# Aritmetické hry a zábavy

# Aritmetické hry a zábavy

PH. DR. KAREL ČUPR

Jč
m+f

CESTA K VĚDĚNÍ SV. 21

CESTA K VĚDĚI

*Prof. Dr. Karel Čupr:*

# ARITMETICKÉ H A ZÁBAVY

Společenské hry a zábavy, které v různých dobách zajímaly veřejnost, slovní úlohy, hádanky a paradoxa, které nacházíme v zábavných přílohách časopisů, mají svůj podklad v matematických větách anebo jejich řešení spočívá na matematických metodách. Autor uspořádal tyto hry a úlohy, pokud spočívají na aritmetice, do 14 odstavců podle toho, jakých poznatků nebo principů řešení vyžaduje.

A tak najde tu čtenář uspořádány zajímavé úlohy starší i nové, kterými se mnohdy sám již dříve pobavil, a vnikne v podstatu, na které je jejich řešení založeno. Bezděky tím pozná kus historie matematiky a vnikne do různých odvětví matematických a naučí se jich správně užívat.

JČMF

CESTA K VĚDĚNÍ

PH. DR. KAREL ČUPR

# ARITMETICKÉ HRY A ZÁBAVY

S 5 obrazci

*Vyšlo jako 21. svazek sbírky*
*CESTA K VĚDĚNÍ*
*vydávané Jednotou českých matematiků a fysiků v Praze za redakce*
*Dra R. BRDIČKY, Dra F. VYČICHLA a Dra L. ZACHOVALA*

1942

NÁKLADEM JEDNOTY ČESKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ V PRAZE
TISKEM KNIHTISKÁRNY „PROMETHEUS“ V PRAZE VIII

## ÚVOD.

Obsah i rozsah pojmu matematické zábavy či hry jest dosti nesnadno určiti; to, co dnes nazýváme matematickou zábavou, hrou či hříčkou, bylo by zcela dobře možno nazvati hádankou, pokud jest původu lidového, nebo prostě jen matematickým příkladem, pokud jest původu umělého. Při prvním pojmenování pak nutno klásti důraz na matematický obsah úlohy, při druhém názvu pak se zdůrazňuje zajímavý ráz úlohy vznikající buď neobvyklou její formou nebo jejím poutavým řešením nebo překvapujícím výsledkem. Velmi často jest zajímavá historie úlohy — jinak třebas i úlohy všední — a jejího řešení nebo ohlas doby a místa, v němž vznikla.

V tomto spisku jsou uvedeny některé úlohy tohoto druhu aritmetické, avšak ani toto pojmenování neodlišuje zcela tyto úlohy od četnějších a nesnadnějších úloh zvaných geometrickými zábavami a hrami, jež má autor v plánu vyložiti ve spisku dalším. Čtenář — snad až na dvě tři místa — vystačí úplně s vědomostmi, jež mu poskytuje střední škola; dalšího a podrobnějšího poučení dostane se mu v bohaté literatuře všech řečí. Největší dílo tohoto druhu jsou dvousvazkové W. Ahrense: Mathematische Unterhaltungen und Spiele (původně o jednom díle), vedle menšího dílka téhož autora Mathematische Spiele (Aus Natur und Geisteswelt). Velmi oblíbenou četbou byly třídílné H. Schubertovy Mathematische Mussestunden, jež péčí dr. F. Fittinga vyšly loni v 7. vydání značně a jen k svému prospěchu shrnutém do jednoho svazku; viz též Dörrie: Triumph der Mathematik, dále některé spisy Lietzmannovy, zejména: Lustiges und Merkwürdiges von Zahlen und Formen; z francouzské literatury budiž uvedeno: Lucas: Récréations mathématiques, 4 díly a Fourrey Récréations arithmétiques, 3 díly. S vyššího hlediska o některých úlohách v posledních letech pojednal K. Kowalewski, prof. univ., Drážďany (Dresden).

U nás není dosud soustavnějšího spisu o této věci; některými elementárnějšími úlohami zabývá se Jettmar: Kratochvíle početní a Hercog: Početní a měřické hádanky s některými velmi zajímavými historickými údaji. Nesnadnější úlohy (již svou stylisací) viz Dobrovolného: Dvě stě duševních čtvrthodinek.

V srpnu, 1941.

*K. Čupr.*

# 1.

## DOPLNĚNÍ NAZNAČENÝCH VÝKONŮ.

Znalosti nejjednodušších vlastností celých čísel je třeba při řešení úloh tohoto druhu: *Nahraďte vhodnými číslicemi písmena $A, B, C, D$ v tomto schematě: $AB\,.\,AB = CDDD$.* Zato jest tu třeba více postřehu, důvtipnosti a přesného myšlení.

1. Jedná se vlastně o druhou mocninu dvojciferného čísla, poněvadž žádná druhá mocnina nekončí na 2, 3, 7, 8, jest $D$ nejvýše rovno 0, 1, 4, 5, 6, 9. Žádný čtverec není však tvaru .000 nebo .555 (v posledním případě by dvojciferné číslo musilo končiti 5, druhá mocnina pak 25), proto $D$ jest nejvýše rovno 1, 4, 6, 9. Avšak 6 to nemůže býti, jelikož původní číslo by musilo býti sudé, tedy jeho čtverec by musel býti dělitelný 4 a tomu tak není. Číslicí 1 končí druhé mocniny čísel tvaru $10\nu \pm 1$; jest však $(10\nu \pm 1)^2 - 1$ dělitelno dvaceti, kdežto číslo $.111 - 1$ dvaceti dělitelno není. Právě tak ukážeme, že číslo nemůže končiti 9, dvojciferné číslo by musilo býti tvaru $10\nu \pm 3$ a číslo $(10\nu \pm 3)^2 - 9$ jest dělitelno dvaceti, kdežto $.999 - 9$ jest dělitelno pouze desíti. Jest tedy nejvýše $D = 4$, tedy nutno vyšetřiti čísla: 1444, 2444, 3444, 4444, 5444, 6444, 7444, 8444, 9444. Čtverci pak musí býti i čtvrtiny těchto čísel: 361, 611, 861, 1111, 1361, 1611, 1861, 2111, 2361; jednalo by se tedy o druhou mocninu čísla tvaru $10\nu \pm 1$. Týmž způsobem jako dříve zjistíme, že se nejvýše může jednati o některé z čísel 361, 861, 1361, 1861, 2361, z nichž pouze první jest úplný čtverec $= 19^2$. Jest tedy hledané číslo 38 a jeho čtverec 1444.

2. Řešme ještě tuto úlohu: *Doplňte vhodnými číslicemi toto schema:*

$$
\begin{array}{ccccccl}
A & B & 7 & 7 & C & : \alpha\, 2\, 5 = \beta\, \gamma\, \delta \\
a & b & c & & & \\
\cline{1-4}
D & E & F & 7 & & \\
d & 3 & Z & G & & \\
\cline{1-4}
 & K & L & M & N & \\
 & K & L & M & N & \\
\cline{2-5}
 & & & 0 & & \\
\end{array}
$$

Dělenec musí býti dělitelen 5, proto $C = 5$, dále $N = 5$, $G = 7$; $\delta$ musí býti liché: 1; 3; 5; 7; 9; ale jen $.25 \times 3 = .75$ a $.25 \times 7 = .75$, proto $\delta = 3; 7$. Pak jest $M = 7$, takže $G = 0$, jest tedy $\gamma$ číslo sudé (0 nemůže býti, jelikož by v druhém částečném součinu nemohla býti 3). $f$ jest rovno buď 0 nebo 5; dále všimněme si toho, že $\alpha$ nemůže býti rovno 1 nebo 6; dělitel by byl dělitelen 125, kterýmžto číslem dělenec dělitelen není. Máme nyní toto schema:

$$
\begin{array}{llllll}
A & B & 7 & 7 & 5 & : \alpha\, 2\, 5 = \beta\, \gamma\, {}^{3}_{7} \\
a & b & c & & & \\
\hline
D & E & F & 7 & & \\
d & 3 & Z & 0 & & \\
\hline
 & K & L & 7 & 5 & \\
 & K & l & 7 & 5 & \\
\hline
 & & & 0 & & \\
\end{array}
$$

Provedeme-li nyní násobení čísel 225; 325; 425; 525; 725; 825; 925 čísly 2; 4; 6; 8, zjistíme, že tvaru $d300$ jsou součiny $325 \times 4$, $825 \times 4$, tvaru $d350$ pak součiny $225 \times 6$, $725 \times 6$. Zkusme nyní dělitele 725 a 825: vzhledem k prvnímu částečnému součinu musilo by býti $\alpha = 1$, což odporuje předchozímu tvrzení. Proto jest dělenec roven některému ze součinů $325 \times .4{}^{3}_{7}$ nebo $225 \times .6{}^{3}_{7}$; avšak $\delta$ nemůže býti rovno 3, poněvadž třetí částečný součin jest čtyřciferný. Dělenec jest pěticiferný, proto jest roven některému ze součinu $325 \times 147$, $325 \times 247$, $225 \times 167$, $225 \times 267$, $225 \times 367$, z nichž pouze první má na místě set 7; je tedy hledaný výsledek $47775 : 325 = 147$.

Nejsložitější z těchto úloh jest úloha o „sedmi sedmičkách“, jest to malá detektivní historie, v níž neznáme ani zavražděného (dělence) ani vraha (dělitele) ani důvody zločinu; po zlém činu zůstalo jen několik málo indicií (sedm sedmiček), jak patrno z tohoto schematu:

$$\begin{array}{lll}
 & A\,B\,7\;\;C\,D\,E\,L\,Q\,W\,z : \alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,7\,\varepsilon = \varkappa\,\lambda\,7\,\mu\,\nu & \\
2.\ \text{ř.}\ \ldots\ldots & \underline{a\;b\;\Delta\;c\;d\;e} & \ldots\ldots \times \varkappa \\
3.\ \text{ř.}\ \ldots\ldots & F\,G\,H\,J\,K\,7\;L & \\
4.\ \text{ř.}\ \ldots\ldots & \underline{f\;g\;h\;i\;k\;\Xi\;l} & \ldots\ldots \times \lambda \\
5.\ \text{ř.}\ \ldots\ldots & \quad M\,7\,N\,O\,P\,Q & \\
6.\ \text{ř.}\ \ldots\ldots & \quad \underline{m\;7\;n\;o\;p\;q} & \ldots\ldots \times 7 \\
7.\ \text{ř.}\ \ldots\ldots & \quad R\,S\,T\,U\,\Sigma\,V\,W & \\
8.\ \text{ř.}\ \ldots\ldots & \quad \underline{r\;s\;t\;u\;7\;v\;\nu} & \ldots\ldots \times \mu \\
9.\ \text{ř.}\ \ldots\ldots & \qquad X\,Y\,Z\,x\,y\,z & \\
10.\ \text{ř.}\ \ldots\ldots & \qquad \underline{X\,Y\,Z\,x\,y\,z} & \ldots\ldots \times \nu \\
 & \qquad\quad 0 &
\end{array}$$

Vyšetřování provedeme pomocí dvojího pozorování: Některé předpoklady povedou nás k rozporům v počtu míst té které řádky. Znak $V \overset{=}{\gtrless} \check{r}$ nám bude značiti, že výsledek má stejně nebo více nebo méně míst než dotyčný řádek; jiné předpoklady nám dají výsledky, jež budou v rozporu s předepsaným nebo již vyšetřeným tvarem, což budeme značiti $V \not\equiv \check{r}$; $V \equiv \check{r}$ značí shodu.

a) $\alpha$ musí býti rovno 1, kdyby $\alpha > 1$, byl by sedminásobek dělitele větší než $\check{r}_6$. Dále jest patrno, že $F = f = 1$, $R = r = 1$. Nyní určíme $s$. Dělitel jest nejvýše roven číslu 199979, takže částečný součin nejvýše jest $9 \times 199979 = 1799811$, jest tedy $s \leqq 7$; pod dvěma sedmičkami stojící $S$ jest buď 0 nebo 9; poněvadž ve sloupci pod $S$ a $s$ není ničeho, jest $S = s = 0$. Poněvadž $R = 1$, $S = 0$, jest $M = m + 1$, tedy $m \leqq 8$, takže $\check{r}_6$ jest nejvýše $87nopq$.

b) $\beta < 3$, sice by $13\gamma\delta7\varepsilon \times 7 > \check{r}_6$; může tedy býti $\beta = 0, 1, 2$. Rozhodně jest $\beta \neq 0$, poněvadž ani $109\delta7\varepsilon \times 9 \sim \check{r}_4$. Zkusme nyní $\beta = 1$. Tvrdím, že pak musí býti i $\gamma = 1$, jinak by $7.11\gamma\delta7\varepsilon \not\equiv \check{r}_6$. Číslice $\delta, \varepsilon, \mu$ nyní jest nutno voliti tak, aby součin $11\gamma\delta\varepsilon \times \mu$ byl sedmimístný a tvaru $rstu7vw$; nutně musí býti $\mu = 9$; avšak součin $\delta7\varepsilon.9$ musí míti na třetím místě zprava po vzetí opravy z násobení druhého místa 7, t. j. jednotky ve výrazech $9\delta + 6$, $9\delta + 7$ musí býti 7; to lze jen pro $\delta = 0$ nebo 9. Avšak $11197\varepsilon \times 7 > \check{r}_6$, proto ani $\beta$ ani $\gamma$ není rovno 1, jest tudíž $\beta = 2$; dále $m = 8$ a tudíž i $M = 9$. Dělitel $d$ jest nyní v intervalu:

$$\frac{870000}{7} < d < \frac{879999}{7}$$

a s ohledem na tvar dělitele jest

$$124375 < d < 125674,\ 870625 < \check{r}_6 < 879718.$$

c. Jest tedy $\gamma$ buď rovno 4 nebo 5. Stanovme nejprve $\mu$; $\check{r}_8 = 10tu7vw$, poněvadž $124375 . \mu < \check{r}_8 < 125674\mu$, jest

$$\frac{\check{r}_8}{125674} < u < \frac{\check{r}_8}{124375},$$

takže $\mu = 8$.

d) Trojčlenná nerovnice o $\check{r}_8$ zní $995000 < \check{r}_8 < 1005392$, tedy dle počtu míst v $\check{r}_8$ jest $\gamma = 5$, takže $d = 125\partial 7\varepsilon$, podíl $p = \varkappa\lambda 78\nu$; $d$ jest nyní v intervalu $125070 < d < 125679$. Z poslední nerovnice plyne $\delta = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, avšak jen $125447\varepsilon . 8 \equiv \check{r}_8$, jest tedy $\delta = 4$, a dále $f = 0$, $\mu = 3$. Poněvadž $12547\varepsilon . \lambda$ jest sedmimístné, $\lambda \geqq 8$, poněvadž $12547\varepsilon \times$ $\times\ 7 < \check{r}_4$.

Napišme si nyní posledních 6 řádků dosadíce získané hodnoty:

$$\begin{array}{rrrrrrr}
9 & 7 & N & O & P & Q & \\
8 & 7 & 8 & o & p & q & \\
\hline
1 & 0 & T & U & \Sigma & V & W \\
1 & 0 & 0 & 3 & 7 & v & w \\
\hline
 & & X & Y & Z & x & y & z \\
 & & X & Y & Z & x & y & z \\
\hline
 & & & & & 0 & &
\end{array}$$

Sloupci pod $N$ po úvaze o prvních dvou sloupcích nelze učiniti jinak zadost, než když $N = 9$, $T = 1$, ale pak $X = x = 1$. Poněvadž $2d > 200000$, jest nutně $\nu = 1$, načež plyne $Y = 2$, $Z = 5$, $x = 4$, $y = 7$, $z = \varepsilon$.

Naše detektivní historie blíží se ke konci. Vraha (dělitele $12547\varepsilon$) jsme již téměř dopadli, známe velmi přibližně i motivy vraždy ($\varkappa\lambda 781$, $\lambda = 8, 9$); nejméně víme o oběti (zde jsme jen zjistili, že $z = \varepsilon$), za to k původním indiciím jsme připojili velmi mnoho jiných.

Další postup jen naznačíme. Poněvadž $12547\varepsilon \times 8 > \check{r}_6$, jakmile $\varepsilon \geqq 5$, jest $\varepsilon$ rovno některé z hodnot 0, 1, 2, 3, 4. Tak pro skupinu $vw$ obdržíme 5 hodnot, pro skupinu $opq$ rovněž 5 hodnot; pro skupinu $\Xi 1$ pak dvakráte pět hodnot. Kombinujeme-li první dvě skupiny s jednou skupinou třetí, obdržíme celkem 10 případů, z nichž našemu (již doplněnému) schematu hoví pouze $\varepsilon = 3$, $\lambda = 8$, takže $d = 125473$, $p = \varkappa 8781$, indicie se však na tolik rozmnožily, že z rovnice

$$AB7CDE = 125473\varkappa + ab\Delta cde$$

stanovíme $k = 5$, takže $p = 58781$, načež dělenec jest $58781 \times 125473 = 7375428413$.

**Příklady:** 1. Doplňte správnými číslicemi součet:

$ABCDE + abcde = dadCed$ (96327 + 85104 = 181341).

Pozn.: číslice 5 a 6 lze zaměniti.

```
2.  6.8... : ..9 = .5.
    ...2
   -----
     .9..
     ..4.
    -----
     ...4.
     .....
    -----
        0            (63897 : 749 = 853).
```

3. A nyní jeden velmi „nesnadný“ úkol:

$KOBYLAMALYBOK : KKKKKKK = KKKKKKK$.

(Ihned jest zřejmo, že $K = 1$, dělitel = podíl = 1111111, dělenec $1111111^2$.)

## 2.
## DĚLITELNOST ČÍSEL.

1. Jako vhodný počet obyvatelstva města udává Plato, řecký filosof, ono číslo, jež jest dělitelno 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10; jest to prý číslo 5040: jest to nejmenší číslo žádaných vlastností? Nikoliv, nejmenší číslo jest 2520.

2. Průvod se řadí po 2, 3, ..., 10 osobách a vždy v poslední řadě jedna chybí; kolik jest v průvodě osob, není-li jich více než 3000? Po kolika nejméně osobách jest do jedné řady postaviti, aby řady byly úplné? Užijeme-li výsledku předchozího, jest $2520 - 1 = 2519$ účastníků, jež lze seřaditi do 229 řad po 11 účastnících.

