Vektory a tensory

CESTA K VĚDĚNÍ SV. 25

Dr VLADIMÍR RYŠAVÝ

VEKTORY A TENSORY

CESTA K VĚDĚNÍ

Dr. Vladimír Ryšavý:

VEKTORY A TENSORY.

Jedním z důležitých matematických pojmů je pojem vektoru; jeho upotřebení v analytické a diferenciální geometrii a zvláště ve fysice přispělo k zjednodušení výpočtů a umožnilo proniknouti do podstaty mnoha věcí.

Prof. Ryšavý ve své knížce přibližuje a objasňuje tento pojem způsobem v novějších učebnicích diferenciální geometrie a fysiky obvyklým: jako veličinu, která má v určité soustavě souřadnicové složky, které při přechodu k jiné souřadnicové soustavě se mění podle určitého zákona. Paralelně k této definici a symbolice složkové užívá se však také přímé symboliky, která je názorná a ve fysikálních aplikacích (v trojrozměrném prostoru) hojně používaná.

K 24,–

C E S T A K V Ě D Ě N Í

PhDr VLADIMÍR RYŠAVÝ

VEKTORY A TENSORY

(ELEMENTÁRNÍ ÚVOD)

Se 20 obrazci

Vyšlo jako 25. svazek sbírky
CESTA K VĚDĚNÍ
vydávané Jednotou českých matematiků a fysiků v Praze za redakce
Dra R. BRDIČKY, Dra F. VYČICHLA a Dra L. ZACHOVALA

1 9 4 4

NÁKLADEM JEDNOTY ČESKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ
V GENERÁLNÍ KOMISI NAKLADATELSTVÍ PROMETHEUS V PRAZE
TISKEM KNIHTISKÁRNY „PROMETHEUS" V PRAZE VIII

PŘEDMLUVA.

Pojem vektoru se zrodil patrně v tom okamžiku, kdy si holandský inženýr Stevin počal znázorňovati síly úsečkami (kolem r. 1600). Tím rozpoznal abstrakcí v tak různorodých pojmech společný znak, že jsou to veličiny určené nejen velikostí, nýbrž i směrem. Trvalo však poměrně dlouho, nežli byla vlivem geometrie a fysiky poznána důležitost vektorů a položen základ vektorového počtu. Zásluhu o to mají Möbius spisem „Der barycentrische Kalkül“, Lipsko 1827; Grossmann spisem „Ausdehnungslehre“, Berlin 1844; Hamilton spisem „Lectures on quaternions“, Dublin 1853. Geometricky propracovávali nauku Bellavitis, Marcolongo a Buralli-Forti. Potřebám matematické fysiky přizpůsobili nový počet Heaviside, Gibbs a Föppl.

Počet tensorový se vyvinul rovněž z potřeb geometrie a matematické fysiky. Obšírný spis obsahující vektorovou analysu i počet tensorový vydali W. Gibbs a B. Wilson: Vektoranalysis, 1901. Třetí vydání z r. 1916 má 436 stran. Složkové vybudování počtu tensorového podali r. 1901 Ricci a Levi-Cività v 54. sv. Mathem. Annalen. Protože se tensorový počet výborně uplatnil v teorii relativnosti, bývá obsažen v knihách o této teorii. Zvláštní pozornosti tu zasluhuje spis Hermanna Weyla „Raum-Zeit-Materie“ (1918 prvé vydání). Další jsou Galbrun „Introduction mathématique à la Relativité“ (1923), Brillouin „Les tenseurs en méchanique et en elasticité“ (1938), Juvet „Le calcul tensoriel“ (1923), Marais „Introduction géometrique à l'étude de la Relativité“ (1923).

V češtině vyšly vedle Bellavitisovy metody equipolencí (1874) A. Libický „Vektorová analysis“ (1914) a dále K. Dusl „Úvod do vektorového počtu“ (1923). Jinak pouze úvody o vektorech v učebnicích fysiky, jako B. Kučera „Základy mechaniky tuhých těles“ (1921), F. Nachtikal „Technická fysika“ (druhé vyd. 1937). O tensorech je zmínka v Nachtikalově „Principu relativity“ (1922), v Kučerových Základech mechaniky a v Duslově Úvodu. Všechna tato pojednání užívají t. zv. přímé symboliky, ačkoliv se aspoň v tensorovém počtu více osvědčilo označení složkové, které je stejně stručné, ale názornější a přehlednější, takže spíš zabraňuje omylům. Užívá ho také moderní učebnice V. Hlavatého „Diferenciální geometrie křivek a ploch a tensorový počet“ (str. 445, 1937), kterou doporučujeme k hlubšímu studiu.

V této elementární knížce užívá se v počtu vektorovém symboliky přímé i složkové, aby si čtenář zvykl na obojí způsob; začátky počtu tensorového jsou však vykládány jen ve tvaru složkovém, který jest přehlednější. Čtenář musí jen překonati počáteční nechuť k indexům, aby poznal, že počet tensorový je v podstatě velmi jednoduchý. Obtížnost studia většiny pojednání o tensorovém počtu spočívá v tom, že se pojem tensoru definuje abstraktně v plné všeobecnosti hned na počátku. Náš úvod vychází pro snazší pochopitelnost od několika názorných příkladů tensorů druhého řádu, pak teprve definuje tensor obecně a odvozuje základy tensorové algebry a analysy. Předpokládá se znalost základů analytické geometrie, pojmu derivace obyčejné a parciální; základní věty o determinantech jsou stručně uvedeny v dodatku. Integrálu bylo užito jen ve větě Gaussově a Stokesově v názorném pojetí. Na konci jest uvedeno několik příkladů vektorů a tensorů čtyrrozměrného světa Minkowskiho jako úvod k relativitě.

Užitečnost a krása počtu tensorového se uplatňují hlavně v prostorech křivých, ale rozsah knížky a její elementární ráz nedovolily výklad těchto obtížnějších partií. Má jen čtenáře připraviti pro četbu pojednání důkladnějších a sloužiti jako názorný úvod ke studiu na př. spisů H. Weyla.

Obrazce laskavě narýsoval p. Ivo Zahálka, studující stavitelství, kterému zde děkuji. Tiskárně „Prometheus" náleží dík a uznání za pečlivé provedení zvlášť obtížné sazby a tisku. Za odbornou pomoc při čtení korektur děkuji p. doc. dru F. Vyčichlovi.

V Praze r. 1941.

Autor.

1. Úvod. Skaláry, vektory, posunutí. V našich úvahách budeme předpokládati znalost základů Euklidovské geometrie trojrozměrného prostoru a nebudeme čtenáře unavovati výklady, co je to bod, přímka, rovina, jak měříme úsečky zvolenou jednotkou délky, pojem shodnosti dvou útvarů a pod. Spoléháme se tu úplně na názor a obvyklé výklady elementární školské geometrie a fysiky.

V úvodě do fysiky však poznáváme veličiny dvojího druhu. *Skaláry* mají pouze *velikost*, jako na př. objem těles, hustota, teplota, čas, práce, energie, potenciál, elektrické množství a j. K jejich určení stačí údaj na jediné stupnici (škále) a odtud pochází také jméno skalár.

Vektory mají nejen *velikost*, nýbrž ještě *směr*. Jsou to na př. posunutí, rychlost postupná, zrychlení, síla, intensita pole elektrického, magnetického, gravitačního, proud a pod. Na fysikálním rozměru veličiny při tom nezáleží: cm je rozměr posunutí (vektoru), ale také je to rozměr elektrické kapacity (skaláru).

Základní vlastnosti vektorů odvodíme si nejprve z názoru *posunutí* jakožto typu vektorů a odtud pak vyabstrahujeme soustavu požadavků (axiomů), kterým hoví obecný pojem vektoru. *Posunutí* je takový pohyb (bodu, tělesa, celého prostoru), při němž všechny body opisují úsečky vzájemně stejné a rovnoběžné téhož smyslu. Přejde-li při daném posunutí $\mathfrak{A}$ bod A_1 do bodu A_2, současně body B_1, C_1, ... do bodů B_2, C_2, ..., jest $A_1A_2 \# B_1B_2 \# C_1C_2 \# \ldots$ Tento vektor posunutí $\mathfrak{A}$ můžeme znázorniti úsečkou A_1A_2 opatřenou šípem (obr. 1). Podstatnou vlastností Euklidovského prostoru pak jest, že je možno dalším posunutím $\mathfrak{B}$ (A_1B_1) ztotožniti vektor A_1A_2 s předem udaným vektorem $B_1B_2 = A_1A_2$. V tomto smyslu pak říkáme, že A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 představují *týž vektor v různých* bodech prostoru A_1, B_1, C_1.

Výslovné uvádění této věty zdá se snad zbytečné, ale je třeba zdůrazniti, že existují prostory, v nichž nelze mluviti o témž vektoru v různých bodech v uvedeném slova smyslu.

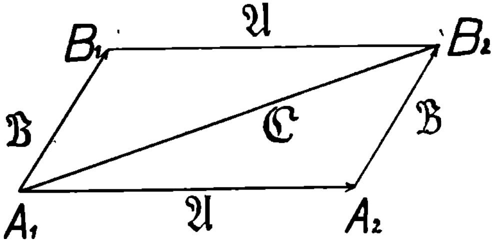
Slovem vektor budeme tedy v dalším rozuměti zatím posunutí, ač později to bude pojem obecnější.

Označování vektorů je dosud nejednotné, ale poměrně nejvíce se vžilo označení frakturou: $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots$ Vektory jednotkové délky budeme značiti malými písmeny téhož znění s nulou nahoře, tedy $\mathfrak{a}^0$, $\mathfrak{b}^0, \ldots$; počet těchto jednotek v daném vektoru písmeny latinskými $A, B, C, \ldots,$ $a, b, c, \ldots$ Je tedy na př.

$$\mathfrak{A} = A \cdot \mathfrak{a}^0, \ \mathfrak{c} = c \cdot \mathfrak{c}^0$$

vektor $\mathfrak{A}$ (resp. $\mathfrak{c}$) absolutní velikosti A (resp. c) a směru jednotkového vektoru $\mathfrak{a}^0$ (resp. $\mathfrak{c}^0$). Toto symbolické označování vektorů je sice nejstručnější, ale stává se při složitějších operacích hromaděním dalších symbolů nedosti jasným a průhledným, takže se vyvinula ještě jiná označení na základě soustav souřadnic. O tom později.

2. Počítání s vektory. Sečítání vektorů. Základní vlastnost posunutí v Euklidovském prostoru je tato: Dvě posunutí $\mathfrak{A} \equiv A_1 \to A_2 \equiv B_1 \to B_2$, $\mathfrak{B} \equiv A_1 \to B_1 \equiv A_2 \to$ $\to B_2$ (obr. 1) po sobě provedená lze nahraditi jediným posu-



Obr. 1.

nutím $\mathfrak{C} \equiv A_1B_2$, které sestrojíme tak, že v koncovém bodě A_2 vektoru $\mathfrak{A}$ naneseme vektor $\mathfrak{B}$ se zřetelem k jeho směru i velikosti ($\mathfrak{B} = A_2B_2$) a spojíme počáteční bod A_1 vektoru $\mathfrak{A}$ s koncovým bodem B_2 vektoru $\mathfrak{B}$ (vektorový trojúhelník). Výsledný vektor $\mathfrak{C}$ nazýváme součtem obou vektorů $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ a značíme

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \mathfrak{B} + \mathfrak{A}, \tag{1}$$

neboť $\mathfrak{C}$ nezávisí na pořádku obou posunutí (zákon komutativní). Při více sčítancích obdržíme postupným přičítáním sčítanců součet

$$\mathfrak{V} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \dots + \mathfrak{K} \tag{2}$$

vektorovým mnohoúhelníkem obecně prostorovým, ve zvláštním případě rovinným. Platí též zákon asociativní

$$(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) + \mathfrak{C} = \mathfrak{A} + (\mathfrak{B} + \mathfrak{C}). \tag{3}$$

Sečítáním n stejných sčítanců $\mathfrak{A}$ nabývá smyslu násobení vektoru $\mathfrak{A}$ celým číslem n, které píšeme $n\mathfrak{A} = \mathfrak{A}n$. Naopak přechod od vektoru $\mathfrak{B} = n\mathfrak{A}$ k vektoru $\mathfrak{A}$ jest dělení vektoru $\mathfrak{B}$ celým číslem n: $\mathfrak{A} = \dfrac{1}{n}\mathfrak{B}$. Tím pak nabývá významu i symbol $\dfrac{m}{n}\mathfrak{A}$, násobení vektoru libovolným zlomkem a konečně i každým reálným číslem λ (tedy skalárem).

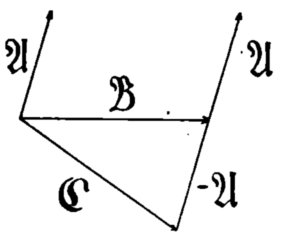
Odčítání vektorů. Je-li vektor $\mathfrak{A} = A_1A_2$ (obr. 1), značíme vektor opačný $A_2A_1 = -\mathfrak{A}$ jako vektor negativní k původnímu. Odčítání vektoru $\mathfrak{A}$ pak definujeme jako přičítání vektoru $-\mathfrak{A}$. Na obr. 2 máme podle toho sestrojen vektor

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{B} - \mathfrak{A} = \mathfrak{B} + (-\mathfrak{A}). \tag{4_1}$$

Dále jest patrno, že

$$\mathfrak{A} - \mathfrak{A} = 0,\quad \mathfrak{A} + 0 = \mathfrak{A}. \tag{4_2}$$

Tím je stanoven význam vektoru nulového.



Obr. 2.

Násobení vektoru skalárním číslem λ jsme již definovali. Požadujeme pro ně ještě platnost vztahů:

$$\left.\begin{aligned} (\lambda + \mu)\mathfrak{A} &= \lambda\mathfrak{A} + \mu\mathfrak{A} \text{ (prvý zákon distributivní)},\\ \lambda(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) &= \lambda\mathfrak{A} + \lambda\mathfrak{B} \text{ (druhý zákon distributivní)},\\ \lambda(\mu\mathfrak{A}) &= (\lambda\mu)\,\mathfrak{A} \text{ (zákon asociativní)},\\ 1\,.\,\mathfrak{A} &= \mathfrak{A};\ 0\,.\,\mathfrak{A} = 0 \text{ (nulový vektor)}. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Pro racionální λ, μ plyne platnost těchto vztahů již z pravidel o sčítání vektorů.

3. Příklady a úlohy. 1. Vektory téhož směru slovou kolineární, jako $\mathfrak{a}$, $A\mathfrak{a} = \mathfrak{A}$. Platí-li tedy mezi dvěma vektory rovnice tvaru $m\mathfrak{A} = n\mathfrak{B}$ pro skaláry m, n, jsou oba vektory kolineární. Při přímočarém pohybu bodu hmoty m (skalár) jsou vektory dráha $\mathfrak{s}$, rychlost $\mathfrak{v} = \frac{1}{t}\,\mathfrak{s}$, zrychlení pohybu rovnoměrně zrychleného $\mathfrak{a} = \frac{1}{t}\,\mathfrak{v}$, síla $\mathfrak{P} = m\mathfrak{a}$, impuls $\mathfrak{P}_t$, hybnost $m\mathfrak{v}$ vesměs vektory kolineární. Platí pro ně známé rovnice mechaniky právě napsané. Také $\mathfrak{P}_t = m\mathfrak{v}$. Vektorová podstata všech těchto veličin plyne z toho, že dráhy $\mathfrak{s}$ jsou posunutí a že všechny ostatní veličiny jsou z dráhy $\mathfrak{s}$ odvozeny násobením (dělením) skalárem. Odtud plyne pak vektorové sčítání rychlostí, zrychlení, sil, impulsů, hybností.

2. Jsou-li na př. na obr. 1 vektory $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ síly působící na bod A_1, jest $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ jejich výslednice (resultanta). Vektory $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ tvořící vektorový trojúhelník leží v jediné rovině a nazývají se proto komplanární. Zavedeme-li sílu $\mathfrak{D} = -\mathfrak{C}$, platí pro tyto síly vztah

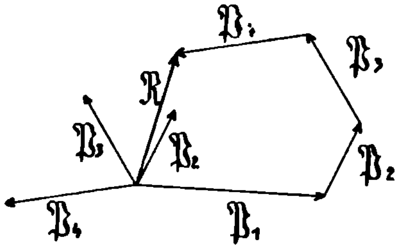
$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{D} = 0 \qquad (5)$$

a jejich účinek se ruší. Koncový bod vektoru $\mathfrak{D}$ splývá s počátečním bodem A_1 vektoru $\mathfrak{A}$, neboli vektorový trojúhelník je uzavřen. Při více silách $\mathfrak{P}_i$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ působících v jediné rovině jest výslednice $\mathfrak{R} = \mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2 + \ldots + \mathfrak{P}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{P}_i$ v téže rovině a sestrojí se vektorovým mnohoúhelníkem (obr. 3).

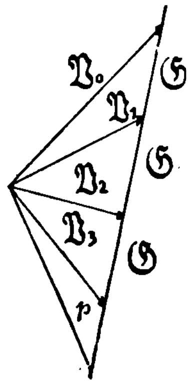
Zavedeme-li opět $\mathfrak{P} = -\mathfrak{R}$, jest $\mathfrak{P} + \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{P}_i = 0$, mnohoúhelník silový se uzavírá v bodě A; účinek sil na bod se ruší.

V obecném případě není mnohoúhelník vektorový rovinný, nýbrž prostorový, ale výraz pro výslednici zůstává týž i s důsledkem pro mnohoúhelník uzavřený.

3. Nanášíme-li rychlosti $\mathfrak{v}_i$ v různých okamžicích pohybu z jediného bodu O, vyplní konečné body těchto vektorů čáru, která se nazývá **hodografem** daného pohybu (Möbius r. 1843).



Obr. 3.



Obr. 4.

Na obr. 4 jest patrný hodograf šikmého vrhu, při němž k původní rychlosti $\mathfrak{v}_0$ se za každou vteřinu vektorově přičítá zrychlení $\mathfrak{g}$. Hodograf rychlosti je přímka p. Rychlost na konci libovolné vteřiny t jest

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_0 + \mathfrak{g} \, . \, t. \tag{6}$$

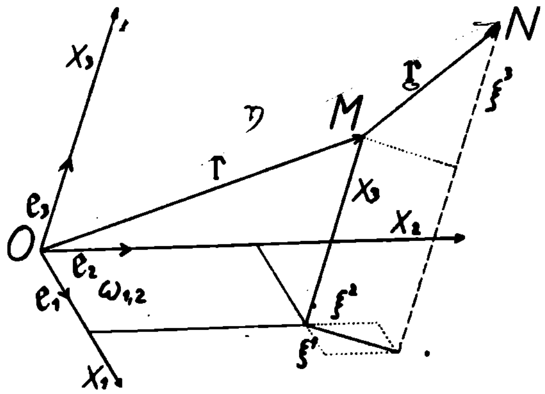
Vektory $\mathfrak{v}_i$, jejichž koncové body leží na přímce p jsou příkladem vektorů **terminokolineárních**, které jsou ovšem současně komplanární. Rovnice (6) při proměnlivém parametru t jest vektorovou rovnicí přímky p.

Úlohy pro cvičení. 1. Dvě síly svírají v bodě A úhel α. Dokažte, že pro absolutní hodnotu R výslednice platí: $R^2 = P_1^2 + P_2^2 + 2P_1P_2 \cos \alpha$.

2. Vypočtěte z hodografu vodorovného vrhu rychlost v obecném okamžiku vektorově i co do absolutní hodnoty.

3. Dokažte, že pro dva kolineární vektory $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ platí $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}t$, kde $t = A : B$. — [Z rovnosti $Aa = Bat$ plyne nutně $A = Bt$.]

4. Vektory v soustavě souřadnic. V trojrozměrném prostoru veďme počátkem O tři osy x_1, x_2, x_3, které neleží v jedné rovině a takové, že nejkratší otočení kladné osy x_1 do kladné osy x_2 se jeví od kladného konce osy x_3 ve smyslu kladném (proti ručičkám hodinovým). Soustavu os nazýváme v tomto případě pravotočivou (obr. 5). Kdybychom změnili smysl jedné z os v opačný, dostali bychom méně užívanou soustavu levotočivou.



Obr. 5.

Libovolným bodem M v prostoru veďme roviny rovnoběžné k rovinám os souřadnic; tyto roviny utínají na osách úseky délek x_1, x_2, x_3 měřených ve zvolené délkové jednotce.

Označíme-li oba konce každé osy různými znaménky $+$ a $-$, odpovídá každému bodu v prostoru jediná trojice souřadnic x_1, x_2, x_3 a naopak.

Úhly mezi osami $\omega_{1,2}$, $\omega_{2,3}$, $\omega_{3,1}$ mohou být kosé, pak nazýváme souřadnice kosoúhlými, nebo jsou vesměs pravé a souřadnice se nazývají pravoúhlými, nebo kartézskými.*) Vektor $OM = \mathfrak{r}$ slove posiční (polohový) vektor bodu M. Nazveme-li $\mathfrak{e}_i^0$ jednotkový vektor ve směru osy x_i, ($i = 1, 2, 3$), můžeme psáti podle pravidla o sčítání vektorů

$$\mathfrak{r} = x_1\mathfrak{e}_1^0 + x_2\mathfrak{e}_2^0 + x_3\mathfrak{e}_3^0. \qquad (7)$$

*) Podle zakladatele analytické geometrie René Descartesa, který se psal latinsky Cartesius.

Vektory $x_i\mathfrak{e}_i^0$ se nazývají **složkami** daného vektoru. Provedený rozklad vektoru ve tři nekomplanární složky jest jednoznačný. **Nulový vektor** má všechny složky zřejmě nulové. Každý vektor v rovině $\mathfrak{e}_1^0\mathfrak{e}_2^0$ má složku $x_3\mathfrak{e}_3^0$, tedy i x_3 rovno nule a lze jej psáti ve tvaru

$$\mathfrak{a} = x_1\mathfrak{e}_1^0 + x_2\mathfrak{e}_2^0. \tag{8}$$

Považujeme-li x_1, x_2 za proměnné, jsou všechny vektory $\mathfrak{a}$ komplanární vytvořujíce rovinu $\mathfrak{e}_1^0\mathfrak{e}_2^0$. Analogické věty platí pro další dvě souřadnicové roviny.

Mysleme si nyní libovolný vektor $\mathfrak{x} = MN$ v bodě M, nikoli v počátku. Kdybychom si v počátečním bodě M vedli vektory $\mathfrak{e}_1^0$, $\mathfrak{e}_2^0$, $\mathfrak{e}_3^0$ rovnoběžně s původně danými v bodě O, rozložil by se vektor $\mathfrak{x}$ také ve tři nekomplanární složky $\xi^i\mathfrak{e}_i$ podle vztahu

$$\mathfrak{x} = \xi^1\mathfrak{e}_1^0 + \xi^2\mathfrak{e}_2^0 + \xi^3\mathfrak{e}_3^0. \tag{9}$$

Proč píšeme indexy činitelů ξ nahoře, vysvitne později; do závorek je nepíšeme, protože záměna s mocniteli v dalším nenastane. Složkami vektoru nazýváme často nejen vektory $\xi^i\mathfrak{e}_i^0$, nýbrž i samotné činitele ξ^i, kteří mohou nabývati libovolných reálných hodnot. Nazveme-li vektor $ON = \mathfrak{y}$, jest patrně

$$\mathfrak{r} + \mathfrak{x} = \mathfrak{y}, \text{ neboli } \mathfrak{x} = \mathfrak{y} - \mathfrak{r}.$$

Je-li $\mathfrak{y} = y_1\mathfrak{e}_1^0 + y_2\mathfrak{e}_2^0 + y_3\mathfrak{e}_3^0$, máme dosazením

$$\xi^i = y_i - x_i, \ (i = 1, 2, 3).$$

Tři libovolné vektory definujeme jako **lineárně nezávislé**, nedá-li se žádný z nich vyjádřiti lineárně pomocí druhých dvou; když tedy není možný vztah

$$\alpha_1\mathfrak{a}_1 + \alpha_2\mathfrak{a}_2 + \alpha_3\mathfrak{a}_3 = 0$$

pro jiné hodnoty α_i než pro $\alpha_i = 0$. Naopak, platí-li uvedený vztah, jeví se závislost vektorů tím, že leží v jedné rovině. Tři **libovolné** lineárně nezávislé vektory $\mathfrak{e}_i$ v bodě O slovou **base**. Každý vektor $\mathfrak{x}$ v O lze vyjádřiti pomocí této base jen jedním způsobem

$$\xi^1 \mathfrak{e}_1 + \xi^2 \mathfrak{e}_2 + \xi^3 \mathfrak{e}_3. \qquad (10)$$

Neboť kdyby platilo současně

$$\mathfrak{x} = \eta^1 \mathfrak{e}_1 + \eta^2 \mathfrak{e}_2 + \eta^3 \mathfrak{e}_3,$$

dostali bychom odečtením obou vyjádření

$$0 = (\xi^1 - \eta^1)\, \mathfrak{e}_1 + (\xi^2 - \eta^2)\, \mathfrak{e}_2 + (\xi^3 - \eta^3)\, \mathfrak{e}_3,$$

tedy rovnici tvaru (10), což odporuje předpokladu o nezávislosti vektorů $\mathfrak{e}_i$ kromě případu $\xi^i = \eta^i$. Trojrozměrnost prostoru vystihuje axiom, že v každém bodě existují trojice lineárně nezávislých vektorů; naproti tomu čtyři vektory jsou vždy lineárně závislé, jak hned dokážeme. Buďtež $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ tři lineárně nezávislé vektory o složkách a_i, b_i, c_i, na př. $\mathfrak{a} = a_1 \mathfrak{e}_1 + a_2 \mathfrak{e}_2 + a_3 \mathfrak{e}_3$. Máme dokázati, že pro každý další vektor $\mathfrak{d}$ lze nalézti tři čísla λ, μ, ν taková, aby

$$\mathfrak{d} = \lambda \mathfrak{a} + \mu \mathfrak{b} + \nu \mathfrak{c}. \qquad (11)$$

Rozepíšeme-li všechny vektory složkově v basi $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3$, požadujeme, aby bylo možno řešiti rovnice

$$\begin{aligned} \lambda a_1 + \mu b_1 + \nu c_1 &= d_1, \\ \lambda a_2 + \mu b_2 + \nu c_2 &= d_2, \\ \lambda a_3 + \mu b_3 + \nu c_3 &= d_3. \end{aligned} \qquad (12)$$

Řešíme-li tuto soustavu pomocí determinantů (viz dodatek, 10) máme řešení $\lambda = D_1 : D$, $\mu = D_2 : D$, $\nu = D_3 : D$. Při tom D jest determinant součinitelů levých stran rovnic, D_i pak týž determinant, v němž i-tý sloupec je zastoupen činiteli d_i na pravé straně. Řešení má význam, je-li $D \neq 0$. To však platí vždy, jsou-li vektory $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ lineárně nezávislé. Jejich lineární závislost by vyžadovala totiž platnost vztahu $m\mathfrak{a} + n\mathfrak{b} + p\mathfrak{c} = 0$, neboli řešitelnost 3 rovnic

$$m a_i + n b_i + p c_i = 0, \; (i = 1, 2, 3) \qquad (13)$$

čísly m, n, p, která nejsou vesměs rovna nule. Ale všechny determinanty D_1, D_2, D_3 jsou tu rovny nule, protože mají jeden sloupec z nul. Pak by muselo býti také $D = 0$, jinak by bylo $m = n = p = 0$. Kdyby tedy byl determinant $D = 0$, nebyly by vektory $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ lineárně nezávislé proti předpokladu. Rovnice (12) jsou pak řešitelny a čtyři vektory jsou vždy lineárně závislé.

Souřadnice kartézské předpokládají vesměs pravé úhly os souřadnic. Jednotkové vektory ve směru os označíme $\mathfrak{i}_1, \mathfrak{i}_2, \mathfrak{i}_3$. Každý vektor $\mathfrak{x}$ bude pak vyjádřen podobně jako v (9)

$$\mathfrak{x} = \xi^1\mathfrak{i}_1 + \xi^2\mathfrak{i}_2 + \xi^3\mathfrak{i}_3. \tag{14}$$

Toto vyjádření se nazývá polokartézské. Vektor $\mathfrak{x}$ je ovšem určen také jen složkami (ξ^1, ξ^2, ξ^3) a můžeme jej proto označiti prostě vektor ξ^i. Toto označení je složkové, kartézské. Vektory jednotkové jsou $\mathfrak{i}_1$ (1; 0; 0), $\mathfrak{i}_2$ (0; 1; 0), $\mathfrak{i}_3$ (0; 0; 1). Vektorové označení $\mathfrak{x}, \mathfrak{A}, \mathfrak{b}, \ldots$, které nezávisí na soustavě souřadnic nazýváme také invariantní.

5. Skalární součin dvou vektorů. V základech fysiky se učí, že síla $\mathfrak{P}$ (vektor) koná po dráze $\mathfrak{s}$ práci L, pro kterou

$$L = P \, . \, s \, . \cos \beta, \tag{15}$$

značíme-li β úhel obou vektorů a P, s jejich délky, neboli absolutní hodnoty. Jinak řečeno, práce se rovná součinu dráhy s a pravoúhlého průmětu síly do směru dráhy, neboť složka kolmá ke dráze práci nekoná (obr. 6). Práce sama je skalár.

Ve vektorovém označení ji nazýváme skalárním součinem obou vektorů $\mathfrak{P}, \mathfrak{s}$ a píšeme stručně

$$L = \mathfrak{P} \, . \, \mathfrak{s} = (\mathfrak{P}, \mathfrak{s}) = P \, . \, s \, . \cos \widehat{Ps}.\text{*)} \tag{16}$$

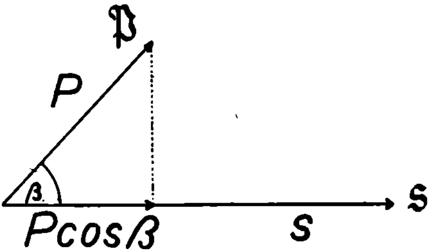
Je tedy skalární součin dvou vektorů definován účelně rovnicí (16). Všeobecně:

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = AB \cos (\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = (\mathfrak{B}, \mathfrak{A}). \tag{17}$$

---

*) Vedle označení $\widehat{PS}$ pro úhel, budeme užívati také z důvodů technických znaku (PS).

Vhodnost názvu „součin“ je podepřena také dalšími vlastnostmi definovaného výrazu. Podle (17) platí **komutativnost**. Skalární součin se rovná nule, je-li buď velikost (absol.



Obr. 6.

hodnota) jednoho z vektorů rovna nule, nebo jsou-li oba vektory k sobě kolmé. Dále platí **zákony distributivnosti**

$$(m\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = (\mathfrak{A}, m\mathfrak{B}) = m \,.\, (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}), \tag{18}$$

$$((\mathfrak{A} + \mathfrak{B}), \mathfrak{C}) = (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}, \mathfrak{C}) = (\mathfrak{A}, \mathfrak{C}) + (\mathfrak{B}, \mathfrak{C}). \tag{19}$$

Věta (18) plyne přímo ze (17). Věta (19) plyne jednak z geometrického názoru, nebo také ze známé věty, že průmět uzavřeného mnohoúhelníka do jakéhokoliv směru rovná se nule. Je to také jasné fysikálně: práce výslednice dvou sil $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ na dráze $\mathfrak{C}$ rovná se součtu prací obou sil. Opačné tvrzení by odporovalo principu zachování energie.

Skalární součin dvou stejných vektorů

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}) = A^2$$

značí čtverec absolutní hodnoty daného vektoru. Pro vektory jednotkové jest $(\mathfrak{e}, \mathfrak{e}) = 1$.

