67.

Lze smazati „přesku“ (obr. 68) na třikráte? Proč nikoliv?

Šibalstvím zavání úloha narýsovati obr. 64c přec jen jedním tahem. Počneme v bodě A, pak do D a nyní *podložíme prst*, po němž přejdeme do bodu C a pak B, A, C, D, B.



Obr. 68.

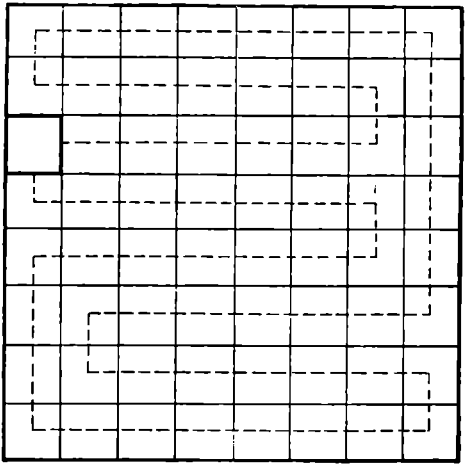


Obr. 69a.

b) Dále sem patří úlohy o bludištích. Tak nazývají se spleti cest od sebe oddělených křovinami, takže poutník snadno ztrácí přehled, kudy již šel a kudy ještě má jíti, aby dosáhl buď středu, nebo aby ze středu vyšel zpět, případně aby prošel všemi cestami bludiště.

Nejstarším známým bludištěm jest doupě *Minotaurovo* na ostrově Knossu, jež bylo znázorňováno i na starých mincích (obr. 69a). V parcích se rovněž setkáváme s bludišti, na př. v Květné zahradě kroměřížské byla původně dvě, z nichž jedno (v rozloze 50 m × 50 m) se zachovalo ještě nyní; podobné „bludníky“ byly i v zámeckých parcích ve Strážnici, Bzenci, Napajedlech a j. Zjednodušených bludišť užívá se ještě nyní na př. v pokusech o zvířecí psychologii. Návod, jak projíti bludištěm, jest velmi jednoduchý (*Chr. Wiener*, slavný deskriptivní geometr, 1873). „Půjdeme tak, aby naše levá ruka se ustavičně dotýkala křovin; přirozeně, že lze voliti i ruku pravou“. Druhá úloha projíti všemi cestami bludiště jest mnohem těžší.

Posléze patří sem i tato úloha: Věznice jest vystavěna jako šachovnice (obr. 69b), všechny cely mají dveře do sousedních cel, takže jest možno buď směrem jedním nebo k němu kolmým celou věznicí projíti. Kam jest umístiti



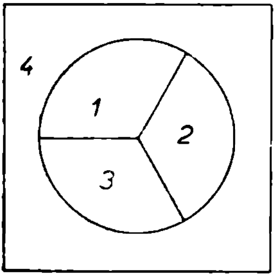
Obr. 69b.

strážnici, aby dozorce mohl projíti všemi celami, žádné nevynechávaje a každou procházeje jen jednou?

c) Při pokládání map barvou naskytl se tento problém: Uvažujeme-li pouze oblasti hraničící spolu podél křivky (nebo přímky), kolik jest nutno míti nejméně barev, aby tyto oblasti byly od sebe ostře odlišeny?

Jest dávná zkušenost, že nelze vždy vystačiti se čtyřmi barvami, avšak důkaz, že by čtyři barvy skutečně ve všech případech (k jakým při mapách nedochází) stačily, dosud podán nebyl; lze však dokázati, že pět různých barev skutečně stačí.

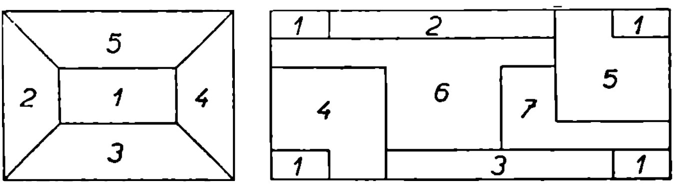
S touto úlohou „čtyř barev" úzce souvisí úloha podobná: Kolik nejvíce lze v rovině nakresliti oblastí stýkajících se podél křivky tak, aby se všechny mezi sebou dotýkaly?



Obr. 70a.

Lze dokázati, že této úloze na rovině (a také na kouli) vyhovují oblasti čtyři, viz obr. 70a. Jest tedy úloha, kterou *Möbius* před více než sto lety dával, neřešitelna: Indický maharadža umíraje odkazuje svou říši pěti synům s tou však podmínkou, že se o ni rozdělí takovým způsobem, že všech pět nástupních říší bude každá s každou míti hranice podél křivky. Otec prý tak vlastně synům naznačil, že si nepřeje, aby říši po jeho smrti dělili.