3. Buďtež $m, n$ $(m > n)$ čísla celá kladná, pak $10^m - 10^n$ jest dělitelno devíti. Tento rozdíl lze totiž psáti $10^n(10^{m-n} - 1)$ a výraz v závorce jest dle známé věty dělitelen $10 - 1 = 9$. Proto napíšeme-li na př. trojciferné číslo $N$ a napíšeme-li číslo $\overline{N}$ psané v obráceném sledu, jest rozdíl $N - \overline{N}$, resp. $\overline{N} - N$ dělitelen devíti. To jest základem tohoto obratu: napiš si číslo, napiš číslo s týmiž číslicemi v opačném sledu, odečti menší číslo od většího, vynech v rozdílu kterékoliv číslice vyjma nuly; jaký jest součet zbylých číslic (ciferný součet)? — Udaný součet doplníme do nejbližšího vyššího násobku devíti, doplněk jest vynechaná číslice. Na př. $6784 - 4876 = 1908$, vynechali jsme 1, ciferný součet jest 17, nejbližší násobek 9 jest 18, skutečně $18 - 17 = 1$. — Proč nedovolujeme vynechati 0?

4. Číslo jest dělitelno devíti, je-li jeho ciferný součet dělitelen 9. Tuto větu lze říci poněkud obecněji: Zbytek vzniklý dělením daného čísla devíti jest týž jako zbytek vzniklý dělením ciferného součtu devíti. Důkaz jest velmi jednoduchý: Pěticiferné číslo na př. lze psáti takto:

$$10^4a + 10^3b + 10^2c + 10d + e =$$
$$= (10^4 - 1)\,a + (10^3 - 1)\,b + (10^2 - 1)\,c + (10 - 1)\,d +$$
$$+ a + b + c + d + e.$$

První čtyři sčítance jsou dělitelny dle shora uvedené věty 9, pátý sčítanec jest ciferný součet; odtud správnost poslední věty jest patrna.

5. Buďtež devítkové zbytky dvou daných čísel $m$ a $n$, pak tato čísla jsou tvaru $(9a + m)$, $(9a + n)$, kdež $a$, $b$ jsou čísla celá kladná. Jejich součin jest $9(9ab + bm + an) + mn$ a jeho devítkový zbytek $mn$. Tento výsledek jest základem t. zv. *devítkové zkoušky*. Na př. vypočteme, že $645 \times 384$ jest 247680, devítkový zbytek násobence a násobitele jest 15 a 15 resp. 6 a 6, jejich součin jest 36, devítkový zbytek tohoto součinu jest 9, skutečně týž jako součinu. Ale tuto větu nelze obrátiti. Nelze říci: je-li devítkový zbytek součinu devítkových zbytků násobence a násobitele roven devítkovému zbytku součinu, jest násobení provedeno správně; na př. vypočteme zřejmě nesprávně $645 \times 284 = 333000$, zbytky stanovené vyloženým předpisem souhlasí i při nesprávném výsledku. Lze pouze říci: Nesouhlasí-li zbytky při devítkové zkoušce, jest výpočet nesprávný.

6. Někdy se devítková zkouška kombinuje se zkouškou jedenáctkovou. Pěticiferné číslo lze psáti takto:

$$(10^4 - 1)\,a + (10^3 + 1)\,b + \\ + (10^2 - 1)\,c + (10 + 1)\,d + e - d + c - b + a;$$

tedy jedenáctkový zbytek daného čísla jest roven jedenáctkovému zbytku $e - d + c - b + a$ a zaveďme si pro tento výraz název ne zcela přesný: ciferný rozdíl. Na př. vypočteme $645 \times 384 = 246780$, devítková zkouška souhlasí, jedenáctková však nikoliv, jelikož součin ciferných rozdílů násobence a násobitele jest $7 . (-1)$, kdežto součinu $-5$. Jest tedy výsledek nesprávný. Ale ani tenkráte, vyjdou-li obě zkoušky, není správnost výsledku zaručena, na př. $645 \times 384 = 257580$, zde vycházejí obě zkoušky, ale výsledek jest přece jen nesprávný.

Upotřebitelný výsledek pro praxi jest pouze tento: Nevychází-li jedna ze zkoušek, jest výsledek nesprávný.

Upravte tyto zkoušky i pro jiné výkony početní (sčítání, odčítání, dělení, umocňování čísly celými kladnými).

## 3.

## SOUSTAVY ČÍSELNÉ.

Odedávna všichni národové kulturní užívají při zapisování čísel a počítání s nimi soustavy desítkové (dekadické). Ale nebylo tomu tak vždy a všude; ještě dnes v našem počítání projevuje se orientální soustava šedesátková (dělení úhlů a času). Máme zaručené zprávy o užívání soustavy pětkové i dvacítkové — zřejmě jako desítková — souvisí s počtem prstů na jedné, dvou rukou, případně i nohou. Pět, deset, dvacet lidských prstů jest první počítací stroj člověka.

Německý matematik Leibniz byl na omylu, přičítal-li Číňanům počítání v soustavě dvojkové (binární, dyadické), jež se opírá o tato pravidla: 1. pro číslice jsou jen dva znaky, 2. dvě jednotky řádu nižšího tvoří jednu jednotku řádu vyššího. Pro minimální počet znaků, jež tato soustava potřebuje k vyjádření jakéhokoliv celého čísla, je pro některé problémy velmi výhodná, zejména jedná-li se o čísla poměrně malá. Číslice 0, 1 můžeme nahraditi kterýmikoliv dvěma znaky +, —; □, ○, rub a líc mince, sirky položené hlavičkou dolů i nahoru a libovolné číslo tak znázorniti; to jest pak základem některých kouzelných triků, ovšem hádající musí býti smluven s některým ze společnosti. (Viz též Kowalewski: Alte und neue Spiele, 21—35, Die geheimnisvollen Reste oder der Gedankenleser.)

Rozřešme některé úlohy: 1. Kterému číslu v soustavě desítkové odpovídá v soustavě dvojkové číslo $(10100101)_{II}$? Nejvyšší jednotky jsou řádu 7., tedy $(10100101)_{II} = 1.2^7 + 0.2^6 + 1.2^5 + 0.2^4 + 0.2^3 + 1.2^2 + 0.2 + 1 = 128 + 32 + 4 + 1 = 165$.

2. Vyjádřete v soustavě dvojkové $(1000)_X$. Na nejnižším místě bude zbytek dělení $1000 : 2 = 500$, tedy 0, na dalším místě bude zbytek dělení $500 : 2 = 250$, tedy zase 0, dále $250 : 2 = 125$, tedy 0; $125 : 2 = 62$ se zbytkem 1, $62 : 2 = 31$, zbytek 0, atd. Jest tedy $(1000)_X = (1111101000)_{II}$. Snadno nahlédneme, že kterékoliv číslo v soustavě dvojkové

může býti znázorněno jediným způsobem; tato okolnost ve spojení se skutečností, že dvojkový systém obsahuje pouze dva znaky — 0, 1 — jest základem mnoha vtipných obratů. Uvedeme některé z nich.

3. Přepsati dekadický násobitel do dvojkové soustavy a pak prováděti násobení, jest prastará metoda do střední Evropy přišlá asi z Orientu; i u nás jí bylo užíváno a slula duplace (nejstarší asi pojmenování „dvojení" oproti „rozmnožení" = násobení viz Flajšhans: Claret a jeho družina, díl I, str. 15; Praha 1926). Máme-li tedy provésti násobení $136 \times 19$, pišme $19 = 2^4 + 2 + 1$ a proveďme násobení tak, že násobenec postupně násobíme dvěma a současně dělitel dělíme dvěma (tak ho vlastně převádíme do soustavy dvojkové)

| | | |
|---|---|---|
| 136 × | 19 | (1) |
| 272 | 9 | (1) |
| 544 | 4 | (0) |
| 1088 | 2 | (0) |
| 2176 | 1 | (1) |

a nyní sečteme částečné součiny, u nichž stojí zbytek 1. Jest tedy $136 \times 19 = 2176 + 272 + 136 = 2584$.

4. Napišme všechna čísla od 1 do 40 v soustavě dvojkové; čísla, v nichž jest jako sčítanec zastoupeno $2^0 = 1$, $2^1 = 1$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$, $2^5 = 32$, vepišme postupně do tabulek nadepsaných 1, 2, 4, 8, 16, 32:

| *1* | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 5 | 7 |
| 9 | 11 | 13 | 15 |
| 17 | 19 | 21 | 23 |
| 25 | 27 | 29 | 31 |
| 33 | 35 | 37 | 39 |

| *2* | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 6 | 7 |
| 10 | 11 | 14 | 15 |
| 18 | 19 | 22 | 23 |
| 26 | 27 | 30 | 31 |
| 34 | 38 | | |

| *4* | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 5 | 6 | 7 |
| 12 | 13 | 14 | 15 |
| 20 | 21 | 22 | 23 |
| 28 | 29 | 30 | 31 |
| 36 | 38 | | |

| *8* | | | |
|---|---|---|---|
| 8 | 9 | 10 | 11 |
| 12 | 13 | 14 | 15 |
| 24 | 25 | 26 | 27 |
| 28 | 29 | 30 | 31 |
| 40 | | | |

| *16* | | | |
|---|---|---|---|
| 16 | 17 | 18 | 19 |
| 20 | 21 | 22 | 23 |
| 24 | 25 | 26 | 27 |
| 28 | 29 | 30 | 31 |

| *32* | | | |
|---|---|---|---|
| 32 | 33 | 34 | 35 |
| 36 | 37 | 38 | 39 |
| 40 | | | |

Vyzveme nyní někoho, aby si myslil číslo do 40 a aby označil, v kterých tabulkách jest myšlené číslo: to jest pak rovno součtu čísel nadepsaných jednotlivým tabulkám; proč?

5. Poněvadž každé celé číslo lze napsati jako součet různých mocnin čísla 2, lze každou váhu na př. do 100 g odvážiti pomocí závaží, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 g na př. 89 g = = 64 g + 16 g + 8 g + 1 g. Praxe ovšem používá soustavy 1 g, 2 g, 2 g, 5 g; těmito závažími lze jednoduše uskutečniti všechny váhy 1 g až 10 g, nad to má tato soustava tu výhodu, že součet těchto závaží jest právě jedna jednička vyššího řádu, zde 10 g = 1 dkg. Již Bachet de Méziriac zabýval se otázkou, jak voliti váhu jednotlivých závaží aby při jich nejmenším počtu bylo možno uskutečniti vážení v rozsahu co největším. Zkoušel proto soustavu $3^0 = 1$, $3^1 = 3$, $3^2 = 9$, $3^3 = 27$, $3^4 = 81$, atd., pak ovšem musil připustiti, aby bylo dovoleno klásti závaží i na misku váženého zboží. Stanovme, kolik jest možno napsati čísel pomocí mocnin $3^0, 3^1, 3^2, 3^3, 3^4, \ldots, 3^{n-1}$, spojujeme-li tato čísla znaménkem + i —; značme tento počet $S_n$. Především jsou zde čísla napsaná jedinou mocninou, těch je $n$; dále čísla napsaná dvěma mocninami ve tvaru $3^{n_1} \pm 3^{n_2}$, $n_1 > n_2$, těch jest $2\binom{n}{2}$; čísel tvaru $3^{n_1} \pm 3^{n_2} \pm 3^{n_3}$ $(n_1 > n_2 > n_3)$ jest $2^2\binom{n}{3}$ atd. Tudíž jest

$$S_n = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 2^2\binom{n}{3} + \ldots + 2^{n-1}\binom{n}{n}.$$

Avšak

$$2S_n + 1 = 1 + \binom{n}{1}2 + \binom{n}{2} \cdot 2^2 + \binom{n}{3}2^3 + \ldots + \binom{n}{n}2^n = $$
$$= (1 + 2)^n = 3^n,$$

takže $S_n = \frac{1}{2}(3^n - 1)$. Všimněme si, že největší číslo, kterého docílíme, jest rovněž $1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^{n-1} = \frac{1}{2}(3^n - 1)$. Tvrdím, že uvedenými mocninami lze napsati kterékoliv celé číslo v intervalu $< 1; \frac{1}{2}(3^n - 1) >$; lze-li tak učiniti, jest zřejmo, že lze tak učiniti jediným způsobem. Důkaz provedeme úplnou indukcí. Budiž naše tvrzení správné pro mocniny $1, 3^1, 3^2, 3^3, \ldots, 3^{n-2}$. Přibeřme další mocninu $3^{n-1}$ a uvažujme dvě čísla $3^{n-1} + A$, $3^{n-1} + B$, kdež $A, B$ jsou čísla utvořena mocninami $1, 3, 3^2, 3^3, \ldots, 3^{n-2}$. Kdyby $3^{n-1} + A = 3^{n-1} + B$, musilo by býti $A = B$ — proti předpokladu. Avšak ani žádné z čísel $3^m + a$, kdež $a$ je utvořeno mocninami $1, 3, 3^2, \ldots, 3^{m-1}$ není rovno žádnému z čísel $3^{n-1} - A$ když $m < n - 1$. Neboť *největší* z čísel vytvořených mocninami o základu 3 a mocnitelích, 1, 2, 3, …, $n - 2$ je $\frac{1}{2}(3^{n-1} - 1)$; kdežto *nejmenší* vytvořené mocninou $3^{n-1}$ a nižšími jest: $3^{n-1} - 1 - 3 - 3^2 - \ldots 3^{n-2} = \frac{1}{2}(3^{n-1} - 1)$. Jest tedy rozdíl čísel $3^{n-1} - A$, $3^m + a$, $(m < n - 1)$, roven nebo je větší jedné; jsou tedy čísla $3^{n-1} - A, 3^m + a$, $(m < n - 1)$ vesměs různá. Naše věta pro $n = 1$ jest triviální, pro $n = 2$ jest $S_2 = 4$ a skutečně lze psáti $1;\ 2 = 3 - 1;\ 3;\ 4 = 3 + 1$, věta tedy platí pro $n = 2$, proto platí i pro $n = 3$, platí-li pro $n = 3$, platí i pro 4 atd. Lze tedy všechna čísla v intervalu $< 1; \frac{1}{2}(3^{n-1} - 1) >$ napsati ve tvaru $3^{n-1} \pm 3^{n-2} \pm 3^{n-3} \pm \ldots \pm 3 \pm 1$ a podobně v témž intervalu pomocí závaží $1, 3, 3^2, 3^3, \ldots, 3^{n-1}$ lze realisovati každou váhu, ovšem musí býti dovoleno klásti závaží i na misku váženého zboží.

## 4.
## ZAJÍMAVÁ ČÍSLA A POSLOUPNOSTI.

I při nejjednodušších početních výkonech setkáváme se s výsledky, jichž jednoduchost, nebo souměrnost, nebo podobná sestava překvapuje, na př.

1. $11^2 = 121$, $11^3 = 1331$, $11^4 = 14641$, $12^2 = 144$, $21^2 = 441$, $13^2 = 169$, $31^2 = 961$, $101^2 = 10201$, $102^2 = 10404$, $201^2 = 40401$, $103^2 = 10609$, $301^2 = 90601$, $112^2 = 12544$, $211^2 = 44521$, $113^2 = 12769$, $311^2 = 96721$, $122^2 = 14884$, $221^2 = 48841$.

2. Starověk velmi zajímaly tyto dva vztahy $3^2 + 4^2 = 5^2$, $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$.

3. Ukažte, že součet prvních, druhých a třetích mocnin

čísel 1, 5, 6, 14, 15, 19 jest týž jako součet týchž mocnin čísel 2, 3, 7, 13, 17, 18.

4. Jiné takové výpočty jsou: $4^2 = 16$, $34^2 = 1156$, $334^2 = 111556$, $3334^2 = 11115556$ atd. Číslo $3_{n-1}4$ nechť nám značí číslo, na jehož $n - 1$ prvních místech stojí 3, pak jest

$$3_{n-1}4 = \frac{10^n - 1}{3} + 1 = \frac{10^n + 2}{3},$$

a jeho čtverec:

$$\frac{10^{2n} + 4 \cdot 10^n + 4}{9} = \frac{10^{2n} - 1}{9} + 4\,\frac{10^n - 1}{9} + \\ + \frac{1 + 4 + 4}{9} = 1_{2n} + 4_n + 1.$$

5. Podobně jest $67^2 = 4489$, $667^2 = 444889$ atd. Číslo $6_{n-1}7$ lze psáti $\frac{2}{3}(10^n - 1) + 1 = \frac{2 \cdot 10^n + 1}{3}$ a jeho čtverec

$$\frac{4 \cdot 10^{2n} + 4 \cdot 10^n + 1}{9} = \frac{4(10^{2n} - 1)}{9} + \frac{4(10^n - 1)}{9} + \\ + \frac{1 + 4 + 4}{9} = 4_{2n} + 4_n + 1.$$

6. Velmi zajímavé jest periodické číslo $0,\bar{9}$, užijeme-li známého pravidla pro stanovení hodnoty ryze periodických zlomků, obdržíme $0,\bar{9} = \frac{9}{9} = 1$; podobně $1,\bar{9} = 2$; $0,6 = 0,5\bar{9}$ a pod.; lze tedy každé číslo racionální (t. j. celé nebo lomené) vyjádřiti dvojím způsobem v desítkové soustavě. — Odtud řešení této úlohy: Napiš sto čtyřmi devítkami: Každý po kratší úvaze píše $99\frac{9}{9}$, avšak úlohu: napiš sto třemi devítkami, rozřeší jen ten, jemuž jest známo, že $0,\bar{9} = 1$; tedy $100 = 99,\bar{9}$.