Vlastnost (19) je táž jako vlastnost čísel komplexních v obyčejné algebře; vede proto k témuž pravidlu o násobení mnohočlenu mnohočlenem, na př.:

$$(\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C}, \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{B}_1) = (\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1) + (\mathfrak{B}, \mathfrak{A}_1) + \\ + (\mathfrak{C}, \mathfrak{A}_1) + (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}_1) + (\mathfrak{B}, \mathfrak{B}_1) + (\mathfrak{C}, \mathfrak{B}_1). \tag{19$_1$}$$

V označení polokartézském jest

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = (A_1\mathfrak{i}_1 + A_2\mathfrak{i}_2 + A_3\mathfrak{i}_3)(B_1\mathfrak{i}_1 + B_2\mathfrak{i}_2 + B_3\mathfrak{i}_3) = \\ = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3, \qquad (20)$$

neboť zřejmě podle (17) jest $\mathfrak{i}_j \, . \, \mathfrak{i}_k = 0$, $\mathfrak{i}_j \, . \, \mathfrak{i}_j = 1$. Odtud plyne známý výraz pro délku vektoru $\mathfrak{A}$:

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}) = A^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2, \qquad (21)$$

který přechází pro posiční vektor $\mathfrak{r}\,(x_1, x_2, x_3)$ ve výraz $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ (úhlopříčka kvádru o rozměrech x_1, x_2, x_3). Násobíme-li rovnici $\mathfrak{A} = A_1\mathfrak{i}_1 + A_2\mathfrak{i}_2 + A_3\mathfrak{i}_3$ po sobě jednotkovými vektory $\mathfrak{i}_1, \mathfrak{i}_2, \mathfrak{i}_3$, máme

$$\mathfrak{A}\mathfrak{i}_1 = A \, . \cos(\mathfrak{A}\mathfrak{i}_1) = A_1, \text{ atd.} \qquad (22)$$

Kosiny úhlů, které svírá vektor $\mathfrak{A}$ s osami souřadnic slovou směrové kosiny a rovnají se podle (22)

$$\cos(\mathfrak{A}\mathfrak{i}_1) = A_1 : A, \;\; \cos(\mathfrak{A}\mathfrak{i}_2) = A_2 : A, \;\; \cos(\mathfrak{A}\mathfrak{i}_3) = A_3 : A. \qquad (23)$$

Pro úhel ϑ dvou vektorů $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ dostaneme jednoduchý výsledek ze skalárního součinu. Označme jejich směrové kosiny pro $\mathfrak{A}$ $\cos \alpha_i$, pro $\mathfrak{B}$ $\cos \beta_i$ $(i = 1, 2, 3)$ a máme:

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = A \, . \, B \cos \vartheta = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3,$$

nebo podle rovnic (22):

$$AB \cos \vartheta = AB(\cos \alpha_1 \, . \cos \beta_1 + \cos \alpha_2 \, . \cos \beta_2 + \cos \alpha_3 \, . \cos \beta_3),$$

tedy

$$\cos \vartheta = \cos \alpha_1 \, . \cos \beta_1 + \cos \alpha_2 \, . \cos \beta_2 + \cos \alpha_3 \, . \cos \beta_3. \qquad (24)$$

To je důležitá věta analytické geometrie v prostoru. Kolmost dvou vektorů žádá tedy splnění podmínky buď

$$A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 = 0,$$

nebo

$$\cos \alpha_1 \, . \cos \beta_1 + \cos \alpha_2 \, . \cos \beta_2 + \cos \alpha_3 \, . \cos \beta_3 = 0. \qquad (25)$$

6. Cvičení. 4. Jsou dány vektory $\mathfrak{A}(\xi^i)$, $\mathfrak{B}(\eta^i)$, $\mathfrak{C}(\zeta^i), \ldots$ se svými kartézskými složkami (v závorce). Součet

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \ldots$$

je ve složkovém označení

$$\varrho^i = \xi^i + \eta^i + \zeta^i + \ldots,$$

jeho velikost

$$R = \sqrt{(\varrho^1)^2 + (\varrho^2)^2 + (\varrho^3)^2},$$

směrové kosiny

$$\cos \varphi_i = \frac{\varrho_i}{R}.$$

V polokartézském označení jest

$$\mathfrak{R} = \varrho^1 \mathfrak{i}_1 + \varrho^2 \mathfrak{i}_2 + \varrho^3 \mathfrak{i}_3.$$

5. Pro dva vektory téhož směru (ξ^i) a (η^i) musí býti

$$\xi^1 : \xi^2 : \xi^3 = \eta^1 : \eta^2 : \eta^3.$$

6. Analogicky s normálovou rovnicí přímky v rovině můžeme stanoviti rovinu v prostoru kolmicí $\mathfrak{n}$ z počátku na ni spuštěnou o směrových kosinech $\cos \alpha_i$. Pro posiční vektor $\mathfrak{r}$ libovolného bodu roviny musí býti:

$$\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{n}^0 = n, \tag{25}$$

neboli kartézsky:

$$x_1 \cos \alpha_1 + x_2 \cos \alpha_2 + x_3 \cos \alpha_3 - n = 0. \tag{26}$$

Rovnice (25) je **vektorová rovnice roviny**, rovnice (26) je normálová rovnice téže roviny.

7. Rovnice roviny dané směrem normály $\mathfrak{n}$ $(n_1; n_2; n_3)$ jdoucí bodem $(x_1; x_2; x_3)$ vyjadřuje, že vektor $\mathfrak{x}(\xi^i)$ spojující libovolný bod roviny $(X_1; X_2; X_3)$ s bodem daným jest kolmý k normále $\mathfrak{n}$. Vektorově:

$$\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{n} = 0, \tag{27}$$

kartézsky:

$$(X_1 - x_1)\, n_1 + (X_2 - x_2)\, n_2 + (X_3 - x_3)\, n_3 = 0. \tag{28}$$

8. Pro jednotkový vektor $\mathfrak{n}^0$ libovolného směru $(\cos \alpha_i)$ platí $\mathfrak{n}^0 \cdot \mathfrak{n}^0 = 1$, neboli

$$\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3 = 1. \tag{29}$$

Rovnice roviny o směru normály $n_1 : n_2 : n_3 = A_1 : A_2 : A_3$ jest obecná rovnice

$$A_1X_1 + A_2X_2 + A_3X_3 + A_4 = 0.$$

Směrové kosiny normály jsou $\cos \alpha_i = A_i : I$ pro

$$I = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}.$$

9. Úhel dvou rovin

$$A_1X_1 + A_2X_2 + A_3X_3 + A_4 = 0$$

a
$$B_1X_1 + B_2X_2 + B_3X_3 + B_4 = 0$$

je roven úhlu jejich normál. Určete jej pomocí rovnice (24) a dokažte, že kolmost rovin žádá

$$A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 = 0. \qquad (30)$$

10. Platí-li pro čtyři posiční vektory $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3, \mathfrak{r}_4$ podmínka

$$\alpha_1\mathfrak{r}_1 + \alpha_2\mathfrak{r}_2 + \alpha_3\mathfrak{r}_3 + \alpha_4\mathfrak{r}_4 = 0, \qquad (31)$$

leží jejich koncové body v jedné rovině. Vektory se nazývají terminokomplanární.

11. Dokažte, že polokartézská rovnice

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{i}_1 \,.\, r_1 \sin \omega t + \mathfrak{i}_2 \,.\, r_2 \cos \omega t$$

značí elipsu o poloosách r_1, r_2. Rovnice značí na př. Lissajousovu křivku při skládání dvou k sobě kolmých kmitů

$$\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{i}_1 \,.\, r_1 \sin \omega_1 t, \quad \mathfrak{r}_2 = \mathfrak{i}_2 \,.\, r_2 \sin (\omega_1 t + R)$$

o různých amplitudách r_1, r_2 s rozdílem fáze 90°.

12. Z rovnice pro strany trojúhelníka $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} = 0$ dokažte výpočtem $\mathfrak{a} \,.\, \mathfrak{a}$ kosinovou větu: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \,.\, \cos \alpha$!

13. Ze skalárního součinu $\mathfrak{x} \,.\, \mathfrak{x}^0 = x$ lze odvoditi

$$x_1 \cos \alpha_1 + x_2 \cos \alpha_2 + x_3 \cos \alpha_3 = x, \qquad (32)$$

je-li délka vektoru $\mathfrak{x}\,(x_1, x_2, x_3)$ označena x.

7. Skalární součin v souřadnicích kosoúhlých. Násobme skalárně vektory $\mathfrak{x}(\xi^i)$, $\mathfrak{y}(\eta^i)$ ve tvaru

$$\mathfrak{x} = \xi^1\mathfrak{e}_1^0 + \xi^2\mathfrak{e}_2^0 + \xi^3\mathfrak{e}_3^0, \quad \mathfrak{y} = \eta^1\mathfrak{e}_1^0 + \eta^2\mathfrak{e}_2^0 + \eta^3\mathfrak{e}_3^0,$$

kde $\mathfrak{e}_k^0$ značí tři nekomplanární jednotkové vektory. Podle (19_1) dostaneme

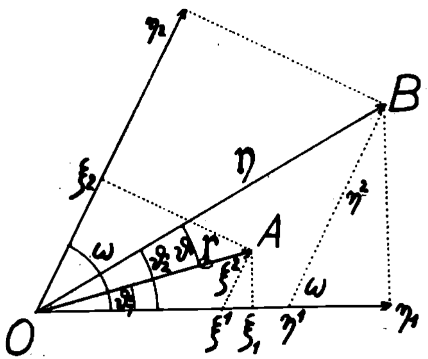
$$\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{y} = \sum_{i=1}^{3} \xi^i \mathfrak{e}_i^0 \,.\, \sum_{k=1}^{3} \eta^k \mathfrak{e}_k^0 = \sum_{i=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \xi^i \eta^k \mathfrak{e}_i^0 \mathfrak{e}_k^0. \qquad (33)$$

Uvažme nyní, že $\mathfrak{e}_i^0 \mathfrak{e}_k^0 = 1 \,.\, 1 \,.\, \cos \measuredangle(\mathfrak{e}_i^0 \mathfrak{e}_k^0)$ je kosinus úhlu obou jednotkových vektorů $\mathfrak{e}_i^0$, $\mathfrak{e}_k^0$, který označíme stručněji ω_{ik}. Rozepíšeme-li tedy rovnici (33), vychází

$$\begin{aligned} \mathfrak{x} \cdot \mathfrak{y} = \xi^1\eta^1 + \xi^2\eta^2 + \xi^3\eta^3 + \\ + \cos\omega_{12}\,(\xi^1\eta^2 + \xi^2\eta^1) + \cos\omega_{23}\,(\xi^2\eta^3 + \xi^3\eta^2) + \\ + \cos\omega_{31}\,(\xi^3\eta^1 + \xi^1\eta^3). \end{aligned} \tag{34}$$

Délku x vektoru $\mathfrak{x}$ dostaneme podle (21) ze součinu $\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{x} = x^2$:

$$\begin{aligned} x^2 = (\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 + (\xi^3)^2 + 2\xi^1\xi^2\cos\omega_{12} + \\ + 2\xi^2\xi^3\cos\omega_{23} + 2\xi^3\xi^1\cos\omega_{31}. \end{aligned} \tag{35}$$



Obr. 7.

Pravoúhlé průměty vektoru $\mathfrak{x}$ do os $\mathfrak{e}_1^0, \mathfrak{e}_2^0, \mathfrak{e}_3^0$ označíme z důvodů později vyložených ξ_i s indexy dolními. Vypočteme je podle návodu (22):

$$\begin{aligned} \xi_1 = \mathfrak{x} \cdot \mathfrak{e}_1^0 = (\xi^1\mathfrak{e}_1^0 + \xi^2\mathfrak{e}_2^0 + \xi^3\mathfrak{e}_3^0)\,\mathfrak{e}_1^0 = \xi^1 + \\ + \xi^2\cos\omega_{12} + \xi^3\cos\omega_{13}, \\ \xi_2 = \xi^1\cos\omega_{12} + \xi^2 + \xi^3\cos\omega_{23}, \\ \xi_3 = \xi^1\cos\omega_{13} + \xi^2\cos\omega_{23} + \xi^3. \end{aligned} \tag{36}$$

Jsou-li opět $\cos\alpha_1$, $\cos\alpha_2$, $\cos\alpha_3$ směrové kosiny vektoru $\mathfrak{x}$ vzhledem k osám $\mathfrak{e}_i^0$, platí $\xi_i = x \, . \cos\alpha_i$. Analogicky ze (32):

$$\xi^1 \cos\alpha_1 + \xi^2 \cos\alpha_2 + \xi^3 \cos\alpha_3 = x. \tag{37}$$

Všimněme si ještě, že

$$\xi^1\xi_1 + \xi^2\xi_2 + \xi^3\xi_3 = x^2 \tag{38}$$

a dále, že

$$\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{y} = \xi_1\eta^1 + \xi_2\eta^2 + \xi_3\eta^3. \tag{39}$$

Příklad (o vektoru v rovině) viz na připojeném obrazci 7.

8. Lineární transformace souřadnic. Podle (10) můžeme vyjádřiti každý vektor $\mathfrak{x}$ v libovolné basi tří obecných nekomplanárních vektorů $\mathfrak{e}_i$ ve tvaru

$$\mathfrak{x} = \xi^1\mathfrak{e}_1 + \xi^2\mathfrak{e}_2 + \xi^3\mathfrak{e}_3.$$

Zvolme novou basi $\bar{\mathfrak{e}}_i$, pro jejíž tři základní vektory musí tedy podobně platiti rovnice (transformační):

$$\begin{aligned} \bar{\mathfrak{e}}_1 &= \alpha_1^1\mathfrak{e}_1 + \alpha_1^2\mathfrak{e}_2 + \alpha_1^3\mathfrak{e}_3, \\ \bar{\mathfrak{e}}_2 &= \alpha_2^1\mathfrak{e}_1 + \alpha_2^2\mathfrak{e}_2 + \alpha_2^3\mathfrak{e}_3, \\ \bar{\mathfrak{e}}_3 &= \alpha_3^1\mathfrak{e}_1 + \alpha_3^2\mathfrak{e}_2 + \alpha_3^3\mathfrak{e}_3. \end{aligned} \tag{40}$$

Koeficienty α_i^k jsou libovolná čísla podrobená pouze podmínce (42), aby také nové vektory byly nekomplanární. Kdyby na př. byla $\mathfrak{e}_i \equiv \mathfrak{i}_i$ soustava kartézská, značila by $\alpha_k^1, \alpha_k^2, \alpha_k^3$ pravoúhlé průměty vektoru $\bar{\mathfrak{e}}_k$ do původních os. Kdyby byly $\bar{\mathfrak{e}}_k$ opět vektory jednotkové, značila by táž čísla směrové kosiny $\cos(\bar{\mathfrak{e}}_k\mathfrak{i}_1)$, $\cos(\bar{\mathfrak{e}}_k\mathfrak{i}_2)$, $\cos(\bar{\mathfrak{e}}_k\mathfrak{i}_3)$.

Vektor

$$\mathfrak{x} = \xi^1\mathfrak{e}_1 + \xi^2\mathfrak{e}_2 + \xi^3\mathfrak{e}_3$$

dá se vyjádřiti novou basí ve tvaru

$$\mathfrak{x} = \bar{\xi}^1\bar{\mathfrak{e}}_1 + \bar{\xi}^2\bar{\mathfrak{e}}_2 + \bar{\xi}^3\bar{\mathfrak{e}}_3.$$

Pro nové složky $\bar{\xi}^i$ platí vztahy, které dostaneme dosazením za $\bar{\mathfrak{e}}_i$ z rovnic (40):

$$\xi^1\mathfrak{e}_1 + \xi^2\mathfrak{e}_2 + \xi^3\mathfrak{e}_3 = \bar{\xi}^1 (\alpha_1^1\mathfrak{e}_1 + \alpha_1^2\mathfrak{e}_2 + \alpha_1^3\mathfrak{e}_3) +$$
$$+ \bar{\xi}^2 (\alpha_2^1\mathfrak{e}_1 + \alpha_2^2\mathfrak{e}_2 + \alpha_2^3\mathfrak{e}_3) +$$
$$+ \bar{\xi}^3 (\alpha_3^1\mathfrak{e}_1 + \alpha_3^2\mathfrak{e}_2 + \alpha_3^3\mathfrak{e}_3).$$

Srovnáním součinitelů u $\mathfrak{e}_i$ dostáváme

$$\xi^i = \alpha_1^i\bar{\xi}^1 + \alpha_2^i\bar{\xi}^2 + \alpha_3^i\bar{\xi}^3 \tag{41}$$

pro $i = 1, 2, 3$. To jsou transformační rovnice pro složky vektoru $\mathfrak{x}$.

Má-li být nová base složena z vektorů lineárně nezávislých, musí se dát také vektory $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}_3$ vyjádřiti pomocí $\bar{\mathfrak{e}}_k$. K tomu je nutné a stačí podle výkladu u rovnic (12), aby determinant

$$\alpha = \begin{vmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_1^2 & \alpha_1^3 \\ \alpha_2^1 & \alpha_2^2 & \alpha_2^3 \\ \alpha_3^1 & \alpha_3^2 & \alpha_3^3 \end{vmatrix} \tag{42}$$

byl různý od nuly. Řešení rovnic (40) provedeme opět determinanty. Násobíme rovnice (40) minory A_1^i, A_2^i, A_3^i determinantu α patřícími po řadě k prvkům α_1^i, α_2^i, α_3^i; dostaneme (viz dodatek 10)

$$A_1^i\bar{\mathfrak{e}}_1 + A_2^i\bar{\mathfrak{e}}_2 + A_3^i\bar{\mathfrak{e}}_3 = \alpha \,.\, \mathfrak{e}_i, \quad (i = 1, 2, 3).$$

Odtud

$$\mathfrak{e}_i = \beta_i^1\bar{\mathfrak{e}}_1 + \beta_i^2\bar{\mathfrak{e}}_2 + \beta_i^3\bar{\mathfrak{e}}_3, \tag{43}$$

kde značíme

$$\beta_i^k = A_k^i : \alpha. \tag{44}$$

Dosazením do rovnic (40) nalézáme:

$$\sum_{r=1}^{3} \alpha_i^r \beta_r^k = \sum_{s=1}^{3} \beta_i^s \alpha_s^k = \delta_i^k, \tag{45}$$

kde

$$\delta_i^k = 1 \text{ pro } i = k,$$
$$\delta_i^k = 0 \text{ pro } i \neq k. \tag{46}$$

Označíme-li determinant součinitelů β_i^k obdobně β, plyne z teorie determinantů součin (viz dodatek 9)

$$\alpha \,.\, \beta = \begin{vmatrix} \delta_1^1 & \delta_1^2 & \delta_1^3 \\ \delta_2^1 & \delta_2^2 & \delta_2^3 \\ \delta_3^1 & \delta_3^2 & \delta_3^3 \end{vmatrix} = 1,$$

neboli

$$\beta = 1 : \alpha. \tag{47}$$

Jako ze (40) plynulo (43), tak z (41) plyne obdobně

$$\bar{\xi}^i = \xi^1\beta_1^i + \xi^2\beta_2^i + \xi^3\beta_3^i. \tag{48}$$

Důležité ustanovení: Každý člen opatřený obecně psanými indexy horními a dolními, v němž jeden horní a jeden dolní index jsou stejné, bude znamenati vždy součet podle tohoto stejného indexu, aniž budeme před něj psáti značku součtu Σ. Na př.:

$$\alpha_k^i\xi^k = \sum_{k=1}^{3}\alpha_k^i\xi^k, \quad \xi^i\eta_i = \sum_{i=1}^{3}\xi^i\eta_i,$$

$$a_{ik}\bar{\xi}^i\bar{\xi}^k = \sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}a_{ik}\bar{\xi}^i\bar{\xi}^k, \text{ atd.}$$

V tomto úsporném označení budou naše transformační rovnice:

$$\begin{aligned} \bar{e}_i &= \alpha_i^k e_k, \quad e_i = \beta_i^k \bar{e}_k, \\ \bar{\xi}^i &= \beta_k^i \xi^k, \quad \xi^i = \alpha_k^i \bar{\xi}^k. \end{aligned} \tag{49}$$

Veličiny, které se transformují podle prvého řádku (49) budeme nazývati kovariantní, veličiny s transformací podle druhého řádku kontravariantními. Posunutí jsou tedy pro nás vektory podstatně kontravariantní. Veličiny kovariantní poznáme ještě v dalším odstavci. Zatím jsou definovány svými transformačními rovnicemi a označeny indexy dolními, na př.

$$\bar{\xi}_i = \alpha_i^k \xi_k, \quad \xi_i = \beta_i^k \bar{\xi}_k. \tag{49_1}$$

9. Vektorové funkce. Invarianty. Pro každý vektor ξ^i můžeme definovati lineární funkci

$$L(\mathfrak{x}) = \lambda_1\xi^1 + \lambda_2\xi^2 + \lambda_3\xi^3, \tag{50}$$

v níž λ_i jsou určité konstantní koeficienty. $L(\mathfrak{x})$ je tedy homogenní funkce proměnných ξ^i prvého stupně. Místo homogenní funkce říká se stručněji forma. Příklad takové formy poskytuje podle (37) délka vektoru:

$$x = \xi^1 \cos\alpha_1 + \xi^2 \cos\alpha_2 + \xi^3 \cos\alpha_3.\text{*)}$$

Zřejmě platí pro lineární formy tyto funkcionální vztahy:

$$L(\mathfrak{x} + \mathfrak{y}) = \lambda_1 (\xi^1 + \eta^1) + \lambda_2 (\xi^2 + \eta^2) + \lambda_3 (\xi^3 + \eta^3) = \\ = L(\mathfrak{x}) + L(\mathfrak{y}), \tag{51}$$

dále

$$L(m\mathfrak{x}) = mL(\mathfrak{x}) \tag{52}$$

pro libovolné reálné m. Podle toho jest pro $\mathfrak{x} = \xi^1\mathfrak{e}_1 + \xi^2\mathfrak{e}_2 + \xi^3\mathfrak{e}_3$

$$L(\mathfrak{x}) = \xi^1 L(\mathfrak{e}_1) + \xi^2 L(\mathfrak{e}_2) + \xi^3 L(\mathfrak{e}_3). \tag{53}$$

Zaměníme-li basi $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3$ za jinou $\bar{\mathfrak{e}}_1, \bar{\mathfrak{e}}_2, \bar{\mathfrak{e}}_3$ rovnicemi $\bar{\mathfrak{e}}_i = \alpha_i^k \mathfrak{e}_k$, přejdou složky ξ^i vektoru $\mathfrak{x}$ ve $\overline{\xi^i} = \beta_k^i \xi^k$ podle (49). Daný vektor $\mathfrak{x}$, ani číselná hodnota formy $L(\mathfrak{x})$, se tím ovšem samy nemění, avšak koeficienty L budou nyní jiné, $\bar{\lambda}^i$. Platí tedy

$$L(\mathfrak{x}) = \lambda_i\xi^i = \bar{\lambda}_i\bar{\xi}^i. \tag{54}$$

Dosazením za

$$\xi^i = \alpha_k^i \overline{\xi^k}, \text{ nebo za } \overline{\xi^i} = \beta_k^i \xi^k \tag{55}$$

a srovnáním součinitelů plyne:

$$\bar{\lambda}_i = \alpha_i^k \lambda_k, \text{ nebo } \bar{\bar{\lambda}}_i = \beta_i^k \bar{\lambda}_k. \tag{56}$$

---

*) Jiný příklad poskytuje práce síly $\mathfrak{p}$ podél dráhy $\mathfrak{x}$, která se rovná podle (39) výrazu $p_i\xi^i$, klademe-li v něm $\xi_i = p_i$ a $\eta^k = \xi^k$.

Veličiny $\lambda_i, \overline{\lambda}_i$ se tedy transformují stejně jako base; jsou kovariantní. Všimneme-li si rovnic (54), (55), (56), postřehneme tuto souvislost: jsou-li ξ^i kontravariantní a platí-li pro jiné veličiny η_i:

$$\eta_1\xi^1 + \eta_2\xi^2 + \eta_3\xi^3 = \overline{\eta}_1\overline{\xi}^1 + \overline{\eta}_2\overline{\xi}^2 + \overline{\eta}_3\overline{\xi}^3, \qquad (56_1)$$

jsou veličiny η_i nutně kovariantní. Hodnota funkce $L(\mathfrak{x}) = \eta_i\xi^i$ nezávisí na zvolené basi a slove invariantem transformace.

Formy bilineární a kvadratické. Skalární součin dvou vektorů ξ^i, η^i v kosoúhlých souřadnicích je podle (34):

$$\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{y} = \xi^1\eta^1 + \xi^2\eta^2 + \xi^3\eta^3 + \cos\omega_{12}\,(\xi^1\eta^2 + \xi^2\eta^1) + \\ + \cos\omega_{23}\,(\xi^2\eta^3 + \xi^3\eta^2) + \cos\omega_{31}\,(\xi^3\eta^1 + \xi^1\eta^3).$$

Funkce na pravé straně je lineární pro každý z obou vektorů; říkáme, že jest bilineární.

Platí pro ni všeobecně

$$\left.\begin{aligned} Q(\mathfrak{x} + \mathfrak{x}', \mathfrak{y} + \mathfrak{y}') &= Q(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) + Q(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}') + Q(\mathfrak{x}', \mathfrak{y}) + \\ &\quad + Q(\mathfrak{x}', \mathfrak{y}'), \\ Q(\lambda\mathfrak{x}, \mu\mathfrak{y}) &= \lambda\mu\, Q(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}), \\ Q(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) &= a_{ik}\xi^i\eta^k, \ (i, k = 1, 2, 3) \end{aligned}\right\} \qquad (57)$$

Je-li $a_{ik} = a_{ki}$, jako ve (34), slove forma symetrická, jinak je nesymetrická. Pro $a_{ik} = -a_{ki}$ slove antisymetrickou. Pro $\xi^i = \eta^i$ přechází bilineární forma ve formu kvadratickou

$$Q(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) = Q(\mathfrak{x}).$$

Za příklad může sloužiti (35), forma pro délku vektoru $\mathfrak{x}$ v kosoúhlých souřadnicích. Ke každé bilineární formě patří jediná kvadratická. Opak platí, připustíme-li jen formy symetrické. Kdyby totiž

$$Q(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) = b_{ik}\xi^i\xi^k = b_{ii}\xi^i\xi^i + (b_{ik} + b_{ki})\,\xi^i\xi^k,$$

pak by tato forma plynula z bilineární formy $a_{ik}\xi^i\eta^k$ pro ty případy, že

$$a_{ii} = b_{ii},\ a_{ik} + a_{ki} = b_{ik} + b_{ki}.$$

Jsou-li tedy čísla b_{ik} dána, nejsou a_{ik} určena jednoznačně, leda že by

$$a_{ik} = a_{ki} = \tfrac{1}{2}(b_{ik} + b_{ki}).$$

Pro bilineární formu symetrickou platí dále

$$\begin{aligned} Q(\xi + \eta, \xi + \eta) &= Q(\xi, \xi) + 2Q(\xi, \eta) + Q(\eta, \eta), \\ Q(\lambda\xi + \mu\eta) &= \lambda^2\, Q(\xi, \xi) + 2\lambda\mu\, Q(\xi, \eta) + \mu^2\, Q(\eta, \eta). \end{aligned} \tag{58}$$

Bilineární forma jest nedegenerovaná, jestliže vymizí identicky v η^i, jen když $\xi^i = 0$. Protože

$$2Q(\xi^i, \eta^k) = (a_{1k}\xi^1 + a_{2k}\xi^2 + a_{3k}\xi^3)\,\eta^k,$$

vyžadovalo by nenulové řešení ξ^i rovnic

$$a_{1k}\xi^1 + a_{2k}\xi^2 + a_{3k}\xi^3 = 0,\quad (k = 1, 2, 3)$$

aby determinant $|\,a_{ik}\,| = 0$. Aby byla forma nedegenerovaná, je tedy nutné a stačí, aby determinant

$$|\,a_{ik}\,| \neq 0. \tag{59}$$

Každá kvadratická forma nedegenerovaná (a jen o takových budeme dále mluviti) dá se vhodnou transformací souřadnic převést na součet čtverců

$$Q(\mathfrak{x}) = (\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 + \dots + (\xi^r)^2 - (\xi^{r+1})^2 - \dots - (\xi^n)^2, \tag{60}$$

z nichž r je kladných, $n - r$ záporných, volíme-li obecný případ n proměnných. Důležité jest, že počet kladných čtverců r (a tedy i záporných) je pro danou formu nezávislý na užité transformaci. To jest **zákon setrvačnosti kvadratických forem.***) Forma $Q(\mathfrak{x})$ slove **určitá** (někdy říkáme **definitní**), jestliže se stává nulou jen pro $\xi^i = 0$. Jest nutně nedegenerovaná, protože $Q(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ je různé od nuly pro $\eta^i = \xi^i$ a nevymizí tudíž identicky v η^i pro jiné ξ^i než $\xi^i = 0$. **Forma určitá zachovává stálé znaménko**

*) Důkladněji by se o tom čtenář poučil třeba z Vojtěchových Základů matematiky, díl II, odst. 121—139.

pro libovolná ξ^i. Jest totiž

$$Q(\lambda\xi^i) = \lambda^2 Q(\xi^i);$$

a tak, poněvadž pro reálná λ je $\lambda^2 > 0$, je znaménko $Q(\lambda\xi^i)$ a $Q(\xi^i)$ stejné. Dále jest

$$Q(\xi^i + \lambda\eta^i) = Q(\xi^i) + 2\lambda\, Q(\xi^i, \eta^i) + \lambda^2\, Q(\eta^i).$$

Poněvadž $Q(\xi^i + \lambda\eta^i)$ je stálého znaménka, nelze vypočísti λ reálné takové, aby se staly obě strany rovny nule; proto musí být diskriminant záporný, t. j.

$$Q^2(\xi, \eta) - Q(\xi)\, Q(\eta) < 0. \tag{61}$$

10. n-rozměrná geometrie. Naše smysly jsou uzpůsobeny tak, že se nám jeví prostor trojrozměrným. V analytické geometrii se projevuje tato vlastnost tím, že na př. v kartézské soustavě souřadnic má každý bod tři na sobě nezávislé souřadnice x_1, x_2, x_3. Dovedeme si zcela dobře představiti plošné bytosti, které by chápaly jen prostor dvojrozměrný buď rovný, kdyby žily na rovině, nebo křivý, kdyby žily na křivé ploše. Nechápaly by třetího rozměru, jako my přímo nechápeme rozměr čtvrtý. Body jejich prostoru jsou určeny pouze dvěma souřadnicemi x_1, x_2. Říkáme, že tvoří množinu dvojrozměrnou na rozdíl od našeho prostoru, který tvoří množinu trojrozměrnou. Nic tedy nebrání představiti si bytosti, které by chápaly o několik rozměrů více nežli člověk. Počet rozměrů 3 našeho prostoru musíme považovati za náhodný. Nenarazíme na logický, nebo matematický rozpor, budeme-li si definovati n-rozměrný prostor jako n-rozměrnou množinu „bodů" určených n souřadnicemi $(x_1; x_2; \ldots; x_n)$, které mohou nabývati všech hodnot od $-\infty$ do $+\infty$. „Bodem" prostoru n-rozměrného budeme tedy rozuměti nikoliv nějaký názorný bod, nýbrž prostě s k u p i n u n č í s e l r e á l n ý c h, kde záleží i na pořádku. Předpokládáme, že lze v každém bodě voliti n lineárně nezávislých vektorů $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_n$. Každý další vektor však budiž na nich závislý, takže se dá vyjádřiti vztahem

$$\mathfrak{x} = \xi^1\mathfrak{e}_1 + \xi^2\mathfrak{e}_2 + \cdots + \xi^n\mathfrak{e}_n. \tag{62}$$

Zvolme na př. počátek O jako „bod“ (0; 0; ...; 0). Každý další bod X $(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ určuje současně „vektor“ OX o týchž složkách x_i. V počátku O lze podle předpokladu voliti n lineárně nezávislých vektorů

$$\mathfrak{e}_1\,(e_1; 0; \ldots; 0),\ \mathfrak{e}_2\,(0; e_2; \ldots; 0),\ \ldots,\ \mathfrak{e}_n\,(0; 0; \ldots; e_n)$$

jako basi. Dva body X, Y určují vektor XY o složkách

$$\zeta^i = y_i - x_i,\ (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Pro vektory $\mathfrak{A}\,(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $\mathfrak{B}\,(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ nechť platí axiomata (1) (3) (5) a tedy platí pro ně i všechny další důsledky.

Na př. změna base lineární transformací děje se rovnicemi

$$\bar{\mathfrak{e}}_i = \alpha_i^k \mathfrak{e}_k,\ \mathfrak{e}_i = \beta_i^k \bar{\mathfrak{e}}_k,\ (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Odtud pro vektory kontravariantní

$$\bar{\xi}^i = \beta_k^i \xi^k,\ \xi^i = \alpha_k^i \bar{\xi}^k, \tag{63$_1$}$$

pro vektory kovariantní

$$\bar{\lambda}_i = \alpha_i^k \lambda_k,\ \lambda_i = \beta_i^k \bar{\lambda}_k, \tag{63$_2$}$$

jak plyne z invariance formy $\xi^i \lambda_i = \bar{\xi}^i \bar{\lambda}_i$.