Plochu, jakou jest na př. gumový plovací nebo záchranný pás, nazýváme pro její prstencovitý tvar prstencem. Kdežto rovina i koule každou uzavřenou křivkou rozpadnou se ve dvě části mezi sebou nesouvisející, existují na prstenci (anuloidu) křivky uzavřené — snadno je naleznete — které tuto plochu nedělí v takové části. Na této ploše úloha o sousedních oblastech se utváří zcela jinak. Obdélník v obr. 70b lze — předpokládá je vhodnou pružnost rovinné blány — svinout do prstence, takže na této ploše bychom mohli



Obr. 70b, c.

poslední vůli maharadžovu vyplniti, ba ještě více: dle obr. 70c bychom mohli poděliti sedm synů tak, že by každý sousedil s každým.

d) Úlohy, které jsme vyložili v předchozím odstavci jako hry na sítích, lze rovněž pokládati za úlohy topologické. Až budete ovazovat motouzem krabici tvaru rovnoběžnostěnu, všimněte si, že vlastně motouzem vytvořujete uzavřené prostorové systémy čar „jedním tahem“, a to i tenkráte, když motouz podkládáte, aby vazba byla pevnější.

X. O ŘEŠITELNÝCH A NEŘEŠITELNÝCH ÚLOHÁCH GEOMETRICKÝCH

V kavárně u stolku blíže prostředního okna sedí několik pánů skloněno nad notýsky i okraji novin a cosi čárají; rukou společnou a nerozdílnou řeší marně úlohu, kterou „náš Jára“ onehdy dostal za domácí cvičení: má totiž sestrojiti kosočtverec, je-li dána jeho úhlopříčka a výška. Konstrukce vázne, připojují se poznámky o škole vůbec a geometrii zvláště, svůj díl dostane i profesor; otec hájí synovo zvláštní nadání ke geometrii — „vždyť dostal od strýce kružítko za tři sta korun“; a když druhý den ani kancelářští přátelé otcovi nedovedou úlohu rozřešiti (z kosočtverce se stal mezi tím kosodélník), jest včerejší diagnosa z kavárny v plném rozsahu potvrzena, zejména když Jára v poledne přijde ze školy a na otázku, jak to dopadlo s úlohou, hlásí třebas jaksi nejistě, „že to nikdo neměl a že profa marně úlohu řešil na tabuli, pak řekl: „Tak to smažte“, a Ferda prý se usmál a za to dostal pecku”. Tož to by byl asi nejběžnější druh neřešitelných úloh a velmi rozšířený.

Avšak žerty stranou, nejsou naším programem. Od úsvitu kultury provázejí člověka v řemesle i v umění dvě geometrické pomůcky: pravítko, dle něhož lze narýsovati přímku, a kružítko, kterým lze narýsovat kružnici. Za neřešitelné úlohy pak pokládáme ony, které skutečně nelze těmito pomůckami přesně rozřešiti; kriteriem, zdaž konstrukci lze skutečně provésti pravítkem a kružítkem, jest poznatek *J. Steinera*, že úloha těmito pomůckami řešitelná vede buď na kvadratickou rovnici nebo na takovou, kterou lze pomocí kvadratických rovnic řešiti; na př. úloha vedoucí na reciprokou rovnici stupně 4. jest řešitelná. Uveďme dva příklady. Sestrojiti pravidelný sedmnáctiúhelník, dán-li poloměr kruhu opsaného, vede na binomickou rovnici $x^{17} - 1 = 0$, a jest jedním z nejkrásnějších výkonů *Gaussových* důkaz, že tuto rovnici lze rozřešiti pomocí kvadratických rovnic.

Tuto větu objevil *Gauss* ve svých devatenácti letech (30. III. 1796, kteréžto datum pokládal za jedno z nejdůležitějších svého života). Oproti tomu sestrojiti pravidelný sedmiúhelník vede na rovnici $x^7 - 1 = 0$, kteráž po krácení $x - 1$ vede na reciprokou rovnici stupně šestého $x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$, a tu substitucemi

$$x + \frac{1}{x} = y, \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2, \quad x^3 + \frac{1}{x^3} = y^3 - 3y,$$

lze převésti na rovnici stupně třetího, kterou pomocí kvadratických rovnic řešiti nelze. Známe však velmi přibližnou konstrukci; hledaná strana jest polovina strany do kružnice vepsaného rovnostranného trojúhelníka. Tato konstrukce dává $a_7 = \frac{1}{2}a\sqrt{3} = 0{,}8660a$ (kde a je poloměr uvažované kružnice) místo správného $a_7 = 2a \sin \frac{1}{7}\pi = 0{,}8667a$, tedy chyba jest asi $0{,}8\,^0/_{00}$. O jiných konstrukcích přesných i přibližných viz 7. sv. této sbírky: *Hruška*, Konstrukce omezenými prostředky a geometrické aproximace, nebo též poslední kapitolu *Sobotkovy*: Deskriptivní geometrie promítání paralelního.