7. Před nedávnou dobou nebylo jediné zábavné hlídky v denním tisku, aby neuveřejnila a nežádala vysvětlení tohoto výpočtu (i reklama se zmocnila tohoto příkladu): Číslo 142857 postupně násobeno 2, 3, 4, 5, 6 dává postupně

čísla: 285714, 428571, 571428, 714285, 857142; tedy čísla psaná týmiž číslicemi jako původní násobenec. Naproti tomu jest sedminásobek daného čísla roven 999999. Vysvětlení jest na snadě: 142857 jest perioda zlomku $\frac{1}{7}$. Všimněme si tohoto naznačeného dělení blíže. Částeční dělenci jsou postupně: 10, 30, 20, 60, 50, 40 a jim odpovídají zbytky 3, 2, 6, 5, 4, 1 při částečných podílech 1, 4, 2, 8, 5, 7 — více částečných podílů není. Provádíme-li dělení $\frac{2}{7} = 2 : 7$, jsou částeční dělenci 20, 60, 50, 40, 10, 30, jim odpovídají zbytky 6, 5, 4, 3, 1, 2 a částečné podíly jsou 2, 8, 5, 7, 1, 4. Podobně tomu jest při $3 : 7 = \frac{3}{7} = \frac{1}{7} \,.\, 3$, atd. Poněvadž lze psáti:

$$\frac{142587}{10^6} + \frac{142587}{10^{12}} + \frac{142587}{10^{18}} + \ldots = 1,\text{*)}$$

jest po násobení sedmi

$$1 = \frac{999999}{10^6} + \frac{999999}{10^{12}} + \frac{999999}{10^{18}} + \ldots = 0{,}\bar{9}.$$

V číselné teorii se dokazuje, že existují prvočísla $p$ taková, že perioda zlomku má právě $p - 1$ míst, na př. taková prvočísla jsou 17, 19:

$$\tfrac{1}{17} = 0{,}\overline{0588235294117647}, \qquad \tfrac{1}{19} = 0{,}\overline{052631578947368421}.$$

Tato čísla násobena 2, ..., 16, resp. 2, ..., 18 dávají výsledky složené z téhož počtu týchž číslic jako čísla základní s nepatrnou změnou v pořadí jako čísla základní. — Jak vypočísti nejrychleji sedmináctinásobek posledně uvedeného čísla? Vypočteme $17 : 19 = 0{,}89\ldots$, hledáme v základním čísle skupinu 89 a píšeme výsledek:

$$0{,}894736842105263157.$$

8. V Rozhledech matematicko-přírodovědeckých, roč. XIII, str. 60, jsou uveřejněna řešení rovnic $\log x = \frac{x}{10}$,

*) Konvergentní řada geometrická o podílu $\frac{1}{10^6}$.

$\log x = \frac{x}{10^2}, \ldots, \log x = \frac{x}{10^n}$, čímž vznikají tyto zajímavé vztahy:

$$\log 1{,}371288574238542 = 0{,}1371288,$$
$$\log 10{,}00000.. = 1{,}000...$$
$$\log 237{,}5812 = 2{,}375812 \text{ atd.}$$

Tamtéž na str. 118 čteme tuto zajímavou posloupnost

$$\begin{aligned}
\sin 0^\circ &= \tfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{4}}, & \sin 60^\circ &= \tfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{1}},\\
\sin 15^\circ &= \tfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}, & \sin 67^\circ 30' &= \tfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}},\\
\sin 22^\circ 30' &= \tfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}, & \sin 75^\circ &= \tfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}},\\
\sin 30^\circ &= \tfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{1}}, & \sin 90^\circ &= \tfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{4}}.\\
\sin 45^\circ &= \tfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{0}},
\end{aligned}$$

9. Napišme čísla celá tak, jak za sebou jdou, vedle sebe; která číslice stojí na miliontém místě?

| | | |
|---|---|---|
| 9 | 1cifer. čísel zaujme | $9 = 10 - 1$ míst, |
| 90 | 2cifer. čísel zaujme | $90 \,.\, 2 = 200 - 20$ míst, |
| 900 | 3cifer. čísel zaujme | $900 \,.\, 3 = 3000 - 300$ míst, |
| 9000 | 4cifer. čísel zaujme | $9000 \,.\, 4 = 40000 - 4000$ míst, |
| 90000 | 5cifer. čísel zaujme | $90000 \,.\, 5 = 500000 - 50000$ míst; |

tedy tato všechna čísla celkem $543210 - 54321 = 438889$ míst, dalších 561111 míst již zaujímají čísla šesticiferná, nutno jich tedy ještě napsati $561111 : 6 = 93518$, zbytek jest 3; 93518té číslo šesticiferné jest $99999 + 93518 = 193517$, další číslo jest 193518, hledaná číslice 3.

## 5.
## ČÍSLA FIBONACCIOVA.

Uvažujme o rovnici $\varrho^2 - \varrho - 1 = 0$, mající kořeny $\varrho_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Především jest $\varrho_1^2 = \varrho_1 + 1$, $\varrho_2^2 = \varrho_2 + 1$; a též, pro číslo $n$ celé kladné, $\varrho_1^{n+3} = \varrho_1^{n+2} + \varrho_1^{n+1}$, $\varrho_2^{n+3} =$

$= \varrho_2^{n+2} + \varrho_2^{n+1}$, a po odečtení $\varrho_1^{n+3} - \varrho_2^{n+3} = (\varrho_1^{n+2} - \varrho_2^{n+2}) + (\varrho_1^{n+1} - \varrho_2^{n+1})$.

Označme $\varrho_1^{n+1} - \varrho_2^{n+1} = A_n$, pak lze psáti: $A_{n+2} = A_{n+1} + A_n$.

Když $n = 0$, jest $A_0 = \varrho_1 - \varrho_2 = \sqrt{5}$; když $n = 1$, jest $A_1 = \varrho_1^2 - \varrho_2^2 = (\varrho_1 - \varrho_2)(\varrho_1 + \varrho_2) = \sqrt{5}$, takže $A_2 = A_1 + A_0 = 2\sqrt{5}$, $A_3 = A_1 + A_2 = 3\sqrt{5}$, ...

Budeme uvažovati o posloupnosti čísel

$$\frac{A_0}{\sqrt{5}}, \frac{A_1}{\sqrt{5}}, \frac{A_2}{\sqrt{5}}, \ldots;$$

značme ji

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n = \frac{\varrho_1^{n+1} - \varrho_2^{n+1}}{\sqrt{5}}. \tag{1}$$

I o členech této posloupnosti platí

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \tag{2}$$

za počátečních podmínek $a_0 = 1$, $a_1 = 1$.

Prvních deset členů této posloupnosti tedy jest

$$1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5;\ 8;\ 13;\ 21;\ 34;\ 55.$$

Tato čísla, jež mají mnoho pěkných a zajímavých vlastností, slují čísly Fibonacciovými dle přízviska Leonarda Pisanského, italského matematika, žijícího ve XIII. století, o jehož úloze vedoucí k těmto číslům se ještě zmíníme.

Jak z předchozího patrno, lze je buď počítati ze vzorce (1), nebo z výtvarného zákona (2); poslední způsob při vyšších indexech jest velmi nepohodlný; upravme si proto vhodně pro veliká $n$ způsob první.

Poněvadž jest $\varrho_2 = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2} = -0{,}618\ldots$, jest $\dfrac{\varrho_2}{\sqrt{5}} = -0{,}277\ldots$, $\dfrac{\varrho_2^2}{\sqrt{5}} = +0{,}171\ldots$, $\dfrac{\varrho_2^3}{\sqrt{5}} = -0{,}108\ldots$, $\dfrac{\varrho_2^4}{\sqrt{5}} =$

$= +\ 0{,}067\ldots,\quad \frac{\varrho_2^5}{\sqrt{5}} = -\,0{,}041\ldots,\quad \frac{\varrho_2^6}{\sqrt{5}} = +\ 0{,}025\ldots,$ atd.

Lze tedy s velmi malou chybou $\varepsilon$ nahraditi číslo $a_n$ číslem $a_n = \frac{\varrho_1^{n+1}}{\sqrt{5}}$, při čemž $-1 < \varepsilon < 0$ pro lichá $n$ a $0 < \varepsilon < 1$ pro sudá $n$. Rostou tedy Fibonacciova čísla pro velká $n$ jako geometrická řada s kvocientem $\frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$. Při praktickém počítání nutno užíti logaritmů sedmi a vícemístných.

Na př. pro $n = 15$ jest $\log \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1) = 0{,}2089785$ a tedy $a_{15} = 987{,}0023$ místo správného $a_{15} = 987$.

1. Nahraďme původní počáteční podmínky jinými kladouce $b_0 = p$, $b_0 = q$; tak obdržíme posloupnost

$$p,\ q,\ p + q,\ p + 2q,\ 2p + 3q,\ \ldots,$$

takže s ohledem na původní posloupnost jest

$$b_n = pa_{n-2} + qa_{n-1}.$$

2. Snadno stanovíme součet prvních $n$ členů Fibonacciových. Jest totiž:

$$s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}(\varrho_1 - \varrho_2 + \varrho_1^2 - \varrho_2^2 + \ldots + \varrho_1^{n+1} - \varrho_2^{n+1}),$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\varrho_1 \frac{\varrho_1^{n+1} - 1}{\varrho_1 - 1} + \varrho_2 \frac{\varrho_2^{n+1} - 1}{\varrho_2 - 1}\right];$$

poněvadž jest

$$\varrho_1(\varrho_1 - 1) = 1,\ \varrho_2(\varrho_2 - 1),\ \varrho_1 = \frac{1}{\varrho_1 - 1},\ \varrho_2 = \frac{1}{\varrho_2 - 1},$$

jest $$s_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varrho_1^{n+3} - \varrho_1^2 - \varrho_2^{n+3} + \varrho_2^2) = a_{n+2} - a_1.$$

3. V městě se objevila epidemická nemoc, která se objeví u postiženého až druhý den, nazítří tohoto dne pacient umírá nakaziv v každém z obou dní další jednu osobu.

a) Kolik nemocných jest během $n$-tého dne?

b) Kolik nemocných zemře koncem $n$-tého dne?

c) Kolik osob zemřelo během těchto $n$ dní?

V $n$-tý den nechť jest nemocno $b_n$ pacientů, jsou to ti, kteří byli nakaženi předevčírem v počtu $b_{n-2}$, dále nakažení dne předchozího v počtu $b_{n-1}$; jest tedy $b_n = b_{n-2} + b_{n-1}$. První den jest $b_0 = 1$ jeden nemocný, druhý den týž a ještě jedna osoba předešlého dne nakažená, tedy $b_1 = 2$. Jedná se tedy o posloupnost 1; 2; 3; 5; 8; ... Jest totožná s posloupností námi uváženou, platí však o ní $b_n = a_{n+1}$. Koncem $n$-tého dne zemřou pacienti nakaziviší se den před tím, jest tedy $c_n = a_{n-1}$; celkový počet mrtvých jest pak

$$d_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-2} = a_n - a_2 \text{ lidí.}$$

Tedy 14. den po vypuknutí choroby jest nemocno $a_{15} = 987$, koncem 14. dne zemře $a_{13} = 377$ lidí a celkový počet úmrtí je $a_{16} - 1 = 986$ lidí.

U Fibonacciho čteme tuto úlohu v tomto znění. Pár králíků vrhne každý měsíc další pár, kolik párů králíků jest koncem roku, nezajde-li žádný z králíků?

4. Z jiných vlastností těchto čísel uveďme, že $N_n = 5a_n^2 + 4(-1)^{n+1}$ jest úplný čtverec. Jest totiž

$$N_n = \frac{5(\varrho_1^{n+1} - \varrho_2^{n+1})^2}{5} + 4(\varrho_1\varrho_2)^{n+1} = (\varrho_1^{n+1} + \varrho_2^{n+1})^2.$$

Avšak čísla $B_0 = \varrho_1 + \varrho_2$, $B_1 = \varrho_1^2 + \varrho_2^2$, $B_2 = \varrho_1^3 + \varrho_2^3, \ldots$ též hoví rovnici $B_n = B_{n-1} + B_{n-2}$, neboť jest:

$$\varrho_1^{n+1} + \varrho_2^{n+1} - \varrho_1^n - \varrho_2^n - \varrho_1^{n+1} - \varrho_2^{n+1} =$$
$$= \varrho_1^{n+1}(\varrho_1^2 - \varrho_1 - 1) + \varrho_2^{n+1}(\varrho_2^2 - \varrho_2 - 1) \equiv 0$$

avšak pro počáteční hodnoty $B_0 = 1$, $B_1 = 3$, takže řada odmocnin jest: 1; 3; 4; 7; 11; 18; 29; ...

5. Dále jest

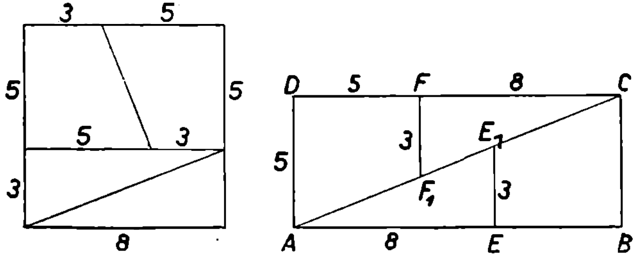
$$a_n a_{n+2} - a^2_{n+1} = (-1)^n.$$

Jest totiž levá strana rovna

$$\frac{(\varrho_1^{n+1} - \varrho_2^{n+1})(\varrho_1^{n+3} - \varrho_2^{n+3}) - (\varrho_1^{n+2} - \varrho_2^{n+2})^2}{5} =$$

$$= \frac{-(\varrho_1\varrho_2)^{n+1}(\varrho_1 - \varrho_2)^2}{5} = (-1)^n.$$

Znázorněme nyní součiny $a_n$, $a_{n+2}$, $a^2{}_{n+1}$ jako obsahy obdélníka a čtverce o stranách $a_n$, $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$, resp. o straně $a_{n+1}$; je-li $n$ dostatečně velké, nepostřehneme, že tyto dvě plochy se různí o jednotku plošné míry. Toho využijeme k vysvětlení této záhady. Rozstřihněme čtverec a složme jej dle přiloženého návodu:




Obr. 1.

V druhém uspořádání se nám zdá, že jsme získali jednu jednotku plošné míry. Avšak nakreslená úhlopříčka není úsečkou; mezi jednotlivými částmi uvnitř obdélníka vznikl protáhlý kosodélník o ploše zadarmo získané 1. Kdyby body $A$, $F_1$, $E_1$, $C$ ležely v jedné přímce, musilo by býti

$\overline{AE} : \overline{EE_1} = \overline{AB} : \overline{BC}$, odkud $\overline{EE_1} = \overline{AE} \,.\, \overline{BC} : \overline{AB} = 3\frac{1}{13}$.

Avšak my jsme volili $\overline{EE_1} = 3$, leží tedy ve skutečnosti bod $E_1$ o $\frac{1}{13}$ pod skutečnou úhlopříčkou; podobně zjistíme, že bod $F_1$ leží nad skutečnou úhlopříčkou. Jaký úhel $\varphi$ svírají strany tohoto kosoúhelníka ve vrcholu $A$? Jest

$\overline{AE_1} = \sqrt{8^2 + 3^2}$, $\overline{AF_1} = \sqrt{5^2 + 2^2}$, takže $\sqrt{73} \,.\, \sqrt{29} \sin \varphi = 1$

a odtud

$$\sin \varrho = \frac{1}{\sqrt{2117}}, \qquad \varphi = 1^\circ\, 14'\, 43''.$$

**Příklady.** 1. Je-li $b_0 = p$, $b_1 = q$, $b_2 = p + q$, $b_3 = p + 2q$, ..., ukažte, že

$$b_n b_{n+2} - b^2_{n+1} = (-1)^n (p^2 + pq - q^2),$$

a že

$$5b_n^2 + 4(-1)^{n+1}(p^2 + pq - q^2)$$

jest úplný čtverec. Odmocniny tvoří opět čísla Fibonacciova o počátečních podmínkách $\bar{b}_0 = -p + 2q$, $\bar{b}_1 = 2\bar{p} + q$.

2. Vysvětlete a propočtěte záhadu vzniklou proměnou čtverce o straně 13 v obdélník o stranách 8 . 21

$$\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{3^2 + 8^2}\sqrt{5^2 + 13^2}}, \qquad \varphi = 28'\, 14''.$$

3. Ukažte, že $u^2_n + u^2_{n+1}$ jest rovněž člen téže Fibonacciho posloupnosti.

4. Stanovte obecný člen posloupnosti, v níž $A_0 = m_0$, $A_1 = m_1$, $A_2 = A_0 A_1$, ..., $A_n = A_{n-1} \cdot A_{n-2}$.

## 6.
## MAGICKÉ ČTVERCE.*)

Snad žádný ze zábavných problémů nemůže se vykázati — až na slovní rovnice — tak bohatou kulturní historií a literaturou jako magické čtverce. Nazýváme tak čtverce o $n$ krát $n$ polích, do nichž jest vepsáno po jednom z čísel 1, 2, 3, ... ..., $n^2$, tak uspořádaných, že součty v řádcích i ve sloupcích i na hlavní a vedlejší úhlopříčce jsou tytéž. Tento součet jest $\frac{1}{2}(1 + n^2) : n$ a sluje konstantou daného čtverce. Magické čtverce jsou nesporně původu orientálního, vznik jejich jest však zahalen neproniknutelnou rouškou — prostě vězí v neúnavné lidské hravosti. Připomeňme aspoň jednu z nejstarších forem magického čtverce. Novoplatonik Theon (2. stol. po Kr.) zpozoroval, že ve čtverci

*) Novější literatura o magických čtvercích: *Fitting*, Jahresbeder d. Mathematikervereinigung, 40, str. 177, 1931; *Schubert-Fitting*, Mathem. Mussestunden, str. 132; *Kowalewski:* Magische Quadrate und mag. Parketierung, Scientia delectans II. 1937; viz téhož autora: Grossen Mathematiker 1939, str. 37/41.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 4 | 5 | 6 |
| 7 | 8 | 9 |

jest číslo 5 aritmetickým středem čísel nalézajících se v témže řádku nebo v témž sloupci nebo úhlopříčce. Jak již název ukazuje, zmocnily se těchto čtvercových schemat t. zv. „tajné vědy“ a namnoze i obyčejná pověra: amulety s magickými čtverci chránily děti před nemocemi, jezdcova koně před úrazem; byly vtesávány do zdí, aby chránily budovy; čtverce, jichž konstanta rovnala se některému datu, přinášely štěstí atd. Ještě v r. 1865 vydává vídeňský lékař F. Liharžik (nar. ve Val. Meziříčí 1813, zemř. 1866) spis: *Das Quadrat die Grundlage aller Proportionalität in der Natur und das Quadrat der Zahl Sieben die Uridee des menschlichen Körperbaues.* I v dějinách magických čtverců opakuje se známý zjev, že zájem o problém rázem utuchá, jakmile jest známo dokonalé řešení. Omezíme se jen na nejdůležitější údaje.