Má-li nový počátek O' v původní soustavě souřadnice α^i, platí pro posiční vektor $\mathfrak{x}(x^i)$ podobně

$$x^i = \alpha_k^i \bar{x}^k + \alpha^i. \tag{64}$$

Vztahy mezi vektory nezávisí však na zvolené basi. Platí-li na př. v soustavě $(\mathfrak{e}_i)$

$$\zeta^i = \xi^i + \eta^i,$$

bude v soustavě $\bar{\mathfrak{e}}_i$ podle rovnic (63)

$$\alpha_k^i \bar{\zeta}^k = \alpha_k^i \bar{\xi}^k + \alpha_k^i \bar{\eta}^k,$$

neboli

$$\bar{\zeta}^k = \bar{\xi}^k + \bar{\eta}^k.$$

11. Geometrie afinní a metrická. Požadavky vyslovené v předcházejícím odstavci jsou základem t. zv. geometrie afinní vektorového prostoru n-rozměrného. V této geometrii tvoří základní vektory $\mathfrak{e}_i$ jednotky úplně samostatné, mezi nimiž není vztahu. Nelze je vůbec měřiti týmž měřítkem. Podobné soustavy se vyskytují zhusta ve fysikálních diagramech; na př. v diagramu zákona dráhy při pohybu rovnoměrně zrychleném nanášíme na vodorovnou osu vteřiny (v libovolném měřítku), na osu kolmou pak dráhy v cm. Obojí jednotky jsou však úplně jiné podstaty a navzájem nesrovnatelné.*) V tomto diagramu nemá fysikálního smyslu mluviti o vzdálenosti dvou bodů výsledné křivky A $(t_1; s_1)$, B $(t_2; s_2)$. Týž fysikální zákon by se dal zobraziti v soustavě s jinými délkami pro vteřinu a centimetr; bylo by dokonce možno zvoliti i osy k sobě skloněné. Nemá tedy smyslu ani úhel AOB. Ale určité vlastnosti diagramu podrží stále svůj nepromněnný význam, na př. pojem $\dfrac{ds}{dt}$ (rychlost bodu) a pod. Tyto vlastnosti právě vyšetřuje geometrie afinní, která však nezná pojmu vzdálenosti dvou bodů a úhlu dvou vektorů.

Vzdálenost a úhel zavádí teprve geometrie metrická. V trojrozměrném případě jsme je poznali v odstavci (7). Nyní budeme definovati vzdálenost i v prostoru o n rozměrech. Pro vzdálenost bodů (ξ^i), (η^i) zvolíme takovou funkci souřadnic, aby pro $n = 3$ přešla ve známou funkci pro vzdálenost v prostoru o třech rozměrech. Všimněme si tedy podstatných znaků ve trojrozměrném výraze (35) pro x^2. Jest homogenní kvadratickou funkcí (formou) kontravariantních složek ξ^i s koeficienty na bodech nezávislými. Tato forma vznikla z formy bilineární (34) pro skalární součin dvou vektorů, když se stalo $\xi^i = \eta^i$. Jeví se tedy zcela případným zavésti pro n-rozměrný prostor metriku odvozenou od základní bilineární symetrické formy pro skalární součin dvou vektorů ξ^i, η^i:

*) Jiný příklad je diagram zákona Boyleova $pv = k$.

$$\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{y} = g_{ik}\xi^i\eta^k = Q(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}), \ (i, k = 1, 2, \ldots, n), \tag{65}$$
$$g_{ik} = g_{ki}.$$

Pro čtverec délky x^2 vektoru $\mathfrak{x}$ pak zavádíme odvozenou kvadratickou formu:

$$x^2 = g_{ik}\xi^i\xi^k = Q(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}). \tag{66}$$

Předmětem metrické geometrie n-rozměrné jsou pak ty vlastnosti útvarů, které se nemění při pohybu. Pohybem rozumíme takovou lineární transformaci (62), která převádí útvar v útvar shodný, t. j. která převádí vektor $\mathfrak{x}$ v jiný $\mathfrak{x}'$ o téže délce:

$$Q(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) = Q(\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'),$$

stručněji

$$Q(\mathfrak{x}) = Q(\mathfrak{x}').$$

Za délku x vektoru $\mathfrak{x}$ stanoví se $\sqrt{Q(\mathfrak{x})}$. Ze (34) plyne dál

$$\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{y} = x \cdot y \cos\vartheta = g_{ik}\xi^i\eta^k = Q(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}),$$

neboli

$$\cos\vartheta = \frac{Q(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})}{x \cdot y} = \frac{Q(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})}{\sqrt{Q(\mathfrak{x}) \cdot Q(\mathfrak{y})}}. \tag{67}$$

Tuto větu rozšíříme též na n-rozměrný prostor, protože takto definovaný $\cos\vartheta$ je skutečně invariantní, t. j. nezávislý na soustavě souřadnic. Pro $Q(\mathfrak{x})$, $Q(\mathfrak{y})$ to platí z definice, pro $Q(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ to plyne z rovnic

$$\begin{aligned} Q(\mathfrak{x}' + \mathfrak{y}') &= Q(\mathfrak{x} + \mathfrak{y}); \\ Q(\mathfrak{x} + \mathfrak{y}) &= Q(\mathfrak{x}) + 2Q(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) + Q(\mathfrak{y}), \\ Q(\mathfrak{x}' + \mathfrak{y}') &= Q(\mathfrak{x}') + 2Q(\mathfrak{x}', \mathfrak{y}') + Q(\mathfrak{y}'). \end{aligned}$$

Tedy srovnáním dvou posledních řádků skutečně

$$Q(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = Q(\mathfrak{x}', \mathfrak{y}'). \tag{68}$$

Pravoúhlost dvou vektorů budeme definovati analogicky se třemi rozměry podmínkou

$$\cos\vartheta = Q(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = 0. \tag{69}$$

Ve množinách s metrickou formou určitou a kladnou je vždy $|\cos\vartheta| \leqq 1$, neboť z (58) pro $Q(\lambda\mathfrak{x} + \mu\mathfrak{y}) \geqq 0$ musí diskriminant

$$Q^2(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) - Q(\mathfrak{x})\, Q(\mathfrak{y}) \leqq 0$$

a odtud

$$\left| \frac{Q(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})}{\sqrt{Q(\mathfrak{x}) \cdot Q(\mathfrak{y})}} \right| \leqq 1.$$

Z (60) a dalšího výkladu tam uvedeného plyne, že lze transformovati lineárně souřadnice tak, aby platilo v nové soustavě

$$Q(\mathfrak{x}) = \varepsilon_i(\xi^i)^2, \quad (\varepsilon_i = \pm 1). \tag{70}$$

Takové souřadnice slovou podle analogie případu trojrozměrného **kartézské**. Pro **kladnou** určitou formu Q lze pak dosáhnouti

$$x^2 = \sum_i (\xi^i)^2, \tag{71}$$

což je zevšeobecněná Pythagorova věta pro n-rozměrný prostor. Skalární součin dvou vektorů je v tomto případě

$$Q(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \sum_i \xi^i \eta^i. \tag{72}$$

Jsou-li v obecném případě vektory base $\mathfrak{e}_i$, je v této soustavě

$$(\mathfrak{e}_i \cdot \mathfrak{e}_k) = g_{ik}, \quad (\mathfrak{e}_i)^2 = (e^i)^2 = g_{ii}, \quad \cos(\mathfrak{e}_i, \mathfrak{e}_k) = \frac{g_{ik}}{\sqrt{g_{ii}}\sqrt{g_{kk}}}. \tag{73}$$

Z těchto formulí lze určiti délky základních vektorů base a jejich úhly, je-li dáno předem n^2 čísel g_{ik} takových, že

$$g_{ik} = g_{ki}, \quad |g_{ik}| \neq 0, \quad g_{ii} > 0.$$

V kartézských souřadnicích stojí tedy základní vektory $\mathfrak{e}_i$ k sobě navzájem kolmo pro $g_{ik} = 0 = (\mathfrak{e}_i\mathfrak{e}_k)$.

Při analytickém pojednávání metrické geometrie i fysiky je pak možný dvojí postup. Buď užíváme obecných lineárních souřadnic (afinních) a vyšetřujeme vlastnosti invariantní k libovolným lineárním transformacím, při kterých zůstává invariantní základní metrická forma kvadratická

$$Q(\mathfrak{x}) = g_{ik}\xi^i\xi^k = \bar{g}_{ik}\bar{\xi}^i\bar{\xi}^k. \tag{74}$$

Nebo užíváme již předem pouze souřadnic kartézských a vyšetřujeme invarianci vůči takovým lineárním transformacím, které znamenají jen pošinutí a otočení původních pravoúhlých os. Takovéto zvláštní transformace slovou ortogonální; jejich koeficienty α_i^k nemohou být ovšem zcela libovolné, nýbrž musí splňovati určité vztahy, t. zv. podmínky ortogonality. Obdrželi bychom je dosazením do rovnice

$$(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 + \dots + (\xi^n)^2 = (\bar{\xi}^1)^2 + (\bar{\xi}^2) + \dots + (\bar{\xi}^n)^2$$

buď $\bar{\xi}^i = \beta^i_k\xi^k$, nebo $\xi^i = \alpha^i_k\bar{\xi}^k$ a srovnáním součinitelů proměnných na obou stranách.

Pro větší názornost zůstaneme zatím u geometrie trojrozměrné, ale odvozené věty budou platit i pro n rozměrů.

Úloha 14. Stanovte metrickou formu $Q(\mathfrak{x})$ v soustavě o basi $e_1 = 2$, $e_2 = 3$, které svírají úhel ω. (Viz odstavec další.)

12. Dvojí složky vektorů v metrické geometrii.

V afinní geometrii, kde se nemluví o délkách a úhlech, jsou kontravariantní vektory ξ^i a vektory kovariantní ξ_i veličiny úplně různé. Jsou prostě definovány rovnicemi (49) a (49$_1$). V geometrii metrické tomu jest jinak. Zde pro všechny příslušné lineární transformace musí zůstati zachovány velikosti délek a úhlů, neboli

$$\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{y} = Q(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = g_{ik}\xi^k\eta^i = \bar{g}_{ik}\bar{\xi}^k\bar{\eta}^i \tag{75}$$

zůstává invariantní. Je to skalární součin vektorů $\mathfrak{x}$ a $\mathfrak{y}$. Vedeni jsouce postupem myšlenek v rovnicích (36) a (39) zaveďme i tady označení

$$\xi_i = g_{ik}\xi^k, \quad \bar{\xi}_i = \bar{g}_{ik}\bar{\xi}^k. \tag{76}$$

Pak nabude skalární součin vektorů $\mathfrak{x}$ a $\mathfrak{y}$ tvaru

$$\xi_i\eta^i = \bar{\xi}_i\bar{\eta}^i. \tag{76_1}$$

Víme však z odstavce 9, že při platnosti tohoto vztahu plyne z kontravariance veličin η^i kovariance veličin ξ_i. Pro transformaci ξ_i platí pak rovnice (49_1). Můžeme tedy nazývati ξ_i kovariantními složkami vektoru $\mathfrak{x}$, jehož složky kontravariantní jsou ξ^i. V metrické geometrii může být vektor dán buď složkami kontravariantními ξ^i, nebo svými složkami kovariantními ξ_i. Přechod od jednoho druhu složek ke druhému obstarávají rovnice (76), které řešeny podle ξ^i dávají

$$\xi^i = g^{ik}\xi_k \text{ pro } g^{ik} = G^{ik} : g, \tag{77}$$

kde značí G^{ik} minor prvku g_{ik} v determinantu $g = | g_{ik} |$. Zřejmě jest $G^{ik} = G^{ki}$ a $g^{ik} = g^{ki}$.

Příklad: Podle ovičení na konci předchozího odstavce je v souřadnicové soustavě o basi $e_1 = 2$, $e_2 = 3$, $\omega = \sphericalangle (e_1e_2)$ metrická forma pro $\mathfrak{x} = \xi^1\mathfrak{e}_1 + \xi^2\mathfrak{e}_2$

$$Q(\mathfrak{x}) = 4(\xi^1)^2 + 9(\xi^2)^2 + 12 \cos \omega\xi^1\xi^2.$$

Plyne to z jednoduchého obrazce nebo z rovnic (73), podle nichž

$$g_{11} = (e^1)^2 = 4, \; g_{22} = (e^2)^2 = 9, \quad g_{12} = g_{21} = (\mathfrak{e}_1 \,.\, \mathfrak{e}_2) = 6 \cos \omega.$$

Kovariantní složky ξ_i vektoru $\mathfrak{x}$ plynou ze (76):

$$\xi_1 = g_{11}\xi^1 + g_{12}\xi^2 = 4\xi^1 + 6 \cos \omega \,.\, \xi^2,$$
$$\xi_2 = g_{21}\xi^1 + g_{22}\xi^2 = 6 \cos \omega \,.\, \xi^1 + 9\xi^2.$$

Jejich význam poznáváme ze skalárních součinů

$$\mathfrak{x} \,.\, \mathfrak{e}_1 = \xi^1\mathfrak{e}_1^2 + \xi^2\mathfrak{e}_1 \,.\, \mathfrak{e}_2 = g_{11}\xi^1 + g_{12}\xi^2 = \xi_1,$$
$$\mathfrak{x} \,.\, \mathfrak{e}_2 = \xi^1\mathfrak{e}_1 \,.\, \mathfrak{e}_2 + \xi^2\mathfrak{e}_2^2 = g_{21}\xi^1 + g_{22}\xi^2 = \xi_2.$$

Kovariantní složky ξ_i vektoru $\mathfrak{x}$ jsou tedy jeho skalární součiny s jednotlivými vektory base. Táž věta platí obecně. Neboť pro

$$\mathfrak{x} = \xi^1\mathfrak{e}_1 + \xi^2\mathfrak{e}_2 + \ldots + \xi^n\mathfrak{e}_n$$

jest

$$\mathfrak{x} \,.\, \mathfrak{e}_i = \xi^1\mathfrak{e}_1 \,.\, \mathfrak{e}_i + \xi^2\mathfrak{e}_2 \,.\, \mathfrak{e}_i + \ldots + \xi^n\mathfrak{e}_n \,.\, \mathfrak{e}_i,$$

a tedy podle (73)

$$\mathfrak{x} \,.\, \mathfrak{e}_i = g_{ik}\xi^k = \xi_i. \tag{78}$$

V souřadnicích kartézských jest podle (71), (72) a (73) při kladné metrické formě

$$g_{ii} = 1,\ g_{ik} = (\mathfrak{e}_i^0 \,.\, \mathfrak{e}_k^0) = 0$$

a tedy

$$\xi_i = g_{ik}\xi^k = \xi^i. \tag{79}$$

V těchto souřadnicích jsou tedy složky kovariantní a kontravariantní téhož vektoru totožné a není třeba mezi nimi rozlišovati. Je to ostatně patrné přímo z názoru v prostoru trojrozměrném.

Úlohy. 15. Ve shora uvedeném příkladě vypočtěte složky ξ^i z daných ξ_i podle (77).

16. Totéž pro kosoúhlé souřadnice trojrozměrné z odstavce 6. Složky ξ_i jsou tu kolmé průměty vektoru $\mathfrak{x}$ do směru os.

17. V kosoúhlých souřadnicích v rovině dokažte si přímo z náčrtku v odst. 6

$$\xi_1 = \xi^1 + \xi^2 \cos\omega,\ \eta_1 = \eta^1 + \eta^2 \cos\omega,$$
$$\xi_2 = \xi^1 \cos\omega + \xi^2,\ \eta_2 = \eta^1 \cos\omega + \eta^2.$$

$$\cos\vartheta_1 = \xi_1 : x,\ \cos\vartheta_2 = \eta_1 : y,\ \sin\vartheta_1 = (\xi^2 \sin\omega) : x,$$
$$\sin\vartheta_2 = (\eta^2 \sin\omega) : y.$$

Odtud pomocí $\vartheta = \vartheta_2 - \vartheta_1$ přímo

$$xy\cos\vartheta = \xi^1\eta^1 + \cos\omega\,(\xi^1\eta^2 + \xi^2\eta^1) + \xi^2\eta^2 = \xi^1\eta_1 + \xi^2\eta_2.$$

Pro dvojnásobný obsah $\triangle\ OAB$ (rovnoběžníka daného vektory $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$) dokažte také přímo

$$xy\sin\vartheta = \sin\omega\,.\,(\xi^1\eta^2 - \xi^2\eta^1).$$

13. Skaláry, vektory a tensory. Skaláry jako teplota t, hmota m, práce L atd., jsou po analytické stránce nejjednodušší veličiny, protože i v n-rozměrném prostoru jsou určeny jediným číslem, svou hodnotou. Vektory jsou o něco složitější, neboť potřebují v n-rozměrném prostoru n určovacích prvků, složek ξ^i, nebo ξ_i. Ve fysice i v geometrii se však vyskytují veličiny, k jejichž určení v soustavě souřadnic je třeba prvků ještě více. Intensita $\mathfrak{E}$ elektrického pole v některém bodě má určitý směr a velikost, takže je ve statickém poli dána v každém místě jediným neproměnným vektorem o 3 složkách. Kdežto na př. moment setrvačnosti tuhého tělesa $I = \sum_i m_i r_i^2$ kolem osy jdoucí těžištěm má v daném těžišti nekonečné množství hodnot závisejících na směru rotační osy. Naneseme-li na každou osu její příslušný moment setrvačnosti jako vektor, máme pak v těžišti nekonečné množství vektorů. Mechanika učí, že jsou všechny tyto vektory dány, známe-li t. zv. hlavní momenty setrvačnosti vzhledem ke třem osám k sobě kolmým, tedy 3 vektory $\mathfrak{I}_1$, $\mathfrak{I}_2$, $\mathfrak{I}_3$. Abychom tedy znali setrvačnost tuhého tělesa při rotaci kolem těžiště, potřebujem 3 vektorů, tedy v obecně položené pravoúhlé soustavě souřadnic 9 složek

$$
\begin{array}{l}
I_{11}\ I_{12}\ I_{13}\ (\mathfrak{I}_1) \\
I_{21}\ I_{22}\ I_{23}\ (\mathfrak{I}_2) \\
I_{31}\ I_{32}\ I_{33}\ (\mathfrak{I}_3).
\end{array}
\tag{80}
$$

Mechanika ovšem dále učí, že $I_{ik} = I_{ki}$, takže v podstatě v tomto příkladě jest jen 6 nezávislých složek. Jako bylo k určení vektoru třeba 3 skalárů (ξ^i), tak vyžaduje úplná znalost momentu setrvačnosti v těžišti znalosti 3 vektorů. Moment setrvačnosti je nám tedy příkladem veličiny po vektorech analyticky nejblíže složitější, která se nazývá všeobecně tensorem podle napětí*) v pružných tělesech, majících podobnou povahu. Vzhledem ke vztahu $I_{ik} = I_{ki}$ jsou to souměrné tensory. Jsou řádu druhého; vektory slovou také tensory řádu prvého a skaláry jsou tensory řádu nultého. Jak uvidíme, existují ovšem ještě tensory řádů libovolně vyšších.

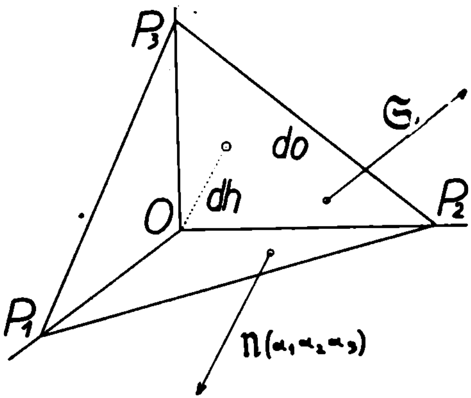
Napětí v pružných tělesech. Představme si kus gumy napjaté vnějšími silami, neboli podrobené deformaci. Vymezíme-li si v mysli uvnitř gumy libovolnou část hmoty uzavřenou plochou, působí v rovnovážném stavu na každou část do této plochy síla vnější hmoty přímo úměrná obsahu plošky do, tedy rovna $\mathfrak{S}\, do$, značí-li $\mathfrak{S}$ napětí na 1 cm². Ale

*) Francouzsky napětí = tension od latinského slovesa tendere, které znamená napínati.

v tómž bodě záleží $\mathfrak{S}$ ještě na směru plošky do, který můžeme stanoviti směrem normály na tuto plošku. Napětí na plošku do s normálou $\mathfrak{n}$ čítanou dovnitř uzavřené plochy označíme $\mathfrak{S}_n$. Podle principu akce a reakce je síla vnější části na vnitřní táž jako síla části vnitřní na vnější (s opačnou normálou), má jen opačný směr; proto

$$\mathfrak{S}_{-n} = -\mathfrak{S}_n.$$

(Napětí $\mathfrak{S}_n$ však není obecně kolmé na plošku do a nespadá samo do směru normály.) Ukážeme nyní, že $\mathfrak{S}_n$ je tensor určený třemi vektory $\mathfrak{S}_x = \mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_y = \mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_z = \mathfrak{S}_3$, které znamenají napětí na plošky s normálami x, y, z. V uvažovaném bodě O si veďme osy pravoúhlých souřadnic, nanesme na ně 3 malé délky, takže vznikne malý čtyrstěn $OP_1P_2P_3$ se třemi pravými úhly (obr. 8) v pobočných stěnách.



Obr. 8.

Stěna $P_1P_2P_3$ je ploška do s vnitřní normálou o směrových kosinech

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3,$$

Její průměty do rovin souřadnic jsou

$$-do \,.\, \alpha_1, \quad -do \,.\, \alpha_2, \quad -do \,.\, \alpha_3$$

(úhel dvou rovin je roven úhlu jejich normál), takže výslednice povrchových napětí je na celý čtyrstěn

$$\mathfrak{P} = [\mathfrak{S}_n - (\alpha_1\mathfrak{S}_1 + \alpha_2\mathfrak{S}_2 + \alpha_3\mathfrak{S}_3)] \cdot \mathrm{d}o.$$

Na celý čtyrstěn působí kromě plošných sil od napětí ještě síly objemové (tíže a pod.) $\mathfrak{F}$, které závisí na objemu $\mathrm{d}\tau$ čtyrstěnu a na hustotě hmoty ϱ. Podle druhého principu Newtonova rovná se výsledná síla na těleso součinu ze hmoty a zrychlení $\mathfrak{a}$. Hmota čtyrstěnu jest patrně

$$m = \varrho \cdot \mathrm{d}\tau = \varrho \tfrac{1}{3}\mathrm{d}o \cdot \mathrm{d}h,$$

kde $\mathrm{d}h$ značí vzdálenost počátku od roviny $P_1P_2P_3$. Máme tedy

$$\tfrac{1}{3}\varrho \,\mathrm{d}o \cdot \mathrm{d}h \cdot \mathfrak{a} = \tfrac{1}{3}\varrho \,\mathrm{d}o \cdot \mathrm{d}h \cdot \mathfrak{F} + \mathfrak{P} \cdot \mathrm{d}o,$$

nebo

$$\varrho\mathfrak{a} = \varrho\mathfrak{F} + \frac{3}{\mathrm{d}h}\mathfrak{P}.$$

Pro lim $\mathrm{d}h \to 0$ by se stal poslední člen nekonečným, kdyby $\mathfrak{P} \neq 0$, takže vyloučíme-li možnost nekonečných sil a hustot, jest nutně $\mathfrak{P} = 0$, neboli

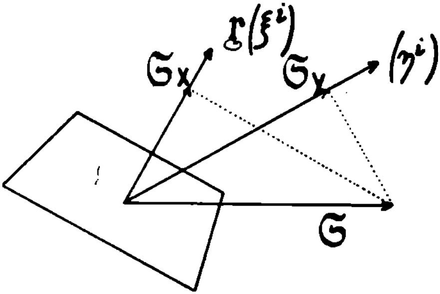
$$\mathfrak{S}_n = \alpha_1\mathfrak{S}_1 + \alpha_2\mathfrak{S}_2 + \alpha_3\mathfrak{S}_3. \tag{81}$$

Tím je stanoven tensor $\mathfrak{S}_n$ pro obecnou polohu plošky $\mathrm{d}o$, známe-li jeho hodnoty náležející ploškám ve směru souřadnicových rovin. Složky vektorů $\mathfrak{S}_i$, $(i = 1, 2, 3)$ pišme S_{i1}, S_{i2}, S_{i3}, složky jednotkového vektoru směrem vnitřní normály $\mathfrak{x}$ označme nyní ξ^1, ξ^2, ξ^3, abychom naznačili, že je tento směr libovolný; složky tensoru $\mathfrak{S}_n = \mathfrak{S}$ buďtež ve směru os S_1, S_2, S_3. Pak zní rovnice (81) rozepsaná ve složkách:

$$\begin{aligned} S_1 &= S_{11}\xi^1 + S_{21}\xi^2 + S_{31}\xi^3, \\ S_2 &= S_{12}\xi^1 + S_{22}\xi^2 + S_{32}\xi^3, \\ S_3 &= S_{13}\xi^1 + S_{23}\xi^2 + S_{33}\xi^3. \end{aligned} \tag{82}$$

Tyto 3 rovnice udávají ke každému vektoru ξ^i vektor S_i pomocí koeficientů S_{ik}. Chceme-li znáti všestranné napětí v daném bodě O pružného tělesa, musíme míti dány složky S_{ik} *tensoru napětí*. V nauce o pružnosti se dokazuje, že tento tensor je opět souměrný, protože $S_{ik} = S_{ki}$.

Složka $\mathfrak{S}_y$, vektoru $\mathfrak{S}$ spadající do libovolného směru (obr. 9) dalšího jednotkového vektoru η^i je skalární součin obou vektorů, jehož velikost jest $S_{ik}\xi^k\eta^i$.



Obr. 9.

Je to zřejmě veličina nezávislá na zvolené soustavě souřadnic. V jiné soustavě afinní by bylo

$$\bar{S}_{ik}\bar{\xi}^k\bar{\eta}^i = S_{ik}\xi^k\eta^i.$$

Máme tu opět příklad invariantní bilineární souměrné formy dvou obecných vektorů ξ^i, η^i. Složka napětí $\mathfrak{S}_x$ spadající přímo do normály ξ^i uvažované plošky (ξ^i nyní nemusí být jednotkovým vektorem) přepočtená na 1 cm^2 jest (viz obr. 9)

$$\frac{S_{ik}\xi^i\xi^k}{g_{ik}\xi^i\xi^k},$$

protože čtverec o straně x má obsah

$$x^2 = g_{ik}\xi^i\xi^k.$$

14. Příklad tensoru antisymetrického. Tensorové formy. Vektor jsme dosud určovali jeho třemi složkami buď ξ^i, nebo ξ_i. Můžeme však postupovati poněkud jinak. Vzpomeňme si, že na př. práce síly $\mathfrak{p}$ po dráze $\mathfrak{x}$ je dána skalárním součinem obou vektorů

$$L = (\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{x}) = p_i\xi^i = p^i\xi_i.$$

Mohli bychom tedy definovati určitou sílu prací vzhledem k libovolnému pošinutí ξ^i. Při daném pošinutí by ovšem práce L přináležela nekonečnému počtu sil, které by s daným pošinutím $\mathfrak{x}$ tvořily týž úhel a měly tutéž velikost. Avšak síla $\mathfrak{p}$, která má vzhledem ke každému pošinutí $\mathfrak{x}$ práci L jest možná jen jedna. Jest právě dána lineární formou $p_i\xi^i$ proměnného pošinutí ξ^i. Koeficienty této formy jsou kovariantní složky vektoru $\mathfrak{p}$. Mohli bychom tedy definovati analogicky kterýkoliv určitý vektor $\mathfrak{a}$ lineární invariantní formou proměnného pošinutí $\mathfrak{x}$

$$L = a_i\xi^i = a^i\xi_i,$$

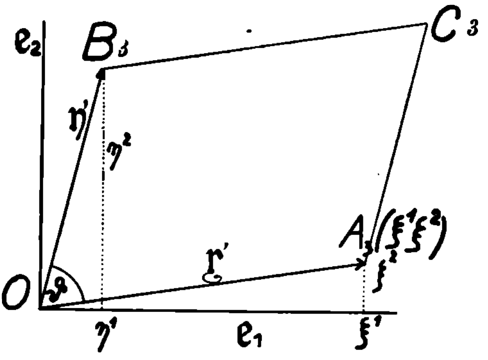
jejíž koeficienty jsou právě složky daného vektoru $\mathfrak{a}$.

Zůstaneme-li v tomto myšlenkovém postupu, dojdeme k veličinám složitější povahy nežli jsou vektory mající tři složky. Vektory udávají fysikální vlastnost daného bodu v prostoru (na př. sílu) vzhledem k nějakému pošinutí (dráze). Ale ve fysice a v geometrii se vyskytují veličiny povahy složitější, které udávají vlastnosti na př. vzhledem k nějaké plošce myšlené v daném bodě. Jako příklad uveďme hustotu proudu. Známe-li v každém bodě rychlost proudící kapaliny $\mathfrak{I}$ (vektor), není tím ještě určena hustota proudu, t. j. množství kapaliny, které projde za vteřinu čtverečním centimetrem v uvažovaném bodě. To závisí ještě na poloze zmíněné plošky vůči směru rychlosti $\mathfrak{I}$. Všimněme si tohoto příkladu podrobněji.

Máme-li v rovině $\mathfrak{e}_1{}^0 \perp \mathfrak{e}_2{}^0$ vektory $\mathfrak{x}'$ a $\mathfrak{y}'$ v jednom bodě, určují rovnoběžník, jehož obsah je podle základů analytické geometrie v pravoúhlých souřadnicích

$$\xi^1\eta^2 - \xi^2\eta^1.$$

Neboť posuneme-li uvažovaný bod s oběma vektory do počátku O (obr. 10), obsah rovnoběžníka se nezmění a rovná se dvojnásobnému obsahu trojúhelníka OA_3B_3. V obvyklém označení $A_3\,(x_1;\,y_1)$, $B_3\,(x_2;\,y_2)$ máme pro zmíněný trojúhelník elementární vzorec $\frac{1}{2}\,(x_1y_2 - x_2y_1)$, který lze ostatně snadno odvoditi z obrazce pomocí naznačených trojúhelníků



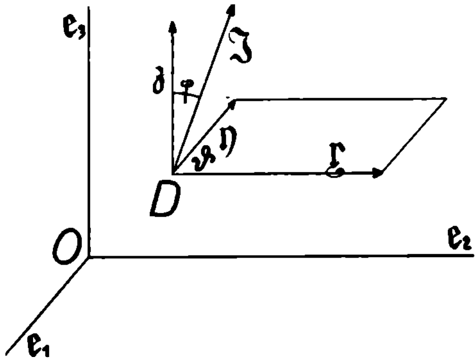
Obr. 10.

pravoúhlých a lichoběžníka. Užijeme-li označení $A\,(\xi^1;\,\xi^2)$, $B\,(\eta^1;\,\eta^2)$, dostaneme náš vzorec. Kdyby nyní body A_3, B_3 vystoupily kolmo nad nákresnou rovinu o délky resp. ξ^3, η^3 do bodů $A\,(\xi^1;\,\xi^2;\,\xi^3)$, $B\,(\eta^1;\,\eta^2;\,\eta^3)$, měl by kosodélník určený novými vektory $OA \equiv \mathfrak{x}$; $OB \equiv \mathfrak{y}$ zcela podobně průměty do jednotlivých souřadnicových rovin

$$\begin{aligned}\zeta^{12} &= \xi^1\eta^2 - \xi^2\eta^1,\\ \zeta^{23} &= \xi^2\eta^3 - \xi^3\eta^2,\\ \zeta^{31} &= \xi^3\eta^1 - \xi^1\eta^3.\end{aligned}$$

Nanesme si obsah celého kosodélníka $xy \sin \vartheta$ na vektor $\mathfrak{z}$ kolmý k ploše $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$. Jeho složky ve směru os budou právě ζ^{12}, ζ^{23}, ζ^{31}. Směr vektoru $\mathfrak{z}$ volíme tak, aby se otočení vektoru $\mathfrak{x}$ do vektoru $\mathfrak{y}$ o úhel ϑ jevilo ze směru $\mathfrak{z}$ ve smyslu kladném (obr. 11). Pošinutím OD celého kosodélníka do bodu D se průměty vektorů ani kosodélníka nezmění.

(Rovnoběžník s vektory v D na obr. mysleme si více nakloněn k osám.)



Obr. 11.