V odst. 4 jsme pojednali již o jiné úloze neřešitelné, totiž o kvadratuře kruhu nebo rektifikaci jeho obvodu. Avšak Řekové narazili ještě na jiné dvě úlohy, které nerozřešili ani oni ani matematikové během dalších více než dvou tisíc let. Jest to slavný problém délický, t. j. sestrojiti krychli, která má krychlový obsah dvakráte větší než daná krychle, a rozděliti úhel na tři stejné části. Pravou podstatu těchto úloh ukázala až uvedená věta *Steinerova* (1833), obě úlohy totiž vedou na rovnici stupně třetího:

$$x^3 - 2a^3 = 0, \quad x^3 - 3 \operatorname{tg} \alpha x^2 - 3x + \operatorname{tg} \alpha = 0,$$

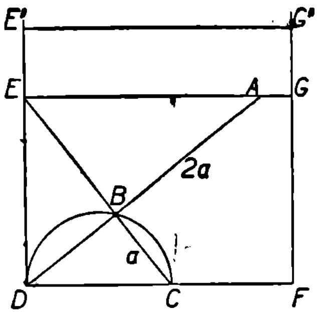
kdež $x = \operatorname{tg} \frac{1}{3}\alpha$. A přece jen tyto úlohy řešitelny jsou, připustíme-li vedle pravítka a kružítka pomůcku ještě jinou, na př. možnost jistého pohybu.

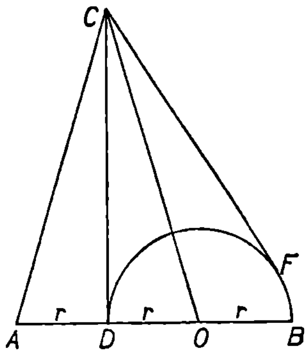
V obr. 71a značí $DFGE$ dřevěný rámec, jehož hrana $\overline{E'G'}$ se může rovnoběžně pohybovati (v drážce) s hranou

$\overline{DF}$. Značme $\overline{AB} = 2a$, $\overline{BC} = a$, $\overline{AB} \perp \overline{BC}$. Tento pravý úhel vložme do rámu a pohybujme pohyblivou hranou i jím tak, až vzniknou úsečky $\overline{AD}$, $\overline{EC}$. Pak jest

$$\overline{BC} : \overline{BD} = \overline{BD} : \overline{BE} = \overline{BE} : 2\overline{BC}$$

a znásobením obou rovnic $\overline{BD}^3 = 2\overline{BC}^3$, a odsud $\overline{BD} = a\sqrt[3]{2}$. To jest jednoduchý aparát, řešící délický problém; dle některých mínění byl již znám *Platonovi*.





a) Obr. 71. *b)*

V obr. 71b jest znázorněn přístroj, řešící mechanicky trisekci úhlu (nepříliš malého). Narýsujme si na průsvitný papír úsečku AB a rozdělme ji na tři stejné části, nad $\overline{DB}$ jako nad průměrem veďme polokružnici, v bodě D veďme kolmici. Máme-li roztřetiti úhel α, položíme průsvitný papír na jeho ramena tak, aby jedno jeho rameno procházelo bodem A, vrchol ležel na kolmici v patě D a druhé rameno aby se dotýkalo kružnice. Okamžitě jest patrno, že $\sphericalangle ACD = \sphericalangle DCO = \sphericalangle OCF$.

Připustíme-li pohyb jako konstruktivní pomůcku, lze řešiti i jiné úlohy, pravítkem a kružítkem neřešitelné; na př.

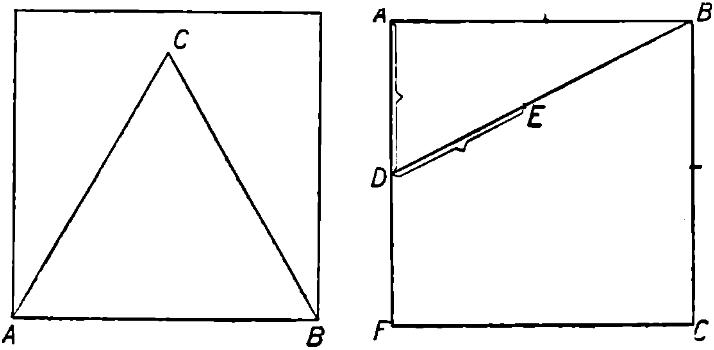
sestrojiti elipsu, k tomu slouží různé elipsografy. Historii obou problémů i jiné konstrukce viz v knize: *Enriques-Fleischer*: Fragen der Elementargeometrie II.

Čtenář snad i ze své vlastní zkušenosti ví, že vhodným překládáním a skládáním čtvercových, obdélníkových i kruhových papírů lze obdržeti různé hračky; nejznámější snad jest složení obdélníkového papíru do čáky a z ní do lodičky. Asi před čtyřiceti léty bylo využito těchto papírových skládanek k řešení planimetrických úloh, z nichž některé uvedeme. Přímku, která vznikne složením papíru ve dvě části, nazývejme přehybem.

1. Pravý úhel sestrojíme, vytvoříme-li přehyb a složíme-li nyní papír tak, že obě části přehybu se kryjí. Nový přehyb jest kolmý na první. Jak sestrojíte nyní dvě rovnoběžky? Jak sestrojíte pomocí obou předpisů obdélník?