A) Nejjednodušší magický čtverec jest pro $n = 3$, jeho konstanta jest $\frac{1}{2}(1 + 9) \,.\, 3 = 15$. Jeho konstrukce jest velmi jednoduchá: Do prostředního pole druhého řádku napišme 5, do rohových polí čísla 2, 4, 6, 8 tak, aby v úhlopříčkách byl součet 15, a nyní lichými čísly vyplňme prázdná místa tak, aby součet opět byl patnáct. Na př.

| | | |
|---|---|---|
| 6 | 1 | 8 |
| 7 | 5 | 3 |
| 2 | 9 | 4 |

1.

| | | |
|---|---|---|
| $\alpha_1$ | $\alpha_2$ | $\alpha_3$ |
| $\alpha_4$ | $\alpha_5$ | $\alpha_6$ |
| $\alpha_7$ | $\alpha_8$ | $\alpha_9$ |

2.

| | | |
|---|---|---|
| $\alpha^{\alpha_1}$ | $\alpha^{\alpha_2}$ | $\alpha^{\alpha_3}$ |
| $\alpha^{\alpha_4}$ | $\alpha^{\alpha_5}$ | $\alpha^{\alpha_6}$ |
| $\alpha^{\alpha_7}$ | $\alpha^{\alpha_8}$ | $\alpha^{\alpha_9}$ |

3.

Snadno zjistíme, že počet různých čtverců jest 8.

1. Ukažte, že třetí ze schemat shora uvedených má tu vlastnost, že součiny mocnin v témž řádku, sloupci i úhlopříčce jsou tytéž, je-li čtverec 2. magický.

2. Je-li $N$ nejmenší společný násobek čísel $\alpha = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9$, jsou ve čtverci, jehož prvky jsou $N : \alpha$ ve všech směrech čísla v harmonickém poměru.

3. Jsou-li $a, b$ čísla ve dvou sousedních rozích magického čtverce, jest hodnota determinantu daného magickým čtvercem $45\,(a - b)\,(a + b - 10)$.

4. Sestavte magický obdélník ze štítků domina (2,6), (0,1), (1,5); (1,2), (1,4), (1,6); (1,3), (3,6), (1,1).

B) Nejstarší čtverec známý ve střední Evropě jest na A. Dürerově mědirytině z r. 1514 nesoucí název Melencolia (viz Prameny č. 42, 1941, A. Dürer, str. 31). Jest to alegorická postava sedící ženy, obklopené různými předměty symbolisujícími vědy a zaměstnání: koule a mnohostěn značí geometrii, magický čtverec o 16 polích pak aritmetiku, — melencolia — melancholie neznačí zde jednu z letor, nýbrž jest tak pojmenováno úsilovné přemýšlení a bádání. Dürerův čtverec jest tento:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 16 | 3 | 2 | 13 |
| 5 | 10 | 11 | 8 |
| 9 | 6 | 7 | 12 |
| 4 | 15 | 14 | 1 |

Konstanta tohoto čtverce jest $\frac{1}{2}(1 + 16) \,.\, 4 = 34$, prostřední dvě čísla v poslední řádce udávají rok, kdy obraz vznikl.

Jiný magický čtverec o 16 polích vznikne ze schematu

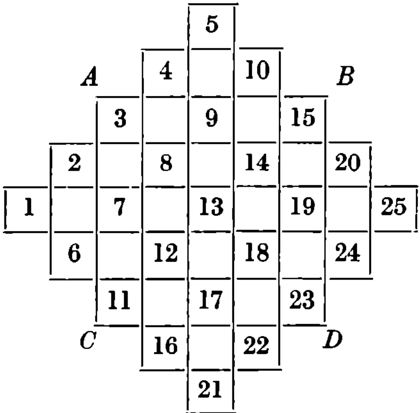
| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | *2* | *3* | 4 |
| *5* | 6 | 7 | *8* |
| *9* | 10 | 11 | *12* |
| 13 | *14* | *15* | 16 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 15 | 14 | 4 |
| 12 | 6 | 7 | 9 |
| 8 | 10 | 11 | 5 |
| 13 | 3 | 2 | 1 |

v němž *ležatá* čísla doplníme do 17.

C) Konstrukcí magických čtverců o lichém počtu polí jest známo několik, vyložíme si metodu pocházející od

Bacheta de Méziriac, zvanou též metodou teras. Volme $n = 5$; napišme toto schema




| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 16 | 9 | 22 | 15 |
| 20 | 8 | 21 | 4 | 2 |
| 7 | 25 | 13 | 1 | 19 |
| 24 | 12 | 5 | 18 | 6 |
| 11 | 4 | 17 | 10 | 23 |

Terasu na $AB$ položme na základnu $CD$, terasu podél strany $BD$ položme na $AC$ atd.

Pokuste se základní schema napsati jinak a odvoditi jiný magický čtverec o 25 polích.

D) Sestrojiti magický čtverec o sudém počtu polí jest nesnadnější; nutno rozeznávati dva případy: $n$ jest buď tvaru $2(2m + 1)$, nebo $4m$ (čísla sudolichá a sudosudá). Konstrukce těchto čtverců opírá se o tyto vlastnosti čtvercového schematu, do jehož polí jsme postupně napsali čísla $1; 2; 3; \ldots; n^2$, tak jak za sebou jdou. Součet členů v $k$-té řádce tvořících řadu aritmetickou (první člen jest $(k - 1)\, n + 1$, rozdíl 1) jest $s_k = kn^2 - \dfrac{n-1}{2}\, n$, podobně jest součet prvků v řádce stejně vzdálené od druhé vodorovné strany čtverce $s_{n-k+1} = (n - k + 1)\, n^2 + \dfrac{(n-1)\, n}{2}$; poněvadž konstantou čtverce jest $C = \dfrac{n(n^2 + 1)}{2}$, lze psáti

$$s_k = C - \frac{n^2(n+1-2k)}{2},\ s_{n-k+1} = C + \frac{n^2(n+1-2k)}{2},$$
$$k < \frac{n}{2}.$$

Značíme-li $P_k$, $P_{n-k+1}$ součty ve sloupci $k$-tém a $n - k + 1$, vypočteme podobně $P_k = C - \frac{n(n+1-2k)}{2}$,

$$P_{n-k+1} = C + \frac{n(n+1-2k)}{2},\ k < \frac{n}{2}.$$

Nedostává se tedy a nadbývá ve sloupcích i řádcích stejně od krajů vzdálených táž veličina; ve vhodné záměně prvků v těchto řádcích a sloupcích spočívá metoda sestrojiti magické čtverce o sudém $n$, kterou vyložíme na dvou zvláštních případech.

a) Budiž $n = 6$. Napišme do čtverce jako dříve čísla 1, 2, 3, ..., 36 a všimněme si, že čísla stojící v obou úhlopříčkách mají součet rovný konstantě čtverce $\frac{1}{2}(1+36) \cdot 6 = 111$. V dalším tato čísla zůstanou již na úhlopříčkách.

$\alpha$) Čísla v obou úhlopříčkách napišme v opačném sledu.

$\beta$) Zaměňme nyní čísla (3; 33); (7; 25); (14; 20): součty ve všech řádcích jsou 111, součty ve sloupcích postupně jsou: 106; 108; 110; 112; 114; 116.

$\gamma$) Zaměňme nyní čísla (2; 5); (9; 10); (13; 18); nyní i součty ve všech sloupcích činí 111 a magický čtverec zní:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 36 | 5 | 33 | 4 | 2 | 31 |
| 25 | 29 | 10 | 9 | 26 | 12 |
| 18 | 20 | 22 | 21 | 17 | 13 |
| 19 | 14 | 16 | 15 | 23 | 24 |
| 7 | 11 | 27 | 28 | 8 | 30 |
| 6 | 32 | 3 | 34 | 35 | 1 |

b) Budiž nyní $n = 8$, tedy číslo sudosudé. Opět vepišme do čtverce čísla 1; 2; 3; ...; 64, konstanta čtverce jest 260. Součty v řádcích jsou: 260 — 224; 260 — 160; 260 — 96; 260 — 32; 260 + 32; 260 + 96; 260 + 160; 260 + 224; součty v řádcích pak: 260 — 28; 260 — 20; 260 — 12; 260 — 4; 260 + 4; 260 + 12; 260 + 20; 260 + 28.

Vyměňme nyní mezi sebou sledy

3; 4; 5; 6 za 62; 61; 60; 59,<br>
11; 12; 13; 14 za 54; 53; 52; 51,<br>
17; 25; 33; 41 za 48; 40; 32; 24,<br>
18; 26; 34; 42 za 47; 39; 31; 23,<br>
59; 60; 61; 62 za 6; 5; 4; 3,

čímž docílíme žádaného čtverce:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 62 | 61 | 50 | 59 | 7 | 8 |
| 9 | 10 | 54 | 53 | 52 | 51 | 15 | 16 |
| 48 | 47 | 19 | 20 | 21 | 22 | 42 | 41 |
| 40 | 39 | 27 | 28 | 29 | 30 | 34 | 33 |
| 32 | 31 | 35 | 36 | 37 | 38 | 26 | 25 |
| 24 | 23 | 43 | 44 | 45 | 46 | 18 | 17 |
| 49 | 50 | 14 | 13 | 12 | 11 | 55 | 56 |
| 57 | 56 | 6 | 5 | 4 | 3 | 63 | 64 |

Rozdělte původní čtverec na 4kráte 4 čtverečků po 4 polích pak jest zřejmo, že jsme zaměnili prvky v 2. a 3. čtverečku za prvky ve 14. a 13. čtverečku, dále jsme zaměnili prvky v 5. a 9. čtverečku s prvky ve čtverečku 12. a 8. Zkuste zaměniti prvky v ostatních polích ponechávajíce právě jmenované čtverečky beze změny!

E) Byly však rozřešeny i obecnější úlohy, na př. sestrojit magický čtverec, jehož část jest opět magickým čtvercem, sestrojiti magické mnohoúhelníky a krychle atd.; viz na př. *Schubert-Fitting*: Mathem. Mussestunden, 1941, str. 153. O sestrojování magických čtverců o sudém počtu polí viz *Aupic*: Magické čtverce, Praha, 1932 (v komisi Jednoty č. matematiků a fysiků).

## 7.
## PLNĚNÍ NÁDOB.

Mějme $N$-litrovou nádobu až po okraj naplněnou vodou a dvě nádoby prázdné o $n_1$ a $n_2$ litrech; kdy jest možno přeléváním vody docíliti množství $\frac{1}{2}N$? Řešení této úlohy (staré přes 500 let a to pro čísla $N = 8$, $n_1 = 5$, $n_2 = 3$) lze provésti dvojím způsobem: Budiž $n_1 > n_2$; buď naplníme nejprve nádobu o $n_1$ litrech a z ní nádobu o $n_2$ litrech, načež obsah této nádoby vlijeme opět do nádoby $n_2$-litrové a opět naplníme nádobu o $n_1$ litrech atd., nebo počneme plniti nádobu o $n_2$ litrech a potom obsah vlijeme do nádoby o $n_1$ litrech. Znovu naplníme nádobu $n_2$-litrovou a pokračujeme způsobem popsaným. Pohodlnější jest způsob první:

| $N$ | $n_1$ | $n_2$ |
|---|---|---|
| $N$ | $0$ | $0$ |
| $N - n_1$ | $n_1$ | $0$ |
| $N - n_1$ | $n_1 - n_2$ | $n_2$ |
| $N - n_1 + n_2$ | $n_1 - n_2$ | $0$ |
| $N - n_1 + n_2$ | $0$ | $n_1 - n_2$ |
| $N - 2n_1 + n_2$ | $n_1$ | $n_1 - n_2$ |
| $N - 2n_1 + n_2$ | $2n_1 - 2n_2$ | $n_2$ |
| $N - 2n_1 + 2n_2$ | $2n_1 - 2n_2$ | $0$ |

A nyní by se pořadí opakovalo; je-li $N - 2n_1 + 2n_2 = 2n_1 - 2n_2$, t. j. $n_1 - n_2 = \frac{1}{4}N$, jest původní množství vody rozpůleno; tak tomu jest při číslech svrchu uvedených: $5 - 3 = \frac{8}{4}$. Je-li však $(N - 2n_1 + 2n_2) : (2n_1 - 2n_2) = 2 : 1$, t. j. $n_1 - n_2 = \frac{1}{6}N$, jest množství rozděleno na $\frac{1}{3}$ a $\frac{2}{3}$; na př. $N = 12$, $n_1 = 6$, $n_2 = 4$, v tomto zvláštním případě lze dokonce docíliti rozdělení na tři stejná množství.

Ukažte, je-li $n_1 - n_2 = \frac{N}{2(\nu + 1)}$, že lze docíliti $\frac{N}{\nu}$ původního množství. Proveďte podobné vyšetřování pro nádoby o objemu $N$, $n_1 > n_2 > n_3$.

## 8.

## NĚKTERÉ OBRATY S KARTAMI.

O jednoduchý matematický výklad opírají se některé obraty s kartami.

1. Přiřkněme jednotlivým kartám (německé hry) určitou hodnotu, na př. spodek znamenej 2, dáma 2, král 3, eso 4, sedmička sedm, osmička osm, devítka devět, desítka deset. Vyzvěme někoho, aby si volil kterékoliv tři karty a nechť v naší nepřítomnosti vycházeje od přiřčené hodnoty kartě odkládá na ni počítaje do šestnácti vždy po jedné kartě (na př. eso musí doplniti 12 kartami. Nechť nám nyní sdělí, kolik karet mu zbylo (případně kolik karet se mu nedostalo), jsme nyní s to, určiti součet ok na volených kartách. Jest to možno na základě této úvahy: Volené karty mějte hodnotu $a_1, a_2, a_3$, k dopočtení do 16 jest třeba celkem $16 - a_1 + 16 - a_2 + 16 - a_3 = 48 - a_1 - a_2 - a_3$ karet, zbylo tedy celkem $32 - 3 - (48 - a_1 - a_2 - a_3) = a_1 + a_2 + a_3 - 19$ karet, zbylo-li tedy $z$ karet, jest $a_1 + a_2 + a_3 - 19 = z$, odkudž součet ok volených karet $a_1 + a_2 + a_3 = 19 + z$. Stejně vypočteme, nedostalo-li se $r$ karet, že platí $a_1 + a_2 + a_3 = 19 - r$.

Upravte podobný obrat pro $2 \times 32$ karty a pro 4 volené karty, dopočítáváme-li rovněž do 16 $(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = z + 4$, při čemž $z \geq 4)$.

2. Složme 27 karet do tří hromádek po devíti; nechť si někdo pamatuje jednu z karet právě skládaných a nechť označí hromádku, v níž karta leží. Složme nyní hromádky k sobě tak, že hromádka obsahující myšlenou kartu přijde doprostřed; opět rozdělme karty do tří hromádek. Osoba znovu označí hromádku, ve které karta leží, načež hromádky složíme týmž způsobem jako prve. A tento postup opakujeme ještě jednou. Myšlená karta jest pak 14. počítána shora nebo zdola. Vysvětlení pak jest toto: Označme karty nacházející se s volenou kartou v téže hromádce +, ostatní —. Pak po prvním kroku jest ve všech hromádkách toto uspořádání: — — — + + + — — —. Po druhém kroku jest v každé hromádce toto rozdělení karet: — + — — + — — + —, a po třetím: — — — — — — — — — v první, + + + + + + + + + v druhé a — — — — — — — — — v třetí hromádce. Snadným rozborem zjistíme, že po prvním složení karet jest myšlená karta s ostatními kartami v původní hromádce na místě 10.—18., po druhém složení karet jest na místě 13.—15. a po třetím složení karet octne se na místě 14. Podobnou úvahou dokažte, dáváme-li hromádku s myšlenou kartou vždy navrch (vždy vespod), že objeví se na místě 7 (21).

Tato hra jest zvláštním případem hry nazvané po francouzském matematikovi Gergonnovi, který odvodil toto pravidlo: Vložíme-li hromádku s myšlenou kartou postupně na místo $a$-té, $b$-té, $c$-té, objeví se myšlená karta po třetím kroku na místě $9a - 3b + c$. — Jak se upraví tato hra, dáme-li hromádku s myšlenou kartou po prvé navrch a po druhé vespod? Při třetím rozložení karet objeví se myšlená karta nahoře, takže osoba sama si na kartu ukáže.

## 9.

## SLOVNÍ ROVNICE.

Nevyčerpatelným zdrojem matematické zábavy všech časů i národů byly, jsou a jistě i budou úlohy, jež vedou na řešení rovnic o jedné nebo více neznámých prvního i vyššího stupně. Úlohám těmto říká se slovní rovnice, my budeme tohoto názvu užívati jen o těch úlohách, jež jsou vysloveny ve formě stručného sdělení o nějaké události neb skutečnosti; na př. úloha stanoviti hloubku rybníka, vyčnívá-li trám zaražený třetinou své délky do dna a ve vodě ponořený polovinou, jeden metr nad vodu, jest slovní rovnice.

Slovní rovnice vznikaly buď ze skutečného pozorování, nebo vhodnou úpravou a rozšířením jeho obsahu; odíti v povídkové roucho příběh a jinou skutečnost jest dávným zvykem blízkého i vzdáleného Orientu.

A) Než přistoupíme k vlastnímu tématu, zmiňme se stručně o matematice věštecké (mathematica divinatoria); tak ještě počátkem XIX. století nazývalo se řešení jednoduchých úloh, jichž výsledek hádající buď snadno uhádl (t. j. snadno vypočetl) nebo dokonce znal výsledek již předem; zhusta se jedná o řešení jednoduchých rovnic nebo jich systému.

1. Výkon, který předepisujeme, nesmí býti příliš jednoduchý, aby uhodnutí nebylo příliš brzo odhaleno, ani příliš složitý, aby hádajícímu nepůsobil nesnází. Na př.: Mysli si číslo, násob je dvěma a odečti 1, tento výkon opakuj ještě dvakráte, kolik ti vyšlo? Oznámí-li pak počítající výsledek $n$, myslil si číslo $\frac{1}{4}(n - 1) - 1$, poněvadž se jedná o řešení rovnice $2(2x + 5) - 5 = n$.

2. Mysli si číslo, násob je číslem o 1 větším, kolik vyšlo? Jest to rovnice $x(x + 1) = n$, hádající musí znáti vhodné rozklady čísla $n$ v činitele.