Představme si nyní, že prostorem proudí voda rychlostí znázorněnou vektorem $\mathfrak{J}$. Pak je množství vody protékající zmíněnou plochou kosodélníka za vteřinu rovno výrazu

$$M = xy \sin\vartheta \,.\, j \cos\varphi,$$

(j jest délka vektoru $\mathfrak{J}$, φ pak úhel $\mathfrak{z}\mathfrak{J}$), což lze považovati za skalární součin vektorů $\mathfrak{z}$ ($xy \sin\vartheta$) a vektoru $\mathfrak{J}$ (I_1, I_2, I_3). Možno tedy psáti tento součin ve tvaru

$$M = I_1\zeta^{23} + I_2\zeta^{31} + I_3\zeta^{12},$$

nebo

$$M = I_1\,(\xi^2\eta^3 - \xi^3\eta^2) + I_2\,(\xi^3\eta^1 - \xi^1\eta^3) + I_3\,(\xi^1\eta^2 - \xi^2\eta^1).$$

Tento výraz jakožto množství proteklé kapaliny nebo objem kvádru $\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}$ nemůže záviseti na poloze pravoúhlých os. Po jejich libovolném otočení by měly vektory jiné složky $\overline{\xi}^i$, $\overline{\eta}^i$, $\overline{I}_i$, ale množství kapaliny by bylo stejné a vyjádřeno týmž výrazem, ovšem se složkami čárkovanými. M je tedy invariantní bilineární forma složek ξ^i, η^i. Analogicky s bilineární formou metrickou v (75) ji píšeme raději ve tvaru

$$M = I_{23}(\xi^2\eta^3 - \xi^3\eta^2) + I_{31}(\xi^3\eta^1 - \xi^1\eta^3) + I_{12}(\xi^1\eta^2 - \xi^2\eta^1), \quad (83_1)$$

nebo konečně

$$M = I_{12}\xi^1\eta^2 + I_{21}\xi^2\eta^1 + I_{13}\xi^1\eta^3 + \ldots + I_{32}\xi^3\eta^2, \quad (83_2)$$

kde

$$I_{ik} = -I_{ki}, \; I_{ii} = 0. \quad (84)$$

Je-li obsah plošky 1 cm², můžeme nazvati M hustotou proudu. Je to určitá fysikální vlastnost nikoli vzhledem k nějakému vektoru ξ^i, nýbrž vzhledem k jisté plošce o dané poloze v prostoru, tedy k útvaru dvojrozměrnému. Zase můžeme chápati 9 koeficientů a_{ik} obecné bilineární formy jako složky komplikovanější veličiny, tensoru. Hustota proudu M je vzhledem k (84) tensor zvláštní, antisymetrický. Má podle (83_1) podstatně jen 3 různé složky. K tomu přihlédneme později. Nyní nám běží pouze o to, abychom pochopili, že bude užitečné zabývati se invariancí forem bilineárních a po případě multilineárních. Nazýváme invariantní formu bilineární tensorovou formou stupně (nebo řádu) druhého, trilineární formu tensorovou formou stupně třetího atd. Vektory se jeví v tomto novém pojetí vzhledem k (80) dány tensorovou formou stupně prvého. Koeficienty oněch forem slovou pak složkami příslušných tensorů. V tomto smyslu je metrická forma

$$Q(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = g_{ik}\xi^i\eta^k, \; g_{ik} = g_{ki}$$

symetrickou tensorovou formou druhého stupně. Význam komponent metrického tensoru g_{ik} je patrný podle vztahů (73); dávají délky a vzájemné úhly tří vektorů base. Určují soustavu tří os souřadnicových a metriku v této soustavě. Tensor g_{ik} je tedy znázorněn soustavou tří vektorů určité délky, které spolu svírají tři dané úhly.

Veličiny fysikální a geometrické jsou buď skaláry na sou-

soustavě souřadnic zřejmě nezávislé (délky, úhly, obsahy, objemy, teploty a pod.), nebo jsou to vektory a tensory. Složky tensoru sice závisí na soustavě souřadnic, ale jsou-li si dva tensory rovny v jedné soustavě, změní se jejich složky transformací stejně, takže se jejich rovnost transformací neporuší. Přírodní zákony pak vyjadřují, že dva tensory jsou si rovny, neboli že rozdílový tensor z nich utvořený jest nulový. Neboť jen takový výrok nezávisí na soustavě souřadnic a platí ve všech přípustných souřadnicových soustavách. Ačkoliv nelze tensory vyšších stupňů znázorňovati tak jednoduše jako vektory, je tensorový počet velice jednoduchý, že to u veličin tak složité povahy až překvapuje. Počet vektorový jest jen zvláštním případem počtu tensorového (pro stupeň prvý). Skaláry jsou tensory stupně (řádu) nultého.

15. Tensory a jejich transformace. Předcházející úvahy ukázaly možnost definovati tensory čistě algebraicky pomocí forem. Uvažujme v n-rozměrném prostoru n lineárně nezávislých základních vektorů

$$\begin{aligned} \mathfrak{e}_1 &= (1; 0; 0; \ldots; 0), \\ \mathfrak{e}_2 &= (0; 1; 0; \ldots; 0), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathfrak{e}_n &= (0; 0; 0; \ldots; 1), \end{aligned} \tag{85}$$

a metrickou formu $Q(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = g_{ik}\xi^i\eta^k$. Vektory jsou dány soustavou svých n složek, na př. $(\xi^1; \xi^2; \ldots; \xi^n)$ nebo $(\eta_1; \eta_2; \ldots; \eta_n)$. Budiž dále stanovena nová base $\bar{\mathfrak{e}}_i$ pomocí lineární transformace

$$\bar{\mathfrak{e}}_i = \alpha_i^k \mathfrak{e}_k, \quad \mathfrak{e}_i = \beta_i^k \bar{\mathfrak{e}}_k, \tag{86}$$

pro kterou platí podle (45) vztahy

$$\alpha_i^r \beta_r^k = \beta_i^s \alpha_s^k = \delta_i^k. \tag{87}$$

Pak platí pro veličiny kontravariantní transformace (63_1)

$$\xi^i = \alpha_k^i \bar{\xi}^k, \quad \bar{\xi}^i = \beta_k^i \xi^k,$$

pro veličiny kovariantní podle (63_2)

$$\bar{\eta}_i = \alpha_i^k \eta_k, \quad \eta_i = \beta_i^k \bar{\eta}_k.$$

Současně jest podle (56_1) a (76_1)

$$\xi^i \eta_i = \bar{\xi}^i \bar{\eta}_i. \tag{88}$$

V metrické geometrii můžeme přecházeti od složek kontravariantních ξ^i ke kovariantním a naopak podle vztahů (76) a (77):

$$\xi_i = g_{ik} \xi^k, \quad \eta^i = g^{ik} \eta_k.$$

Z několika řad proměnných veličin ξ^i, η^k, ζ_l můžeme dále sestaviti na př. trilineární formu

$$a_{ik}^l \xi^i \eta^k \zeta_l,$$

a budeme požadovati, aby tato forma byla invariantní pro lineární transformace proměnných, aby tedy platilo

$$a_{ik}^l \xi^i \eta^k \zeta_l = \bar{a}_{ik}^l \bar{\xi}^i \bar{\eta}^k \bar{\zeta}_l. \tag{89}$$

Odtud plynou transformační rovnice pro koeficienty formy, dosadíme-li do naší rovnice

$$\xi^i = \alpha_r^i \bar{\xi}^r, \quad \eta^k = \alpha_s^k \bar{\eta}^s, \quad \zeta_l = \beta_l^t \bar{\zeta}_t.$$

Dostaneme

$$a_{ik}^l \alpha_r^i \alpha_s^k \beta_l^t \bar{\xi}^r \bar{\eta}^s \bar{\zeta}_t = \bar{a}_{rs}^t \bar{\xi}^r \bar{\eta}^s \bar{\zeta}_t$$

nebo

$$\bar{a}_{rs}^t = \alpha_r^i \alpha_s^k \beta_l^t a_{ik}^l, \quad a_{rs}^t = \beta_r^i \beta_s^k \alpha_l^t \bar{a}_{ik}^l. \tag{90}$$

Podle výkladů předchozího odstavce nazveme naši trilineární formu proměnných ξ^i, η^k, ζ_l tensorovou formou třetího řádu, její součinitele složkami tensoru dvakrát kovariantního a jednou kontravariantního (podle postavení indexů ve složkách a_{ik}^l). Indexy složek píšeme tak, aby každému hornímu indexu ve složkách proměnných (i, k) odpovídaly dolní indexy v koeficientech a, dolnímu indexu ve složkách horní index koeficientu. Pak se podle naší dřívější úmluvy může vynechati sčítací symbol Σ a dále je patrno podle (90), jak se složky tensoru a^l_{ik} transformují. Tensor, který jest částečně kovariantní, částečně kontravariantní slove také smíšený. V metrické geometrii bude možno indexy libovolně přesunovati nahoru a dolů. Nyní tedy uvedeme definici tensoru v n-rozměrném prostoru. Pro jednoduchost vyjádření zůstaneme u tensoru třetího řádu. Rozšíření na tensory řádu vyššího vyplývá odtud samo sebou.

Tensor třetího řádu dvakrát kovariantní, jednou kontravariantní, jest určen trilineární formou třech řad proměnných ξ^i, η^k, ζ_l, která jest invariantní vůči lineárním transformacím těchto proměnných. Prvé dvě řady proměnných se transformují kontravariantně, třetí kovariantně. Koeficienty trilineární formy nazývají se složky tensoru v uvažované soustavě souřadnic; jsou dvakrát kovariantní v indexech i, k, odpovídajících proměnným kontravariantním, a jednou kontravariantní v indexu l, který odpovídá kovariantní proměnné ζ_l.

V tomto smyslu určuje na př. invariantní forma

$$a^{iks}_{jr}\xi_i\eta^j\zeta_k\varrho^r\sigma_s$$

smíšený tensor řádu pátého, třikrát kontravariantní a dvakrát kovariantní o složkách a^{iks}_{jr}. Tensor je určen, známe-li jeho složky v jedné soustavě souřadnic. V přeneseném slova smyslu nazveme v geometrii a ve fysice tensorem veličinu, která se dá jednoznačně vyjádřiti podobnou multilineární formou několika řad proměnných závislých na souřadnicích naznačených způsobem, jejíž známost veličinu úplně charakterisuje. Příkladem byla v předcházejícím odstavci hustota proudu (83) jakožto tensor dvakrát kovariantní. Dosadíme-li do libovolné tensorové formy za proměnné jisté konstantní hodnoty, vznikne přirozeně konstanta, skalár.

Skalár můžeme považovati za tensor řádu nultého, který se transformacemi proměnných vůbec nemění. Délka úsečky, úhel dvou daných vektorů, objem hranolu musí vycházet v každé soustavě souřadnic stejně, tedy

$$\bar{a} = a.$$

Kontravariantní vektor (na př. pošinutí a^i) jest nyní dán lineární formou kovariantní proměnné ξ_i ve tvaru

$$a^i\xi_i = a^1\xi_1 + a^2\xi_2 + \dots + a^n\xi_n.$$

Vektor kovariantní p_i jest dán lineární formou kontravariantní proměnné ξ^i ve tvaru

$$p_i\xi^i = p_1\xi^1 + p_2\xi^2 + \dots + p_n\xi^n.$$

Máme-li dokázati, že na př. n^3 čísel a^l_{ik} tvoří komponenty smíšeného tensoru, musíme podle definice dokázati, že forma

$$a^l_{ik}\xi^i\eta^k\zeta_l$$

jest pro lineární transformace proměnných invariantní, neboli, že se čísla a^l_{ik} transformují podle vztahu (90). Tam je patrno, že komponenty a^l_{ik} se transformují lineární transformací (63) jako součin dvou vektorů kovariantních b_i, c_k, a jednoho kontravariantního d^l. Neboť by tu platilo

$$\bar{b}_i\bar{c}_k\bar{d}^l = \alpha^r_i\alpha^s_k\beta^l_t b_r c_s d^t$$

analogicky s $\bar{a}^l_{ik} = \alpha^r_i\alpha^s_k\beta^l_t a^t_{rs}$ podle (90). Nelze ovšem obecný tensor třetího řádu vyjádřiti vždy skutečně součinem tří vektorů, neboť tensor je určen n^3 složkami, kdežto tři vektory $3n$ složkami.

Budeme tedy definovati tensor (pro jednoduchost vyjádření a^l_{ik}) druhým způsobem: tensor dvakrát kovariantní, jednou kontravariantní, jest veličina, jejíž složky se transformují lineární transformací souřadnic jako součin dvou vektorů kovariantních a jednoho kontravariantního. Zevšeobecnění je samozřejmé.

Úkolem tensorového počtu jest, nalézti vlastnosti tensorů a vztahy mezi tensory, které jsou vzhledem k lineárním transformacím invariantní, neboli nezávisí na zvolených soustavách afinních souřadnic.

16. Tensorová algebra. Tensorová algebra obsahuje pouze čtyři výkony: sčítání, násobení, zúžení a přidružení.

Sčítání tensorů. Součet tensorů téhož řádu a druhu jest opět tensor stejného řádu a druhu. Buďtež na př. a_i^k, b_i^k dva smíšené tensory n-rozměrné. Dokážeme, že jejich součet je tensor téhož druhu a řádu. Podle předpokladu jest

$$a_i^k \xi^i \eta_k = \bar{a}_i^k \bar{\xi}^i \bar{\eta}_k,$$

$$b_i^k \xi^i \eta_k = \bar{b}_i^k \bar{\xi}^i \bar{\eta}_k.$$

Sečtením obou rovnic vyplývá

$$(a_i^k + b_i^k)\, \xi^i \eta_k = (\bar{a}_i^k + \bar{b}_i^k)\, \bar{\xi}^i \bar{\eta}_k,$$

t. j. součtová forma je také invariantní, a proto podle konečné poznámky předchozího odstavce jsou

$$c_i^k = a_i^k + b_i^k \tag{91}$$

komponenty nového tensoru součtového. Pro více sčítanců by byl důkaz zcela obdobný.

Příklady. 1. Je-li a_{kl}^i tensor, je také $-a_{kl}^i$ tensor a jejich součet 0 jest pak tensor téhož řádu a druhu, jehož všechny složky jsou nulové. V oboru tensorů libovolného řádu a druhu existuje tedy zvláštní tensor nulový. Je-li přičten k jinému tensoru, nezmění jej.

2. Buď dán tensor a^{ik}; forma $a^{ik}\xi_i\eta_k$ je invariantní, současně však i forma $-a^{ki}\xi_i\eta_k$. Jsou tudíž

$$b^{ik} = a^{ik} - a^{ki}$$

komponenty antisymetrického tensoru druhého řádu, neboť $b^{ik} = -b^{ki}$.

3. Věta o sčítání tensorů obsahuje jako zvláštní případ věty o sčítání a odčítání vektorů, jako tensorů prvního řádu.

Násobení tensorů. Máme dokázati, že součin dvou tensorů na př. a_k^i a b_{lm} je opět tensor. Označme $a_k^i b_{lm} = c_{klm}^i$.

Podle předpokladu jest

$$a^i_k \xi_i \eta^k = \bar{a}^i_k \bar{\xi}_i \bar{\eta}^k,$$
$$b_{lm} \zeta^l \lambda^m = \bar{b}_{lm} \bar{\zeta}^l \bar{\lambda}^m.$$

Násobením plyne

$$a^i_k b_{lm} \xi_i \eta^k \zeta^l \lambda^m = \bar{a}^i_k \bar{b}_{lm} \bar{\xi}_i \bar{\eta}^k \bar{\zeta}^l \bar{\lambda}^m,$$

t. j. nová forma jest opět invariantní a veličiny

$$c^i_{klm} = a^i_k b_{lm}$$

jsou komponenty smíšeného tensoru čtvrtého řádu. Je zřejmé, že také součin skaláru a tensoru je tensor. Je-li a^{ij}_{klm} tensor, c skalár, jest ca^{ij}_{klm} tensor téhož druhu a řádu. Zevšeobecnění uvedených příkladů jest na snadě.

Poněvadž jest vždy podle (88)

$$\xi^i \eta_i = \bar{\xi}^i \bar{\eta}_i,$$

určuje tato forma svými součiniteli smíšený tensor druhého řádu, jehož složky jsou

$$a^k_i = \delta^k_i = \begin{cases} 1 \text{ pro } i = k, \\ 0 \text{ pro } i \neq k. \end{cases} \tag{92}$$

Tento tensor slove jednotkový.

Zúžení. Je-li c^k_i smíšený tensor, platí

$$c^k_i \xi^i \eta_k = \bar{c}^k_i \bar{\xi}^i \bar{\eta}_k$$

pro každou lineární transformaci

$$\xi^i = \alpha^i_r \bar{\xi}^r, \quad \eta_k = \beta^s_k \bar{\eta}_s.$$

Pro snazší zřetelnost budeme nyní pro každé sčítání psáti Σ. Analogicky s (90) jest

$$c^i_k = \sum_{r,s} \alpha^i_r \beta^s_k \bar{c}^r_s.$$

Pro člen mající $k = i$ dostaneme

$$c_i^i = \sum_{r,s} \alpha_r^i \beta_k^s \bar{c}_s^r$$

$$\sum_i c_i^i = \sum_{r,s} (\bar{c}_s^r \sum_i \alpha_r^i \beta_i^s).$$

Vzhledem k (87) máme konečně

$$\sum_i c_i^i = \sum_s \bar{c}_s^s = \sum_i \bar{c}_i^i. \tag{93}$$

Vrátíme-li se opět k našemu úspornému označení $\sum_i c_i^i = c_i^i$, pozorujeme, že ztotožněním horního a dolního indexu ve smíšeném tensoru c_k^i a sečtením dostáváme skalár c_i^i, tedy tensor o 2 řády nižší.

Na tomto základě můžeme z každého smíšeného tensoru a_{ijm}^{kl} ztotožněním jednoho dolního a horního indexu odvoditi nový tensor o 2 řády nižší, na př.

$$a_{ikm}^{kl} = b_{im}^l.$$

Podle definice jest invariantní forma

$$a_{ijm}^{kl} \xi^i \eta^j \zeta_k \varphi_l \tau^m.$$

Danou formu můžeme psáti také ve tvaru

$$\sum_{jk} \eta^j \zeta_k (\sum_{ilm} a_{ijm}^{kl} \xi^i \varphi_l \tau^m).$$

Z invariance této formy je patrno, že součet v závorce je tensor druhého řádu

$$c_j^k = \sum_{ilm} a_{ijm}^{kl} \xi^i \varphi_l \tau^m.$$

Podle věty shora dokázané jest invariantem součet

$$\sum_k c_k^k = \sum_{ilm} \xi^i \varphi_l \tau^m (\sum_k a_{ikm}^{kl}).$$

Jest tedy

$$\sum_k a_{ikm}^{kl} = b_{im}^l \tag{94}$$

tensor řádu třetího. Ztotožnění dvou opačně ležících indexů a sečtení podle nich nazýváme z ú ž e n í.

Z tensoru třetího řádu b^l_{im} dostáváme na př. dalším zúžením (s vynecháním znamení Σ)

$$b^i_{im} = d_m, \tag{94}$$

kovariantní tensor prvého řádu.

P ř i d r u ž e n í. Vedle uvedených výkonů s tensory, které nepředpokládají stanovení metriky pro základní množiny vektorové, přistupuje v metrické geometrii tensorové ještě jeden výkon — přidružení, které předpokládá existenci základního metrického tensoru g_{ik}. Pomocí tohoto tensoru můžeme v tensorech indexy libovolně přesunovati nahoru nebo dolů, takže ke každému tensoru můžeme vytvořiti složky kovariantní, kontravariantní, nebo různě smíšené. Různé složky téhož tensoru budeme pak označovati týmž písmenem, na př. a^i_{jk}, a_{ijk}, a^{ij}_k, a^{ijk}. Zvyšování a snižování indexů se provádí pomocí rovnic (76) a (77):

$$\xi_i = g_{ik}\xi^k, \quad \xi^i = g^{ik}\xi_k,$$

které jsou zároveň příkladem pro zúžení podle indexu k. Výkon sám pochopíme nejlépe na příkladě s tensorem třetího řádu:

$$a_{ikl}\xi^i\eta^k\zeta^l = a^i_{kl}\xi_i\eta^k\zeta^l = a^{ik}_l\xi_i\eta_k\zeta^l = a^{ikl}\xi_i\eta_k\zeta_l.$$

Indexy tensorových složek píšeme nyní pro zřetelnost za sebou v tom pořádku, jako indexy proměnných, aby bylo patrno, ke které proměnné index patří. Použijeme-li rovnic (77) dostaneme

$$a_{ikl}\xi^i\eta^k\zeta^l = a_{ikl}g^{ir}\xi_r\eta^k\zeta^l = a^r_{kl}\xi_r\eta^k\zeta^l,$$

takže z v ý š e n í i n d e x u se děje podle vztahu

$$a^r_{kl} = a_{ikl}g^{ir}.$$

Index i se zvýší (bez ohledu na ostatní indexy) tak, že příslušnou komponentu $a_{i\,\cdot\,\cdot}^{\,\cdot\,\cdot}$ násobíme g^{ir} a sečteme podle i. Index přejde nahoru a změní se v r. Na př.:

$$b^i{}_{mk}{}^l \cdot g^{mr} = b^{ir}{}_k{}^l. \tag{95}$$

Pro snížení indexu uveďme příklad:

$$a^{ik}{}_l\, \xi_i \eta_k \zeta^l = a^{ik}{}_l\, \xi_i g_{ks} \eta^s \zeta^l = a^i{}_{sl}\, \xi_i \eta^s \zeta^l.$$

Odtud

$$a^i{}_{sl} = a^{ik}{}_l\, g_{ks}. \tag{96}$$

Podobně můžeme současně zvyšovati a snižovati indexů několik. Snadno lze na př. dokázati, že

$$a_{ik} = g_{ir} g_{ks} a^{rs}. \tag{97}$$

Pro metrickou tensorovou formu máme vztahy

$$g_{ik} \xi^i \eta^k = g^i_k \xi_i \eta^k = g^k_i \xi^i \eta_k = g^{ik} \xi_i \eta_k,$$

a podle úlohy 17 také

$$g_{ik} \xi^i \eta^k = \xi_k \eta^k = g^{ik} \xi_i \eta_k;$$

takže smíšené komponenty metrického tensoru jsou ve všech lineárních souřadnicích

$$g^i_k = \begin{cases} 1 \text{ pro } i = k, \\ 0 \text{ pro } i \neq k. \end{cases} \tag{98}$$

V kartézských souřadnicích o kladné metrické formě platí podle (72)

$$g_{ik} = g^i_k = \delta^i_k. \tag{99}$$

Takže podle (79) jest $\xi_i = \xi^i$. Indexy je tedy možno přesunovati beze změny libovolně:

$$a_{ik}{}^l = a^i{}_{kl} = a_{ikl} = a^{ikl}.$$

Úlohy. 18. Dokažte přímým užitím transformačních rovnic (63), že je tensorem součin $a^i b^k$ nebo $a^i b^k c_l$, užívajíce vztahu (46).

19. Pro tensor $c^i_k = a^i b_k$ dokažte přímo, že Σc^i_i jest invariantem.

17. Vektorový součin. Nejjednodušší tensory po vektorech jsou přirozeně tensory řádu druhého jako na př. tensor metrický g_{ik}. V n-rozměrném prostoru má obecný tensor druhého řádu tolik komponent, kolik je variací druhého řádu s opakováním z n prvků, t. j. n^2. Omezíme-li se zatím na prostor trojrozměrný, jest komponent 9, které lze srovnati do schema

$$\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}. \end{array} \tag{100}$$

Pro tensor symetrický (na př. metrický) platí však podmínky $a_{ik} = a_{ki}$, takže počet složek se zmenšuje na $n + \frac{1}{2}n(n-1) = \frac{1}{2}n(n+1)$, ve třech rozměrech na 6. Tensor druhého řádu, pro nějž platí $a_{ik} = -a_{ki}$ slove antisymetrický a má jen $\frac{1}{2}n(n-1)$ různých složek, v trojrozměrném prostoru pouze 3, neboť složky $a_{ii} = 0$. Je tedy poměrně nejjednodušší, proto uvedeme nejprve jeho příklad, t. zv. vektorový součin, kterého jsme se dotkli již v odst. 14 při odvozování obsahu rovnoběžníku. Pro názornost se omezíme na prostor trojrozměrný o dané základní metrické formě $Q(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = g_{ik}\xi^i\eta^k$. V souřadnicích kartézských je kromě toho $g_{ik} = \delta_i^k$.

V počtu vektorovém se definuje vektorový součin dvou vektorů $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ jako vektor $\mathfrak{z}$ (obr. 11) o absolutní velikosti rovné obsahu rovnoběžníka oběma vektory určeného

$$xy \sin \vartheta, \tag{101}$$

a takového směru, že se z něho jeví nejmenší otočení vektoru $\mathfrak{x}$ do vektoru $\mathfrak{y}$ ve smyslu kladném. Vektory $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ tvoří opět pravotočivou soustavu jako základní vektory $\mathfrak{i}_1, \mathfrak{i}_2, \mathfrak{i}_3$. Průměty stanoveného rovnoběžníka do souřadnicových rovin jsou, jak jsme viděli,

$$\begin{aligned} \zeta^{12} &= \xi^1\eta^2 - \xi^2\eta^1 = \zeta^3, \\ \zeta^{23} &= \xi^2\eta^3 - \xi^3\eta^2 = \zeta^1, \\ \zeta^{31} &= \xi^3\eta^1 - \xi^1\eta^3 = \zeta^2. \end{aligned}$$

Ve skutečnosti jsou to komponenty antisymetrického tensoru, který má v trojrozměrném prostoru náhodou 3 složky jako vektor ζ^i, ale v prostoru čtyrrozměrném by měl složek 6, takže by se již nedal znázorniti vektorem o 4 složkách. V počtu vektorovém se píše vektorový součin na rozdíl od součinu skalárního ve tvaru

$$[\mathfrak{a}\mathfrak{b}] = [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]. \tag{102}$$

Z tvaru složek i ze vztahu $\sin(\mathfrak{b}\mathfrak{a}) = -\sin(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$ je patrno, že pro vektorový součin neplatí zákon komutativnosti, nýbrž

$$[\mathfrak{b}\mathfrak{a}] = -[\mathfrak{a}\mathfrak{b}]. \tag{103}$$

Ve tvaru polokartézském jest

$$[\mathfrak{a}\mathfrak{b}] = \mathfrak{i}_1 (a^2b^3 - a^3b^2) + \mathfrak{i}_2 (a^3b^1 - a^1b^3) + \mathfrak{i}_3 (a^1b^2 - a^2b^1), \tag{104}$$

nebo ve tvaru determinantu

$$[\mathfrak{a}\mathfrak{b}] = \begin{vmatrix} \mathfrak{i}_1 & \mathfrak{i}_2 & \mathfrak{i}_3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix}.$$

Odtud je ihned patrno, že

$$[\mathfrak{a}\mathfrak{a}] = 0. \tag{105}$$

Vektor $\mathfrak{z}$, který jako vektorový součin $[\mathfrak{a}\mathfrak{b}]$ znázorňuje v třírozměrných kartézských souřadnicích náš antisymetrický tensor, slove často jeho doplňkovým vektorem. Tensor $c^{ik} = a^ib^k - a^kb^i$ se někdy nazývá bivektor. Je zřejmé, že toto přiřadění vektoru doplňkového má smysl jen v souřadnicích kartézských, neboť obecná lineární transformace souřadnic nezachovává pravé úhly. Jen při vlastních ortogonálních transformacích (s determinantem $+1$) zůstává invariantní lineární forma proměnného vektoru ξ^i

$$\xi_1c^{23} + \xi_2c^{31} + \xi_3c^{12} = \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix}, \tag{106}$$

neboť uvedený determinant se násobí při tom determinantem transformace, t. j. $+1$. Rozdíl mezi složkami kovariantními a kontravariantními v kartézských souřadnicích, jak jsme viděli, mizí.

Tensor $c^{ik} = a^i b^k - a^k b^i$ má ovšem smysl i pro souřadnice kosoúhlé. Zvolme třeba příklad dvojrozměrný s osami svírajícími úhel ω o metrické formě podle (34)

$$g_{ik}\xi^i\eta^k = \xi^1\eta^1 + \cos\omega\,(\xi^1\eta^2 + \xi^2\eta^1) + \xi^2\eta^2,$$

ve které

$$g_{11} = g_{22} = 1, \quad g_{12} = g_{21} = \cos\omega.$$

Pro náš tensor musí být $c^{ii} = c_{ii} = 0$; kovariantní složky podle (97)

$$c_{ik} = g_{ir}g_{ks}c^{rs}, \text{ neboli } c_{12} = g_{11}g_{22}c^{12} + g_{21}g_{12}c^{21};$$
$$c_{12} = c^{12}\,(g_{11}g_{22} - g_{21}g_{12}) = c^{12}\sin^2\omega = -c_{21}.$$

Dvojnásobným zúžením obdržíme invariant

$$c_{ik}c^{ik} = c_{12}c^{12} + c_{21}c^{21} = 2c_{12}c^{12} = 2\,(a^1b^2 - a^2b^1)^2\sin^2\omega,$$

takže

$$\tfrac{1}{2}c_{ik}c^{ik} = (a^1b^2 - a^2b^1)^2\sin^2\omega. \tag{107}$$

Vidíme, že výsledek je skutečně invariant, neboť je to čtverec obsahu rovnoběžníka určeného oběma vektory $ab\sin\vartheta$. V kartézských souřadnicích $(\bar{a}^i, \bar{b}^k)$ jest týž čtverec podle (14)

$$(\bar{a}^1\bar{b}^2 - \bar{a}^2\bar{b}^1)^2 = \tfrac{1}{2}\,(\bar{c}^{12}\bar{c}_{12} + \bar{c}^{21}\bar{c}_{21}) = \tfrac{1}{2}\bar{c}_{ik}\bar{c}^{ik}.$$

To je však invariant platný pro všechny lineární souřadnice, tedy i pro naše kosoúhlé. (Srovnej úl. 17 v odst. 12.)

Ještě jedna okolnost odlišuje obyčejné vektory od doplňkových. Změníme-li v pravotočivé kartézské soustavě směry os v opačné (inverse os), změní složky obyčejných vektorů a^i své znaménko v opačné, kdežto složky vektoru doplňkového podle (104) znaménko nezmění. Proto se oba druhy vektorů v počtu vektorovém odlišují. Vektory obyčejné slovou polární, doplňkové pak axiální.

Analogicky s uvedeným příkladem dvojrozměrným můžeme i v n-rozměrném prostoru vyjádřiti obsah rovnoběžníka určeného vektory $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ výrazem, jehož čtverec jest $p^2 = (xy\sin\vartheta)^2$. Podle (66) a (67) máme pak

$$x^2 = Q(\mathfrak{x}),\ y^2 = Q(\mathfrak{y}),\ \cos\vartheta = \frac{Q(\mathfrak{x},\mathfrak{y})}{\sqrt{Q(\mathfrak{x})\cdot Q(\mathfrak{y})}},$$

takže
$$\sin^2\vartheta = 1 - \cos^2\vartheta = \frac{Q(\mathfrak{x})\cdot Q(\mathfrak{y}) - Q^2(\mathfrak{x},\mathfrak{y})}{Q(\mathfrak{x})\cdot Q(\mathfrak{y})}.$$

Odtud $p^2 = Q(\mathfrak{x})\cdot Q(\mathfrak{y}) - Q^2(\mathfrak{x},\mathfrak{y})$, což lze psáti také

$$p^2 = \xi^i\xi_i\eta^k\eta_k - \xi^i\eta_i\xi_k\eta^k = \xi^i\eta^k(\xi_i\eta_k - \xi_k\eta_i) =$$
$$= -\xi^k\eta^i(\xi_i\eta_k - \xi_k\eta_i),$$

jestliže v závorce vytkneme -1 a zaměníme indexy i, k. Odtud pak sečtením obou výrazů, a úpravou

$$p^2 = \tfrac{1}{2}(\xi^i\eta^k - \xi^k\eta^i)(\xi_i\eta_k - \xi_k\eta_i) = \tfrac{1}{2}\xi^{ik}\xi_{ik}. \tag{108}$$

Jako určují komponenty ξ^i směr i velikost vektoru, tak určuje antisymetrický tensor druhého řádu $\xi^{ik} = \xi^i\eta^k - \xi^k\eta^i$ svými složkami rovnoběžník daný vektory $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ polohou, velikostí i smyslem otáčení $\mathfrak{x}$ do $\mathfrak{y}$. Dva rovnoběžníky v různých bodech určují jen tenkrát stejné plošné prvky, jestliže

$$\underset{1}{\xi}{}^{ik} = \underset{2}{\xi}{}^{ik} \quad (i, k = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

Proto považujeme vektor ξ^i za základní prvek jednorozměrný, ξ^{ik} za základní prvek dvojrozměrný o velikosti $\frac{1}{2}\xi^{ik}\xi_{ik}$. Jak jsme již podotkli, nelze v n-rozměrném prostoru zobraziti prvek ξ^{ik} nějakým doplňkovým vektorem, který by měl jen n složek.