2. Čtverec sestrojíme, sestrojíme-li nejprve obdélník, pak přehybem rozpůlíme jeden z jeho pravých úhlů, dalším přehybem již snadno vytvoříme čtverec.

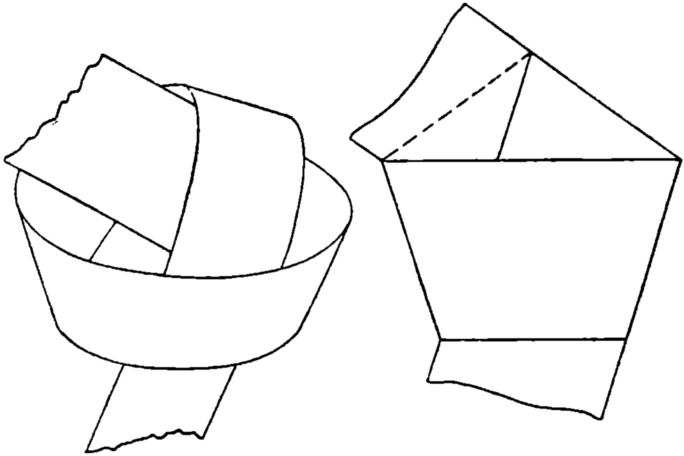
3. Rovnostranný trojúhelník nad danou úsečkou sestrojiti lze takto (obr. 72a): Sestrojíme nejprve čtverec, pak přehybem osu jedné ze stran. Nyní přehybem vycházejícím



a) Obr. 72. *b)*

z A přehneme papír tak, aby bod B padl na osu strany; tento bod C jest vrcholem rovnostranného trojúhelníka.

4. Danou úsečku rozdělíme zlatým řezem takto (obr. 72b): Přehyb jdoucí vrcholem B a půlicím bodem D jedné strany čtverce, nad ní sestrojeného, má délku $\sqrt{a^2 + \frac{1}{4}a^2} = \frac{1}{2}a\sqrt{5}$. Poněvadž větší část úsečky rozdělené zlatým řezem jest $\frac{1}{2}a(\sqrt{5} - 1)$, přehneme $\overline{AD}$ na přehyb $\overline{DB}$ do bodu E,

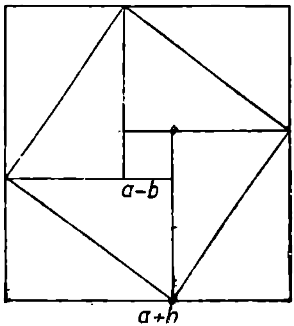


Obr. 73a.

dalším přehybem vycházejícím z bodu B lze bod E přenésti na stranu $\overline{AB}$, čímž je konstrukce hotova.

5. Konstrukci pravidelného pětiúhelníka znázorňuje obr. 73a; složený takto pruh papíru jest nutno pevně utáhnouti. Důkaz, že se skutečně touto konstrukcí dojde k pravidelnému pětiúhelníku, není právě snadný (viz *Kraitchik*: Les Mathématiques des Jeux).

Těchto skládanek bylo užito i jako důkazové methody; že součet úhlů v trojúhelníku jest úhel přímý, lze dokázati přehybem všech tří úhlů do jedné strany; přehyby vytvoří obdélník. V obr. 73b jest strana velkého čtverce $a + b$, čtyřmi přehyby snadno vytvoříme čtverec další. Trojúhelníky pak omezují čtverec třetí o straně $a - b$. A nyní lze jednoduše dokázati větu *Pythagorovu*; je-li strana druhého z čtverců c, jest buď $(a + b)^2 = c^2 + 4\,\frac{1}{2}\,.\,ab$, nebo $c^2 = (a - b)^2 + \frac{1}{2}\,.\,4ab$, v obou případech pak $a^2 + b^2 = c^2$.



Obr. 73b.

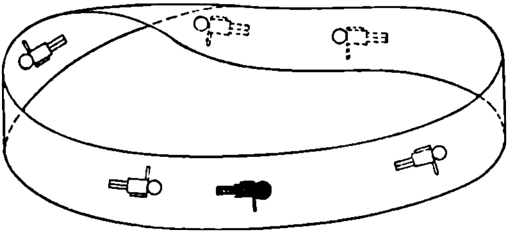
XI. MALÝ VÝLET DO NEZNÁMÝCH A PODIVUHODNÝCH PROSTORŮ

Mnohým autorům spisků tohoto druhu, jako jest tento, nestačí provésti svého čtenáře naším obyčejným prostorem a ukázati mu zábavné a romantické jeho koutky; vedou ho na konec i do prostorů jiných. A poněvadž při povaze svého dílka nechtějí a nesmějí činiti přílišné nároky na přesné a logické myšlení čtenářovo (a toho při studiu jiných prostorů v první řadě jest třeba), spokojují se s tím, že ho obeznamují s histories scandaleuses, jakých se dožijí „naši v cizině“, t. j. vykládají užaslému čtenáři, jak by se mu vedlo, kdyby vyzbrojen pomůckami a názory svého třírozměrného prostoru navštívil prostory jiné a co by se stalo, kdyby obyvatelé těchto prostorů s myšlenkovou výzbrojí svého prostoru tuto návštěvu mu oplatili. Tyto autory budeme následovati i my, avšak poněkud jinak. Vyložíme na př. (*L. Hefftera*), že pojmy vpravo-vlevo jsou charakteristickým znakem našeho prostoru.