3. Mysli si dvě čísla, řekni mi jejich součet $s$ a rozdíl $r$. Myšlená čísla jsou $\frac{1}{2}(s + r)$, $\frac{1}{2}(s - r)$; jsou to řešení rovnic $x + y = s$, $x - y = r$.

4. Ze svého roku narození ponech číslo stanovené desítkami a jednotkami, udej mi součet tohoto čísla s řadovým číslem měsíce $s_1$ a součet s řadovým číslem měsíce, v němž

ses narodil $s_2$; posléze řekni mi součet řadového čísla měsíce s řadovým číslem dne tvého narození $s_3$. Proč jest den narození dán výrazem $S - s_1$, měsíc $S - s_2$, desítky a jednotky roku $S - s_3$, kdež $S$ jest poloviční součet čísel $s_1 + s_2 + s_3$?

5. Jindy se volí aritmetický předpis tak, že výsledek jest nezávislý na myšleném čísle, na př. mysli si číslo, násob je 3, přičti 12, násob 4, přičti 4, děl 12 a odečti myšlené číslo; že ti vyšla 1? Ovšem, neboť

$$\frac{(3x + 12)\,4 + 4}{12} = (x + 1) - x = 1.$$

6. Na zcela jiném základě jest vybudována tato hádanka: Napiš si jakékoliv na př. čtyřmístné číslo; napiš si další na př. troj- nejvyše čtyřmístné sčítance, i já si napíši troj- nejvýše čtyřmístné sčítance a jsem s to, říci součet těchto sedmi čísel dříve, nežli napíšeš své tři sčítance. Ukažme postup na konkretním případě. Bylo-li voleno první číslo 4321, tvrdím, že jeho součet s dalšími třemi čísly bude 34318, kteréžto číslo z předchozího vzniklo odečtením 3 od čísla daného a napsáním 3 před tento rozdíl. Dále jest $34318 - 4321 = 29997 = 3 \times 9999$; napíše-li protivník čísla $a_1, a_2, a_3$, stačí, abych napsal čísla $9999 - a_1$, $9999 - a_2$, $9999 - a_3$, což provedu tak, že číslice napsaných tří sčítanců doplňuji do devíti. Na př. ke sčítancům 1268, 8431, 612 píši sčítance 8731, 1568, 9387.

Dále sem patří uhodnutí ok na dvou či třech kostkách, o nichž předpokládáme, že součet ok na protějších stěnách jest 7. Napiš dvouciferné číslo, jehož číslice jsou dány počtem volených ok, obrať nyní kostky a dvojciferné číslo (pozor na pořadí kostek) napiš vpravo vedle prvního. Toto číslo děl jedenácti a odečti sedm, kolik ti vyšlo? Výsledek dělíme devíti, dvojciferné číslo tak vyšlé svými desítkami a jednotkami udává volený počet ok na kostkách. Skutečně jest čtyřciferné číslo $1000a + 100b + 10\,(7 - a) + (7 - b) = 100\,(10a + b) + 77 - (10a + b) = 99\,(10a + b) + 77$ děleno 11 dává $9\,(10a + b) + 7$, odkudž další jest již zřejmo.

Obměňte tento postup pro tři kostky dělíce šesticiferné číslo 111.

7. Mysli si kterékoliv tři číslice, napiš všech šest dvojciferných čísel těmito čísly, který jest jejich součet? Dělíme-li tento součet 22, obdržíme součet myšlených číslic.

B) Slovní rovnice vyskytují se již v nejstarší známé učebnici počtů, jest jí rhindský papyros, chovaný nyní v britickém museu. Jeho autorem jest egyptský písař Ahmes, žijící asi 2000 let př. Kr. Jest to tedy asi současník biblického Abrahama. V této učebnici jsou uloženy počtářské zkušenosti, k nimž Egypťané dospěli při stavbě svých monumentálních budov; známá pyramida Cheopsova byla postavena asi tisíc let před Ahmesem.

1. Prastará čínská hádanka jest tato: Pán vyšel si do bažantnice a ulovil králíky i bažanty, celkem kořist měla dvacet hlav a 50 noh. Kolik bylo bažantů a králíků? Úlohu lze řešiti jednoduchou úvahou: ke každé hlavě patří nejméně dvě nohy, tedy celkem 40, 50 — 40 = 10 zbývajících noh patří králíkům, těch jest tedy 5 a bažantů 15.

2. Z Indie pochází tato úloha: Dívka z natrhaných lotosových květů věnovala bohu Šiva $\frac{1}{3}$, Višnu $\frac{1}{5}$, Slunci $\frac{1}{6}$, Bhavani $\frac{1}{4}$; svému ctihodnému učiteli darovala zbylých 6 květů; kolik utrhla celkem květů? Úloha vede na rovnici

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{5} + \frac{x}{6} + \frac{x}{4} + 6 = x; \quad x = 120.$$

3. Řecký měřič Heron (asi 170—100 př. Kr.) uměl řešiti úlohu o nádržkách, jež doznala četných obměn jak v rouchu tak i obsahu: Do nádržky přitéká voda 4 rourami, z nichž každá naplní sama o sobě nádržku za 1, 2, 3, 4 dny, přitéká-li však voda všemi rourami najednou, kdy bude nádržka naplněna? Je-li krychlový obsah nádržky $V$, přiteče za den jednotlivými rourami $\frac{1}{1}V$, $\frac{1}{2}V$, $\frac{1}{3}V$ $\frac{1}{4}V$ tedy za $x$ dní

$$x\left(\frac{V}{1} + \frac{V}{2} + \frac{V}{3} + \frac{V}{4}\right) = V,$$

odkudž $x = \frac{12}{25} = 0{,}48$ dne, t. j. 11 hod. 31 min. 12 vteřin.

4. Známe však i zajímavou úlohu pocházející od římských právníků z druhého století po Kr. Otec očekávající narození dítěte umírá a stanoví, narodí-li se syn, aby dostal dvakráte tolik jako matka, narodí-li se dcera, aby matka dostala dvakráte tolik jako dcera. Po jeho smrti se však narodí syn i dcera, jak nyní rozdělíme otcovo jmění? (Úloha po právní stránce jest ovšem sporná: Závěť jest v tomto případě neplatná a nastoupí zákonné předpisy; což narodí-li se dva synové, nebo jedno dítě, avšak mrtvé?) Úloha tato se pak řešívá takto: Dostane-li dcera $x$, má matka dostati $2x$, syn $4x$, tedy jest řešiti rovnici $x + 2x + 4x = K$. Má-li se tedy otcovo přání splniti, dostane dcera $\frac{1}{7}K$, matka $\frac{2}{7}K$, syn $\frac{4}{7}K$.

5. Jiná úloha vyplynulá svým obsahem ze středověkých představ, jest tato: Ďábel potká poutníka a slíbí mu, přejde-li poutník tento most, že zdvojnásobí peníze, které právě u sebe bude míti, ale zato poutník přijda do poloviny mostu, musí pro ďábla hoditi 64 penízů do řeky. Když poutník šestkráte most přešel, nezbylo mu ničeho; kolik peněz měl původně u sebe? Měl-li u sebe $x$ penízů, má po jednotlivých přechodech $2x - 64$, $4x - 192$, $8x - 448$, $16x - 960$, $32x - 1984$ a posléze $64x - 4032$, což položeno rovno 0 dává $x = 63$.

V létech 1923-24 americká veřejnost bavila se touto úlohou: Marii jest dvacet čtyři let, při tom je dvakráte tak stará, jako byla Anna, když bylo Marii tolik let, jako jest dnes Anně. Jak jest stará Anna? Napišme si toto schema:

| | Marie | Anna |
|---|---|---|
| dnes | 24 | $x$ |
| tenkráte | $x$ | 12 |

Všichni stárneme stejně, proto $24 - x = x - 12$, odkudž $x = 18$, což jest nynější stáří Annino.

7. Nejstarší úlohy české vedoucí na lineární rovnice zaznamenány jsou v Aritmetice Görla z Görlštejna (1577), jedna z nich zní: Jeden jde z Prahy; tázán kolik hodin bilo na pražském hradě, když vyšel, odpovídá: Kdyby bylo bilo

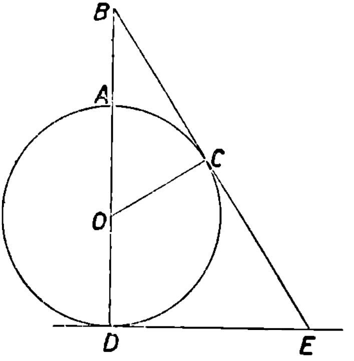
hodin ještě jednou tolik a polovinu tolik a ještě 7 ran k tomu udeřilo, tehdy by bylo 12 hodin (byly 2 hod.). První úlohy tohoto druhu v periodickém našem tisku se objevily v Hýblových Rozmanitostech, vydávaných od r. 1816; uveřejňoval je berounský piarista Kornel Bělecký, tehdy učitel na hlavní škole v Berouně u Prahy. Úlohy v Rozmanitostech nadepsané „Pro lámání hlavy některé algebraické dávky" asi pocházejí od piaristy a profesora fysiky V. Sedláčka v Plzni. Rovněž v Květech vydávaných v létech třicátých minulého století Hostivítem Pospíšilem přicházejí slovní rovnice. Lidové úlohy tohoto druhu viz Bartoš: Naše Děti, 1888, str. 164-165; K. Jar. Erben: Prostonárodní české písně a říkadla, 1864; str. 23.

8. Tato úloha pochází od kněze Václava Šimerky (nar. 1819 ve Vys. Veselí, zemř. 1887 v Praskačce u Hradce Králové), jehož vědecká činnost zejména v číselné teorii dnes již upadla v zapomenutí. Působil na chudé farce v Jenšovicích u Vys. Mýta a z jeho tísně asi vyrostla tato úloha: Ze tří svic, které se na jedné straně oltáře nacházejí a stejně tlusté jsou, má jedna 22, druhá 18, třetí 16 palců délky. Kostelník má z nich vždy dvě spolu nechat stejně dlouho hořeti. Jak musí jimi svítiti, aby mu žádný zbytečný oharek nezůstal? Svíce mohou spolu hořet ve 3 párech: 1. a 2., 2. a 3., 3. a 1.; ukažte, uhoří-li postupně $x$, $y$, $z$ palců, že platí: $12 - x - z = 0$, $14 - x - y = 0$, $16 - y - z = 0$. Sečtením těchto rovnic a dělením dvěma obdržíme $21 - x - y - z = 0$, a postupným odčítáním předchozích tří rovnic $x = 5$, $y = 9$, $z = 7$.

9. První slovní úlohou kvadratickou jest asi úloha, která jest v učebnici Inda Bhaskara Acarya (XII. stol. po Kr.). Počet opic, dělen osmi a umocněn dvěma udává ty, které poskakovaly v háji, zbylých 12 opic zůstalo na pahorku a hašteřilo se; kolik opic bylo ve stádě? Úlohu řeší rovnice

$$\left(\frac{x}{8}\right)^2 + 12 = x, \quad x = 48; \quad 16.$$

10. O sto let později a o půltřetího sta let dříve, než se italští matematici začali soustavně zabývati řešením rovnic třetího stupně, podává Číňan Chin-Chin-Shao tuto hádanku: Obvod města jest kružnice; přesně na sever i jih vedou brány. Jdu-li směrem severním, dorazím ve vzdálenosti 300 stop ode zdi ke stromu, jenž se mi začíná právě ukazovati za zdí, jdu-li jižní bránou 900 m k západu. Jaký jest průměr kružnice vyznačené ohradní zdí? Je-li poloměr kružnice $r$, jest $\overline{OB} = 300 + r$, $\overline{BC} = \sqrt{(r + 300)^2 - r^2}$, $\overline{DE} = 900$, $\overline{BE} = \sqrt{(2r + 300)^2 + 900^2} = \sqrt{300(2r + 300)} + 900$. Tuto rovnici nejpohodlněji rozřešíme takto: Položme $D = 2r - 300$, pak jest $D^2 = 1800\sqrt{300D} + 300D$, značme $D = 300\delta$, po krácení 300 máme: $\delta^2 = 6\sqrt{\delta} + \delta$, čili $\delta^2 - \delta = 6\sqrt{\delta}$; umocníme-li dvěma a krátíme-li $\delta$, jest $\delta^3 - 2\delta^2 + \delta - 36 = 0$. Jediným reálným a kladným kořenem této rovnice jest $\delta = 4$, takže $D = 2r + 300 = 1200$; jest tedy průměr města 900 stop. Všimněme si, že $\overline{BE} = 1500$, jedná se tedy o pravoúhlý trojúhelník 900, 1200, 1500 — tedy vlastně o známý trojúhelník 3, 4, 5.



Obr. 2.

V Pospíšilových Květech (roč. 1837, str. 32), čteme tuto úlohu Běleckého: Sedlka přinesši w létě na trh několik liber másla prodala ge tak, že za každé dvě libry tři slepičky dostala. Slepičky ty na potom nesly vegce. Dostawši od každé tolik wagec, co třetina slípek obnášela, wzala ge (Wegce) wšecky a dawši do košika na trh zanesla, i wšecky šťastně prodala. — Odebrawši za každých dewět wagec tolik kreycarů na stř., kolik wagec každá slepička snesla, udržila za ně tři zl. Wíd. čjsla. Kolik liber másla, kolik slepic měla a kolik wagec prodala ta sedlka? — Označíme-li $x$ počet slepic, snesla každá $\frac{x}{3}$ vajec, každé pak stálo $\frac{x}{27}$ krejcarů stříbrné měny; utržila tedy celkem $\frac{x^3}{81}$ kr. stř. m. čili dle úlohy 3 zl. víd. č., t. j. 3 . 24 = 72 kr. stř. m.; jedná se tudíž o rovnici $\frac{x^3}{81} = 72$, $x = 18$. Bylo tedy másla 12 liber, slepic 18, každá snesla 6 vajec, jedno vejce stálo $\frac{2}{3}$ kr.

12. I ve zmíněné početnici Görlově čteme slovní rovnici tohoto druhu: Panna Maruška má frejíře (ženicha) Janka, zeptá se paní matky, mohla-li by sobě za manžela vzíti. „Má milá Maruško! Jestliže se tobě líbí a ty ho miluješ, a s ním se živit míníš, můžeš ho sobě vzíti. Nejsi tak mladá, neboť kdybys polovinu, čtvrtinu, osminu svých let spolu rozmnožila (znásobila), jest bez šesti let 70.“ Jak jest Maruška stará? (16 let.)

$$\frac{x}{2} \cdot \frac{x}{4} \cdot \frac{x}{8} + 6 = 70.$$

Rovněž prastaré jsou úlohy vedoucí k neurčitým systémům rovnic, t. j. když k řešení úlohy jest dáno méně rovnic, než jest neznámých. Takový systém má ovšem nekonečně mnoho řešení, avšak pro úlohu mívají význam řešení pouze v číslech celých kladných. Zhusta číselné údaje jsou takové, že vedou k jedinému řešení v číslech celých a kladných.

Již Archimedovi se připisuje řešení o volech různé barvy (problema bovinum), ale nelze přesně zjistiti, zda Archimedes se skutečně tímto problémem zabýval a nepochází-li tato úloha až z ranného středověku. Problémy těmito zabýval se Řek Diofantos (žijící kol r. 300 po Kr.). Metod řešících tyto úlohy jest několik; nejznámější pochází od Bacheta de Méziriac (1587—1638); viz Rychlík: Úvod do elementární teorie číselné, 1931, str. 40-41. Velmi často vystačíme s postupem, který vyložíme na této úloze: Mám nádobu šesti- a sedmilitrovou, jakým způsobem načerpám těmito nádobami 50 l? První nádoby užiji $x$-kráte, druhé $y$-kráte, jest tedy řešiti rovnici $6x + 7y = 50$. Připojme rovnici $6x + 6y = 6r$, kdež $r$ jest libovolné číslo celistvé. Odečtením obou rovnic obdržíme $y = 50 - 6r$, takže $x = 7r - 50$. Nyní $x$ i $y$ jsou jen tehdy celá kladná čísla, když $r = 8$, takže $x = 7$, $y = 6$.

13. Z Číny pochází tato úloha: Pán dá sluhovi třicet penízů, aby za ně zakoupil 30 ptáků a to pávy po 3, bažanty po 2 a holuby po 1 penízi. Kolik kterých koupí? Úloha vede k dvěma rovnicím: $x + y + z = 30$, $3x + 2y + \frac{1}{2}z = 30$. Po vyloučení $z$ jest $5x + 3y = 30$, a tato rovnice ve spojení s rovnicí $6x + 3y = 3r$ dává $x = 3r - 30$, $y = 60 - 5r$, $z = 2r$; jen pro $r = 11$ jsou všechna čísla celá kladná: $x = 3$, $y = 5$, $z = 22$.

Tato úloha stala se v pravém slova smyslu mezinárodním tématem, které nalezneme u všech národů a časů. V učebnici Alkuinově (byl to učitel a přítel Karla Velikého) zní takto: Jest rozděliti sto mírek mezi 100 mužů, žen a dětí tak, aby mužové dostali po 3 mírkách, ženy po 2 a děti po půl mírce. V jedné staroněmecké učebnici uvedena jest tato úloha v tomto rouše: Do krčmy přišli zbrojnoši, muži a ženy. Utratili dohromady 20 grošů; kolik bylo kterých, bylo-li dohromady dvacet osob a utratil-li zbrojnoš 5 gr., muž 3 gr. a žena $\frac{1}{2}$ gr.? U Adama Riese (kol r. 1550) sluje tato úloha úlohou společného cechu; poněvadž někdy místo zbrojnošů, mužů a žen uvádějí se muži, ženy a panny, sluje zvláštní metoda pro řešení těchto rovnic metodus virginum (m. panen, též m. potatorum, pijáků, nejčastěji pak m. coeci; doslovně metodou slepého, tápajícího, není však vyloučeno, že slovo coeci vzniklo neporozuměním z der Zeche — účtu). Tato metoda spočívá v tomto obratu: Kdyby všech 20 účastníků byly panny, utratily by celkem $20 \cdot \frac{1}{2}$ gr. $= 10$ gr. Zbývajících tedy $20 - 10 = 10$ gr. připadá tedy na muže a ženy, o nichž nyní předpokládáme, že utratili $4\frac{1}{2}$, resp. $2\frac{1}{2}$ gr.