Úloha 20. V kartézských trojrozměrných souřadnicích jsou dány vektory $\mathfrak{a}(a_i)$, $\mathfrak{b}(b_i)$ a jejich vektorový součin $[\mathfrak{a}\mathfrak{b}] = \mathfrak{z}$. Dokažte, že pro směrové kosiny $\cos\gamma_i$ vektoru $\mathfrak{z}(z_i)$ platí

$$\cos\gamma_1 = \frac{z_1}{z} = \frac{a_2b_3 - a_3b_2}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}}, \text{ atd.}$$

Jsou-li směrové kosiny daných vektorů resp. α_i, β_i, jejich vzájemný úhel pak ϑ, jest dále

$$\cos\gamma_1 = \frac{\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2}{\sin\vartheta}, \text{ podobně } \cos\gamma_2,\ \cos\gamma_3;$$

$$\sin^2\vartheta = (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^2 + (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)^2 + (\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)^2.$$

Dokažte!

18. Vlastnosti a užití vektorového součinu. Z definice vektorového součinu plyne, že dva rovnoběžné vektory $\mathfrak{a} \parallel \mathfrak{b}$ mají $[\mathfrak{a}\mathfrak{b}] = 0$.

Pro vektory jednotkové ($\mathfrak{i}_1, \mathfrak{i}_2, \mathfrak{i}_3$) plyne dále:

$$\begin{aligned} [\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_1] &= [\mathfrak{i}_2\mathfrak{i}_2] = [\mathfrak{i}_3\mathfrak{i}_3] = 0, \\ [\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2] &= -[\mathfrak{i}_2\mathfrak{i}_1] = \mathfrak{i}_3, \\ [\mathfrak{i}_2\mathfrak{i}_3] &= -[\mathfrak{i}_3\mathfrak{i}_2] = \mathfrak{i}_1, \\ [\mathfrak{i}_3\mathfrak{i}_1] &= -[\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_3] = \mathfrak{i}_2. \end{aligned} \tag{109}$$

Zákon komutativní, jak jsme viděli, neplatí, protože

$$[\mathfrak{a}\mathfrak{b}] = -[\mathfrak{b}\mathfrak{a}],$$

neboli složkově

$$a_i b_k - a_k b_i = -(b_i a_k - b_k a_i).$$

Avšak platí zákon distributivní

$$[\mathfrak{a} + \mathfrak{b}, \mathfrak{c}] = [\mathfrak{a}\mathfrak{c}] + [\mathfrak{b}\mathfrak{c}], \tag{109}$$

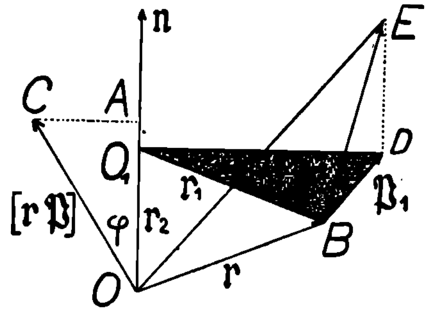
jak snadno plyne z vyjádření polokartézského (104).

Vektorový součin se vyskytuje velmi často v mechanice. Značí-li OB vektor $\mathfrak{r}$ (x, y, z), $\mathfrak{a}$ pak nějaký vektor v bodě B, nazývá se $[\mathfrak{r}\mathfrak{a}]$ momentem vektoru $\mathfrak{a}$ vzhledem k bodu O. Na př. moment síly $\mathfrak{P}$ (X, Y, Z) vzhledem k bodu O jest $[\mathfrak{r}\mathfrak{P}] = \mathfrak{D}$ znázorňuje se vektorem, jehož složky najdeme podle výrazu (104), nebo z determinantu (105)

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{i}_1 & \mathfrak{i}_2 & \mathfrak{i}_3 \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix}.$$

$$D_1 = yZ - zY,\ D_2 = zX - xZ,\ D_3 = xY - yX. \tag{110}$$

Moment síly $\mathfrak{P}$ (BE) v bodě B vzhledem k libovolné mimoběžce, vektoru $\mathfrak{n}$, jest $[\mathfrak{r}_1\mathfrak{P}_1]$, kde značí (obr. 12) $\mathfrak{r}_1$ kolmici spuštěnou z bodu B na osu $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{P}_1$ kolmý průmět síly $\mathfrak{P}$ do roviny jdoucí bodem B kolmo k $\mathfrak{n}$; $\mathfrak{P}_2$ jest složka rovnoběžná s $\mathfrak{n}$. Podobně je rozložen posiční vektor $\mathfrak{r} = OB$ na dvě složky, $\mathfrak{r}_1 \perp \mathfrak{n}$ a $\mathfrak{r}_2$ ve směru osy $\mathfrak{n}$. Protože $\triangle\, O_1BD$ je kolmý průmět trojúhelníka OBE do roviny $\varrho \perp \mathfrak{n}$, jest vektor $[\mathfrak{r}_1\mathfrak{P}_1]$ kolmým průmětem vektoru $[\mathfrak{r}\mathfrak{P}]$ do osy $\mathfrak{n}$, neboli roven $\mathfrak{n}^0 \,.\, [\mathfrak{r}\mathfrak{P}] = OA$. Dříve uvedené složky D_i jsou tedy zároveň momenty síly $\mathfrak{P}$ vzhledem k osám souřadnic. Analogický význam má všeobecně moment vektoru $\mathfrak{a}$ vzhledem k jinému vektoru $\mathfrak{n}$.



Obr. 12.

Také zákon Laplaceův v nauce o elektřině poskytuje příklad vektorového součinu. Proudový element $\mathrm{d}J = \mathfrak{i} \,.\, \mathrm{d}s$ v bodě B o posičním vektoru $OB = \mathfrak{r}$ působí v bodě O intensitu magnetického pole velikosti

$$\mathrm{d}H = \frac{\mathrm{d}I \,.\, \sin\,(r, \mathrm{d}s)}{r^2},$$

jejíž směr je dán vektorovým součinem $[\mathfrak{r}\ \mathrm{d}J]$. Jest tedy

$$\mathrm{d}\mathfrak{H} = \frac{[\mathfrak{r} \,.\, \mathrm{d}\mathfrak{J}]}{r^3}. \tag{111}$$

Jiné příklady uvidíme v dalším.

Důležité jsou také součiny tří a čtyř vektorů. Skalární součin $(\mathfrak{a}[\mathfrak{b}\mathfrak{c}])$ má jednoduchý geometrický význam. $\mathfrak{p} = [\mathfrak{b}\mathfrak{c}]$ udává obsah p rovnoběžníka omezeného vektory $\mathfrak{c}, \mathfrak{b}$, součin $(\mathfrak{a}\mathfrak{p})$ má tedy hodnotu $pa \cos \vartheta$, značí-li ϑ úhel vektorů $\mathfrak{a}, \mathfrak{p}$. Součin $a \cos \vartheta$ je však výška rovnoběžnostěnu určeného vektory $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$. Je tedy skalární součin $(\mathfrak{a}[\mathfrak{b}\mathfrak{c}])$ roven objemu tohoto rovnoběžnostěnu. Po inversi os změní se znaménka složek a^i a tím znaménko celého skaláru. Proto se mu říká také pseudoskalár (viz odst. 28). Pro tři komplanární vektory musí ovšem

$$(\mathfrak{a}[\mathfrak{b}\mathfrak{c}]) = 0.$$

Protože objem zmíněného rovnoběžnostěnu můžeme počítati ještě pro podstavy $[\mathfrak{c}\mathfrak{a}]$ nebo $[\mathfrak{a}\mathfrak{b}]$, jest

$$(\mathfrak{a}[\mathfrak{b}\mathfrak{c}]) = (\mathfrak{b}[\mathfrak{c}\mathfrak{a}]) = (\mathfrak{c}[\mathfrak{a}\mathfrak{b}]), \tag{112}$$

Vidíme tedy, že lze v daném součinu vektory cyklicky zaměniti.

Ve tvaru složkovém jest hodnota součinu

$$(\mathfrak{a}[\mathfrak{b}\mathfrak{c}]) = a^1 (b^2c^3 - b^3c^2) + a^2 (b^3c^1 - b^1c^3) + a^3 (b^1c^2 - b^2c^1),$$

nebo ve tvaru determinantu (srv. 106)

$$(\mathfrak{a}[\mathfrak{b}\mathfrak{c}]) = \begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}. \tag{113}$$

Ve fysice znamená tento součin tok vektoru $\mathfrak{a}$ plochou $[\mathfrak{b}\mathfrak{c}]$. Kdyby na př. $\mathfrak{a}$ byla rychlost tekutiny, vyjadřoval by náš součin objem tekutiny, která proteče jmenovanou plochou za vteřinu. (Viz odst. 14.)

Dvojnásob vektorový součin $[\mathfrak{a}[\mathfrak{b}\mathfrak{c}]]$ má složky na př.

$$[\mathfrak{a}[\mathfrak{b}\mathfrak{c}]]_1 = a^2 (b^1c^2 - b^2c^1) - a^3 (b^3c^1 - b^1c^3) =$$
$$= b^1 (a^2c^2 + a^3c^3) - c^1 (a^2b^2 + a^3b^3).$$

Přičteme-li k této rovnici identitu

$$0 = b^1a^1c^1 - c^1a^1b^1,$$

najdeme

$$[\mathfrak{a}[\mathfrak{b}\mathfrak{c}]]_1 = b^1(\mathfrak{a}\mathfrak{c}) - c^1(\mathfrak{a}\mathfrak{b}),$$

což je složka (1) vektoru

$$\mathfrak{b}(\mathfrak{a}\mathfrak{c}) - \mathfrak{c}(\mathfrak{a}\mathfrak{b}).$$

Podobně bychom to ukázali o dalších složkách; je tedy

$$[\mathfrak{a}[\mathfrak{b}\mathfrak{c}]] = \mathfrak{b}(\mathfrak{a}\mathfrak{c}) - \mathfrak{c}(\mathfrak{a}\mathfrak{b}). \tag{114}$$

Tento vektor je polární, neboť inversí změní znaménko složek.

Násobme podle (114) součin $[\mathfrak{b}[\mathfrak{c}\mathfrak{d}]]$ skalárně vektorem $\mathfrak{a}$. Dostaneme skalár

$$(\mathfrak{a}[\mathfrak{b}[\mathfrak{c}\mathfrak{d}]]) = (\mathfrak{a}\mathfrak{c})(\mathfrak{b}\mathfrak{d}) - (\mathfrak{a}\mathfrak{d})(\mathfrak{b}\mathfrak{c}). \tag{115}$$

Podle (112) je však také pro $[\mathfrak{c}\mathfrak{d}] = \mathfrak{m}$

$$(\mathfrak{a}[\mathfrak{b}\mathfrak{m}]) = (\mathfrak{m}[\mathfrak{a}\mathfrak{b}]) = [\mathfrak{a}\mathfrak{b}] \cdot [\mathfrak{c}\mathfrak{d}]. \tag{116}$$

Ze (114) lze také odvoditi součin

$$\begin{aligned}[][[\mathfrak{a}\mathfrak{b}][\mathfrak{c}\mathfrak{d}]] &= \mathfrak{c}(\mathfrak{d}[\mathfrak{a}\mathfrak{b}]) - \mathfrak{d}([\mathfrak{a}\mathfrak{b}]\mathfrak{c}) = \\ &= -\mathfrak{a}([\mathfrak{c}\mathfrak{d}]\mathfrak{b}) + \mathfrak{b}([\mathfrak{c}\mathfrak{d}]\mathfrak{a}).\end{aligned} \tag{117}$$

Odtud plyne vztah pro čtyři vektory, z nichž žádná trojice není komplanární:

$$-\mathfrak{d}([\mathfrak{a}\mathfrak{b}]\mathfrak{c}) = \mathfrak{a}(\mathfrak{b}[\mathfrak{d}\mathfrak{c}]) + \mathfrak{b}(\mathfrak{a}[\mathfrak{c}\mathfrak{d}]) + \mathfrak{c}(\mathfrak{d}[\mathfrak{b}\mathfrak{a}]). \tag{118}$$

Součin ve (117) je vektor axiální, neboť po inversi os nemění svého znaménka, jak je také patrno podle strany pravé.

Úlohy: 21. Dokažte identitu

$$[\mathfrak{a}[\mathfrak{b}\mathfrak{c}]] + [\mathfrak{b}[\mathfrak{c}\mathfrak{a}]] + [\mathfrak{c}[\mathfrak{a}\mathfrak{b}]] = 0.$$

22. Dokažte, že platí

$$[\mathfrak{a}[\mathfrak{b}[\mathfrak{c}\mathfrak{d}]]] = ([\mathfrak{a}\mathfrak{c}]\mathfrak{d})\mathfrak{b} - (\mathfrak{a}\mathfrak{b})[\mathfrak{c}\mathfrak{d}].$$

19. Derivace vektorů a tensorů podle skaláru. Složky vektoru $\mathfrak{x} = \xi^1\mathfrak{i}_1 + \xi^2\mathfrak{i}_2 + \xi^3\mathfrak{i}_3$ mohou záviseti na skalární veličině, na př. na čase t. Za jistý přírůstek času Δt změní se vektor $\mathfrak{x}$ o přírůstek $\Delta\mathfrak{x}$, který je ovšem také vektorem. Definujeme pak derivaci vektoru $\mathfrak{x}$ podle času limitou

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathfrak{x}}{\Delta t} = \frac{d\mathfrak{x}}{dt} = \frac{d\xi^1}{dt}\mathfrak{i}_1 + \frac{d\xi^2}{dt}\mathfrak{i}_2 + \frac{d\xi^3}{dt}\mathfrak{i}_3. \tag{119}$$

Při tom se předpokládá, že poloha souřadnicových os se nemění. Vektor $\frac{d\mathfrak{x}}{dt}$ má tedy složky $\frac{d\xi^i}{dt}$.

Je-li $\mathfrak{c} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$, neboli $c^i = a^i + b^i$, jest

$$\frac{dc^i}{dt} = \frac{da^i}{dt} + \frac{db^i}{dt},$$

tedy vektorově

$$\frac{d(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})}{dt} = \frac{d\mathfrak{a}}{dt} + \frac{d\mathfrak{b}}{dt}. \tag{120}$$

Podobně odvodíme derivaci součinu $(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = a^i b_i$,

$$\frac{d(a^i b_i)}{dt} = \frac{da^i}{dt} b_i + a^i \frac{db_i}{dt},$$

takže

$$\frac{d(\mathfrak{a}\mathfrak{b})}{dt} = \left(\frac{d\mathfrak{a}}{dt}\mathfrak{b}\right) + \left(\mathfrak{a}\frac{d\mathfrak{b}}{dt}\right). \tag{121}$$

Tensor $c^{ik} = a^i b^k - a^k b^i$ má derivaci

$$\frac{dc^{ik}}{dt} = a^i \frac{db^k}{dt} - a^k \frac{db^i}{dt} + \frac{da^i}{dt} b^k - \frac{da^k}{dt} b^i.$$

Podle toho bude v kartézských souřadnicích pro vektorový součin

$$\frac{d}{dt}[\mathfrak{a}\mathfrak{b}] = \left[\mathfrak{a}\frac{d\mathfrak{b}}{dt}\right] + \left[\frac{d\mathfrak{a}}{dt}\mathfrak{b}\right]. \tag{122}$$

Pro jednotkový vektor $\mathfrak{a}^0$ jest podle (66)

$$(\mathfrak{a}^0\mathfrak{a}^0) = a^2 = 1 = g_{ik} a^i a^k.$$

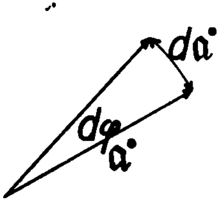
Odtud derivací podle t jest při konstantních g_{ik}

$$0 = g_{ik} a^i \frac{da^k}{dt} + g_{ik} \frac{da^i}{dt} a^k = 2 g_{ik} a^i \frac{da^k}{dt}.$$

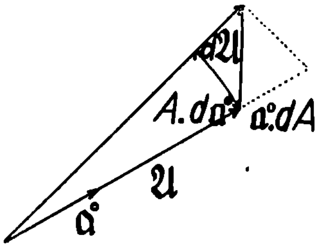
Vektorově psáno podle (121)

$$2\mathfrak{a}^0 \frac{d\mathfrak{a}^0}{dt} = 0, \tag{123}$$

z čehož plyne, že vektory $\mathfrak{a}^0$ a $\frac{d\mathfrak{a}^0}{dt}$ stojí na sobě kolmo, tedy i $\mathfrak{a}^0$ a $d\mathfrak{a}^0$ (obr. 13).



Obr. 13.



Obr. 14.

Absolutní velikost diferenciálu $d\mathfrak{a}^0$ jest rovna diferenciálu úhlu $d\varphi$, o který se vektor $\mathfrak{a}^0$ pootočí za čas dt.

Pro libovolný vektor $\mathfrak{A} = A\mathfrak{a}^0$ máme derivací

$$\frac{d\mathfrak{A}}{dt} = \frac{dA}{dt}\mathfrak{a}^0 + A\frac{d\mathfrak{a}^0}{dt}. \tag{124}$$

Nebo pro diferenciály

$$d\mathfrak{A} = dA \,.\, \mathfrak{a}^0 + A \,.\, d\mathfrak{a}^0.$$

Tato rovnice vyjadřuje poznatek zřejmý z obr. 14, že celková změna vektoru v daném bodě se skládá ze změny $\mathfrak{a}^0 \,.\, dA$ ve směru vektoru (změna délky) a ze změny $A \,.\, d\mathfrak{a}^0$ vzniklé pootočením (změna směru).

Všeobecně, závisí-li složky libovolného tensoru, na př. a^l_{ik} na skalární proměnné t, jest n-tá derivace tohoto tensoru podle t rovněž tensorem téhož řádu, neboť podle (90)

$$\frac{d^n}{dt^n}(\bar{a}^l_{ik}) = \alpha^r_i \alpha^s_k \beta^l_u \frac{d^n}{dt^n}(a_{rs}{}^u) \tag{125}$$

transformuje se tato derivace stejně jako původní tensor. N-tá derivace vektoru ξ^i je tedy opět vektor $\frac{d^n}{dt^n}(\xi^i)$, neboli vektorově psáno

$$\frac{d^n \mathfrak{r}}{dt^n} = \frac{d^n \xi^1}{dt^n} \mathfrak{i}_1 + \frac{d^n \xi^2}{dt^n} \mathfrak{i}_2 + \frac{d^n \xi^3}{dt^n} \mathfrak{i}_3. \tag{126}$$

20. Užití v geometrii a ve fysice. Tečna křivky. Značí-li $\mathfrak{r}(\xi^i)$ posiční vektor bodu M na křivce, závisí tento vektor na délce oblouku s počítané od jistého počátečního bodu na křivce.

$d\mathfrak{r}$ je vektor spojující dva nekonečně blízké body MM_1 na křivce; má tedy směr tečny o jedničkovém vektoru $\mathfrak{t}(t^i)$ a délku ds, takže

$$d\mathfrak{r} = \mathfrak{t} \,.\, ds,$$

neboli

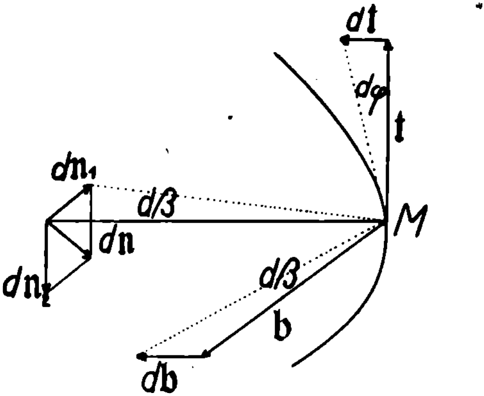
$$\mathfrak{t} = \frac{d\mathfrak{r}}{ds}, \quad t^i = \frac{d\xi^i}{ds}. \tag{127}$$

Protože $\mathfrak{t}$ je vektor jedničkový, značí t^i v kartézských souřadnicích směrové kosinusy tečny křivky vzaté ve směru rostoucího oblouku s.

Hlavní normála křivky. Postoupíme-li z bodu $M(s)$ do sousedního bodu $M_1(s + ds)$, pootočí se tečnový vektor jedničkový $\mathfrak{t}$ o $d\mathfrak{t} \perp \mathfrak{t}$. Rovina vektorů $\mathfrak{t}, d\mathfrak{t}$ slove rovinou oskulační (na obr. 15 rovina papíru). Úhel dvou sousedních tečen $d\varphi$ slove úhel kontingenční. Směr vektoru $d\mathfrak{t}$ je směr hlavní normály křivky v bodě M, jejíž jedničkový vektor označíme $\mathfrak{n}(n^i)$. (Na obr. z bodu M vodorovně vlevo.) Patrně jest $d\mathfrak{t} = \mathfrak{n} \,.\, d\varphi$. Dvě sousední hlavní normály protínají se ve středu křivosti S_1 v oskulační rovině. Délku $\overline{S_1 M} = R$ nazýváme poloměrem křivosti křivky v daném bodě M. Platí tedy

$$ds = R \,.\, d\varphi,$$

$$\frac{d\mathfrak{t}}{ds} = \frac{d\mathfrak{r}^2}{ds^2} = \frac{d\varphi}{ds}\,\mathfrak{n} = \frac{1}{R}\,\mathfrak{n}. \tag{128}$$



Obr. 15.

Číslo $1 : R$ slove první křivost v bodě M. Složkově (128) píšeme ve tvaru

$$\frac{dt^i}{ds} = \frac{1}{R}\,n^i. \tag{129}$$

Protože směrové kosiny normály podle (128)

$$n^i = R\,\frac{dt^i}{ds} = R\,\frac{d^2\xi^i}{ds^2}$$

dávají

$$(n^1)^2 + (n^2)^2 + (n^3)^2 = 1,$$

jest

$$\frac{1}{R^2} = \left(\frac{d^2\xi^1}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2\xi^2}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2\xi^3}{ds^2}\right)^2. \tag{130}$$

Binormála a torse. Kolmice v bodě M na rovinu oskulační slove binormála. Její jedničkový vektor $\mathfrak{b}(b^i)$ volíme tak, aby $\mathfrak{t}, \mathfrak{n}, \mathfrak{b}$ tvořily pravotočivou soustavu. Kdyby čára byla rovinná, byly by oskulační roviny v bodech její části pod M i nad M totožné (rovina papíru). Při čáře prostorové je oskulační rovina sousedního bodu v části nad M poněkud otočena kolem tečny $\mathfrak{t}$ o jistý úhel $d\beta$, takže levý koneo vektoru $\mathfrak{n}$ se pootočí za papír o $d\mathfrak{n}_1$ a přední konec binormály rovnoběžně s $\mathfrak{n}$ o vektor $d\mathfrak{b}$ (obě otočení o úhel $d\beta$). Analogicky s $ds = R \, . \, d\varphi$ definujeme poloměr torse T vztahem

$$ds = T \, . \, d\beta.$$

Podle obrazce 15 jest dále

$$d\mathfrak{b} = \mathfrak{n} \, . \, d\beta, \quad \frac{d\mathfrak{b}}{ds} = \mathfrak{n} \, . \, \frac{d\beta}{ds} = \frac{1}{T} \mathfrak{n},$$

složkově

$$\frac{db^i}{ds} = \frac{1}{T} n^i. \tag{131}$$

Výraz $\frac{1}{T}$ slove pak druhá křivost neboli torse čáry.

Změna normály vzniká pak jednak otočením normály kolem $\mathfrak{t}$ o vektor $d\mathfrak{n}_1$ mířící opačně než binormála o úhel $d\beta$, takže

$$d\mathfrak{n}_1 = - \mathfrak{b} \, . \, d\beta;$$

jednak otočením kolem $\mathfrak{b}$ v opačném směru tečny o vektor

$$d\mathfrak{n}_2 = - \mathfrak{t} \, . \, d\varphi.$$

Vektorový součet obou změn dává

$$\frac{d\mathfrak{n}}{ds} = - \frac{1}{R} \mathfrak{t} - \frac{1}{T} \mathfrak{b},$$

složkově

$$\frac{dn^i}{ds} = - \frac{1}{R} t^i - \frac{1}{T} b^i. \tag{132}$$

Vzorce (129), (131), (132) slovou vzorce Frenetovy. Lze je psát vektorově nebo složkově.

Pohyb bodu. Urazí-li bod o posičním vektoru $\mathfrak{r}$ za diferenciál času dt diferenciál dráhy d$\mathfrak{r}$, definuje fysika okamžitou rychlost $\mathfrak{v}$ vektorem $\left(\text{o velikosti } \dfrac{ds}{dt}\right)$

$$\mathfrak{v} = \frac{d\mathfrak{r}}{dt}, \quad \text{složkově } v^i = \frac{dx^i}{dt}. \tag{133}$$

Je to tedy vektor kontravariantní. Píšeme-li $\mathfrak{r} = r \,.\, \mathfrak{r}^0$, kde značí $\mathfrak{r}^0$ jednotkový vektor, máme (srv. 124)

$$\mathfrak{v} = \frac{d\mathfrak{r}}{dt} = \mathfrak{r}^0 \frac{dr}{dt} + r \frac{d\mathfrak{r}^0}{dt} = \mathfrak{v}_r + \mathfrak{v}_\varphi.$$

$\mathfrak{v}_r$ je radiální složka rychlosti, $\mathfrak{v}_\varphi$ pak složka kolmá k radiální. Rychlost sama je vektor směru tečny. Píšeme-li derivace podle času tečkou nad písmenem $\left(\dot{r} = \dfrac{dr}{dt}\right)$, vektor kolmý k $\mathfrak{r}$ pak $\mathfrak{u}^0$, jest

$$\mathfrak{v} = \dot{r}\mathfrak{r}^0 + r\dot{\varphi}\mathfrak{u}^0, \tag{134}$$

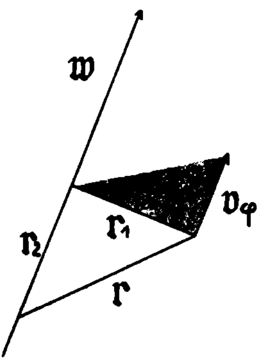
$$v^2 = (\mathfrak{v}\mathfrak{v}) = \dot{r}^2 + (r\dot{\varphi})^2.$$

Hybnost bodu hmoty m je vektor $mv^i(m\mathfrak{v})$. Úhlová rychlost $\dot{\varphi} = \omega$ znázorňuje se obyčejně axiálním vektorem $\mathfrak{w} = \dot{\varphi}\mathfrak{w}^0 = \omega \,.\, \mathfrak{w}^0$ ve směru osy otáčení (obr. 16). Pak jest (viz také 150, 151)

$$\mathfrak{v}_\varphi = [\mathfrak{w}\mathfrak{r}_1] = [\mathfrak{w}\mathfrak{r}], \tag{135}$$

neboť složka $\mathfrak{r}_2 \,||\, \mathfrak{w}$, takže do $[\mathfrak{w}\mathfrak{r}]$ nepřispívá.

Složky $\mathfrak{w}$ se značí ve fysice obyčejně p, q, r. Složky rychlosti při rotaci jsou tedy podle (105) $v_x = qz - ry$ atd.



Obr. 16.

Rychlost bodu je tedy celkem $\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_r + [\mathfrak{w}\mathfrak{r}]$, složkově

$$v_1 = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + qz - ry \text{ atd.} \tag{136}$$

Plošná rychlost je definována jako polovina rovnoběžníka určeného vektory $\mathfrak{r}$ a $\mathfrak{v}$. Podle výkladu u (101) je to antisymetrický tensor $w^{ik} = x^i v^k - x^k v^i$, jehož doplňkový axiální vektor jest analogicky ke (105)

$$2\dot{\mathfrak{S}} = [\mathfrak{r}\mathfrak{v}] = \begin{vmatrix} \mathfrak{i}_1 & \mathfrak{i}_2 & \mathfrak{i}_3 \\ x^1 & x^2 & x^3 \\ v^1 & v^2 & v^3 \end{vmatrix}. \tag{137}$$

Protože má $\dot{\mathfrak{S}}$ směr $\mathfrak{w} = \dot{\varphi}\mathfrak{w}^0$, možno psáti též

$$\dot{\mathfrak{S}} = \tfrac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} \mathfrak{w}^0.$$

Antisymetrický tensor je také **moment hybnosti** (impulsmoment)

$$U^{ik} = mw^{ik} = x^i m v^k - x^k m v^i. \tag{138}$$

Zrychlení

$$\mathfrak{a} = \frac{\mathrm{d}\mathfrak{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\mathfrak{r}}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}^2\mathfrak{r}}{\mathrm{d}t^2},$$

nebo složkově

$$a^i = \frac{\mathrm{d}v^i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 x^i}{\mathrm{d}t^2}.$$

$$a = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}. \tag{139}$$

Píšeme-li opět $\mathrm{d}\mathfrak{r} = \mathrm{d}s \,.\, \mathfrak{t}$, máme

$$\mathfrak{a} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\mathfrak{t}\right) = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\mathfrak{t} + \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\mathfrak{t}}{\mathrm{d}t}.$$

Podle (128)

$$\frac{\mathrm{d}\mathfrak{t}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathfrak{t}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\frac{1}{R}\mathfrak{n} = \frac{v}{R}\mathfrak{n},$$

takže zrychlení tečné je

$$\frac{d^2 s}{dt^2}\mathfrak{t}, \tag{140}$$

zrychlení centripetální ve směru normály

$$\frac{v^2}{R}\mathfrak{n}. \tag{140}$$

Zrychlení plošné $\ddot{\mathfrak{S}} = \frac{d}{dt}\dot{\mathfrak{S}}$. Je to tedy opět tensor antisymetrický s doplňkovým vektorem $\frac{1}{2}[\mathfrak{r}\mathfrak{a}]$.

$$2\ddot{\mathfrak{S}} = [\mathfrak{r}\mathfrak{a}] = \left[\mathfrak{r}\frac{d\mathfrak{v}}{dt}\right] = \frac{d}{dt}[\mathfrak{r}\mathfrak{v}] - \left[\frac{d\mathfrak{r}}{dt}\mathfrak{v}\right], \tag{141}$$

avšak poslední člen jest $[\mathfrak{v}\mathfrak{v}] = 0$; tedy

$$2\ddot{\mathfrak{S}} = \frac{d}{dt}[\mathfrak{r}\mathfrak{v}]. \tag{142}$$

Rozložíme-li zrychlení

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_r + \mathfrak{a}_\varphi$$

na zrychlení radiální a k němu kolmé úhlové, jest

$$[\mathfrak{r}\mathfrak{a}] = [\mathfrak{r}\mathfrak{a}_r] + [\mathfrak{r}\mathfrak{a}_\varphi] = [\mathfrak{r}\mathfrak{a}_\varphi].$$

Při pohybu centrálním má zrychlení jen směr radiální, $\mathfrak{a}_\varphi = 0$, $\ddot{\mathfrak{S}} = 0$, $\dot{\mathfrak{S}} =$ konst, což jest druhý zákon Keplerův, že při pohybu středovém jest plošná rychlost stálá.

Druhý pohybový zákon Newtonův zní vektorově

$$m\mathfrak{a} = \mathfrak{p} = m\frac{d\mathfrak{v}}{dt}, \text{ složkově } p^i = ma^i = m\frac{dv^i}{dt}. \tag{143}$$

První věta impulsová zní

$$\mathfrak{p} = \frac{d(m\mathfrak{v})}{dt} = \frac{d\mathfrak{J}}{dt}, \quad p^i = \frac{d(mv^i)}{dt}. \tag{144}$$

Druhá věta o momentu impulsu jest (viz 141)

$$[\mathfrak{r}\mathfrak{p}] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathfrak{r}, m\mathfrak{v}]. \tag{145}$$

21. Jiné tensory řádu druhého. Zobrazení. Tensory druhého řádu jsou po vektorech nejdůležitější. Jejich zvláštní případ tensory antisymetrické jsme právě poznali. Jiný příklad smíšeného tensoru řádu druhého, tensor jednotkový $a_i^k = \delta_i^k$ jsme viděli v odstavci (16), kde byl definován invariantní formou

$$a_i^k \xi^i \eta_k = \xi^i \eta_i = \overline{\xi^i \eta_i}.$$

Lineární vektorová funkce. Podle definice smíšeného tensoru a_i^k jest forma $a_i^k \xi^i \eta_k$ invariantní; musí tedy být $a_i^k \xi^i = \xi'^k$ složky kontravariantního vektoru, který je vektoru ξ^i tensorem a_i^k přiřaděn jako funkce nebo jako zobrazení. Symbolicky $\mathfrak{x}' = \mathsf{T}(\mathfrak{x})$. Tato funkce jest lineární, protože ze vztahů

$$\begin{aligned} \xi'^k &= a_i^k \xi^i, \\ \zeta'^k &= a_i^k \zeta^i, \end{aligned} \tag{146}$$

plyne

$$\xi'^k + \zeta'^k = a_i^k (\xi^i + \zeta^i),$$

neboli

$$\mathfrak{x}' + \mathfrak{z}' = \mathsf{T}(\mathfrak{x}) + \mathsf{T}(\mathfrak{z}) = \mathsf{T}(\mathfrak{x} + \mathfrak{z}).$$

A dále podobně

$$\mathsf{T}(\lambda\mathfrak{x}) = \lambda\, \mathsf{T}(\mathfrak{x}), \tag{147}$$

znamená-li λ nějaké reálné číslo.