Dítěti již od malička jest známo, kde si dospělí zvykli říkati vpravo a kde vlevo; že někteří lidé (leváci) si zvykli vykonávati některé věci rukou levou místo pravou, na věci nic nemění. Ale představme si, že někoho neznalého prava a leva *písemně* chceme poučiti o tomto rozdílu. Pak by v dopise stála asi tato věta: „Postav se obličejem k jihu a rozpaž ruce; ruka ukazující k východu, jest Tvoje levice, druhá jest pravice“; bez poukazu na nějaký předmět zevnějšího světa bychom písemně nikoho nepoučili o tom, kde jest vpravo a kde vlevo.

Vzorem jednorozměrného prostoru a obyvatelů v něm lze spatřovati v housence lezoucí po lodyze. Housenka může činiti pouze pohyb vpřed a vzad; zamezíme-li nějakou překážkou ať na tom či onom konci či na obou koncích další pohyb, žije housenka v uzavřeném prostoru, z něhož se sama nijakým způsobem nevyprostí; my tvorové třírozměrní ji ovšem z jejího zajetí na stéble slámy snadno prostorem naším přeneseme i na pokračování lodyhy i na lodyhu jinou. Směr pohybu v jednorozměrném prostoru jest pak dán úsečkou opatřenou šipkou, jež užší svou částí udává jeden směr, druhý pak jest opačný tomuto. Takovéto úsečce budeme říkati orientovaná úsečka a příslušnému prostoru orientovaný prostor. Přejděme k dvojrozměrnému prostoru a k dvojrozměrným bytostem; modelem nám budiž na př. želva lezoucí po zemi; takovým prostorem jest rovina i jakákoliv plocha jiná. Žije-li želva v oplocené zahrádce, jest chycena; neunikne ze svého zajetí, z kterého ji trojrozměrný člověk prostým zvednutím a přenesením ve svém prostoru snadno vyprostí. Lze v takovémto prostoru mluviti o pravu a levu? Jest možno vůbec tento prostor orientovati? Lze-li, jistě ne naší orientovanou úsečkou: tu lze totiž v rovině a na kterékoliv ploše otočiti, aniž vystoupí z roviny, směrem právě opačným. Tentokráte jako orientačního prostředku užíváme kružnice, na níž jsme š pkou vytkli směr, říkejme jí orientovaná kružnice. Zřejmo, že tato orientace může býti dvojí: proti směru a ve směru pohybu hodinových ručiček. Nakresleme si oba orientované kruhy na průsvitný papír; hledíme-li na obrázek z různých stran, vidíme, že oba obrazce přecházejí jeden v druhý. Avšak tento pokus jest možný pouze pro nás, jen my se stanoviska trojrozměrných tvorů můžeme v dvojrozměrném prostoru rozeznávati vpravo a vlevo, avšak bytostem žijícím v dvojrozměrném prostoru tento rozdíl *ještě* patrný není. Oni nijakým způsobem nemohou převésti danou orientaci v opačnou, pro ně orientovanou kružnicí jest orientován i jejich prostor. Avšak věc má ještě jeden zapeklitý háček: nejsou totiž všechny plochy co do možnosti orientace stejné. Vystřihněte si asi 40 cm dlouhý a 4 cm široký pruh papíru! Slepíte-li oba kraje obvyklým způsobem, obdržíte válcovou plochu, otočíte-li však jeden kraj o 180° a pak zalepíte (viz obr. 74), obdržíte podivuhodnou plochu zvanou *Möbiusův* proužek (1858). Snadno se přesvědčíte, že má jen jeden okraj; avšak co ještě více překvapí, má jen jednu stranu. Malíř, jenž by se domníval, že má strany dvě, a chtěl by každou stranu pomalovati jinou barvou, zjistí, že jedinou barvou pomaluje celý proužek.

Tím nejsou vyčerpány podivné vlastnosti této plochy. Rozstřihneme-li ji dle šířky, nerozpadne se nám ve dvě části,

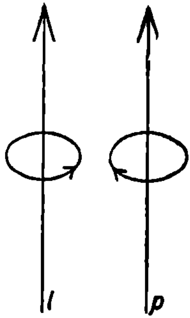


Obr. 74.

nýbrž objeví se podobný proužek, který vznikne z původního rovinného pruhu otočením o 2 . 2 R a slepením krajů. Rozstřihneme-li původní *Möbiusův* proužek dvěma takovými rovnoběžnými střihy, rozpadne se ve dva pruhy, avšak do sebe zapletené.