Tento obrat je vlastně eliminace neznámé $z$ z rovnic $x + y + z = 20$, $5x + 3y + \frac{1}{2}z = 20$; výslednou rovnici $4\frac{1}{2}x + 3\frac{1}{2}y = 20$ je pak nutno řešiti zkusmo.

14. Naznačme řešení ještě jiné úlohy: Kolikerým způsobem lze vyplatiti 5 K pomocí mincí 1 K, 50 hal. a 25 hal.? Zde však přicházejí v úvahu i nulové hodnoty pro neznámé. Příslušná rovnice zní $25x + 50y + 100z = 500$ a po krácení $x + 2y + 4z = 20$. Položme

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x = 0$, | pak | $y + 2z = 10$ | podává | 6 řešení, |
| $x = 2$, | „ | $y + 2z = 9$ | „ | 5 „ |
| $x = 4$, | „ | $y + 2z = 8$ | „ | 5 „ |
| $x = 6$, | „ | $y + 2z = 7$ | „ | 4 „ |
| $x = 8$, | „ | $y + 2z = 6$ | „ | 4 „ |
| $x = 10$, | „ | $y + 2z = 5$ | „ | 3 „ |
| $x = 12$, | „ | $y + 2z = 4$ | „ | 3 „ |
| $x = 14$, | „ | $y + 2z = 3$ | „ | 2 „ |
| $x = 16$, | „ | $y + 2z = 2$ | „ | 2 „ |
| $x = 18$, | „ | $y + 2z = 1$ | „ | 1 „ |
| $x = 20$, | „ | $y + 2z = 0$ | „ | 1 „ |

tedy celkem 36 řešení.

15. Jiná úloha tohoto druhu jest: Kolikerým způsobem pomocí známek 20hal., 30hal., 40hal., 60hal., lze získati frankaturu 1 K 20 hal.?

Jsou však neurčité rovnice i stupňů vyšších; omezíme se jen na rovnice kvadratické. Již v nejstarších dobách budil pozornost pravoúhlý trojúhelník o stranách 3, 4, 5, podávaje tak řešení rovnice $x^2 + y^2 = z^2$. Číňané půltřetího tisíce let př. Kr. znali jiné řešení této rovnice, jak vidno z této úlohy: Přesně uprostřed čtvercové nádržky o straně 10 stop trčí rákosový prut jednu stopu nad vodou. Skloní-li se prut přesně k půlícímu bodu kterékoliv strany, ponoří se právě pod vodu; jak jest nádržka hluboká? Je-li hloubka $x$, platí $(x + 1)^2 = x^2 + 25$, odkudž $x = 12$. Tak jsme došli k pravoúhlému trojúhelníku 5, 12, 13. Existuje více pravoúhlých trojúhelníků, jichž strany jsou dány celými čísly? Těchto trojúhelníků (zvaných pythagorejskými, nebo též racionálnými) jest nekonečně mnoho a sestrojíme je takto: Volme si dvě celá kladná čísla $m > n$, pak trojúhelník o odvěsnách $a = 2mn$, $b = m^2 - n^2$, má za přeponu $m^2 + n^2$. Na př. onen čínský trojúhelník obdržíme kladouce $m = 3$, $n = 2$. Snadno se ukáže, že pythagorejské trojúhelníky mají obsahy, poloměry kružnic opsané, vepsané i připsané vyjádřeny čísly racionálnými, t. j. buď čísly celými, nebo čísly, která jsou podílem číslem celých. I tangenty polovičních ostrých úhlů jsou vyjádřeny čísly racionálnými:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{m-n}{m+n}, \quad \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{n}{m}.$$

16. Již Heron znal kosoúhlé trojúhelníky, jichž obsahy, poloměry jmenovaných kružnic i tangenty polovičních úhlů jsou vyjádřeny čísly racionálnými. Takové trojúhelníky slují Heronovy, jejich konstrukce jest snadná. Volme 4 celá kladná čísla $m, n, m_1, n_1$ tak, aby $mn = m_1n_1$, a sestrojme z nich dva pravoúhlé trojúhelníky, které zřejmě mají jednu odvěsnu stejnou. Přiložme je touto odvěsnou k sobě tak, aby vznikl trojúhelník o stranách $a = m^2 + n^2$, $b = m_1^2 + n_1^2$, $c = m^2 - n^2 + m_1^2 - n_1^2$; to je žádaný trojúhelník. Jeho racionálné vlastnosti se dokáží snadno.

Ukažte, že $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{mm_1 - nn_1}{mn_1 + nm_1}$, a obsah trojúhelníka $(mm_1 - nn_1)(mn_1 + m_1n)$.

Odvoďte podobné vzorce skládajíce dva pythagorejské trojúhelníky, o nichž platí $m^2 - n^2 = m_1^2 - n_1^2$.

Avšak pythagorejské trojúhelníky, nebo též čísla pythagorejská, daly podnět ještě k jiným úvahám: Když existují celá kladná čísla $x, y, z$, o nichž platí $x^2 + y^2 = z^2$, existují též celá kladná čísla (jiná než předchozí), o nichž by platilo $x^3 + y^3 = z^3$ nebo $x^4 + y^4 = z^4$ nebo obecně $x^n + y^n = z^n$, kdež $n$ jest číslo celé kladné? A to jest ona slavná úloha Fermatova, o níž Fermat (1601—1665) vyslovil bez důkazu větu, že nelze udati tři celá kladná čísla, o nichž by platilo

$x^n + y^n = z^n$, jakmile $n > 2$. Důkaz tohoto tvrzení,*) zvaného též velká nebo poslední věta Fermatova, posud podán nebyl.

Řešte pomocí Fibonacciových čísel rovnici $5x^2 + 4 = y^2$ čísly celými a kladnými.

## 10.
## ÚLOHY Z FORONOMIE.

Jak oblíbenými tak i často velmi nesnadnými jsou úlohy z foronomie, t. j. z nauky o pohybu, které lze v podstatě redukovati na dvě základní úlohy.

A) Dvě tělesa vzdálena od sebe $d$ pohybují se po přímce proti sobě rychlostmi $c_1$ a $c_2$ v jednotce času; kdy se potkají? To se stane za $x$ jednotek, první těleso urazí dráhu $c_1x$, druhé $c_2x$, platí tedy rovnice $c_1x + c_2x = d$, odkud $x = \dfrac{d}{c_1 + c_2}$.

B) Dvě tělesa vzdálená od sebe o $d$ pohybují se po přímce za sebou rychlostmi $c_1$ a $c_2$ v jednotce času. Kdy těleso, jehož rychlost na př. $c_1$ jest větší, dožene těleso druhé? Stane se tak za $x$ jednotek času: první těleso urazí dráhu $c_1x$, druhé $c_2x$; úloha vede na rovnici $c_1x - c_2x = d$, odkud $x = \dfrac{d}{c_1 - c_2}$.

a) Z nádraží na letovisko jest 12 km; pro rodinu přijede auto, jež není s to najednou odvésti rodinu a její zavazadla. Otec se synem jdou pěšky; až auto s ostatními dojedou na letovisko, vrátí se pro otce a syna. Kdy bude opět rodina pohromadě, jede-li auto 30 km za hodinu, jde-li otec se synem 4 km za hodinu a zdrží-li se auto na letovisku 6 minut? Aby ujelo auto 12 km, potřebuje $\frac{12}{30}$ hodiny = 24 min.; otec jde se synem celkem 24 + 6 minut = 30 minut pěšky, za tuto

*) Viz Rychlík, l. c. str. 93 a n.; zde budiž jen podotčeno, že věta platí pro prvočísla < 307 a pro čísla složená z prvočísel < 307; připojíme-li podmínku, že žádné z čísel $x$, $y$, $z$ není dělitelno $n$, platí pro prvočísla $n < 14000$ a čísla z nich složená.

dobu urazí 2 km. Vzdálenost mezi nimi a vyjíždějícím autem nyní jest 10 km, takže platí $x(30 + 4) = 10$, odkudž $x = \frac{10}{34}$ hod., což jest asi 18 minut. Auto a pěší setkají se za 18 minut a tolikéž potřebují k dosažení letoviska. Tedy za $30 + 18 + 18 = 66$ minut jest opět rodina pohromadě.

b) Dva přátelé jdou za sebou ve vzdálenosti $D$ rychlostí $c_1$. Od prvního vyběhne pes rychlostí $c_2 > c_1$, dostihne druhého chodce a vrátí se k prvnímu. Ušel-li každý z chodců $d$ m, jakou dráhu proběhne pes? Než doběhne pes druhého chodce, spotřebuje čas $\frac{D}{c_2 - c_1}$, než se vrátí k prvnímu spotřebuje čas $\frac{D}{c_2 + c_1}$, tedy celkem $\frac{D}{c_2 - c_1} + \frac{D}{c_2 + c_1}$. Za tu dobu chodci ujdou dráhu $\left(\frac{D}{c_2 + c_1} + \frac{D}{c_2 - c_1}\right) c_1 = d$ a pes uběhne dráhu $\left(\frac{D}{c_2 + c_1} + \frac{D}{c_2 - c_1}\right) c_2 = x$, a dělením obou rovnic $\frac{c_1}{c_2} = \frac{d}{x}$, odkudž $x = \frac{dc_2}{c_1}$.

c) Tato úloha — v jednodušším znění — vyskytá se již u Alkuina, učitele a přítele Karla Velikého. Zajíc uskočil před psem 50 skoků; kolik zajíc ještě uskočí skoků, než ho pes dostihne, je-li 9 skoků zaječích na délku rovno 7 skokům psím, a učiní-li zajíc v téže době šest skoků jako pes pět? Za jednotku času volme dobu, kterou zajíc spotřebuje k jednomu skoku, jest tedy rychlost zajíc 1, rychlost psa pak jest $\frac{9}{7} : \frac{6}{5} = \frac{15}{14}$; značí-li $x$ počet námi zvolených časových jednotek, jest $x(\frac{15}{14} - 1) = 50$. Z této rovnice plyne $x = 700$ zaječích skoků.

d) Jel jsem do města autem rychlostí 30 km za hodinu a zpět rychlostí 20 km, jaká jest průměrná rychlost? Nesprávné by bylo počítati rychlost $(30 + 20) : 2 = 25$; nutno postupovati takto: Je-li vzdálenost obou míst $d$, jest čas potřebný pro první jízdu $\frac{1}{20}d$ a pro jízdu $\frac{1}{30}d$, tedy průměrná rychlost

$$2d : \left(\frac{d}{20} + \frac{d}{30}\right) = \frac{2 \,.\, 20 \,.\, 30}{20 + 30} = 24 \text{ km},$$

což jest harmonický střed obou rychlostí.

e) Z dvou míst A a B současně proti sobě vyjdou dva chodci jdoucí různými rychlostmi; setkají se $d_1 = 10$ m před A. První osoba dojde do B, druhá do A a obě zachovávajíce své původní rychlosti vrací se do svých východišť, při čemž se potkají ve vzdálenosti $d_2 = 12$ před B; jaká jest vzdálenost B od A? Označíme-li ji $D$ a rychlosti obou chodců $c_1$ a $c_2$, jest jednak

$$\frac{10}{c_1} = \frac{D - 10}{c_2},$$

a dále

$$\frac{D - 10}{c_1} + \frac{12}{c_1} = \frac{10}{c_2} + \frac{D - 12}{c_2},$$

čili:

$$\frac{D + 2}{c_1} = \frac{D - 2}{c_2}$$

dělíme-li nyní rovnici rovnicí třetí, obdržíme

$$\frac{10}{D + 2} = \frac{D - 10}{D - 2},$$

odkud $D = 18$. — Ukažte, že obecně platí $D = 3d_1 - d_2$.

f) Běží-li běžec A trať $d = 500$ m dlouhou a zůstane-li běžec B za ním o $d_1 = 7$, a běží-li podobně běžec B a C tutéž trať, při čemž běžec C zůstane o $d_2 = 8$ m za B, oč asi zůstane při běhu po téže trati běžec C za běžcem A? Jsou-li rychlosti běžců $c_1$, $c_2$, $c_3$, platí rovnice:

$$\frac{500}{c_1} = \frac{500 - 8}{c_2}, \quad \frac{500}{c_2} = \frac{500 - 7}{c_3}, \quad \frac{500 - x}{c_3} = \frac{500}{c_1},$$

znásobením těchto rovnic jest

$$500 \,.\, 500\,(500 - x) = 492 \,.\, 493 \,.\, 500$$

a odtud $x = 14{,}39$ m a nikoliv, jak by se při zběžné úvaze zdálo $7 + 8 = 15$ m.

Ukažte, že v případě $n$ běžců s rozdíly v dráze $d_{1,2}$, $d_{2,3}$, $d_{3,4}$, ..., $d_{n,n-1}$ zůstane $n$-tý běžec při společném závodu s prvním běžcem zpět o

$$d_{1,n} = d\left[1 - \left(1 - \frac{d_{1,2}}{d}\right)\left(1 - \frac{d_{2,3}}{d}\right)\cdots\left(1 - \frac{d_{n-1,n}}{d}\right)\right].$$

g) Před nedávnou dobou prošla snad všemi hádankářskými besídkami úloha, kterou budeme řešiti hned v obecných číslech. Dva přátelé mají se dostaviti na místo vzdálené $D$ m. První sedne na kolo a rychlostí $v_1$ projede $d$ m. Druhý jde pěšky. Když první projede dráhu $d$ m, sestoupí s kola, uloží je vedle silnice a jde nyní $d$ m pěšky rychlostí $v_2$ m; až druhý dojde k odloženému kolu, vsedne na ně a jede rychlostí $v_1$ m vzdálenost $d$ m, načež je odloží a jde pěšky $d$ m. A tak tento postup oba opakují, až stihnou cíle; kdy se tak stane? 1. V čase $\frac{d_1}{v_1}$ ujede první $d$ a druhý ujde $\frac{d}{v_1}v_2$; 2. nyní jdou oba pěšky a to tak dlouho, dokud nedojde druhý ke kolu, musí tedy ujíti $d - \frac{dv_2}{v_1} = d\left(1 - \frac{v_2}{v_1}\right)$ a tuto dráhu urazí za čas $d\left(1 - \frac{v_2}{v_1}\right) : v_2 = d\left(\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1}\right)$; 3. první jde ještě pěšky, druhý jede vzdálenost $d$ na kole, potřebuje k tomu čas $\frac{d}{v_2}$. První urazil celkem $d + d\left(\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1}\right)v_2 + \frac{d}{v_1}v_2 = 2d$, druhý urazil rovněž $2d$; snadno vypočteme, že oba spotřebovali tentýž čas

$$\frac{d}{v_1} + d\left(\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1}\right) + \frac{d}{v_1} = d\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right);$$

jest tedy průměrná rychlost

$$2d : d\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right) = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2}.$$

Je-li $D : d$ číslo celé, dosáhnou cíle za

$$D : \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2} = \frac{D}{2}\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right) \text{ minut;}$$

není-li $D : d$ číslo celé, jest nutno výpočet poněkud upraviti.

Sem patří i četné úlohy o pohybu hodinových ručiček.

h) Jest právě 8 hodin, kdy budou ručičky tvořiti přímý úhel? Minutová ručička se pohybuje rychlostí $\frac{360°}{60} =$ $= 6$ stupňů za minutu, hodinová pak se pohybuje rychlostí dvanáctkráte menší, t. j. $\frac{6°}{12} = \frac{1°}{2}$. V 8 hodin jsou obě ručičky od sebe vzdáleny o 240°, přímý úhel budou tvořiti za $x$ minut. Ukazují-li hodiny 12 hodin, ukazují *polohu základní*; od této polohy bude hodinová ručička vzdálena 240°, minutová o $6x$; dle úlohy má býti $(240 + \frac{1}{2}x) - 6x = 180$, tedy $x = 10\frac{10}{11}$ minut.

Řešte úlohu obecnější: Ručičky svírají úhel $\alpha$, kdy budou svírati úhel $\beta$? Úhel počítáme kladně ve směru pohybu ručiček. Rovnice zní:

$$\alpha \pm \frac{11}{2}x = \beta;$$

znaménko $\pm$ dle toho, je-li $\alpha \lessgtr \beta$.

i) První hodiny ukazují 2 hodiny a každou hodinu se předcházejí o $1\frac{1}{2}$ min., druhé ukazuje tři hodiny a zpožďují se každou hodinu o 1 min. Kdy budou tyto hodiny ukazovati stejně? Kolik budou ukazovati? Kolik bude správně hodin, je-li nyní půl třetí? Úloha jest totožna s touto: Dva chodci jdou proti sobě rychlostí $1\frac{1}{2}$ a 1 jsouce od sebe vzdáleni o 60, kdy se potkají? $x = 60 : (1\frac{1}{2} + 1) = 24$ hod. Správně tedy bude opět půltřetí, avšak hodiny budou ukazovati 2 hod. + + 24 × $1\frac{1}{2}$ min. = 2 hod. 36 min.

j) Rozřešme tuto úlohu: Kdy lze zaměniti hodinové ručičky mezi sebou, aby zase ukazovaly jistý čas? (Je-li 6 hod. a zaměníme-li ručičky, neukazují žádný čas.)