Složky a_i^k lineární vektorové funkce tvoří matici (pro $n = 3$)

$$\begin{matrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3, \end{matrix} \tag{148}$$

proto nazývá Weyl toto vektorové zobrazení samo také zobrazení maticí. Jednotkové vektory $\mathfrak{e}_i$ přecházejí zobrazením ve vektory

$$\mathfrak{e}'_i = a_i^k \mathfrak{e}_k,$$

takže podle (147) pro $\mathfrak{x} = \xi^i \mathfrak{e}_i$ jest

$$\mathfrak{x}' = a_i^k \xi^i \mathfrak{e}_k = \xi^i \mathfrak{e}'_i. \tag{149}$$

Má tedy vektor $\mathfrak{x}'$ v soustavě $\mathfrak{e}'_i$ tytéž složky jako vektor $\mathfrak{x}$ v soustavě původní $\mathfrak{e}_i$. Invariant a_i^i vzniklý zúžením slove první skalár matice.

Příkladem zobrazení může býti rotace pevného tělesa kolem bodu O; při ní se otočí vektor $OP(\xi^i)$ do polohy $OP'(\xi^i + \delta\xi^i)$, kde $\overline{PP'} = \delta\xi^i$. Uvažujme rotaci za krátký čas δt a budiž příslušné lineární zobrazení

$$\delta\xi^i = w_k^i \, \delta t \, . \, \xi^k. \tag{150}$$

Změna délky původního vektoru je při rotaci nulová, tedy

$$\delta(\xi_i \xi^i) = \delta(g_{ik} \xi^i \xi^k) = g_{ik}(\xi^i \delta\xi^k + \xi^k \delta\xi^i) = 0.$$

Odtud

$$\xi_k \delta\xi^k + \xi_i \delta\xi^i = 2\xi_i \delta\xi^i = 0$$

a dosazením do (150) po krácení δt máme

$$w_k^i \xi^k \xi_i = w_{ik} \xi^i \xi^k = 0$$

pro všechny ξ^i, což vyžaduje $w_{ii} = 0$ a $w_{ik} = -w_{ki}$, takže tensor w_{ik} je pro rotaci antisymetrický. Dělíme-li (150) δt a přejdeme k lim $\delta t = 0$, jest $\dfrac{\mathrm{d}\xi^i}{\mathrm{d}t} = v^i$ rychlost bodu rotujícího tělesa, jejíž kovariantní složky jsou tedy

$$v_i = w_{ik} \xi^k. \tag{151}$$

V trojrozměrných souřadnicích kartézských jsme týž vektor nazvali ve (135) $\mathfrak{v}_\varphi$ (v_x, v_y, v_z), kde na př. bylo

$$v_x = qz - ry = w_{11}x + w_{12}y + w_{13}z.$$

Tensor w_{ik} má tedy složky patrné ze schematu

$$\begin{matrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0. \end{matrix} \tag{152}$$

Jeho doplňkový vektor $\mathfrak{w}$ měl složky p, q, r a byla to úhlová rychlost. Body na ose rotační mají $v_i = 0$ a 3 rovnice $w_{ik}\xi^k = 0$ mají 3 řešení různá od nuly

$$\xi^1 : \xi^2 : \xi^3 = p : q : r,$$

což jest vektor ležící v ose rotační a určující směr osy.

Jako příklad tensoru souměrného vezměme moment setrvačnosti tělesa rotujícího kolem osy jdoucí těžištěm. Kinetická energie tělesa rotujícího kolem osy $\mathfrak{w}$ úhlovou rychlostí ω jest jak známo

$$E = \tfrac{1}{2}\omega^2 I_\omega = \tfrac{1}{2}\sum_i m_i \mathfrak{v}_{\varphi i}^2 = \tfrac{1}{2}\sum_i m_i \,|\, [\mathfrak{w}\mathfrak{r}_i] \,|^2,$$

kde se součet vztahuje na všechny body tělesa. Směrové kosiny osy buďtež

$$\alpha = \frac{p}{\omega},\ \beta = \frac{q}{\omega},\ \gamma = \frac{r}{\omega};$$

$$p = w_x,\ q = w_y,\ r = w_z;$$

$$[\mathfrak{w}\mathfrak{r}] = \begin{vmatrix} \mathfrak{i}_1 & \mathfrak{i}_2 & \mathfrak{i}_3 \\ w_x & w_y & w_z \\ x & y & z \end{vmatrix}.$$

Dosazením do $2E$ obdržíme

$$2E = \sum_i m_i \{(w_y z - w_z y)^2 + (w_z x - w_x z)^2 + (w_x y - w_y x)^2\} =$$
$$= w_x^2 \Sigma m (y^2 + z^2) + w_y^2 \Sigma m (z^2 + x^2) + w_z^2 \Sigma m (x^2 + y^2) +$$
$$- 2w_x w_y \Sigma mxy - 2w_y w_z \Sigma myz - 2w_z w_x \Sigma mzx;$$

vynecháváme všude u m, x, y, z indexy i, přes které se sčítá. V obvyklém označení se píše

$$2E = w_x^2 I_{xx} + w_y^2 I_{yy} + w_z^2 I_{zz} + 2w_x w_y I_{xy} + \ldots + 2w_z w_x I_{zx},$$

a I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} jsou momenty setrvačnosti kolem os souřadnic, I_{xy}, I_{yz}, I_{zx} jsou t. zv. momenty deviační. Protože $2E$ je invariantní skalár, jsou I_{ik} složky souměrného tensoru druhého řádu.

Dělíme-li čtvercem úhlové rychlosti ω^2, máme

$$I_\omega = \frac{2E}{\omega^2} = I_{xx}\alpha^2 + I_{yy}\beta^2 + I_{zz}\gamma^2 + 2I_{xy}\alpha\beta + \ldots + 2I_{zx}\beta\gamma.$$

Tím je dán moment setrvačnosti pro libovolnou osu $\mathfrak{w}$ jdoucí těžištěm. Jeho hodnoty si podle Cauchyho znázorníme tak, že naneseme na vektor (α, β, γ) takové ω, aby energie byla stále $2E_0 = 1$. Pak jest

$$\omega^2 I_\omega = 1 = I_{xx}\xi^2 + I_{yy}\eta^2 + I_{zz}\zeta^2 + 2I_{xy}\xi\eta + \ldots + 2I_{yz}\eta\zeta, \tag{153}$$

značíme-li $\xi = \omega\alpha$, $\eta = \omega\beta$, $\zeta = \omega\gamma$, tedy složky naneseného vektoru neboli souřadnice jeho koncového bodu. Geometrické místo těchto bodů jest plocha druhého stupně o rovnici (153). Je to zřejmě elipsoid, neboť ω nemůže býti nekonečné, protože I_ω není nikdy nulou. Moment setrvačnosti $I_\omega = \frac{1}{\omega^2}$ je pak nepřímo úměrný čtverci průvodiče elipsoidu, je-li tento průvodič osou otáčení. Převedeme-li tento elipsoid do souřadnic, jejichž osy jsou tři hlavní osy elipsoidu, zjednoduší se jeho rovnice na

$$I_1\xi^2 + I_2\eta^2 + I_3\zeta^2 = 1 \tag{154}$$

a po dělení ω^2

$$I_\omega = \frac{1}{\omega^2} = I_1\alpha^2 + I_2\beta^2 + I_3\gamma^2.$$

Podobně lze znázorniti každý souměrný tensor v trojrozměrném prostoru. Je-li jeho hodnota ve směru o kosinech $\alpha = \xi : l$, $\beta = \eta : l$, $\gamma = \zeta : l$ rovna k, nanesme na vektor tohoto směru $k = \frac{1}{l^2}$. Pak jest analogicky k předchozímu

$$l^2k = 1 = k_{11}\xi^2 + k_{22}\eta^2 + k_{33}\zeta^2 + 2k_{12}\xi\eta + \ldots + 2k_{31}\xi\zeta. \tag{155}$$

Koncové body vektorů l opět leží na elipsoidu, nemohou-li se k_{ii} stát negativními. V opačném případě by to mohla být i jiná plocha druhého stupně; k těmto případům však přihlížeti nebudeme. Elipsoid tensorový jest obecně trojosý a převeden na své osy jako osy souřadnic má rovnici

$$k_1\xi^2 + k_2\eta^2 + k_3\zeta^2 = 1. \tag{156}$$

k_1, k_2, k_3 slovou jeho hlavní hodnoty. Rovnice

$$k = \frac{1}{l^2} = k_1\alpha^2 + k_2\beta^2 + k_3\gamma^2$$

udává pak hodnotu tensoru ve směru (α, β, γ).

Souměrný tensor je tedy určen, jsou-li známy jeho hodnoty ve třech směrech hlavních os. Elipsoid může ve zvláštních případech být rotační, koule, elipsa nebo i úsečka (tensory planární a lineární).*) Obecný souměrný tensor je určen jinak šesti složkami $k_{m,n}$. Pro $m = n$ jmenují se složkami prvého druhu, pro $m \neq n$ složkami druhého druhu. Tyto v soustavě hlavních os vymizí. Značí-li tensor souměrný vektorovou lineární funkci, psanou v kartézských souřadnicích podle (146)

$$\xi'^i = a^i_k\xi^k,$$

vyjádří se toto zobrazení v hlavních osách jednoduše

$$\xi'^1 = a_1{}^1\xi^1, \quad \xi'^2 = a_2{}^2\xi^2, \quad \xi'^3 = a_3{}^3\xi^3.$$

Každému vektoru ξ^i odpovídá vektor ξ'^i o právě napsaných složkách. Vektorům ve směrech hlavních os odpovídají opět vektory souhlasných směrů, avšak jiné délky. Leží-li na př. koncové body vektorů ξ^i na jedničkové kouli, t. j.

$$(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 + (\xi^3)^2 = 1,$$

je po zobrazení

*) Viz K. Dusl: Úvod do vektorového počtu, odst. 114, 115.

$$\left(\frac{\xi'^1}{a_1^1}\right)^2 + \left(\frac{\xi'^2}{a_2^2}\right)^2 + \left(\frac{\xi'^3}{a_3^3}\right)^2 = 1. \tag{157}$$

Vektory ξ'^i_i mají koncové body na elipsoidu. Představuje tedy souměrný tensor určitou deformaci, která se jeví tím, že původní koule přešla v elipsoid obecně trojosý.*)

Obecný tensor druhého řádu c_{ik} dá se vždy rozložiti v součet dvou tensorů: $c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}$, kde

$$a_{ik} = \tfrac{1}{2}(c_{ik} + c_{ki}),\ b_{ik} = \tfrac{1}{2}(c_{ik} - c_{ki}), \tag{158}$$

tak, že prvý a_{ik} je tensor souměrný (deformace), druhý $b_{ik} = -b_{ki}$ je antisymetrický (odpovídá podle dřívějšího otočení).

Úlohy: 23. Dokažte, že $k_{11} + k_{22} + k_{33} = k_1 + k_2 + k_3$ jest invariantem, který se na př. pro moment setrvačnosti rovná $2\sum_i m_i r_i^2$.

24. Moment hybnosti tuhého tělesa vzhledem k těžišti jest podle (138) $\mathfrak{U} = \Sigma m[\mathfrak{r}\mathfrak{v}]$. Při rotaci kolem osy jdoucí těžištěm je $\mathfrak{v} = [\mathfrak{w}\mathfrak{r}]$ (135). Dokažte, že $\mathfrak{U}$ je lineární vektorová funkce $\mathfrak{w}(w_x, w_y, w_z)$ o matici z prvků I_{ik} (komponent momentu setrvačnosti); že $(\mathfrak{U}\mathfrak{w}) = 2\omega^2 I_\omega = 2E$.**)

22. Skalární pole. Gradient.

V úvahách fysikálních se často setkáváme s veličinami, jejichž složky jsou funkcí místa (souřadnic x, y, z), takže se mění od bodu k bodu. Může to být skalár (teplota, potenciál), vektor (intensity různých polí, jako elektrického a magnetického), nebo tensor (napětí způsobená pružností). Prostor, v němž každému bodu přísluší určitá hodnota jistého tensoru, nazývá se pak tensorovým polem (pole skalární a vektorové jsou zvláštní případy). Vyšetřování, jak se mění tensor od místa k místu,

*) Jako posunutí představuje geometricky vektor kontravariantní, tak afinní transformace, kterou definuje naše lineární funkce $\xi'^i = a^i_k \xi^k$ (a která je právě zmíněnou deformací) představuje kvadratický tensor.

**) Srv. B. Kučera: Základy mechaniky tuhých těles, odst. 99, a K. Dusl: l. c. odst. 118.

vede pak k derivování tensorů podle souřadnic. Kromě toho mohou složky tensoru ještě záviseti na době; nezávisí-li na době, slove pole ustálené, stacionární.

Pole skalární. Budiž dán skalár $f(x^1, x^2, \ldots, x^n) = f(x)$, závislý na afinních souřadnicích x^i bodu P pole. Přejdeme-li do bodu blízkého $Q(x^i + \mathrm{d}x^i)$, změní se skalár o totální diferenciál $\mathrm{d}f$, pro nějž dávají základy analyse

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x^1}\,\mathrm{d}x^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x^2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^n}\,\mathrm{d}x^n = \frac{\partial f}{\partial x^i}\,\mathrm{d}x^i.$$

Souřadnice x^i i jejich diferenciály $\mathrm{d}x^i$ jsou kontravariantní. Po lineární transformaci souřadnic (64)

$$x^i = \alpha^i_k \bar{x}^k + \alpha^i$$

přejde $f(x)$ ve $\bar{f}(\bar{x})$. Ovšem při přechodu z bodu P do bodu Q musí změna skaláru vycházeti stejně, ať ji počítáme v kterékoliv soustavě souřadnic, tedy

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}\,\mathrm{d}x^i = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}^i}\,\mathrm{d}\bar{x}^i. \tag{159}$$

Protože $\mathrm{d}x^i$ jsou kontravariantní, neboť platí

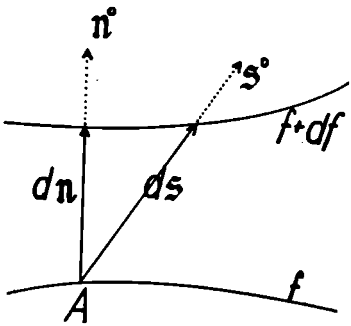
$$\mathrm{d}x^i = \alpha^i_k\,\mathrm{d}\bar{x}^k$$

s konstantními (na místě nezávislými) α^i_k, plyne z invariance lineární formy (159) analogicky s (56_1), že $\dfrac{\partial f}{\partial x^i}$ jsou kovariantní komponenty jistého vektoru, který se ve vektorové analysi značí symbolicky grad f (gradient f) $= \nabla f$.*) Musí tedy i pro libovolný kontravariantní vektor ξ^i, na místě nezávislý, platiti

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}\,\xi^i = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}^i}\,\bar{\xi}^i, \tag{160}$$

*) Čti: nabla ef. Symbol ∇ nazývá se nabla podle podobnosti se starým hudebním nástrojem, jakousi harfou.

Význam gradientu vysvitne v kartézských souřadnicích na příkladě, v němž $f(x)$ značí třeba potenciál v bodě A. Body o témž potenciálu leží na ploše jdoucí bodem A (viz obr. 17), která se nazývá hladina. Body o potenciálu $f + \mathrm{d}f$ tvoří další



Obr. 17.

blízkou hladinu. Při pohybu po hladině se práce nekoná; nemá tedy síla složku tečnou, která by padala do hladiny. Síla (intensita pole) má tedy v každém bodě směr normály, jest kolmá k hladinám. Postoupíme-li ve směru normály o $\mathrm{d}n$, stoupne potenciál o práci $\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial n} \,.\, \mathrm{d}n$. Protože $\mathrm{d}n$ je dráha, jest $\frac{\partial f}{\partial n}$ velikost pracující vnější síly $\mathfrak{p} = \frac{\partial f}{\partial n} \,.\, \mathfrak{n}^0$, mající směr normály. Práce v libovolném směru $\mathfrak{s}^0$ po dráze $\mathrm{d}s$ o složkách $\mathrm{d}x_1$, $\mathrm{d}x_2$, $\mathrm{d}x_3$

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x^1}\,\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x_2 + \frac{\partial f}{\partial x^3}\,\mathrm{d}x_3 = (\mathrm{grad}\, f \,.\, \mathrm{d}\mathfrak{s}). \qquad (161)$$

Avšak práce se rovná vždy $(\mathfrak{p} \,.\, \mathrm{d}\mathfrak{s})$, jest tedy pro libovolná $\mathrm{d}\mathfrak{s}$ identicky

$$(\mathfrak{p} \,.\, \mathrm{d}\mathfrak{s}) = \left(\frac{\partial f}{\partial n}\,\mathfrak{n}^0, \mathrm{d}\mathfrak{s}\right) = (\mathrm{grad}\, f \,.\, \mathrm{d}\mathfrak{s}),$$

takže musí býti

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial n}\,\mathfrak{n}^0 = \mathfrak{p}.$$

Gradient je podle toho vektor kolmý k hladině skaláru v daném bodě a udává směr i velikost nejrychlejšího vzrůstu skaláru.

Z této věty je patrno, že pojem gradientu je nezávislý na soustavě souřadnic. V příkladě o potenciálu je gradient vnější síla na jednotku, tedy opačně vzatá intensita pole. Derivace skaláru v libovolném směru $d\mathfrak{s} = ds\,.\,\mathfrak{s}^0$ je podle (161)

$$\frac{df}{ds} = (\mathfrak{s}^0 . \operatorname{grad} f) = \frac{\partial f}{\partial x^1}\frac{dx_1}{ds} + \frac{\partial f}{\partial x^2}\frac{dx_2}{ds} + \frac{\partial f}{\partial x^3}\frac{dx_3}{ds}. \quad (162)$$

Někdy se píše také

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = \left(\mathfrak{i}_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \mathfrak{i}_2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \mathfrak{i}_3 \frac{\partial}{\partial x^3}\right) f \quad (163)$$

a operátor ∇ se považuje za symbolický vektor, který použit na skalární funkci násobením, vytváří její gradient. Pak lze psáti analogicky

$$(\mathfrak{s}^0 . \nabla) = s_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + s_2 \frac{\partial}{\partial x^2} + s_3 \frac{\partial}{\partial x^3}, \quad (164)$$

kterýžto symbol vytváří ze skaláru jeho derivaci ve směru $\mathfrak{s}^0$:

$$\frac{df}{ds} = (\mathfrak{s}^0 . \nabla) f. \quad (165)$$

Diferenciál skaláru f ve směru $d\mathfrak{s}$ jest pak

$$df = (d\mathfrak{s} . \nabla) f, \quad (166)$$

Protože

$$\frac{\partial(f+g)}{\partial x^i} = \frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{\partial g}{\partial x^i},$$

$$\frac{\partial(fg)}{\partial x^i} = \frac{\partial f}{\partial x^i} g + f \frac{\partial g}{\partial x^i},$$

$$\frac{\partial(kf)}{\partial x^i} = k \frac{\partial f}{\partial x^i}, \quad (k = \text{konst}),$$

lze psáti pravidla

$$\begin{aligned} \nabla(f+g) &= \nabla f + \nabla g, \\ \nabla(fg) &= g \cdot \nabla f + f \cdot \nabla g, \\ \nabla(kf) &= k \cdot \nabla f. \end{aligned} \tag{167}$$

Pohybuje-li se nositel skalární vlastnosti f ve skalárním poli f, které se mění i s dobou t, a je-li rychlost jeho pohybu $\mathfrak{v}$ (v_x, v_z, v_z), urazí za čas dt dráhu d$\mathfrak{s}$ o složkách d$x = v_x$ dt, d$y = v_y$ dt, d$z = v_z$ dt. Časová rychlost změny skalární vlastnosti nositele jest pak

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} v_x + \frac{\partial f}{\partial y} v_y + \frac{\partial f}{\partial z} v_z.$$

Tedy

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + (\mathfrak{v} \cdot \nabla) f, \tag{168}$$

při tom $\frac{\partial f}{\partial t}$ značí, jak se mění skalár na t é m ž místě časem, neboli změnu lokální; $(\mathfrak{v} \cdot \nabla) f$ pak značí změnu způsobenou pohybem nositele v poli.

Úlohy: 25. Pro $f = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ dokažte, že grad $r = \mathfrak{r} : r$.

26. Dokažte, že grad $\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{\mathfrak{r}}{r}$.

27. Dokažte, že intensita elektrického pole bodového náboje e ve vzdálenosti $\mathfrak{r}$ jest $\mathfrak{E} = -e \cdot \nabla\left(\frac{1}{r}\right)$.

23. Derivace vektorů a tensorů. Jako vede derivace skaláru k tensoru o řád vyššímu, tak zvyšuje derivace řád každého tensoru o jedničku. Zvolme na př. tensorové pole třetího řádu a^l_{ik}, jehož složky jsou funkce místa (x^i). Pak jest

$$a^l_{ik}\xi^i\eta^k\zeta_l \text{ invariant}$$

při ξ^i, η^k, ζ_l nezávislých na místě. Diferenciál

$$\frac{\partial a^l_{ik}}{\partial x^r}\xi^i\eta^k\zeta_l \,\mathrm{d}x^r \tag{169}$$

je také invariant a tedy $\frac{\partial}{\partial x^r}(a^l_{ik}) = b^l_{ikr}$ tensor řádu čtvrtého, v indexu r kovariantní.

Protože metrický tensor g_{ik} je pro celé pole konstantní, máme podle (96)

$$b_{iklr} = g_{ls}b^s_{ikr} = \frac{\partial}{\partial x^r}(g_{ls}a^s_{ik}) = \frac{\partial}{\partial x^r}(a_{ikl}). \tag{170}$$

Zvyšování a snižování indexu je záměnné s derivací.

Tensor je možno ovšem derivovati vícekrát. Jeho kovariantní řád se při každé derivaci zvyšuje o jedničku:

$$\frac{\partial^2 a^l_{ik}}{\partial x^r \partial x^s} = c^l_{ikrs}.$$

P o l e v e k t o r o v é. Jako příklad si zvolme ustálený pohyb kapaliny. Její rychlost $\mathfrak{v}(v^i)$ je v každém bodě (x^i) jiná; složky v^i jsou funkce souřadnic, ale nikoliv času. Přejdeme-li z bodu $A(x^i)$ do sousedního bodu $B(x^i + \mathrm{d}x^i)$ o diferenciál dráhy $\mathrm{d}\mathfrak{s}$ $(\mathrm{d}x^i)$, změní se složky vektoru $\mathfrak{v}$ o diferenciály

$$\mathrm{d}v^i = \frac{\partial v^i}{\partial x^k}\mathrm{d}x^k, \tag{171}$$

kde $\frac{\partial v^i}{\partial x^k}$ jsou komponenty smíšeného tensoru $v_k{}^i$.

V polokartézském vyjádření jest

$$\mathfrak{v} = v_x\mathfrak{i}_1 + v_y\mathfrak{i}_2 + v_z\mathfrak{i}_3;$$

čísla v_x, v_y, v_z jsou tu skaláry, takže lze psáti

$$dv_x = (d\mathfrak{s} \,.\, \nabla)\, v_x$$

atd. nebo celkem

$$d\mathfrak{v} = (d\mathfrak{s} \,.\, \nabla)\, \mathfrak{v} \tag{172}$$

jako diferenciál vektoru ve směru $d\mathfrak{s}$.

Podle (158) lze každý tensor v_{ik} rozložiti na tensor souměrný $\frac{1}{2}(v_{ik} + v_{ki})$ a na tensor antisymetrický $\frac{1}{2}(v_{ik} - v_{ki})$. Prvý značí, jak jsme viděli, deformaci, druhý otočení. Kdyby se část kapaliny kolem bodu A jen točila kolem osy $\mathfrak{w}$ úhlovou rychlostí w, bylo by $\mathfrak{v} = [\mathfrak{w}\mathfrak{r}]$ a podle (135)

$$\mathfrak{v} = [\mathfrak{w}\mathfrak{r}] = \begin{vmatrix} \mathfrak{i}_1 & \mathfrak{i}_2 & \mathfrak{i}_3 \\ w_x & w_y & w_z \\ x & y & z \end{vmatrix} \tag{173}$$

jest

$$\tfrac{1}{2}(v_{12} - v_{21}) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) = w_z \text{ atd.} \tag{174}$$

Uvedený antisymetrický tensor $\dfrac{\partial v_k}{\partial x_i} - \dfrac{\partial v_i}{\partial x_k}$ značí tedy skutečně **r o t a c i**, proto se označuje symbolicky

rot $\mathfrak{v}$ (rotace $\mathfrak{v}$) nebo curl $\mathfrak{v}$.*)

Považujeme-li opět ∇ za symbolický vektor, kterým je možno násobiti jiný vektor vektoriálně, jest

$$\text{rot}\, \mathfrak{v} = [\nabla \mathfrak{v}] = \begin{vmatrix} \mathfrak{i}_1 & \mathfrak{i}_2 & \mathfrak{i}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} . \tag{175}$$

Rotace postupné rychlosti bodu tělesa je podle (174) rovna dvojnásobné úhlové rychlosti kolem osy: $2\mathfrak{w} = \text{rot}\, \mathfrak{v}$.

*) Čti khörl (angl.), t. j. vír.

Z předchozího je patrno, že tensor rot je skutečně veličina nezávislá na soustavě souřadnic.

Podle (94), je-li $\dfrac{\partial b^i}{\partial x^k}$ smíšený tensor b^i_k, jest při všude stejném vektoru a^k

$$b^i_k a^k = c^i$$

novým vektorem, který se ve vektorové analysi v pravoúhlých souřadnicích označuje symbolicky

$$\mathfrak{c} = (\mathfrak{a} \operatorname{grad}) \mathfrak{b} = (\mathfrak{a} \cdot \nabla) \mathfrak{b} \tag{176}$$

podle analogie se (164).

Jest na př.

$$c_x = a_x \frac{\partial b_x}{\partial x} + a_y \frac{\partial b_x}{\partial y} + a_z \frac{\partial b_x}{\partial z} = (a \nabla) b_x.$$

Píšeme-li v (172) $\mathrm{d}\mathfrak{s} = \mathrm{d}s \cdot \mathfrak{s}^0$, jest na př.

$$\mathrm{d}\mathfrak{v} = \mathrm{d}s\, (\mathfrak{s}^0 \cdot \nabla)\, \mathfrak{v},$$

neboli

$$\frac{\mathrm{d}\mathfrak{v}}{\mathrm{d}s} = (\mathfrak{s}^0 \cdot \nabla)\, \mathfrak{v}. \tag{177}$$

Je to rychlost změny vektoru $\mathfrak{v}$ při postupu ve směru $\mathfrak{s}^0$. Vektor $\mathfrak{c}$ by značil podobně rychlost změny vektoru $\mathfrak{b}$ ve směru postupu $\mathfrak{a}$ násobenou délkou a vektoru $\mathfrak{a}$. Na př.

$$(\mathfrak{i}_1 \nabla)\, \mathfrak{b} = \frac{\partial \mathfrak{b}}{\partial x} = \mathfrak{i}_1 \frac{\partial b_x}{\partial x} + \mathfrak{i}_2 \frac{\partial b_y}{\partial x} + \mathfrak{i}_3 \frac{\partial b_z}{\partial x}.$$

Budiž $\mathfrak{A}$ vektorová vlastnost hmotného nositele, který se pohybuje rychlostí $\mathfrak{v}$. $\mathfrak{A}$ je vektor, který se mění od místa k místu. Vektor $\mathfrak{v}$ má podle (133) složky $\dfrac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}$. Mění-li se $\mathfrak{A}$ na témž místě i s dobou, jest

$$\frac{\mathrm{d}A^i}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial A^i}{\partial t} + \frac{\partial A^i}{\partial x^k} \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial A^i}{\partial t} + \frac{\partial A^i}{\partial x^k} v^k$$

nebo vektorově podle (176)

$$\frac{d\mathfrak{A}}{dt} = \frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t} + (\mathfrak{v}\ \mathrm{grad})\ \mathfrak{A}. \tag{178}$$

$\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t}$ udává lokální změnu vektoru $\mathfrak{A}$ na témž místě, kdežto $(\mathfrak{v}\ \mathrm{grad})\ \mathfrak{A}$ udává změnu vektoru způsobenou tím, že nositel přichází do jiných míst vektorového pole $\mathfrak{A}$. Je-li $\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t} = 0$, nazýváme vektorové pole stacionárním, ustáleným. Na př. platí pro zrychlení $\frac{d\mathfrak{v}}{dt}$ kapalinové částice při proudění

$$\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \frac{\partial\mathfrak{v}}{\partial t} + (\mathfrak{v}\ \mathrm{grad})\ \mathfrak{v}, \tag{179}$$

složkově

$$\frac{dv^i}{dt} = \frac{\partial v^i}{\partial t} + \frac{\partial v^i}{\partial x^k} v^k.$$

Pohyb spojitě rozprostřené hmoty (plynu). Mějme na mysli na př. hmotu v malé kuličce kolem bodu A, který se pohybuje sám rychlostí $\mathfrak{v}_a$. Okolní hmotné body mají vzhledem k A relativní rychlosti $\mathfrak{v} = d\mathfrak{v}$ o složkách daných podle (171). Tento tensor se však dá rozložiti podle výkladu na uvedeném místě na rotaci $\mathfrak{w} = \frac{1}{2}$ rot $\mathfrak{v}$ a na deformaci $\frac{1}{2}(v_{ik} + v_{ki}) = d_{ik} = d_{ki}$. Absolutní rychlost částice o relativní poloze $d\mathfrak{s}$ vzhledem k osám položeným bodem A může se pak psáti

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_a + [\tfrac{1}{2}\ \mathrm{rot}\ \mathfrak{v}, d\mathfrak{s}] + \mathfrak{d}, \tag{180}$$

při čemž $\mathfrak{d}$ se dá vzhledem k souměrnosti tensoru d_{ik} převésti na hlavní osy tensoru.

Úlohy: 28. Napište $(\mathfrak{a}\ \mathrm{grad})\ \mathfrak{b}$ v polokartézském tvaru.
29. Dokažte, že $(\mathfrak{a}\ \mathrm{grad})\, f = \mathfrak{a} \,.\, \mathrm{grad}\, f$.

24. Divergence a rotace. Podle (93) dostáváme zúžením smíšeného tensoru c_i^k invariant c_i^i, jehož význam musí být tudíž na souřadnicích nezávislý. Značí-li a^i vektorové pole, jest $\frac{\partial a^i}{\partial x^k}$ smíšený tensor, který dává zúžením invariant zvaný divergence

$$\frac{\partial a^i}{\partial x^i} = \operatorname{div} \mathfrak{a}. \tag{181}$$

Význam tohoto skaláru a jeho nezávislost na souřadnicích vysvitne z příkladů. Provedeme-li deformaci na hlavní osy, zvětší se hrany infinitesimálního kvádru o objemu $d\xi\, d\eta\, d\zeta$ o výrazy $\frac{\partial v_\xi}{\partial \xi} d\xi$, atd. Objem kvádru $\tau = d\xi \,.\, d\eta \,.\, d\zeta$ bude tedy po deformaci

$$\tau_1 = \left(d\xi + \frac{\partial v_\xi}{\partial \xi} d\xi\right)\left(d\eta + \frac{\partial v_\eta}{\partial \eta} d\eta\right)\left(d\zeta + \frac{\partial v_\zeta}{\partial \zeta} d\zeta\right) =$$

$$= d\xi \,.\, d\eta \,.\, d\zeta \left(1 + \frac{\partial v_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial v_\eta}{\partial \eta} + \frac{\partial v_\zeta}{\partial \zeta}\right),$$

nehledíme-li k veličinám vyšších řádů. Jest tedy

$$\operatorname{div} \mathfrak{v} = \frac{\tau_1 - \tau}{\tau}. \tag{182}$$

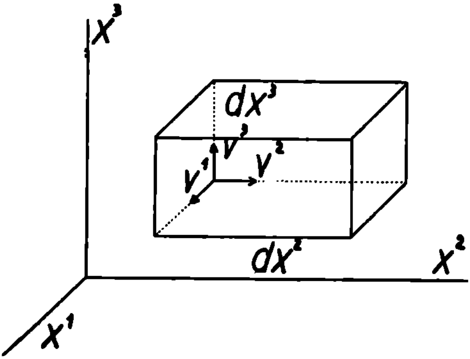
Divergence relativního pošinutí částic kolem bodu A jest podle (182) rovna zvětšení objemu kolem A přepočtenému na 1 cm³, neboli je to dilatace objemová. Tento fysikální pojem zřejmě nezávisí na souřadnicích.