Neúspěch našeho malíře lze popsati ještě jinak: Chodec vyšedší z kteréhokoliv místa na proužku a jdoucí ustavičně vpřed, vrací se k svému východišti s prostorovými vlastnostmi protinožců. Představme si, že na své jedné podrážce měl orientovanou kružnici, pak po jeho návratu jest tato kružnice orientována směrem opačným. Při válcové, kuželové, kulové a j. ploše tomu tak není, nazýváme je dvoustrannými, *Möbiusův* list jest nejstarší příklad plochy jednostranné i plochy, v níž nelze orientaci provést. Výsledek našich úvah jest, že v dvojrozměrném prostoru nemůžeme ještě mluviti o pravu a levu, ba dokonce v jistých případech nelze mluviti ani o orientaci.

Trojrozměrný prostor lze orientovati kombinací orientované úsečky a orientované kružnice (obr. 75); tuto kombinaci stručně nazýváme šroubový pohyb nebo prostě šroub. A zde teprve lze mluviti o pravém a levém šroubu; jest zvykem, že pravým šroubem nazýváme první z uvedených obrázků, levým pak druhý. Při žádném pohybu v trojrozměrném prostoru (jak se snadno čtenář přesvědčí) nepřejde pravý šroub v levý a naopak, t. j. třírozměrný prostor jest šroubem orientován.



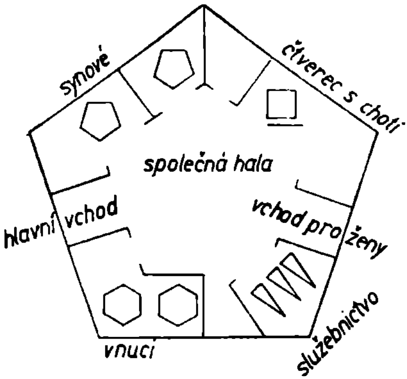
Obr. 75.

Abychom ukázali, že vpravo a vlevo jest výsadním pojmem našeho prostoru, nutno se předem zmíniti o čtyřrozměrném prostoru vůbec. Čtyřrozměrný a vícerozměrný prostor není pro matematiku žádným problémem. Bod v jednorozměrném prostoru lze určiti jedinou souřadnicí, v rovině dvěma a v prostoru obyčejném třemi souřadnicemi; nic nám nebrání uvažovati bod určený čtyřmi i pěti i více údaji. Rovnice přímky v rovině jest lineární vztah mezi dvěma proměnnými, rovnice roviny pak lineární vztah mezi třemi proměnnými; vztah $ax + by + cz + du + e = 0$ udává t. zv. nadrovinu ve čtyřrozměrném prostoru. Nesnáze s vyššími prostory začínají, až když se stanou předmětem úvah psychologa, filosofa a básníka; tyto nesnáze vrcholí, když lidská zvědavost a tomášská nedůvěřivost se táže: „Existují skutečně takové prostory? Kde? Jak?“ A nesnáze vrcholí, když s žabami ze známé *Nerudovy* žabí kosmické písně se zvědavci táží: „… jsou-li tam tvoři jako my, jsou-li tam žáby taky?“ Tu vykladači uchylují se pravidelně k analogiím, jež pro matematiku jsou nejnebezpečnější methodou. Poukazují k tomu, jako není jednorozměrný svět uzavřen pro dvojrozměrníky a svět těchto pro nás, tak že náš prostor pozorován z čtyřrozměrného prostoru jest rovněž otevřen, a kdybychom se octli nějakou vyšší náhodou ve čtyřrozměrném prostoru, že bychom mohli vcházet do svého pokoje zdmi a pod. Představme si, že i dvojrozměrníci nosí rukavice;

byly by to obrysy nějakého rovinného útvaru; ani oni nemohli by obléci levou rukavici na pravou ruku nebo opačně bez jejího obrácení; my bychom však to mohli učin ti pohodlně překlopíce v našem prostoru rukavice a učiníce tak z rukavice pro pravou rukavici pro levou ruku. A podobně by to čtyřrozměrníci mohli učiniti s našimi trojrozměrnými rukavicemi i s našimi pravými a levými šrouby — zkrátka vpravo a vlevo ztrácí ve čtyřrozměrném a vyšším prostoru a pro bytosti vícerozměrné svůj raison ďêtre.

Byly napsány celé povídky a romány odehrávající se v jiných prostorech, než jest náš. Nejstarší z těchto románů pochází od *E. A. Abbota* (německý překlad z anglického originálu od *W. Biecka* v Mathem. phys. Bibliothek 83).