Svírá-li hodinová ručička se základní polohou úhel $\alpha$, svírá minutová úhel $\beta$ dvanáctkráte větší: je-li to úhel větší 360°, stanovíme tento úhel jako zbytek při dělení $12\alpha$ číslem 360; nebo též takto: dělíme $\alpha$ třiceti (podíl jsou celé hodiny), zbytek zanedbejme, znamenejme tento výsledek $E\left(\frac{\alpha}{30}\right)$, pak jest $\beta = 12\alpha - 360E\left(\frac{\alpha}{30}\right)$: má-li poloha $(\beta, \alpha)$ udávati též nějaký čas, musí býti podobně $\alpha = 12\beta -$ $- 360E\left(\frac{\beta}{30}\right)$. Pišme stručně $E\left(\frac{\alpha}{30}\right) = k_1$, $E\left(\frac{\beta}{30}\right) = k_2$; obě čísla mohou nabýti hodnot 0; 1; 2; ...; 11. Řešme nyní rovnice dle $\alpha, \beta$ a obdržíme

$$\alpha = \frac{(12k_1 + k_2) \cdot 360}{143}, \beta = \frac{(k_1 + 12k_2) 360}{143}.$$

Poněvadž výraz $12k_1 + k_2$ nabývá pro různá možná $k_1$ i $k_2$ všech celých hodnot 0; 1; 2; ...; 143, lze říci, že $\alpha = \frac{k \cdot 360}{143}$, kde $k = 0; 1; 2; \ldots; 143$. Úloze tedy hoví 143 různých úhlů určených hodinovou ručičkou. Když $k_1 = k_2$, ručičky se kryjí; vylučme tento triviální případ, pak zbývá pro $\alpha$ celkem 132 úhlů, odpovídající 132 : 2 = 66 různým časům.

k) Ručička hodinová svírá se základní polohou úhel $\alpha$, minutová úhel $\beta$; z předchozího je patrno, že nelze obecně zaměniti polohu ručiček, aby ukazovaly jistý čas. Tažme se však, když zaměníme polohu $(\alpha, \beta)$ na $(\beta, \alpha)$ a při tom ponecháme ručičkám původní rychlost, zda průběhem doby dosáhnou polohy, jež by definovala skutečný čas. Stane se tak za $x$ minut; o základní poloze platí $\beta = 12\alpha - 360E\left(\frac{\alpha}{36}\right) =$ $= 12\alpha - 360k_1$; ve změněné poloze po $x$ minutách, má-li ukazovati jistý čas, musí býti

$$\alpha + 6x = 12\left(\beta + \frac{x}{2}\right) - 360E\left(\frac{2\beta + x}{60}\right)$$

čili

$$\alpha = 12\beta - 360E\left(\frac{2\beta + x}{60}\right) = 12\beta - 360k_3,$$

kdež $k_1, k_3 = 0, 1, 2, \ldots, 11$. Odečteme-li však třetí rovnici od první, jest $13(\alpha - \beta) = 360(k_1 - k_3)$, t. j. pravá strana má býti dělitelna 13, což však za předpokladu o $k_1, k_3$ není možné jinak, než když $k_1 = k_2$, t. j. $\alpha = \beta$. Tedy po této záměně hodinových ručiček ukazují hodiny správný čas, jen když se kryjí.

Proveďte některé tyto úvahy v případě, že ciferník jest rozdělen od 1 do 24 hodin.

## 11.
## ÚLOHY O ČASE.

Základních vět A) i B) vyložené v úvodu k úlohám z foronomie lze užíti i k výkladům některých úloh o měření času, z nichž nejznámější jest tato: Ten, kdo cestuje ustavičně směrem východním, jde Slunci vstříc a má den o tolikráte 4 minuty kratší, kolik prošel za den šířkových stupňů, jichž délka v naší šířce jest asi 75 km; Slunce totiž při svém zdánlivém pohybu projde jeden šířkový stupeň za 4 minuty. Kdo tedy ujede za den 300 km stále na východ, projel 4 šířkové stupně, den se mu zkrátil o 4kráte 4 minuty, t. j. 16 minut, což se projeví tím, že jeho hodinky jsou zpožděny o 16 minut. Ten, kdo ujede za den 300 km směrem západním, má den delší o 16 minut, jeho hodinky proti místnímu času budou o 16 minut napřed. Kapitán lodi, jež Suezským průplavem vyjela směrem východním na cestu kolem světa, byla po návratu do východní stanice o 360 × 4 min. čili celý den napřed — to se stalo na př. panu Phileasu Foggovi a jeho věrnému sluhovi Passpartoutovi ve známém Verneově románě Cesta kolem světa za 80 dní. Aby datování po návratu souhlasilo, počítá posádka lodi jedouc přes stoosmdesátý poledník tento den dvakráte (ve skutečnosti tato čára změny data jest klikatá). — Lodi plující směrem západním kolem světa opět ztrácejí celý den; přecházejíce tuto čáru počítají dny tak, že po dnešku přichází hned pozítří: viz o tom humorné vypravování našeho Kořenského (Cesta kolem světa, I, str. 349); tato příhoda stala se v r. 1522 i Magellanovi, jenž první objel Zemi směrem západním.

I zdá se, jako bychom mohli sestrojiti stroj, jímž by bylo možno konati výlety do „minula" i do „budoucna". Až bude létání tak zdokonaleno, že bude možno na př. v našich zeměpisných šířkách oblétnouti zeměkouli za dobu kratší jednoho dne, vzlétne létadlo, které se vrátí za 18 hodin. Vznese-li se dne 1. května o 10. hod., přelétne čáru změny data, zachovajíc datum 1. května přilétne na své východiště dne 1. května ve 4 hod., kdežto místní obyvatelstvo bude počítati 2. května čtyři hodiny. Vysvětlení jest jednoduché: Den své datum mění při dolní kulminaci Slunce, kdy počítáme půlnoc. Lidé v letadle rovněž v jistém místě své dráhy stihnou Slunce v dolní kulminaci — a musí změniti své datum o jeden den — a tak skutečně doletí k svému východisku se správným datem.

Ukažte, že není možno konati výlet do „budoucna", letí-li letadlo ustavičně směrem západním.

Avšak v naší krásné literatuře známe stroj, jenž umožňuje výlet do „minula"; bohužel Jakub Arbes, jenž nám ho předvádí v novele Newtonův mozek, neudává jeho konstrukci ani druh motoru. Jest to jakýsi aeroplán, jenž letí rychlostí větší rychlosti světla, jeho rychlost může pilot libovolně zvětšovati. Cestovatelé jsou vyzbrojeni velmi dokonalými brýlemi a vidí při ustavičně stupňované rychlosti dohánějíce světelné paprsky, které se od naší země odrazily před minutou, hodinou, dnem, měsícem, rokem a stoletím, co se tenkráte na zemi dálo. Konstruktérem tohoto stroje jest Jakub Arbes sám.

Připojme několik úvah o kalendáři. V životě jednotlivcově i veřejném jest nutno někdy znáti, na který den v týdnu padlo jisté datum. Uvědomíme-li si, že každým rokem obyčejným resp. přestupným postoupí datum o jeden resp. dva dny, není v úloze nějakých nesnází, zejména, jedná-li se o data dnešnímu dni nevalně vzdálená, na př. kterým dnem začne rok 1943? Rok 1941 začal středou, tedy rok 1943 začne pátkem. Pro data ve vzdálené minulosti nebo budoucnosti byly sestrojeny přehledné tabulky; mnemotechnikové při svých produkcích užívají tohoto vzorce platného pro kalendář gregoriánský (u nás platný od počátku ledna 1584, po 6. lednu následoval ihned 17.).

Značí-li $d, m, l$ řadové číslo dne, měsíce, let ve století, $S$ pak počet uplynulých století, při čemž pro leden a únor $m = 13, 14$ a oba měsíce se počítají k minulému roku, vypočteme nejprve číslo

$$d + \tfrac{1}{10}(m + 1)\,26 + l + \tfrac{1}{4}l + \tfrac{1}{4}S - 2S,$$

při čemž při dělení ponecháváme jen čísla celá; zbytek při dělení toho čísla sedmi udává den v týdnu, při tom neděle jest dána zbytkem 1, pondělí 2, ..., sobota 6. Na př. kterým dnem začínají století počínaje stoletím sedmnáctým? Počítejme 31. prosinec roku předchozího, tedy $d = 31$, $m = 12$, $l = 0$,

$$d + \tfrac{1}{10}(m + 1)\,26 + l + \tfrac{1}{4}l = 31 + 33 + 0 + 0 = 64,$$

jest tedy počátek století určen zbytkem při dělení $65 + {} + (\tfrac{1}{4}S - 2S)$ sedmi. Na př. pro $S = 20$, jest 1. leden 2001 pondělí, poněvadž zbytek při dělení čísla $65 + 5 - 2 \,.\, 20$ sedmi jest 2.

Zjistěte, že v dvacátém století pouze v letech 1920, 1948, 1976 má únor pět nedělí.

Církevní i veřejný život potřebuje znáti datum velikonočních svátků a s nimi souvisících pohyblivých svátků. Velmi jednoduché pravidlo ustanoviti datum velikonoční neděle v gregoriánském kalendáři pochází od Gausse: Je-li $l$ daný letopočet, stanovme zbytky $a, b, c, d, e$ vzniklé při dělení $l : 19$, $l : 4$, $l : 7$, $19M + N : 30$, $2b + 4c + 6d + {} + N : 7$, při čemž $M$ a $N$ jsou dány v této tabulce:

| | $M$ | $N$ |
|---|---|---|
| do 1699 | 22 | 2 |
| 1700—1799 | 23 | 3 |
| 1800—1899 | 23 | 4 |
| 1900—1999 | 24 | 5 |
| 2000—2099 | 24 | 5 |
| 2100—2199 | 24 | 6 |
| 2200—2299 | 25 | 0 |
| 2300—2399 | 26 | 1 |
| 2400—2499 | 25 | 1 |

velikonoce jsou pak buď $22 + d + e$ března nebo $d + e - 9$ dubna. Nejnižší možné datum jest 22. března, t. j. $d = e = 0$; lze snadno ukázati, že v době 1600—2499 nastalo nebo nastane v letech: 1693, 1761, 1818, 2285, 2353, 2437. I datum nejblíže vyšší jest vzácné, 23. III. byla velikonoční neděle posledně v r. 1913.

O nejzazším datu pak platí: Vyjde-li $d = 29$, $l = 6$, takže velikonoční neděle by měla býti $29 + 6 - 9 = 26$. dubna, volí se vždy datum 19. dubna; tak tomu bude r. 1981. Vypočteme-li však $d = 28$, $e = 6$, a je-li mimo to zbytek při dělení $11(M + 1)$ třiceti menší než 19, jsou velikonoce 18. IV, nikoliv 25. IV. Nejzazší datum 25. dubna jest velmi vzácné: bylo na př. 1886, bude 1943 a pak až v r. 2038. Středověký verš o tomto datu praví: Usque Marcus pascha dabit, Antonius pentecosabit, totus mundus vae clamabit, t. j. Až na sv. Marka (25. dubna) budou velikonoce, na sv. Antonína (13. VI.) svatodušní svátek, zaběduje celý svět.

V r. 1848 byla velikonoční neděle 24. dubna.

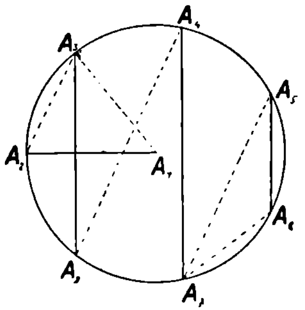
## 12.

## ÚLOHY Z KOMBINATORIKY.

Slovem kombinatorika v tomto odstavci budeme rozuměti něco více než obvyklou nauku o permutacích, variacích a kombinacích; budeme míti na zřeteli jakékoliv řadění daných předmětů buď všech daných nebo některých z nich.

Stopy kombinatoriky lze postihnouti již u Řeků; k velikému rozkvětu kombinatoriky přispěl v XVIII. století počet pravděpodobnosti; v poslední době zájem o kombinatoriku (v užším slova smyslu) mizí. — Málokterý problém, jimiž se zabýváme, přilákal tolik zvučných matematických jmen, jako některé z úloh, jimiž se budeme zabývati.

1. Chovanky pensionátu denně se procházejí; jak je sestavíme do páru, aby každá s každou během určitého počtu dní se mohla procházeti a to jen jednou? Nutno rozeznávati případy dva: počet chovanek jest buď sudý nebo lichý, druhý případ převedeme ihned na první, přibéřeme-li k chovankám ještě vychovatelku, s kterou zbývající dívka vytvoří další pár. Mějme tedy $2n$ dívek. Rozdělme obvod kružnice na $2n - 1$ dílků, dělící body ($n = 4$) buďtež $A_2$, $A_3$, $A_4$, $A_5$, $A_6$, $A_7$, $A_8$. Střed kružnice označme $A_1$. Spojnice $A_3A_8$, $A_4A_7$, $A_5A_6$, nám udávají tři páry; učiňme $A_1A_2 \perp A_3A_8$, pak $A_1A_2$ nám udává čtvrtý pár. Otočme nyní kružnicí a s ní pevně souvisícím poloměrem tak, až poloměr přejde do bodu $A_3$, při tomto otáčení poloha původních dělících bodů zůstala nezměněna. Spojnice $A_1A_3$, $A_2A_4$, $A_5A_8$, $A_6A_7$ nám pak udávají páry, v nichž 8 dívek jde na procházku druhý den. Tak pokračujeme, až se poloměr opět vrátí do polohy základní, načež seskupení párů se počne opakovati. Důkaz, že každý den jde každá dívka pokaždé s jinou, jest jednoduchý; plyne z toho, že spojnice udávající páry kteréhokoliv dne, jsou různoběžny se spojnicemi, udávající páry pro jiný den.

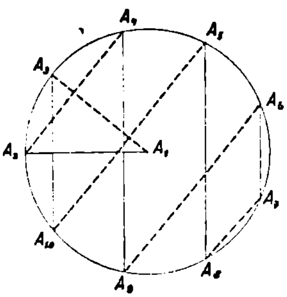


Obr. 3.

2. Tímto způsobem lze seskupiti $2n$ šachistů hrající v turnaji, v němž každý hráč s každým během za sebou jdoucích $2n - 1$ dní jen jednou; je-li počet šachistů lichý, doplníme

jich počet myšleným hráčem — jmenujme jej mistrem Imaginárním — má-li kdo z hráčů s tímto mistrem hráti, má toho dne volno.

Avšak s naším řešením by pravověrní šachisté asi spokojeni nebyli, ničeho jsme totiž neustanovili o tom, kdo má kameny bílé a kdo černé. S tímto řešením bychom vystačili tenkráte, hrál-li by každý hráč s každým hráčem dvě partie — pak by se vlastně turnaj rozpadl v turnaje dva; měl-li hráč $A_m$ při hře s hráčem $A_n$ kameny bílé, má v druhém utkání s tímto hráčem kameny černé. Ale takové turnaje trvají — zejména při větším počtu hráčů — příliš dlouho a proto nejsou oblíbeny. Uvažujme na př. deset hráčů $A_1, A_2, \ldots, A_{10}$. Všimněme si připojeného obrázku (obr. 4), na němž jsou zakresleny páry pro první dva dny; spojnice tvoří uzavřený tah. První den hraje $A_1$ jako bílý s $A_2$, druhý den hraje $A_1$ s $A_3$ jako černý, který minulého dne jako černý hrál s $A_{10}$. Podobně tomu jest dále, až projdeme všemi vrcholy uzavřeného tahu. Jest tedy pro první dva dny tento pořad $A_1A_2$, $A_4A_9$, $A_6A_7$, $A_8A_5$, $A_{10}A_3$; $A_2A_4$, $A_9A_6$, $A_7A_8$, $A_5A_{10}$, $A_3A_1$, při čemž hráč uvedený na prvním místě hraje jako bílý. Podobně stanovíme pořadí hráčů pro třetí čtvrtý, pro pátý a šestý, sedmý a osmý den. O devátém utkání nutno rozhodnouti buď úmluvou nebo losem. Je-li počet účastníků lichý, pozvěme opět mistra Imaginárního, označme jej $A_1$. Ten hraje postupně s hráči $A_2$, $A_3$, $A_4$, $A_5, \ldots$, při čemž hráči se sudým indexem mají figury černé, hráči s lichým indexem bílé. Ve skutečnosti nehrají a ztrácejí sudí jednou černé a liší jednou bílé figury. Ale poslední utkání, jak se snadno přesvědčíme, jest tak upraveno, že vždy hraje sudý



Obr. 4.

hráč s lichým, takže v tomto utkání jest možno tuto nerovnoměrnost odstraniti, sudí hrají jako černí, liší jako bílí.

3. Kirkmann předložil r. 1850 v zábavném časopise tuto úlohu: Patnáct dívek chodí denně na procházku, jak jest je seskupiti ve trojice, aby během týdne každá dívka každý den šla s dvěma jinými dívkami, s každou pak pouze jedenkráte? Úlohou zabýval se na př. Cayley, Sylvestr, Burnside; známe různá řešení této úlohy, z nichž nejsnadnější pochází od B. Peirce. Označme jednu z dívek $p$, ostatní $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$, $a_5$, $a_6$, $a_7$, $b_1$, $b_2$, $b_3$, $b_4$, $b_5$, $b_6$, $b_7$. Pak sestava pro první den jest $pa_1b_1$, $b_4a_5a_7$, $b_6a_3a_4$, $b_7a_2a_6$, $b_2b_3b_5$. Řešení pro další dny obdržíme, zvětšíme-li indexy o 1, při čemž místo 8 píšeme opět 1; týmž způsobem stanovíme pořad pro třetí a další dny. (Důkaz viz na př. Ahrens: Mathematische Unterhaltungen und Spiele, II, str. 104.)

Počet všech trojic řešících naši úlohu jest $5 \times 7 = 35$, kdežto počet všech možných trojic jest $\binom{15}{3} = 35 \,.\, 13 = 455$; i nadhodil Sylvestr úlohu, možno-li těchto 455 trojic rozvrhnouti ve 13 systémů tak, aby každý systém byl řešením Kirkmannovy úlohy — tedy aby dívky po celý čtvrtrok mohly se procházeti podle daných podmínek; zdá se, že tento poslední požadavek splniti nelze.

4. S naukou o permutacích souvisí rozřešení úlohy obsažené ve hře Boss Puzzle (hra s knoflíky, Fünfzehnerspiel, Taquin), která v letech sedmdesátých minulého století jako epidemie zachvátila celý svět. Seydlerův článek o této hře v Časopise pro pěst. matem. a fysiky, roč. X, jest ohlasem tohoto zájmu i u nás. Hra vypadá takto: V dřevěné ploché skřínce jest čtyřikráte čtyři pole, v nichž jest umístěno patnáct destiček označených čísly 1, 2, 3, ..., 15. Poslední místo v poslední řadě ponecháváme volné; posunováním destiček přes toto volné a v dalším vždy uvolněné jedno místo jest z libovolného uspořádání destiček přejíti v toto schema

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 |
| 9 | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 14 | 15 | |

Záhy hráči zjistili, že z některých počátečních postavení lze předepsaného postavení dosíci, z jiných pak nikoliv. Nutné a postačující podmínky, dle nichž by se z počátečního postavení poznalo, zda lze k předepsanému postavení přijíti či nikoliv, stanovil šachový problémista S. Loyd; a ku podivu: ihned ustal vysoko zvířený zájem o tuto hru.