Proudění tekutiny. V daném bodě A (obr. 18) ať proudí tekutina rychlostí $\mathfrak{v}(v^i)$. Zadní stěnou infinitesimálního kvádru $dx^2 \,.\, dx^3$ vproudí do hranolku objem tekutiny $v^1\, dx^2\, dx^3$. Rychlost v^1 na přední stěně jest

$$v^1 + \frac{\partial v^1}{\partial x^1} dx^1,$$

takže přední stěnou vyteče za vteřinu objem

$$\left(v^1 + \frac{\partial v^1}{\partial x^1}\,\mathrm{d}x^1\right)\mathrm{d}x^2\,\mathrm{d}x^3.$$



Obr. 18.

Přebytek vyteklé tekutiny je tedy ve směru x^1 za vteřinu rozdíl obou výrazů:

$$\frac{\partial v^1}{\partial x^1}\,\mathrm{d}x^1\,\mathrm{d}x^2\,\mathrm{d}x^3.$$

Vypočteme-li přebytek vyteklé tekutiny podobně ve směrech x^2 a x^3, dostaneme pro $\mathrm{d}x^1\,\mathrm{d}x^2\,\mathrm{d}x^3 = \mathrm{d}\tau$ jako celkový přebytek za 1 sec

$$\left(\frac{\partial v^1}{\partial x^1} + \frac{\partial v^2}{\partial x^2} + \frac{\partial v^3}{\partial x^3}\right)\mathrm{d}\tau \doteq \operatorname{div} \mathfrak{v}\,.\,\mathrm{d}\tau. \tag{183}$$

Značí tedy div $\mathfrak{v}$ množství tekutiny celkem odtékající za vteřinu z okolí bodu A a přepočtené na jednotku objemovou. Nazývá se také v y d a t n o s t í p r a m e n e v A, neboť okolí tohoto bodu dodává ven víc tekutiny nežli přijímá. Hmota této odtékající tekutiny je ϱ . div $\mathfrak{v}$, znamená-li ϱ hustotu v bodě A, neboli hmotu 1 cm³. Tím se ovšem množství hmoty v okolí bodu A ochuzuje, hustota ϱ klesá za vteřinu o

$$\frac{d\varrho}{dt} = -\varrho \,.\, \mathrm{div}\, \mathfrak{v}. \tag{184}$$

Je-li $\mathfrak{A}$ libovolné vektorové pole, nazýváme tokem vektoru $\mathfrak{A}$ ploškou dp součin $\mathfrak{A}_n$.dp, kde $\mathfrak{A}_n$ značí složku vektoru $\mathfrak{A}$ padající do směru normály plošky dp směřující ven z objemu plochou omezeného. Na př. tok rychlosti $\mathfrak{v}$ levou stěnou hranolku na obr. 18 jest $-v^2 \,.\, dx^3\, dx^1$, protože vnější normála plošky míří vlevo, kdežto v^2 vpravo, takže je mezi nimi úhel 180° a cos 180° = — 1. Je tedy celkový tok vektoru $\mathfrak{A}$ z povrchu kvádru $dx^1\, dx^2\, dx^3 = d\tau$ dán výrazem

$$\mathrm{div}\, \mathfrak{A} \,.\, d\tau. \tag{185}$$

Gaussova věta rozšiřuje tento poznatek i na konečné objemy a píše se

$$\int\limits_P A_n \,.\, dp = \int\limits_V \mathrm{div}\, \mathfrak{A} \,.\, d\tau, \tag{186}$$

kde P značí plochu ohraničující objem V.*) V elektrostatice vychází z objemu dτ o hustotě elektřiny ϱ právě $4\pi\varrho \,.\, d\tau$ silových čar. Intensita pole $\mathfrak{E}$ na povrchu objemu V se znázorní tokem vektoru $\mathfrak{E}$ přepočteným v každém místě na 1 cm². Je tedy

$$\int\limits_P E_n \,.\, dp = \int\limits_V \mathrm{div}\, \mathfrak{E} \,.\, d\tau = 4\pi \int\limits_V \varrho\, d\tau,$$

a pro nekonečně malý objem

$$\mathrm{div}\, \mathfrak{E} = 4\pi\varrho. \tag{187}$$

Jako příklad počtu v afinních souřadnicích uvažujme o elektrickém poli s nábojem e v počátku O souřadnic (x^i). Potenciál v bodě $A(x^i)$ je

$$\varphi = -\frac{e}{r} = -\frac{e}{\sqrt{g_{ik} x^i x^k}}.$$

*) Přesnější důkazy najde čtenář v učebnicích fysiky.

Intensita elektrického pole $\mathfrak{E}$ je dána záporným gradientem (míří proti $\mathfrak{p}$) o složkách

$$\eta_i = -\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = \frac{e}{(\sqrt{g_{ik}x^i x^k})^3}\, g_{ik} x^k = \frac{e}{r^3}\, x_i.$$

Nyní značí x_i kovariantní složky vektoru OA. Dále utvořme

$$\eta^i = g^{ir}\frac{\partial\varphi}{\partial x^r}, \qquad \eta^i_k = \frac{\partial\eta^i}{\partial x^k}.$$

Zúžením vznikne divergence intensity

$$\eta^i_i = \frac{\partial\eta^i}{\partial x^i} = -\frac{\partial}{\partial x^i}\left(g^{ir}\frac{\partial\varphi}{\partial x^r}\right) = -g^{ir}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^i\,\partial x^r},$$

neboť g^{ir} jsou konstanty.

V pravoúhlých souřadnicích je $g^{ik} = \delta^k_i$ a pak

$$\eta^i_i = \operatorname{div}\mathfrak{E} = -\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial(x^1)^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial(x^2)^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial(x^3)^2}\right).$$

Výraz v závorce slove Laplaceův symbol $\Delta\varphi$, takže

$$\Delta\varphi = -\operatorname{div}\mathfrak{E} = -4\pi\varrho. \tag{188}$$

Náš výpočet podává Laplaceův symbol i pro souřadnice afinní s metrickým konstantním tensorem g^{ik} ve tvaru

$$\Delta\varphi = g^{ir}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^i\,\partial x^r}.$$

Protože symbol

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

lze chápati také jako skalární součin $(\nabla\nabla)$ symbolického vektoru ∇, lze psáti

$$\Delta\varphi = \nabla^2\varphi = \operatorname{div}(\operatorname{grad}\varphi).^{*)} \tag{189}$$

Je to příklad diferenciálního operátoru druhého řádu.

---

*) Jiný význam operátoru Δ viz na př. v Kučerovi, l. c. str. 102, 103, nebo v Duslovi, str. 57, 58.

Význam rotace. Vedle příkladu rot $\mathfrak{v} = 2\mathfrak{w}$ z předcházejícího odstavce má rotace ještě další, ve fysice důležitý význam. Mějme obecně v afinních souřadnicích sílu (f_i) a v bodě A libovolná dvě malá pošinutí $(\mathrm{d}x^i)$ a (δx^i). Pak lze vytvořiti dvakrát kovariantní tensor

$$\operatorname{rot} \mathfrak{f} = \left(\frac{\partial f_j}{\partial x^i} - \frac{\partial f_i}{\partial x^j}\right) .$$

a invariant ΔL analogicky se (108)

$$\Delta L = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial f_j}{\partial x^i} - \frac{\partial f_i}{\partial x^j}\right) (\mathrm{d}x_j\, \delta x^j - \mathrm{d}x^j\, \delta x^i) = \tfrac{1}{2} f_{ij} \xi^{ij}. \qquad (190)$$

Význam tohoto invariantu vysvitne snadno v dvojrozměrných pravoúhlých souřadnicích (x, y): neboť zde bude

$$\Delta L = \tfrac{1}{2} f_{ij} \xi^{ij} =$$
$$= \tfrac{1}{2}\, [f_{12}(\mathrm{d}x^1\, \delta x^2 - \mathrm{d}x^2\, \delta x^1) + f_{21}(\mathrm{d}x^2\, \delta x^1 - \mathrm{d}x^1\, \delta x^2)],$$

a pro pošinutí $(\mathrm{d}x, 0)$ a druhé $(0, \mathrm{d}y)$

$$\tfrac{1}{2} f_{ij} \xi^{ij} = \tfrac{1}{2}\, (f_{12}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y - f_{21}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y) = \tfrac{1}{2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \,.\, 2 f_{12} =$$
$$= f_{12}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$$

Všimněme si nyní obr. 19.

Práce síly $\mathfrak{f}$ podél obvodu obdélníka o rozměrech $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ je

$$f_x . \mathrm{d}x + (f_y + \frac{\partial f_y}{\partial x}\, \mathrm{d}x)\, \mathrm{d}y - (f_x + \frac{\partial f_x}{\partial y_y}\, \mathrm{d}y)\, \mathrm{d}x - f_y\, \mathrm{d}y,$$

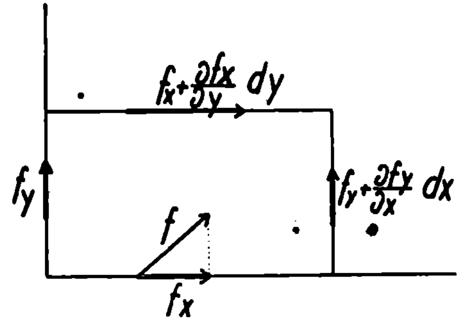
celkem tedy

$$\Delta L_z = \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y,$$

což je náš právě odvozený výraz.

Práce síly $\mathfrak{f}$ podél obvodu infinitesimálního obdélníka se rovná toku rot $\mathfrak{f}$ ve směru kladné normály

oběhnuté plošky. Stokes dokázal platnost této věty i pro konečnou křivou plochu P omezenou uzavřenou čarou C. Část práce síly $\mathfrak{f}$ na diferenciálu $d\mathfrak{s}$ čáry C je $\mathfrak{f} \cdot d\mathfrak{s}$, práce



Obr. 19.

podél celého obvodu čáry C je pak součet (integrál) těchto jednotlivých částí, t. j.

$$\int_C \mathfrak{f} \cdot d\mathfrak{s}.$$

Tok rotace $\mathfrak{f}$ ve směru kladné normály malé části dp celé plochy P je

$$\operatorname{rot} \mathfrak{f} \cdot d\mathfrak{p},$$

kde vektor $d\mathfrak{p}$ má velikost dp a směr $\mathfrak{n}$ normály plošky. Celkem pak zní Stokesova věta:

$$\int_C \mathfrak{f} \cdot d\mathfrak{s} = \int_P \operatorname{rot} \mathfrak{f} \cdot d\mathfrak{p}, \tag{191}$$

nebo v pravoúhlých souřadnicích

$$\int_C (f_1 \, dx + f_2 \, dy + f_3 \, dz) = \int_P \left\{ \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \cos \alpha_1 + \right.$$

$$+\left(\frac{\partial f_3}{\partial y}-\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)\cos\alpha_2+\left(\frac{\partial f_1}{\partial z}-\frac{\partial f_3}{\partial x}\right)\cos\alpha_3\Bigg\}\,\mathrm{d}p,$$

kde $\cos\alpha_i$ jsou směrové kosiny kladné normály plošky $\mathrm{d}p$.

Příklad rotace z elektřiny. Indukovaná elektromotorická síla v uzavřeném závitu rovná se změně indukčního toku magnetického, procházejícího plochou závitu, a má opačný směr než proud, jenž by onu změnu působil. Elektromotorická síla jako rozdíl potenciálů mezi dvěma body rovná se v uzavřeném závitu práci při oběhu jednotky náboje závitem. Při elektrické intensitě $\mathfrak{E}$ je zmíněná práce podle obr. 19 v obdélníkovém závitu

$$V=300\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-\frac{\partial B_z}{\partial t}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.\,10^{-8}.$$

Činitel 300 mění elst. jednotku potenciálu na volty, B_z je složka magnetické indukce na 1 cm² kolmá k závitu v míře elektromagnetické, kterou činitel 10^{-8} převádí rovněž ve volty. Je tedy při $c=3\,.\,10^{10}$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}=-\frac{1}{c}\,\frac{\partial B_z}{\partial t}=\mathrm{rot}_z\,\mathfrak{E}.$$

Podobně se odvodí rovnice pro složky rot $\mathfrak{E}$ do os x, y. Celkem lze psáti

$$\mathrm{rot}\,\mathfrak{E}=-\frac{1}{c}\,\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial t}, \tag{192}$$

t. zv. druhá rovnice Maxwellova.

V trojrozměrném kartézském prostoru lze přiřaditi tensoru $\dfrac{\partial f_j}{\partial x^i}-\dfrac{\partial f_i}{\partial x^j}=f_{ij}$ doplňkový vektor $\mathfrak{w}$ označený rot $\mathfrak{f}$ o složkách w_x, w_y, w_z a podobně plošce $(\mathrm{d}x^1\,\delta x^2-\mathrm{d}x^2\,\delta x^1)$ vektor $\mathrm{d}p^3$ atd.; práce vektoru f_i kolem plošky obecně v prostoru položené a kolmé k vektoru $\mathrm{d}\mathfrak{p}$ ve smyslu pravotočivého šroubu bude:

$$L = w_x(\mathrm{d}p)_x + w_y(\mathrm{d}p)_y + w_z(\mathrm{d}p)_z = (\mathrm{rot}\,\mathfrak{f}, \mathrm{d}\mathfrak{p}), \quad (193)$$

tedy rovna průmětu vektoru $\mathrm{d}\mathfrak{p}$ do směru rot $\mathfrak{f}$ násobenému absolutní velikostí rotace. Práce L je největší v případě, že směry vektorů rot $\mathfrak{f}$ a $\mathrm{d}\mathfrak{p}$ jsou stejné. Lze tedy říci, že směr vektoru rot $\mathfrak{f}$ je kolmý k plošce určitého obsahu, po jejímž obvodu koná síla $\mathfrak{f}$ největší práci. Tato práce přepočtená na 1 cm² se rovná právě rot $\mathfrak{f}$.

Příklad divergence tensoru. Jako vedla divergence vektoru ke skaláru, tak vede divergence tensoru druhého řádu k vektoru. Považujme v (82) S_{1i}, S_{2i}, S_{3i} za složky vektoru $\mathfrak{S}'_i$. Pak značí na př. $S_1 = S_{11}\xi^1 + S_{21}\xi^2 + S_{31}\xi^3$ průmět $\mathfrak{S}'_{in}$ vektoru $\mathfrak{S}'_i$ do vnitřní normály o směrových kosinech ξ^1, ξ^2, ξ^3. Současně bylo S_1 x^1-složkou napětí $\mathfrak{S}$. x^1-složka celkové síly $\mathfrak{p}$ na povrch P omezující část V pružné hmoty je tedy rovna součtu příspěvků těchto normálních komponent vektorů $\mathfrak{S}'_1$ po celém povrchu neboli integrálu

$$\int_P \mathfrak{S}'_{1n}\,.\,\mathrm{d}o$$

a ten se rovná podle Gaussovy věty (186)

$$-\int_V \mathrm{div}\,\mathfrak{S}'_1\,.\,\mathrm{d}\tau = p_1.$$

Znamení minus je proto, že zde počítáme normálu dovnitř, tedy opačně proti vzorci (186). Podobné výsledky bychom dostali pro p_2 a p_3, takže můžeme psáti obecně pro složky síly $\mathfrak{p}$

$$p_i = -\frac{\partial S_i^k}{\partial x^k}. \quad (194)$$

Tato síla $\mathfrak{p}$ působí na hmotu omezenou plochou P, takže je to již síla objemová. Rovná se záporně vzaté divergenci tensoru napětí S_i^k.*)

*) A. Haas v knize Vektoranalysis, 1929, značí tuto divergenci $\mathfrak{div}\,S$, kde S značí tensor S_i^k.

Zvláštní druhy vektorových polí jsou pole **nezřídlové**, jehož div $\mathfrak{A} = 0$, na př. pole rychlostí při toku nestlačitelné kapaliny. Je-li v každém místě pole vektoru $\mathfrak{C}$

$$\text{rot}\, \mathfrak{C} = 0,$$

nazývá se pole nevírové. Vytvoříme-li k danému skalárnímu poli V v každém místě gradient $\frac{\partial V}{\partial x^i}$, je toto gradientové pole nevírové, neboť

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial V}{\partial x^k}\right) - \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial V}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^i\, \partial x^k} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^k\, \partial x^i} = 0.$$

Symbolicky psáno

$$\text{rot grad}\, V = [\nabla \,.\nabla V] = 0.$$

Naopak se dá nevírové pole s rot $\mathfrak{A} = 0$ vyjádřiti gradientem skalárního pole V, tedy

$$\mathfrak{A} = \text{grad}\, V, \qquad A_i = \frac{\partial V}{\partial x^i}.$$

Úlohy: 30. Dokažte počtem složkovým, že

a) div $(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})$ = div $\mathfrak{A}$ + div $\mathfrak{B}$,
b) div $V\mathfrak{A} = V$ div $\mathfrak{A}$ + $\mathfrak{A}$ grad V,
c) rot $V\mathfrak{A} = V$ rot $\mathfrak{A}$ — $[\mathfrak{A}\,.\,\text{grad}\, V]$,
d) div $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$ = — $\mathfrak{A}$ rot $\mathfrak{B}$ + $\mathfrak{B}$ rot $\mathfrak{A}$,
e) rot $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = \mathfrak{A}$ div $\mathfrak{B}$ — $\mathfrak{B}$ div $\mathfrak{A}$ + ($\mathfrak{B}$ grad) $\mathfrak{A}$ — ($\mathfrak{A}$ grad) $\mathfrak{B}$.

31. Dokažte složkově, že pro všestranný kolmý tlak q na pružné těleso jest $p_i = -\frac{\partial q}{\partial x^i}$. (Úvažte, že tensor napětí má složky $S_i^k = p\,.\,\delta_i^k$.)

32. Dokažte, že pro $A = |\,\mathfrak{A}\,|$ platí

$$\tfrac{1}{2}\, \text{grad}\, A^2 = (\mathfrak{A}\, \text{grad})\, \mathfrak{A} + [\mathfrak{A}\, \text{rot}\, \mathfrak{A}].$$

33. Dokažte, že div rot $\mathfrak{a} = 0$. Tedy pole rot $\mathfrak{a}$ jest nezřídlové.

34. Indukční čáry magnetické jsou uzavřené, jejich pole je tedy nezřídlové, div $\mathfrak{B} = 0$. Tomu hoví předpoklad podle předešlé úlohy, že $\mathfrak{B}$ = rot $\mathfrak{f}$, kde $\mathfrak{f}$ slove vektorový potenciál. Dosazením do druhé rovnice Maxwellovy odvoďte vztah

$$\mathfrak{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial t} = -\operatorname{grad} \varphi,$$

v němž je φ potenciál skalární.

25. Použití symbolu ∇ jako vektoru. Leckteré výpočty jako byly uvedeny v předešlém odstavci lze prováděti mechanicky, považujeme-li operátor ∇ za symbolický vektor podle (163), kterým lze násobiti skalárně i vektoriálně. Při tom jest podle dřívějšího pro skalár f

$$\nabla f = \operatorname{grad} f \text{ o složkách } \frac{\partial f}{\partial x^i},$$

$$(\mathfrak{v}\nabla)\, f = \left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}\right) f.$$

Pro vektor $\mathfrak{u}$ pak

$$\nabla \mathfrak{u} = \operatorname{div} \mathfrak{u}, \text{ složkově } \frac{\partial u^i}{\partial x^i};$$

$$[\nabla \mathfrak{u}] = \operatorname{rot} \mathfrak{u}, \text{ složkově podle (175).}$$

Pak se užívá již jen známých vět (112) a (114). Pomocí složek plyne dál (pro λ, μ reálná čísla)

$$\nabla(\lambda f_1 + \mu f_2) = \lambda \cdot \nabla f_1 + \mu \cdot \nabla f_2,$$
$$\nabla(\lambda \mathfrak{u} + \mu \mathfrak{v}) = \lambda \cdot \nabla \mathfrak{u} + \mu \cdot \nabla \mathfrak{v},$$
$$[\nabla(\lambda \mathfrak{u} + \mu \mathfrak{v})] = \lambda \cdot [\nabla \mathfrak{u}] + \mu[\nabla \mathfrak{v}],$$

které si čtenář sám dovede přepsati pomocí značek grad, div, rot.

Při použití diferenciálního operátoru ∇ na součin dvou funkcí místa F_1, F_2 (skalárních nebo vektorů) postupujeme pak takto:

a) považujeme za proměnného postupně jednoho činitele za druhým a výrazy vzniklé sečteme podle vzoru

$$\nabla(F_1 \cdot F_2) = \nabla(F_1^* \cdot F_2) + \nabla(F_1 \cdot F_2^*),$$

při čemž jsme označili hvězdičkou činitele, kterého derivujeme;

b) přemístíme činitele podle pravidel (112, 114) tak, aby za ∇ zbyl jediný činitel, právě uvažovaný jako proměnný. Konstantní činitel $\mathfrak{a}$ před ∇ dává při tom symbol $(\mathfrak{a}\nabla)$. Věty (114) užijeme ve tvaru

$$\nabla(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}^*) = (\mathfrak{a}\nabla)\mathfrak{b} + \{\mathfrak{a}[\nabla\mathfrak{b}]\}. \tag{195}$$

Tak dostaneme formule

$$\nabla(f\mathfrak{a}) = \nabla(f^*\mathfrak{a}) + \nabla(f\mathfrak{a}^*) = \mathfrak{a} \cdot \nabla f + f \cdot \nabla\mathfrak{a};$$

$$[\nabla \cdot f\mathfrak{a}] = [\nabla \cdot f\mathfrak{a}^*] + [\nabla \cdot f^*\mathfrak{a}] = f \cdot [\nabla\mathfrak{a}] + [\nabla f \cdot \mathfrak{a}] =$$
$$= f[\nabla\mathfrak{a}] - [\mathfrak{a} \cdot \nabla f];$$

$$\nabla(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = \nabla(\mathfrak{a}^*\mathfrak{b}) + (\nabla\mathfrak{b}^*\mathfrak{a}) =$$
$$= (\mathfrak{b}\nabla)\mathfrak{a} + [\mathfrak{b}[\nabla\mathfrak{a}]] + (\mathfrak{a}\nabla)\mathfrak{b} + [\mathfrak{a}[\nabla\mathfrak{b}]].$$

Určení výrazů

$$\nabla[\mathfrak{a}\mathfrak{b}] \text{ a } [\nabla \cdot [\mathfrak{a}\mathfrak{b}]]$$

ponecháváme čtenáři za cvičení.

Zvolíme-li v předcházejících vzorcích ještě $\mathfrak{a} = \nabla$, dostáváme tensory s druhými derivacemi. Setkali jsme se s nimi již v (188) a (str. 84), kde byl zaveden Laplaceův symbol

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Dostáváme:

$$\nabla(\nabla f) = \text{div grad } f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \Delta f;$$

$$[\nabla \cdot \nabla f] = \text{rot grad } f = 0 \text{ (podle str. 89)};$$

$$\nabla(\nabla\mathfrak{a}) = \text{grad div } \mathfrak{a} = \mathfrak{i}_1 \frac{\partial}{\partial x}(\text{div } \mathfrak{a}) + \mathfrak{i}_2 \frac{\partial}{\partial y}(\text{div } \mathfrak{a}) +$$
$$+ \mathfrak{i}_3 \frac{\partial}{\partial z}(\text{div } \mathfrak{a});$$

$$\nabla[\nabla\mathfrak{a}] = \text{div rot } \mathfrak{a} = [\nabla\nabla]\mathfrak{a} = 0 \text{ podle (105)};$$

$$[\nabla[\nabla\mathfrak{a}]] = \text{rot rot } \mathfrak{a} = \nabla(\nabla\mathfrak{a}) - (\nabla\nabla)\mathfrak{a} =$$
$$= \text{grad div } \mathfrak{a} - \Delta\mathfrak{a}.$$

Úloha 35. Poslední dvě rovnice dokažte složkově.

26. Speciální princip relativnosti. Mechanický princip relativnosti vyslovuje pokusně potvrzený poznatek, že mechanické děje probíhají podle týchž zákonů ve všech pozorovacích soustavách souřadnic, které se vůči sobě pohybují rovnoměrně a přímočaře. Pozorovatel v soustavě klidné na př. zjistí, že pro pohyb hmotného bodu m platí v jeho soustavě souřadnic (I) rovnice (143)

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = X,\ m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = Y,\ m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} = Z, \qquad (196)$$

kde X, Y, Z jsou složky síly, t čas měřený hodinami klidnými v soustavě (I). Pohybuje-li se soustava II (na př. vagon) rovnoměrně přímočaře rychlostí v směrem osy $+x$, platí pro souřadnice bodu m ve druhé soustavě transformační rovnice Galileovy

$$x' = x - vt,\ y' = y,\ z' = z,\ t' = t;$$
$$x = x' + vt',\ y = y',\ z = z',\ t = t'.$$

Rovnice $t = t'$ obsahuje předpoklad zdánlivě samozřejmý, že čas plyne v obou soustavách stejně. Pohybové rovnice ve druhé soustavě budou po dosazení do (196)

$$m\frac{\mathrm{d}^2x'}{\mathrm{d}t'^2} = X',\ m\frac{\mathrm{d}^2y'}{\mathrm{d}t'^2} = Y',\ m\frac{\mathrm{d}^2z'}{\mathrm{d}t'^2} = Z';$$

mají úplně týž tvar, neboli jsou invariantní vzhledem k transformaci Galileově. Protože tedy mechanické děje probíhají v obou soustavách podle týchž zákonů, nemůžeme pomocí nich rozhodnouti, je-li naše pozorovací soustava v klidu, nebo v přímočarém rovnoměrném pohybu. Mělo to však být možné pomocí měření rychlosti světla. Světelný signál z počátku O klidné soustavy I se šíří směrem osy $+x$ rychlostí $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/sec, v soustavě II však týmž směrem by měla vyjíti rychlost $c - v$. Naměřilo se však opět c (Michelson, 1881). Einstein tento výsledek zevšeobecnil ve svém speciálním principu relativity. Tvrdí, že nebude nikdy možno dokázati fysikálními pokusy rovnoměrný přímočarý pohyb pozorovací soustavy vzhledem k nějaké soustavě absolutně klidné. V každé ze soustav, které se tak pohybují, jedna vzhledem ke druhé naměří pozorovatelé i tutéž rychlost světla c. Pro pozorovatele v soustavě I dostalo se světlo za čas t do bodů (x, y, z), jejichž vzdálenost od počátku jest

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = ct.$$

Tyto body leží na kouli o rovnici

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0.$$

Totéž však zjistí i pozorovatel v soustavě II, takže pro něho platí rovnice

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = 0.$$

Transformační rovnice, které převádějí souřadnice bodu v soustavě I na souřadnice v soustavě II, musí tedy pro všechny hodnoty splňovati podmínku, že

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2. \quad (197)$$

Objevil je Lorentz*) a jsou

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (198)$$

Dosadíme-li je do pravé strany rovnice (197), dostaneme skutečně stranu levou. Protože ve většině případů je rychlost v příliš malá proti rychlosti světla, můžeme $\frac{v}{c}$ zanedbati a rovnice Lorentzovy přecházejí v transformaci Galileovu. Zákony mechaniky Galilei-Newtonovy by se však touto transformací Lorentzovou změnily; sice nepatrně, ale přece jen by nebyly invariantní. Bylo je tedy třeba poněkud opraviti, aby vyhovovaly Einsteinově principu relativity. Odtud plynou pak ony známé překvapující výsledky, že čas t' probíhá v pohyblivé soustavě jinak nežli v klidné, že se tuhá tyč délky l jeví klidnému pozorovateli kratší, $l\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$, klidná hmota m_0 se při pohybu změní na

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

teplota hmoty v pohybu jeví se nižší nežli byla v klidu. Jen všestranný tlak, entropie a množství elektrické mají hodnoty na pohybu nezávislé.

27. Čtyrrozměrný svět Minkowskiho. Podle Einsteinovy teorie není tedy ani neproměnných jednotek délky ani času. Jediná neproměnná veličina ve všech přípustných soustavách je rychlost světla, t. j. veličina prostorově časová. Toho si všiml r. 1908 Minkowski. Podle něho každá událost jest určena třemi souřadnicemi prostorovými x, y, z a časem t, kdy se stala. Má také ráz prostorově časový a čísla x, y, z, t, jimiž jest určena, lze považovati za souřadnice bodu ve čtyrrozměrném světě. Souřadnicové soustavy přípustné pro tento svět Minkowskiho jsou pak takového druhu, že ponechávají invariantní formu

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2.$$

Kdybychom zavedli místo čtvrté souřadnice t dráhu světla za čas t, který na rozdíl od souřadnic prostorových budeme čítati imaginárně, bylo by $x_4 = ict$, $x'_4 = ict'$, a invariantní forma by zněla po zřejmé změně označení:

$$s^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3 + x'^2_4.$$

Podle analogie s trojrozměrným prostorem můžeme s^2 považovati za čtverec „odlehlosti“ světobodu od počátku soustavy [viz rovnici (70)] kartézských souřadnic. Odlehlost s musí

---

*) Jednoduché odvození viz na př. v Novákově Fysice, II. d., str. 1145—7.

vycházeti ve všech přípustných soustavách stejná. To je však jen při transformacích, které odpovídají nějakému pootočení soustavy os jako tuhého celku kolem pevného počátku. Lorentzova transformace se tedy dá jistě interpretovati jako otočení os x_1 a x_4 do nové polohy x'_1, x'_4 o jistý úhel α. Z analytické geometrie jest známo, že se souřadnice libovolného bodu M (x_1, x_4) změní na

$$x'_1 = x_1 \cos\alpha + x_4 \sin\alpha,$$
$$x'_4 = x_4 \cos\alpha - x_1 \sin\alpha.$$

Srovnáme-li tyto rovnice s transformací Lorentzovou, kam píšeme za $t = \frac{x_4}{ic} = -i\frac{x_4}{c}$, máme

$$x'_1 = \frac{x_1 + i\frac{v}{c}x_4}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad x'_4 = \frac{x_4 - i\frac{v}{c}x_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Odtud

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad \sin\alpha = \frac{i\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

neboť skutečně jest $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Lorentzova transformace značí tedy opravdu otočení os x_1, x_4 o imaginární úhel. Dosazením se lze také přesvědčiti, že

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3 + x'^2_4.$$

Pohyb bodu se znázorní v Minkowskiho čtyrrozměrném světě světočarou, jejíž každý bod (x_1, x_2, x_3, x_4) udává místo i čas, kdy bod v místě byl. Tvar světočáry nezávisí na použité soustavě souřadnic. Popisovati pohyb ze soustavy II, která je vůči soustavě I v rovnoměrném přímočarém pohybu, znamená v Minkowskiho znázornění jen přechod od jedné soustavy os souřadnic k soustavě s osami pootočenými, jak jsme již nahoře ukázali podrobněji. V teorii relativnosti nebudou tedy přírodní zákony vyjádřeny vztahy mezi vektory a tensory trojrozměrného prostoru, nýbrž čtyrrozměrného světa. Zákony klasické fysiky z nich pak musí vyplynouti jako zvláštní případy pro $v = 0$, t. j. pro soustavu, ve které je bod v klidu.