V tomto románě o plošných bytostech vystupují mužové jako mnohoúhelníky rozlišené dle svého společenského významu počtem stran. Dělníci a vojáci jsou rovnoramennými trojúhelníky, střední stav jest znázorněn trojúhelníky rovnostrannými; čtverce a pravidelné pětiúhelníky jsou určeny úřednictvu, šlechtě jsou vyhrazeny šesti a víceúhelníky. Kněžstvo jest vyznačeno mnohoúhelníky o takovém množství stran, že nelze vrcholů již pozorovat, kněží sami se pokládají za dokonalé kružnice. Avšak ženy! Ty jsou odkázány na úsečky na obou koncích špičaté; pod trestem smrti musí jdouce na ulici volati: Pozor! pozor! Jinak jsouce skoro neviditelné, mohly by smrtelně zraniti muže. V domech, pravidelně pětiúhelníkových, jest jim vykázán zvláštní vchod (viz obr. 70). *Abbot* velmi podrobně popisuje život a zvyky těchto stínů; románovou zápletku tvoří náhlý vpád trojrozměrné koule do tohoto dvojrozměrného státu. Hrdina románu, Čtverec, pokládá hosta za kněze vysokého stupně; může měniti velikost svého obvodu, ba dokonce může i zmizeti, seznámí se s ním, a když Koule není s to přesvědčiti Čtverec o existenci třetího rozměru, prostě ho ssebou vezme do třírozměrného prostoru. Užaslý Čtverec vidí nyní pravé geometrické divy, spatřuje vnitřek svých spoluobčanů atd. Ale záhy jest učeň nad mistra: Čtverec nyní souží Kouli otázkami a výklady, existuje-li i pro ni vícerozměrný prostor a svoji tragickou ironii zaplatí Čtverec vyhazovem do svého dvojrozměrného prostoru. Ale ani on není prorokem ve své vlasti; marně se snaží poučiti spoluobčany o svých zážitcích z třírozměrného prostoru, svojí naukou, že jejich kněží nejsou nejdokonalejšího tvaru,



Obr. 76.

pobouří mocné svého světa, jest souzen a odsouzen k doživotnímu žaláři.

Pobyt třírozměrného pana *Hontina* ve čtyřrozměrném prostoru popisuje *R. Weitzenböck* ve své znamenité knize: Der vierdimmensionale Raum takto (překlad *Ot. Borůvky*, Věda a Život, roč. VIII., str. 145-6): „Pan Hontin objeví jednoho dne čtvrtý rozměr, který jest mu po theoretické stránce již dávno znám. Zpozoruje, že vlivem určitých fysikálních a chemických procesů může způsobiti, že jeho pravá ruka zmizí z našeho prostoru. K tomu stačí malé soustředění vůle; povolí-li, objeví se ruka opět v našem prostoru. Zmizelá ruka zůstává při tom spojena s paží a nevznikají při tom zvláštní pocity. Jenom vidí, že na místě, kde ruka mizí, jsou viditelny kosti, svaly atd., jako by byla přeříznuta. Při ohmatání jest toto místo bolestivé a vzbuzuje pocit zlomeniny.

Pan Hontin pochopí rychle ohromný dosah svého objevu. Důkladnými pokusy se mu brzy podaří vsunouti do čtyřrozměrného prostoru i větší části svého těla a zase je vrátiti do našeho světa. Může také do čtyřrozměrného prostoru vsunouti jiné předměty. Nebo vsune na př. do čtyřrozměrného prostoru celou dolní končetinu a malým zpátečním pohybem vysune botu i s jejím obsahem zpět do našeho prostoru; tato bota a část nohy, která v ní jest, jeví se pak, jako by byla odtržena od těla a volně se vznášela ve vzduchu.

Nejpodivnější věci však zažije, když se mu po několika marných pokusech podaří do čtyřrozměrného prostoru vsunouti hlavu. Nejprve nevidí nic; pak se mu objeví směs úseček a křivek čar, které se při pohybování hlavou prostupují, zkracují a protahují, zkrátka mění podivným způsobem. Pan Hontin usuzuje: Moje hlava jest v jakémsi novém trojrozměrném prostoru; tento seče trojrozměrný prostor, v němž byla dříve, v rovině, a proto vidím v původním trojrozměrném prostoru jenom řezy jednotlivých předmětů s touto rovinou. Pan Hontin si tento úsudek prakticky ověří tak, že pozoruje zpola naplněnou krabici na cigarety. Opatrným pohybováním se mu podaří zjistiti řadu rovinných řezů, z nichž snadno vykonstruuje krabici i s jejím obsahem. Pan Hontin pokračuje ve svých pokusech a nabude brzy zběhlosti v tom směru, že si rychle vykonstruuje trojrozměrné předměty z rovinných řezů, které vidí rychle za sebou. Dovede rozeznati trojrozměrné předměty, které drží v ruce a ve čtyřrozměrném prostoru jimi pohybuje. Naučí se přehlédnouti vnitřek uzavřených skříní v našem prostoru, může čísti z knih, které před ním leží uzavřeny. Jest pro něj hračkou proměniti levou botu v pravou, svléci košili, aniž by odložil vestu, vytáhnouti nohu ze zašněrované boty anebo vyjmouti předmět ze zamčeného stolu.