Pro prvek $\mathrm{d}s$ světočáry bodu máme

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x_1^2 + \mathrm{d}x_2^2 + \mathrm{d}x_3^2 + \mathrm{d}x_4^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 - c^2\,\mathrm{d}t^2.$$

Rychlost v bodu vzhledem k užité soustavě jest

$$v^2 = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2,$$

takže

$$\mathrm{d}s^2 = (v^2 - c^2)\,\mathrm{d}t^2$$

a dále

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{-i}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{-i\beta}{c},$$

značíme-li

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \beta.$$

Vyšetřme nyní význam čtyř směrových kosinů prvku $\mathrm{d}s$. Jsou analogicky s třírozměrnými vztahy (127)

$$\alpha_i = \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = -\frac{i\beta}{c}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}.$$

Protože

$$\mathrm{d}x_4 = ic\,.\,\mathrm{d}t,$$

jest

$$\alpha_4 = \beta.$$

Položíme-li souřadnicovou soustavu tak, aby časová osa ležela ve směru tečny světočáry, jest

$$\alpha_4 = 1 \text{ a tedy } v = 0.$$

$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, neboť ostatní osy jsou kolmé na x_4. Je to tedy soustava, ve které je bod v klidu; nazveme ji vlastní soustavou bodu. Čas v této soustavě je vlastní čas τ. Ze vztahu

$$ds^2 = (v^2 - c^2)\,dt^2 = -c^2 \,.\, d\tau^2$$

plyne

$$ds = ic \,.\, d\tau$$

Vektor čtyrrozměrný o složkách

$$q_i = \frac{dx_i}{d\tau} = \frac{dx_i}{dt}\frac{dt}{d\tau}$$

budeme nazývati Minkowskiho rychlost. Protože $v_j = \frac{dx_j}{dt}$ $(j = 1, 2, 3)$ jsou komponenty rychlosti v trojrozměrném prostoru, můžeme psáti

$$q_j = \beta v_j, \text{ protože } \frac{dt}{d\tau} = \beta$$

a (199)

$$q_4 = i\beta c, \text{ neboť } \frac{dx_4}{dt} = ic.$$

Absolutní hodnota tohoto vektoru jest

$$q^2 = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 = \beta^2 (v^2 - c^2) = -c^2,$$

je to tedy konstanta pro všechny pohyby.

Také si lze mysliti rozloženu Minkowskiho rychlost na složku prostorovou

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{v} \,.\, \beta$$

a na složku časovou

$$q_4 = i\beta c,$$

$\mathfrak{v}$ je při tom určena složkami $\frac{dx_j}{dt}$ $(j = 1, 2, 3)$.

Protože tedy Minkowskiho rychlost je vytvořena úplně analogicky s rychlostí klasické mechaniky, leží na snadě vytvořiti také vektor analogický síle $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\mathfrak{v})$ klasické mechaniky. Pro vlastní soustavu souřadnicovou bude platiti Newtonův pohybový zákon v klasickém tvaru

$$P'_j = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(\mu v_j), \quad (j = 1, 2, 3).$$

Nazveme tedy Minkowskiho silou čtyrrozměrný vektor

$$P_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(\mu q_i), \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Vzhledem k obecnému vztahu pro libovolné A

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \beta \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t},$$

bude obecně podle (199)

$$P_j = \beta \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\beta \mu v_j),$$

$$P_4 = i\beta c \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\beta\mu). \tag{200}$$

V soustavě vlastní přecházejí složky skutečně v klasické

$$P'_j = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(\mu v_j),$$

neboť $\beta = 1.$

Značí tudíž (200) zevšeobecnění Newtonova zákona, že síla se rovná časové derivaci impulsu. Za impulsovou hmotu nutno ovšem psáti

$$m = \beta\mu = \frac{\mu}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Pro $v = 0$ stává se $m = \mu$; proto se nazývá μ hmotou klidovou. Prostorová část Minkowskiho síly $\mathfrak{P}$ souvisí se silou Newtonovou $\mathfrak{P}'$, jak patrno, vztahem

$$\mathfrak{P} = \beta \mathfrak{P}',$$

takže druhý zákon Newtonův zní v relativistické dynamice

$$\mathfrak{P}' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mu}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,\mathfrak{v}\right).$$

Závislost impulsové hmoty m na rychlosti byla skutečně potvrzena při pozorování úchylky katodových paprsků. Rovnice (200) vyjadřují přírodní zákon rovností dvou vektorů čtyrrozměrných.

Hmotný tensor. Jako příklad tensorů druhého řádu ve čtyrrozměrném světě může sloužiti každý tensor vytvořený podle pravidla o násobení v odst. 16. Jsou-li a_i, b_k dva vektory a ϱ_0 skalár, jest

$$\varrho_0 a_i b_k = T_{ik}$$

tensor druhého řádu. Zvolíme-li za $b_k = a_k$, bude tensor T_{ik} ovšem symetrický: $T_{ik} = T_{ki}$. Pro fysiku užšího principu relativity je důležitý příklad, v němž za vektor a_i volíme vektor

$$a_i = \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}s},\ (i = 1, 2, 3, 4),$$

kde $x_4 = ict$. Minkowskiho rychlost

$$q_i = \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\tau} = a_i \,.\, ic,$$

takže vektor a_i je Minkowskiho rychlost násobená $1 : ic = - i : c$.

Za ϱ_0 pak volíme hustotu hmoty. Z Lorentzovy transformace plyne, že se délky ve směru pohybu zkracují $1 : \beta$-krát; ve směrech k pohybu kolmých zůstávají nezměněny. Kvádr, který měl v klidu objem V_0 bude míti při pohybu podél jedné hrany objem $V = V_0 : \beta$. Není tedy invariantem V, nýbrž $V_0 = \beta V$. Byla-li jeho klidová hmota μ, jest klidová hustota

$$\varrho_0 = \frac{\mu}{V_0} = \frac{\mu}{\beta V} = \frac{m}{\beta^2 V},$$

kde značí $m = \beta\mu$ hmotu při pohybu. Hustota ϱ při pohybu jest tedy

$$\varrho = \frac{m}{V} = \beta^2 \varrho_0$$

a invariantní

$$\varrho_0 = \frac{\varrho}{\beta^2} = \varrho\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right).$$

Prostorové složky vektoru a_i jsou $-\frac{i}{c}\, q_j = -\frac{i\beta}{c}\, v_j$ ($j = 1, 2, 3$), složka $a_4 = -\frac{i}{c}\, i\beta c = \beta$, takže složky našeho hmotného tensoru jsou:

$$\begin{array}{cccc}
\varrho\,\dfrac{v_1^2}{c^2}, & \varrho\,\dfrac{v_1 v_2}{c^2}, & \varrho\,\dfrac{v_1 v_3}{c^2}, & -\dfrac{i\varrho v_1}{c}, \\[2ex]
\varrho\,\dfrac{v_2 v_1}{c^2}, & \varrho\,\dfrac{v_2^2}{c^2}, & \varrho\,\dfrac{v_2 v_3}{c}, & -\dfrac{i\varrho v_2}{c}, \\[2ex]
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \varrho\,\dfrac{v_3^2}{c^2}, & \ldots\ldots \\[2ex]
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & T_{44} = \varrho.
\end{array}$$

Prostorově časové složky tohoto tensoru, na př. $T_{14} = -\frac{i}{c}\,\varrho v_1$ jsou úměrné složkám hustoty impulsu ϱv_1. Čistě časová složka T_{44} je hustota hmoty ϱ. Zúžením tensoru $T_i^k = T_{ik}$ dostáváme invariant

$$c^2 (T_{11} + T_{22} + T_{33} + T_{44}) = \varrho v^2 + \varrho c^2,$$

který značí celkovou hustotu energie; $\frac{1}{2}\varrho v^2$ je energie kinetická, ϱc^2 je energie, ve kterou by se mohla hmota ϱ proměniti. Uvolniti ji ovšem dosud nedovedeme.

Čtyrproud. V nauce o elektřině má elektrický náboj e velikost nezávislou na pohybu. Hustota náboje ϱ jako náboj jednotky objemové hoví vztahu

$$\frac{e}{V_0} = \varrho_0, \quad \text{nebo} \quad \frac{e}{V\beta} = \varrho_0.$$

Při $\varrho = \frac{e}{V}$ je tedy invariantní

$$\varrho_0 = \frac{\varrho}{\beta}.$$

Násobíme-li Minkowskiho rychlost invariantem $\frac{4\pi}{c}\varrho_0$, dostaneme jistě světový vektor o složkách

$$s_j = \frac{4\pi}{c}\varrho v_j, \ (j = 1, 2, 3) \ \text{a} \ s_4 = 4\pi i\varrho.$$

Součin $\varrho\mathfrak{v}$ je množství elektřiny, které projde kolmým cm^2 za vteřinu, neboli je to hustota konvekčního proudu v elektrostatické míře. Proto nazýváme světový vektor s_i ($i = 1, 2, 3, 4$) čtyrproudem. Jeho prostorová složka značí proud konvekční, složka časová jest úměrná hustotě náboje.

Lorentzovy rovnice elektromagnetického pole jsou*)

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c}\varrho\mathfrak{v} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t},$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = 4\pi\varrho,$$

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t},$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{H} = 0,$$

*) Viz na př. Nachtikalovu Technickou fysiku, str. 562.

v nichž značí $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ intensity polí elektrického a magnetického. Třetí a čtvrtou jsme poznali již ve (192) a v úl. 34, druhou ve (187). Z prvé rovnice plyne pro prostorovou složku čtyrproudu

$$\frac{4\pi}{c}\varrho\mathfrak{v} = \mathrm{rot}\,\mathfrak{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t}\,.$$

Všimneme-li si, že vzhledem k $\mathrm{d}x_4 = ic\,.\,\mathrm{d}t$ platí pro každou veličinu A

$$\frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial x_4}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial(iA)}{\partial x_4},$$

můžeme psáti složky čtyrproudu takto:

$$\begin{aligned}
s_1 &= \frac{\partial H_3}{\partial x_2} - \frac{\partial H_2}{\partial x_3} - \frac{\partial(iE_1)}{\partial x_4},\\
s_2 &= -\frac{\partial H_3}{\partial x_1} + \frac{\partial H_1}{\partial x_3} - \frac{\partial(iE_2)}{\partial x_4},\\
s_3 &= \frac{\partial H_2}{\partial x_1} - \frac{\partial H_1}{\partial x_2} - \frac{\partial(iE_3)}{\partial x_4},\\
s_4 &= \frac{\partial(iE_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(iE_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(iE_3)}{\partial x_3}.
\end{aligned}$$

Analogicky se str. 123 můžeme tedy považovati čtyrproud za divergenci antisymetrického tensoru F_{ik} o složkách

$$\begin{matrix}
0 & H_3 & -H_2 & -iE_1\\
-H_3 & 0 & H_1 & -iE_2\\
H_2 & -H_1 & 0 & -iE_3\\
iE_1 & iE_2 & iE_3 & 0,
\end{matrix}$$

neboť složky divergence tensoru S_i^k byly definovány vztahem (194)

$$p_i = \frac{\partial S_i^k}{\partial x_k} = \frac{\partial S_i^1}{\partial x_1} + \frac{\partial S_i^2}{\partial x_3} + \frac{\partial S_i^3}{\partial x_2} + \frac{\partial S_i^4}{\partial x_4},$$

a v kartézských souřadnicích na poloze indexů nezáleží.

Tensor F_{ik} slove tensorem elektromagnetického pole. Jeho složky prostorové jsou složky intensity magnetické; složky prostoro-časové udávají intensitu pole elektrického. Časová osa x_4 je však pro každého pozorovatele jiná; proto je také tento rozklad ve složky relativní, pro každého pozorovatele jiný. Ale první dva zákony Lorentzovy se dají v každé přípustné soustavě souřadnic vyjádřiti větou na soustavě nezávislou: čtyrproud je divergencí elektromagnetického tensoru.

28. Pseudotensory. Kapacity a hustoty. Ve všech předchozích úvahách byl patrný podstatný rozdíl mezi tensory souměrnými a antisymetrickými nejen formální, nýbrž i věcný. Proto si všimneme blíže ještě tensorů antisymetrických. V příkladech tensorů druhého řádu se vyznačovaly vlastností $a^{ik} = - a^{ki}$, $a_{ik} = - a_{ki}$. U tensorů smíšených b^i_k se o této vlastnosti mluviti nedá, protože i kdyby náhodou v určité soustavě souřadnic bylo $b^i_k = - b^k_i$, porušil by se tento vztah při transformaci souřadnic, neboť nemá v indexech tensorový charakter. Platí-li totiž

$$a_{ik} = - a_{ki}$$

jest po transformaci

$$\bar{a}_{ik} = \chi^r_i \chi^s_k a_{rs},$$

$$\bar{a}_{ki} = \chi^s_k \chi^r_i a_{sr},$$

a tedy opět

$$\bar{a}_{ik} = - \bar{a}_{ki}.$$

Kdežto, je-li

$$b^i_k = - b^k_i,$$

jest

$$\bar{b}^i_k = \chi^s_k \beta^i_t b^t_s,$$

$$\bar{b}^k_i = \chi^s_i \beta^k_t b^t_s$$

a není tedy obecně

$$\bar{b}^i_k = - \bar{b}^k_i.$$

Tensor vyššího řádu, na př. a^{ijk}_{m}, jest antisymetrický v horních indexech, změní-li složka znaménko při liché permutaci (viz dodatek, 1) indexů i, j, k, kdežto při sudé permutaci je zachová:

$$a^{123} = - a^{123} = a^{213} = a^{321},$$

$$a^{123} = a^{312} = a^{231}.$$

V případě tří indexů je vidno, že cyklickou permutací indexů se znaménko složky zachovává. V n-rozměrném prostoru má antisymetrický tensor r-tého řádu počet různých složek (nehledě ke znaménku) tolik, kolik je kombinací r-té třídy bez opakování z n prvků, t. j. $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$. Složky o dvou stejných indexech jsou vesměs nulové. Zvláštní případ antisymetrických tensorů jsou t. zv. vnější součiny vektorů. Z vektorů a^i, b^i, c^i lze vytvořiti vnější součin dvou vektorů o složkách

$$t^{ij} = \begin{vmatrix} a^i & a^j \\ b^i & b^j \end{vmatrix}, \tag{201}$$

který jsme nazývali shora součinem vektorovým.*) Vnější součin 3 vektorů je definován determinanty stupně třetího

$$t^{ijk} = \begin{vmatrix} a^i & a^j & a^k \\ b^i & b^j & b^k \\ c^i & c^j & c^k \end{vmatrix} \tag{202}$$

a je zřejmě antisymetrický, neboť přemístěním dvou sloupců determinant mění jen znaménko, takže

$$t^{ijk} = - t^{jik} = - t^{ikj} = \dots$$

V trojrozměrném prostoru má tento vnější součin různé složky τ, 0, $-\tau$, klademe-li

*) Někdy jmenujeme tyto veličiny jednoduchými bivektory; při součinu třech vektorů mluvíme o jednoduchém trivektoru atd.

$$\tau = \begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = t^{123}.$$

V kartézských souřadnicích značí τ objem rovnoběžnostěnu určeného danými vektory (112).

Uvažujme nyní veličinu τ jako novou samostatnou veličinu a vyšetřme, jak se transformuje při obecné lineární transformaci souřadnic. Ze vztahu (podle 90)

$$t^{ijk} = \alpha^i_r \alpha^j_s \alpha^k_t \bar{t}^{rst}$$

dostáváme pro $\tau = t^{123}$ hned žádanou transformaci, ve které klademe opět

$$\bar{t}^{rst} = \pm \bar{\tau}$$

podle toho, je-li rst sudá, nebo lichá permutace číslic 1, 2, 3. Máme pak

$$\tau = t^{123} = (\Sigma \pm \alpha^1_r \alpha^2_s \alpha^3_t)\, \bar{\tau},$$

kde součet podle dodatku (1) značí hodnotu determinantu

$$\alpha = | \alpha^i_k |.$$

Jest tedy celkem

$$\tau = \alpha \,.\, \bar{\tau}. \tag{203}$$

Veličina τ nechová se tedy jako pouhý skalár, neboť se lineární transformací mění podle právě odvozené formule. Proto jsme ji nazvali již ve (112) **pseudoskalárem**. Vidíme tu na příkladě, jak vede antisymetrický tensor k veličině o menším počtu indexů (zde 0) s jednoduchou transformací. To je právě smysl a účel zavádění nových veličin pseudoskalárů a pseudotensorů.

Kdybychom vyšli podobně od antisymetrického tensoru třikrát kovariantního c_{ijk} a nazvali hodnotu c_{123} jednoduše Γ, dostali bychom pro veličinu Γ analogickým postupem (ponecháváme čtenáři)

$$\Gamma = c_{123} = (\Sigma \pm \beta^r_1 \beta^s_2 \beta^t_3)\, \bar{\Gamma} = \beta \,.\, \bar{\Gamma}.$$

Poněvadž $\beta = 1 : \alpha$, jest tedy

$$\Gamma = \frac{1}{\alpha} \bar{\Gamma}. \tag{204}$$

Pseudoskalár Γ se transformuje jinak nežli τ, proto se označují různými názvy a písmeny. Pseudoskaláry druhu (203) nazývají se **skalární kapacity** a označujeme je malými řeckými písmeny, pseudoskaláry druhého druhu se nazývají **skalární hustoty**.

Naplníme-li jistý objemový element τ hmotou hustoty Γ, jest i po transformaci souřadnic celkové množství hmoty $\tau \,.\, \Gamma = \bar{\tau} \,.\, \bar{\Gamma}$ invariantní.

Tyto pojmy lze přirozeně rozšířiti na n rozměrů. Z antisymetrického tensoru $t^{ijk\cdots}$ n-krát kontravariantního vyplývá skalární kapacita $\tau = t^{1,2,3\ldots n}$, která se transformuje podle vzorce (203). Z tensoru n-krát kovariantního se odvodí skalární hustota $\Gamma = c_{1,2,3,\ldots n}$.

Tensorové hustoty a kapacity. Tensorovou kapacitu ω_l^{ik} dostaneme, násobíme-li skalární kapacitu τ libovolným tensorem w_l^{ik}:

$$\omega_l^{ik} = \tau w_l^{ik}, \tag{205}$$

která se transformuje podle vzorců

$$\omega_l^{ik} = \alpha \,.\, \alpha_r^i \alpha_s^k \beta_l^t \bar{\omega}_t^{rs},$$

$$\bar{\omega}_t^{rs} = \frac{1}{\alpha} \,.\, \beta_i^r \beta_k^s \alpha_t^l \omega_l^{ik}.$$

Tensorová hustota vznikne podobně součinem skalární hustoty Γ s tensorem w_l^{ik}:

$$\Omega_l^{ik} = \Gamma w_l^{ik}. \tag{206}$$

Odvození jejích transformačních vzorců je zjevné a ponecháváme je čtenáři. Obojí veličiny slovou **pseudotensory**.

Z obou definicí následuje pak důsledek, že součin z hustoty a kapacity dává čistý tensor. Neboť

$$\Gamma \,.\, \tau = s$$

je čistý skalár. Proto

$$\Gamma\omega_l^{ik} = \Gamma\tau \,.\, w_l^{ik} = s \,.\, w_l^{ik}$$

i

$$\tau\Omega_l^{ik} = \tau\Gamma \,.\, w_l^{ik} = s \,.\, w_l^{ik}$$

jsou čisté tensory.

Jednoduchý příklad pseudotensoru je antisymetrický tensor v trojrozměrném prostoru t^{ij}, jehož složky jsou patrné ze schematu

$$\begin{pmatrix} 0 & t^{12} & t^{13} \\ t^{21} & 0 & t^{23} \\ t^{31} & t^{32} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \tau_3 & -\tau_2 \\ -\tau_3 & 0 & \tau_1 \\ \tau_2 & -\tau_1 & 0 \end{pmatrix},$$

v němž klademe

$$t^{ij} = \tau_k.$$

Při tom je i, j, k sudá permutace číslic 1, 2, 3. Po transformaci stanovíme analogicky

$$\bar{t}^{lm} = \bar{\tau}_n$$

pro l, m, n jako sudou permutaci týchž číslic.

Chceme nyní odvoditi, jak se transformují veličiny τ_k. To plyne z rovnic pro t^{ij}:

$$t^{ij} = \alpha_l^i \alpha_m^j \bar{t}^{lm},$$

v nichž nahradíme $\bar{t}^{lm}$ veličinami $\bar{\tau}_k$.

$$\begin{aligned} t^{ij} = 0 &+ \alpha_1^i\alpha_2^j\bar{\tau}_3 - \alpha_1^i\alpha_3^j\bar{\tau}_2 \\ &- \alpha_2^i\alpha_1^j\bar{\tau}_3 + 0 + \alpha_2^i\alpha_3^j\bar{\tau}_1 \\ &+ \alpha_3^i\alpha_1^j\bar{\tau}_2 - \alpha_3^i\alpha_2^j\bar{\tau}_1 + 0 \end{aligned}$$

nebo po přeskupení

$$\begin{aligned} t^{ij} = (\alpha_2^i\alpha_3^j - \alpha_3^i\alpha_2^j)\,\bar{\tau}_1 + (\alpha_3^i\alpha_1^j - \alpha_1^i\alpha_3^j)\,\bar{\tau}_2 + \\ + (\alpha_1^i\alpha_2^j - \alpha_2^i\alpha_1^j)\bar{\tau}_3. \end{aligned}$$

Výrazy v závorkách jsou minory A_1^k, A_2^k, A_3^k prvků $\alpha_1^k, \alpha_2^k, \alpha_3^k$ v determinantu α, pro něž platí (44)

$$A_i^k = \alpha \,.\, \beta_k^i.$$

Máme tedy na př.

$$t^{12} = \alpha\,[\beta_3^1 \bar{\tau}_1 + \beta_3^2 \bar{\tau}_2 + \beta_3^3 \bar{\tau}_3] = \tau_3$$

a vidíme, že se transformuje obecně τ_k podle rovnice

$$\tau_k = \alpha \,.\, \beta_k^m \bar{\tau}_m$$

nebo (207)

$$\bar{\tau}_m = \frac{1}{\alpha} \,.\, \alpha_m^k \tau_k.$$

Srovnáním s rovnicemi pro ω^{ik} je patrno, že veličina definovaná složkami τ_k je kovariantní tensorová kapacita. V kartézských souřadnicích jest ovšem

$$\alpha = \beta = \frac{1}{\alpha},$$

neboli

$$\alpha^2 = 1, \ \alpha = \pm 1.$$

Znamení $+$ je při téže orientaci os a veličina (τ_k) se chová jako pravý vektor. Má však charakter vektoru axiálního, neboť při změně orientace os jest $\alpha = -1$.

Zcela analogicky by bylo možno definovati ke dvakrát kovariantnímu antisymetrickému tensoru c_{ij} kontravariantní tensorovou hustotu Γ^k vztahem

$$c_{ij} = \Gamma^k$$

pro i, j, k sudou permutaci číslic 1, 2, 3. Čtenáři ponecháváme snadný důkaz transformačních rovnic

$$\Gamma^k = \frac{1}{\alpha} \,.\, \alpha_m^k \overline{\Gamma}^m,$$

$$\overline{\Gamma}^m = \alpha \,.\, \beta_k^m \Gamma^k. \qquad (208)$$

Příkladem vektorové kapacity je bivektor v trojrozměrném prostoru $c^{ij} = a^i b^j - a^j b^i$, charakterisující plochu omezenou oběma vektory. Lze tedy položiti

$$c^{ij} = \tau_k.$$

Vektorovou hustotu nalezneme v rovnici (83_1) v antisymetrickém tensoru $I_{ij} = \Gamma^k$. Vidíme také, že forma

$$\Gamma^k \tau_k = M$$

je skalár, tedy invariant analogický formě tensorové. Zobecněním těchto úvah se však zabývati nebudeme. Čtenář je najde v citované knize Brillouinově.

DODATEK.

DETERMINANTY.

1. Permutace n prvků 1, 2, 3, ..., n jsou, jak známo, skupiny utvořené ze všech n prvků lišící se jen pořádkem prvků. Jest jich $n! = 1 . 2 . \ldots . n$. Předchází-li v permutaci (1, 3, 4, 2) vyšší prvek před nižším (32, 42), nastává inverse. Permutace o sudém počtu inversí jmenují se sudé (1, 3, 4, 2), s lichým počtem inversí pak liché (1, 3, 2, 4). Obojích je stejně mnoho $\frac{1}{2}n!$.

2. Determinant n-tého stupně je vytvořen z n^2 čísel a_{ik} sestavených ve čtvercovém schematu

$$\begin{matrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, & a_{nn}, \end{matrix}$$

kde v čísle a_{ik} značí prvý index řádek, druhý sloupec. Determinant lze definovati jako součet $n!$ součinů

$$\Sigma \pm a_{1i} a_{2j} a_{3k} \ldots a_{ns}, \tag{1}$$

v němž $i, j, k, \ldots, s$ značí všechny permutace čísel 1, 2, ..., n, a v němž znamení $+$ náleží permutacím sudým, — lichým. Determinant označujeme stručně $| a_{ik} |$ nebo podrobněji dvěma svislými čarami kolem čtvercového schematu:

$$D_n = | a_{ik} | = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{2}$$

Determinant třetího stupně má tedy hodnotu:

$$D_3 = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} + \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \tag{3}$$

Zavedeme-li symbol $\varepsilon^{ijk\ldots s}$, který se rovná $+1$ pro sudé permutace čísel $1, 2, \ldots, n$, -1 pro permutace liché a 0, jsou-li aspoň dva indexy stejné, lze psáti determinant

$$D_n = \Sigma \varepsilon^{ijk\ldots s} a_{1i} a_{2j} \ldots a_{ns}, \tag{4}$$

nebo podle úmluvy o stejných indexech jednodušeji

$$\begin{aligned} D_n &= \varepsilon^{ijk\ldots s} a_{1i} a_{2j} \ldots a_{ns} \\ &= \varepsilon^{ijk\ldots s} a_{i1} a_{j2} \ldots a_{sn} \\ &= \frac{1}{n!} \varepsilon^{ijk\ldots s} \varepsilon^{\alpha\beta\ldots\sigma} a_{i\alpha} a_{j\beta} \ldots a_{s\sigma}. \end{aligned} \tag{4$_1$}$$

Z vlastnosti symbolu ε plyne, že determinant, jehož dva řádky nebo sloupce jsou shodné, má hodnotu nulovou.

3. Minor A_{ik} prvku a_{ik} v determinantu D_n je determinant, který vznikne z D_n vynecháním i-tého řádku a k-tého sloupce, opatřený znaménkem $(-1)^{i+k}$. Je tedy stupně $(n-1)$. Vytkneme-li na př. v D_3 prvky jednoho řádku, máme

$$D_3 = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + \\ + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}),$$

jinak

$$D_3 = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}. \tag{5}$$

Totéž platí o determinantech stupně n-tého:

$$D_n = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}. \tag{6}$$

Protože determinant se dvěma stejnými řádky (sloupci) jest nulou, jest pro $i \neq k$ $(p \neq q)$

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \ldots + a_{in}A_{kn} = 0 = \sum_i a_{ip}A_{iq}. \tag{7}$$

4. Znásobíme-li prvky libovolného sloupce (řádku) týmž číslem ϱ, vznikne determinant o hodnotě ϱD_n, neboť

$$\varrho a_{i1}A_{i1} + \varrho a_{i2}A_{i2} + \ldots + \varrho a_{in}A_{in} = \varrho D_n. \tag{8}$$

5. Přičteme-li v determinantu k prvkům jednoho sloupce (řádku) prvky ostatních sloupců (řádků) násobené vždy stejnými čísly $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$, nezmění se hodnota determinantu D_n, neboť

$\varrho_1 = 1$

$$\begin{vmatrix} a_{11} + \varrho_2 a_{12} + \cdots + \varrho_n a_{1n}, a_{12}, \ldots, a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_i (a_{i1} + \varrho_2 a_{i2} + \ldots) A_{i1} =$$

$$= \sum_i a_{i1} A_{i1} + \varrho_2 \sum_i a_{i2} A_{i1} + \ldots + \varrho_n \sum_i a_{in} A_{i1} = \sum_i a_{i1} A_{i1} = D_n,$$

neboť všechny ostatní členy jsou nuly podle (7).

6. Jsou-li prvky k-tého sloupce (řádku) součty m sčítanců, tedy

$$\begin{gathered} a_{1k} = b_{1k} + c_{1k} + \ldots + m_{1k} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{nk} = b_{nk} + c_{nk} + \ldots + m_{nk}, \end{gathered}$$

jest determinant

$$D_n = \sum_i a_{ik} A_{ik} + \sum_i b_{ik} A_{ik} + \ldots + \sum_i m_{ik} A_{ik},$$

neboli rovná se součtu m determinantů, které dostaneme z daného, nahradíme-li sloupec k-tý postupně jednoduchými sloupci $b, c, \ldots, m$. Na př.:

$$\begin{vmatrix} b_{11} + c_{11}, & a_{12} \\ b_{21} + c_{21}, & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11}, & a_{12} \\ b_{21}, & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{11}, & a_{12} \\ c_{21}, & a_{22} \end{vmatrix}.$$

7. Násobení determinantů téhož stupně provádí se podle vzorce

$$|a_{ik}| \cdot |b_{ik}| = |c_{ik}|,$$

kde

$$c_{ik} = a_{i1} b_{k1} + a_{i2} b_{k2} + \ldots + a_{in} b_{kn} = \sum_r a_{ir} b_{kr}, \qquad (9)$$

nebo také

$$|a_{ik}| \cdot |b_{ik}| = |d_{ik}|,$$

kde

$$d_{ik} = \sum_r a_{ir} b_{rk}. \qquad (10)$$

Každý sloupec determinantu $| c_{ik} |$ se skládá totiž z n částečných sloupců, takže se celý determinant rovná součtu n^n determinantů tvaru

$$\varDelta_k = \begin{vmatrix} a_{1k_1}b_{1k_1}, \ldots, a_{1k_n}b_{nk_n} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{nk_1}b_{nk_1}, \ldots, a_{nk_n}b_{nk_n} \end{vmatrix} = b_{1k_1}b_{2k_2}\ldots b_{nk_n} \begin{vmatrix} a_{1k_1}, \ldots, a_{1k_n} \\ \vdots \qquad \vdots \\ a_{nk_1}, \ldots, a_{nk_n} \end{vmatrix}.$$

Skupiny $k_1, \ldots, k_n$ jsou variace čísel $1, 2, \ldots, n$ s opakováním, a jest jich n^n. Jsou-li všechna k ve variaci různá, je to permutace, a příslušný determinant označíme $\varDelta_k^p$. Značíme-li $A = | a_{ik} |$, jest

$$\varDelta_k^p = \varepsilon^{k_1k_2\ldots k_n} b_{1k_1}b_{2k_2} \ldots b_{nk_n}A,$$

takže součet těchto determinantů dává podle (4)

$$\Sigma\varDelta_k^p = B \,.\, A = A \,.\, B.$$

Determinanty $\varDelta_k^v$, kde aspoň dvě k jsou stejná, jsou rovny nule, protože jejich determinant $|a_{1k_1} \ldots a_{1k_n}|$ má aspoň dva sloupce stejné. Je tedy opravdu

$$C = A \,.\, B.$$

8. Determinant sestavený z minorů A_{ik} prvků a_{ik} determinantu D slove determinant **sdružený** $\varDelta$. Násobením obou dostáváme

$$D \,.\, \varDelta = | B_{ik} |,$$

kde

$$B_{ik} = \sum_j a_{ij}A_{kj},$$

avšak podle (7) je $B_{ik} = 0$ pro $i \neq k$, kdežto pro $i = k$ máme $B_{ii} = D$. Proto jest

$$D \,.\, \varDelta = D^n, \ \varDelta = D^{n-1}. \tag{11}$$

9. Budiž $\alpha = | \alpha_k^i |$ determinant n-tého stupně a definujme podle (44) prvky $\beta_i^k = A_k^i : \alpha$, kde A_k^i jsou minory prvků α_k^i

v determinantu α. Pak je podle (11)

$$\beta = | \beta_i^k | = \frac{1}{\alpha^n} \, | A_k^i | = \frac{\alpha^{n-1}}{\alpha^n} = \frac{1}{\alpha},$$

neboli

$$\alpha\beta = 1. \tag{12}$$

10. Řešení lineárních rovnic determinanty zakládá se na větách (6, 7). Mějme n rovnic lineárních o n neznámých x_i:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i \;\; (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Násobíme-li prvou rovnici minorem A_{1k}, druhou A_{2k}, atd. a vzniklé rovnice sečteme, obdržíme podle (6, 7)

$$x_k \,.\, D_n = D'_k,$$

kdež D'_k značí determinant D_n, v němž k-tý sloupec je nahrazen sloupcem čísel b na pravé straně. Odtud máme pro neznámé

$$x_k = D'_k : D_n. \tag{13}$$

OBSAH.

Spisovatel	*PhDr Vladimír Ryšavý:*
Název díla	*VEKTORY A TENSORY (Elementární úvod)*
Vydala	*Jednota českých matematiků a fysiků*
roku	*1943*
Vytiskla	*knihtiskárna Prometheus v Praze*
Komisionář	*nakladatelství Prometheus v Praze*
Vydání	*I.*
Cena	*K 24,—*