Posud se dařilo panu Hontinovi uchovati pokusy v tajnosti a jest přirozené, že si položí otázku, zda má svým spoluobčanům oznámiti svůj objev. Po zralé úvaze se rozhodne svěřiti své tajemství *Dru Willsovi*, s nímž se častěji bavil o geometrii a jehož bodrého rozumu si velice váží. Snadno si představíme údiv pana *dra Willse*, když mu pan Hontin po prvé předvedl své pokusy o čtyřrozměrném prostoru. V následujících dnech probírají spolu možnosti, které přináší objev pana Hontina. Jest to především nezranitelná moc. Člověk, mající možnost pohybu do čtyřrozměrného prostoru, byl by v naprosté převaze nad ostatními. Pro něj by neexistovalo listovní tajemství; z nejpevnějších pokladen mohl by vyjmouti předměty, aniž by se dotkl stěn; viděl by skryté poklady v zemi; moc zákona by na něj nemohla a život každého jednotlivce z jeho okolí byl by v jeho rukou. Pan Hontin se svým přítelem přišli k poznání, že svět by vůči takovému nadčlověku zaujal stanovisko naprosto nepřátelské a snažil by se všemi způsoby, aby jej zničil, neboť zdi žaláře by pro něj neexistovaly."

Někteří autoři připouštějí, že my lidé trojrozměrní a žijící v trojrozměrném prostoru jsme do značné míry závislí na dobré či špatné náladě čtyřrozměrných bytostí, ovšem existují-li. Prý jsme ustavičně vystaveni jejich nediskretní zvědavosti, mohou prý nám bráti peníze ze zavřených tobolek, vypíjeti nápoje z uzavřených lahví a do našich útrob nebezpečně vsahovati. Není to právě příjemná myšlenka; bohudíky, není však oprávněna. Naše tvrzení, že dvojrozměrná bytost může jednorozměrnou bytost zbaviti vězení jednorozměrného prostoru a právě tak my osobu dvojrozměrnou, není zcela správné; líčení takového počinu jest vlastně myšlenkový pokus. Jako my nemůžeme chopiti předmět pouze o dvou rozměrech, nemůže bytost čtyřrozměrná chopiti žádný předmět třírozměrný; to, co my v běžném slova smyslu vydáváme za předmět dvojrozměrný, jest ve skutečnosti věc trojrozměrná, jejíž třetí rozměr jest nepatrný. Analogicky pak jsme chráněni před zásahy ze čtvrtého rozměru od případných zlovolných jeho obyvatelů.

XII. ZÁVĚR

Nelze přesně říci, z kterého spisu ten neb onen problém byl přijat, tento seznam knih spíše udává, kde se čtenář může setkati s podrobnějším výkladem i jinými úlohami.

1. Největší německé dílo tohoto druhu (a asi vůbec největší) s bohatými literárními i historickými údaji jest *Ahrens*: Mathematische Unterhaltungen und Spiele I., II.; vzniklo z jednodílného spisu téhož názvu vyšlého v r. 1901. Stručně o matematických hrách a zábavách pojednává týž autor ve 170. svazečku sbírky Natur und Geistes Welt 1911.
2. *Schubert:* Mathematische Mussestunden I., II., III.; nové jednodílné přepracování pochází od Fittinga. Poslední vydání VII. z r. 1941.
3. *Lietzmann:* Lustiges und merkwürdiges von Zahlen und Formen, IV. vyd. 1930.
4. *Rademacher-Toeplitz:* Von Zahlen und Figuren, 1930.
5. *W. Speling:* Kuriose Probleme der Arithmetik, Geometrie, Mathematik, Optik, Physik. Týž: Denkspiele für kluge Köpfe.
6. *Lietzmann-Trier:* Wo steckt der Fehler?
7. *Mittenzwey:* Mathematische Kurzweil.
8. *Kraitchik:* Les Mathématiques des Jeux, 1932; asi nejobsažnější dílo francouzské.
9. *Lucas:* Récréations mathématiques ve čtyřech dílech a četných vydáních.
10. *Sainte Lague:* Avec des nombres et des lignes, 1937.
11. *W. W. Rouse Ball-J. Fitz Patrick:* Récréations mathématiques des temps anciens et modernes (četná vydání anglického originálu přeloženého do italštiny i francouzštiny).

Viz též literární údaje v textu.

OBSAH:

Spisovatel	*Ph. Dr Karel Čupr*
Název díla	*GEOMETRICKÉ HRY A ZÁBAVY*
Vydala	*Jednota československých matematiků a fysiků*
roku	*1949*
v edici	*Cesta k vědění, svazek 38*
za redakce	*Dr R. Brdičky, Dr M. A. Valoucha, Dr F. Vyčichla a Dr O. V. Zicha*
Vytiskla	*knihtiskárna Prometheus v nár. správě v Praze*
Stran	*104, obrazců 76*
Vydání	*prvé (4000 výt.)*
Cena	*Kčs 40,—*