Nutno se především zmíniti o tom, co nazýváme inversí v dané permutaci na př. pěti prvků $a, b, c, d, e$; prvek $b$ pokládáme za vyšší než $a$, $c$ za vyšší než $b$ i $a$, podobně prvek $d$ jest vyšší než oba předchozí, prvek $e$ jest nejvyšší. Přichází-li vyšší prvek v dané permutaci před nižším, pravíme, že tvoří inversi; na př. v permutaci 5, 3, 4, 1, 2, tvoří 5 inversi vůči všem prvkům, 3 pak jest v inversi vůči 1, 2, jest tedy v dané permutaci $4 + 2 = 6$ inversí; pravíme, že daná permutace jest sudá; je-li počet inversí lichý, jest permutace lichá. — Která permutace nemá žádných inversí? (Základní: počítáme ji k sudým). Která permutace má nejvyšší počet inversí a který? (Permutace psaná v opačném sledu vůči základní.) Je-li prvků $n$, jest počet inversí v takové permutaci

$$(n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1 = \binom{n}{2}.$$

Loydovo kriterium pak zní: Nutnou a postačující podmínkou řešitelnosti úlohy jest, aby základní postavení bylo sudou permutací čísel $1, 2, 3, \ldots, 15$.

5. Velmi stará jest tato úloha; budeme ji zváti úlohou o 15 Turcích a 15 křesťanech. Z těchto 30 mužů má býti 15 popraveno, o jejich osudu má se rozhodnouti náhodou. Postaví se do řady, každý devátý bude popraven, při čemž dojdeme-li konce řady, počítáme znovu. Kam jest umístiti křesťany, aby byli všichni zachráněni? O jejich umístění lze rozhodnouti pokusem: Napišme si vedle sebe 30 čárek, vyškrtněme každou devátou — počítajíce uvedeným předpisem — na místa vyškrtnutých prvních patnácti čárek umístíme Turky. Postavení pak jest toto: $4K$, $5T$, $2K$, $1T$, $3K$, $1T$, $1K$, $2T$, $2K$, $3T$, $1K$, $2T$, $2K$, $1T$.*)

*) $4K$, $5T$, ... značí, že stojí vedle sebe 4 křesťané, pak vedle nich (dole) 5 Turků atd.

Tvrdívá se, že tato úloha pochází z 1. století po Kr., jiní na př. Ahrens (Unterhaltungen, II. díl, 123 a n.) jest však mínění, že hra pochází až z počátku druhého tisíciletí po Kr., vyskytujíc se v nejrozmanitějších obměnách. Jedna — velmi jednoduchá — pochází od německého básníka ševce Hanse Sachse. — Velmi zajímavé znění této úlohy známe z Japonska. Statkář jest po druhé ženat, s první i druhou paní má po 15 dětech. Macecha touží, aby celé jmění otcovo připadlo jednomu z jejích dětí; i uprosí manžela, aby věc ponechal náhodě. I sestaví všech třicet dětí a odpočítává do desíti; dítě, na něž padne deset, musí z řady vystoupiti a jest z dědictví vyloučeno. V krátké době jest vyloučeno 14 dětí — vesměs nevlastních. Zbylé patnácté si vyprosí, aby se počalo počítati znovu, rovněž do desíti, avšak počínaje od něho a směrem opačným. Macecha jista svým vítězstvím svoluje — a ejhle: postupně odpadnou všechny její vlastní děti. I toto uspořádání lze zjistiti pokusem a jest:

$$2v,\ 1n,\ 3v,\ 5n,\ 2v,\ 2n,\ 4v,\ 1n,\ 1v,\ 3n,\ 1v,\ 2n,\ 2v,\ 1n.$$

Zpět počne se počítati od nevlastního dítěte stojícího na místě 14.

I touto úlohou zabývali se vynikající matematikové Euler, Cesaro a nejdůkladněji Busche, jenž v Mathematische Annalen, roč. 47, řešil tuto úlohu: Budiž dáno na obvodě kruhu $n$ bodů označených 1; 2; 3; ...; $n$. Vylučujme způsobem popsaným každý $d$-tý bod, při čemž $d$ může býti rovno, větší nebo menší než $n$. Tážeme se, jaké pořadí má v základní poloze bod $r$-tý, jenž bude vyloučen jako $e$-tý.

Česká verse této úlohy jest tato: Rychtář vede k odvodu 30 branců, mezi nimi své tři syny; odveden jest ten, na něhož při odpočítávání padne deset; má-li býti odvedeno 27 branců, kam umístí své syny, nemají-li býti odvedeni? (Na 17., 25. a 28. místo.)

6. Německý matematik Jakob Steiner řešil tuto úlohu: V rovině jest dáno $n$ přímek vesměs mezi sebou různoběžných, z nichž žádné tři neprotínají se v témž bodě. V kolik

oblastí dělí tyto přímky rovinu? Označme toto číslo pro $n$ přímek $a_n$, připojme další přímku splňující uvedené podmínky; původních $n$ přímek protne ji v $n$ bodech, prochází tedy $n + 1$ dosavadními oblastmi dělíc každou na dvě části, platí tedy $a_{n+1} = a_n + n + 1$. Položme $n = 0; 1; 2; 3; \ldots; n - 1$, $a_0 = 1$ a sečteme tak vzniklé rovnice, tak obdržíme

$$a_n = 1 + (1 + 2 + 3 + \ldots + n) = \tfrac{1}{2}n(n + 1) + 1 = \\ = \tfrac{1}{2}(n^2 + n + 2).$$

Steiner řešil podobnou úlohu i pro prostor. Mějme $n$ rovin, jichž průsečnice jsou vesměs mezi sebou různoběžné; prostor se pak rozpadá v $A_n = \frac{1}{6}(n^3 + 5n + 6)$ oblastí.

Uvedeme ještě dvě úlohy složitější.

7. Píši $n$ dopisů a $n$ příslušných obálek; kolikerým způsobem mohu všechny dopisy zasunouti nesprávně? Značme dopisy $a_1, a_2, \ldots, a_n$, obálky pak $A_1, A_2, \ldots, A_n$, hledaný počet označme $x_n$. Uvažujme nejprve dopisy $a_1$, $a_2$ a obálky $A_1$, $A_2$; kolik jest případů, že $a_1$ se dostane do $A_2$ a $a_2$ do $A_1$? Jest jich $x_{n-2}$; kolik je dále případů, že $a_1$ se dostane do $A_2$, kdežto $a_2$ se neoctne v $A_1$? Těchto případů jest $x_{n-1}$. Tedy počet všech případů, kdy $a_1$ se octne v $A_2$, jest $x_{n-1} + x_{n-2}$. Počet případů, kdy se octne $a_1$ v $A_3, A_4, A_5, \ldots, A_n$ jest stejně veliký, jest tudíž $x_n = (n - 1)(x_{n-1} + x_{n-2})$. Dělme tuto rovnici $n!$ a položme $\dfrac{x_n}{n!} = \xi_n$, pak předchozí rovnici lze psáti ve tvaru

$$\xi_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\xi_{n-1} + \frac{1}{n}\,\xi_{n-2},$$

nebo též

$$\xi_n - \xi_{n-1} = -\frac{1}{n}(\xi_{n-1} - \xi_{n-2}).$$

Pišme nyní $n = 3; 4; \ldots; n$, násobme tak vzniklé rovnice a obdržíme:

$$\xi_n - \xi_{n-1} = \frac{(-1)^n(\xi_2 - \xi_1)}{3\,.\,4\,.\,5\,.\,\ldots\,.\,n},$$

poněvadž $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = \frac{1}{2}$, jest $\xi_n - \xi_{n-1} = \frac{(-1)^n}{n!}$. Dosaďme postupně za $n = 2; 3; \ldots; n$, sečteme-li jest:

$$\xi_n = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots \pm \frac{1}{n!},$$

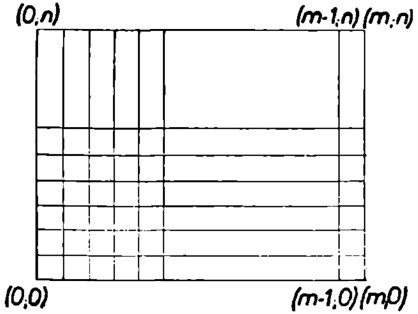
takže

$$x_n = n!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots \pm \frac{1}{n!}\right);$$

na př. pro $n = 6$, jest

$$x_6 = 720\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!}\right) = 325.$$

8. Uvažujme mříž vzniklou $m$ rovnoběžkami s osou $Y$, a $n$ rovnoběžkami s osou $X$; tyto rovnoběžky mohou býti, ale nemusí býti od sebe stejně vzdáleny. Tážeme se, kolikerým způsobem lze se dostati z bodu $(0; 0)$ do bodu $(m; n)$, je-li dovolen pouze pohyb mřížovými body od leva napravo a zdola nahoru a to o libovolný počet dílců.




Obr. 5.

Příslušná čísla pro body $(m - 1; 0)$, $(m - 1; 1)$, $(m - 1; 2)$, …, $(m - 1; n)$ značme $c_{m-1,0}$, $c_{m-1,1}$, $c_{m-1,2}$, …, $c_{m-1n}$, a sestrojme řadu $f_{m-1}(x) = x^{m-1}(c_{m-1,0} + c_{m-1,1}x +$

$+c_{m-1,2}x^2+\ldots)$. Kolikerým způsobem lze dosíci jednotlivých mřížových bodů na přímce $x = m$? Do bodu $(m; 0)$ dojdeme pouze z bodu $(m-1; 0)$, tedy $c_{m,0} = c_{m-1,0}$. Do bodu $(m; 1)$ lze dojíti jednak z bodu $(m-1; 0)$ jednak z bodu $(m-1; 1)$; jest tedy $c_{m,1} = c_{m-1,1} + c_{m-1,0}$. Podobně do bodu $(m; 2)$ lze dojíti jednak z bodu $(m-1; 0)$, jednak z bodu $(m-1; 1)$ a posléze z bodu $(m-1; 2)$; jest tedy $c_{m,2} = c_{m-1,0} + c_{m-1,1} + c_{m-1,2}$ atd. Sestrojme novou řadu

$$\begin{aligned} f_m(x) &= x^m(c_{m,0} + c_{m,1}x + c_{m,2}x^2 + \ldots) = \\ &= x^m[c_{m-1,0} + (c_{m1,0} + c_{m-1,1})\,x + (c_{m-1,0} + c_{m-1,1} + \\ &+ c_{m-1,2})\,x^2 - \ldots] = \\ &= x^m[c_{m-1,0}(1 + x + x^2 + \ldots) + c_{m-1,1}\,x\,(1 + x + x^2 + \\ &+ \ldots) + c_{m-1,2}x^2(1 + x + x^2 + \ldots) + \ldots] = \\ &= x^{m-1}(c_{m-1,0} + c_{m-1,1}x + c_{m-1,2}x^2 + \ldots)\,.\,x(1 + x + \\ &+ x^2 + \ldots) = x(1 + x + x^2 + \ldots)\,.\,f_{m-1}(x). \end{aligned}$$

Bez újmy obecnosti lze předpokládati, že $|x| < 1$, a řadu v závorce pokládati za nekonečnou, součet této nekonečné geometrické řady jest $\dfrac{1}{1-x}$, takže lze psáti $f_m(x) = \dfrac{x}{1-x} f_{m-1}(x)$. Napišme tuto rovnici pro $m-1$, $m-2$, $\ldots$, 1 a znásobme tyto rovnice, výsledek jest

$$f_m(x) = \frac{x^m}{(1-x)^m} f_0(x),$$

kde $f_0(x)$ se vztahuje na body položené na ose $x = 0$, do jejíchž bodů lze se dostati pouze jednou; jest tedy

$$f_0(x) = 1 + x + x^2 + \ldots = \frac{1}{1-x},$$

takže

$$f_m(x) = \frac{x^m}{(1-x)^{m+1}}.$$

Koeficient při $(m+n)$-té mocnině v rozvoji pro zlomek

$\frac{x^m}{(1-x)^{m+1}}$ jest tedy číslo udávající, kolikráte předepsaným způsobem lze přejíti z bodu (0; 0) do bodu ($m$; $n$). Tento koeficient určíme takto: V základech se binomická věta dokazuje pouze pro celé kladné mocnitele, připusťme formální její platnost i pro záporné mocniny, při čemž definujeme

$$\binom{-m}{n} = \frac{(-m)(-m-1)(-m-2)\dots(-m-n+0)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,\dots\,.\,n} =$$

$$= (-1)^n \frac{m(m+1)(m+2)\dots(m+n-1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,\dots\,.\,n} =$$

$$= (-1)^n \binom{m+n-1}{n}.$$

Jest tudíž koeficient ($m + n$)-té mocniny rozvoje pro

$$\frac{x^m}{(1-x)^{m+1}} = x^m(1-x)^{-m-1}$$

dán vzorcem

$$c_{m,n} = \binom{m+n}{n} = \binom{m+n}{m}.$$

Na př. z levého dolního rohu (místa a1) na šachovnici lze se dostati do pravého horního rohu (místa h8) celkem

$$\binom{8+8}{8} = \binom{16}{8} =$$

$$= 9\,.\,10\,.\,11\,.\,12\,.\,13\,.\,14\,.\,15\,.\,16 = 518\,918\,400 \text{ způsoby}.$$

**Příklady.** 1. Kolikráte v tomto schematě

d o b r o u
o b r o u n
b r o u n o
r o u n o c

lze čísti dobrou noc?

$$\left[\binom{5+3}{3} = \binom{8}{3} = 56.\right]$$

2. Šest chlapců a šest dívek má vytvořiti kolo, v němž by se chlapec a dívka střídali. Kolik jest možno sestav, aby každý chlapec vedle každé dívky stál pouze jednou? (Naznačte si 6 chlapců jako šest vrcholů pravidelného šestiúhelníka vepsaného do kruhu, na obvod soustředného kruhu o menším poloměru týmž způsobem naznačte si šest dívek, takže každá jest uprostřed mezi dvěma sousedními chlapci. To jest prvá skupina; druhou obdržíte otočením menšího kruhu o 120 stupňů; jak obdržíte třetí a poslední skupinu? Upravte tento postup pro pět párů!)

3. Úlohu 8 tohoto odstavce lze uvažovati i v prostoru; počet cest, jimiž se lze dostati z bodu (0; 0; 0) do bodu $(m; n; p)$ jest $\binom{m+n+p}{m+n}\binom{m+n}{n} = \frac{(m+n+p)!}{m!\,n!\,p!}$. Ukažte, kolik jest možných cest z bodu (0; 0; 0) do bodu (4; 4; 4)! $\left[\binom{12}{4} = 495.\right]$

# 13.

# ŘADY.

Řadou nazýváme posloupnost čísel vytvořených dle jistého výtvarného zákona a spojených znaménkem kladným nebo záporným; i o sledu těchto znamének budeme předpokládati, že se řídí dle jistého pravidla. Výtvarný zákon může býti dán dvojím způsobem; explicitně; na př. $a_n = 2n - 1$, všechny členy buďtež spojeny znaménkem kladným; pišme $n = 1; 2; \ldots; 10$, tak obdržíme řadu $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots$ $\ldots + 21$. Jiné explicitní předpisy jsou $a_n = \frac{1}{n}$, všechna znaménka buďtež kladná, nebo nechť se znaménko kladné střídá se znaménkem záporným: tak vznikají řady

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots,$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots \pm \frac{1}{n} + \ldots,$$

z nichž dříve uvedená se jmenuje harmonická. Předpis, jímž byla dána posloupnost čísel Fibonacciových $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

(viz odst. 5) nazývá se rekurentním; již v uvedeném odstavci jsme se zabývali řadami z těchto čísel složenými.

Lidé velmi záhy se zabývali řadami buď objevujíce nové výsledky teoretické nebo řešíce některé zajímavé příklady: ty vlastně se stávají schránkou objevených teoretických výsledků. I my jsme již několikráte k řešení užili na př. řad geometrických (viz odst. 5, nebo v předchozím odst. př. 8).

1. Již Archimedes dovedl sečísti aritmetickou řadu $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$; tak vlastně dovedl již sečísti obecnou řadu aritmetickou:

$$a_1 + (a_1 + d) + a_1 + 2d + \ldots + a_1 + \overline{n - 1}d =$$
$$= na_1 + \tfrac{1}{2}n(n - 1)\,d = \tfrac{1}{2}n[a_1 + a_1 + \overline{n - 1}d] = \tfrac{1}{2}n(a_1 + a_n).$$

2. Rovněž znal již součet prvních $n$ členů řady $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$; krátce dojdeme k cíli takto: Sečtěme těchto $n$ rovnic:

$$\begin{aligned}
(1 - 1)^3 &= 0^3 = 1^3 - 3\,.\,1^2 + 3\,.\,1 - 1,\\
(2 - 1)^3 &= 1^3 = 2^3 - 3\,.\,2^2 + 3\,.\,2 - 1,\\
(3 - 1)^3 &= 2^3 = 3^3 - 3\,.\,3^2 + 3\,.\,3 - 1,\\
(n - 1)^3 &= (n - 1)^3 = n^3 - 3n^2 + 3n - 1,
\end{aligned}$$

výsledek jest, značíme-li $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$:

$$0 = n^3 - 3S_n + 3(1 + 2 + 3 + \ldots + n) - n,$$

odkudž snadno vypočteme

$$S_n = \tfrac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1).$$

3. Součet třetích mocnin $S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$ znali již odvoditi geometrickou úvahou Arabové. Tento součet lze odvoditi takto: Všimněme si, že $1^3 + 2^3 = 9 = (1 + 2)^2$, $1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 = 6^2 = (1 + 2 + 3)^2$, $(1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3) = 100 = (1 + 2 + 3 + 4)^2$; i naskytá se otázka, neplatí-li obecně $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2 = \frac{1}{4}n^2(n + 1)^2 = \left(\frac{n + 1}{2}\right)^2$. Připusťme, že tento vzorec jest správný pro $n$, pak

$$S_{n+1} = \tfrac{1}{4}n^2(n + 1)^2 + (n + 1)^3 = \tfrac{1}{4}(n + 1)^2\,(n^2 + 4n + 4) =$$

$$= \tfrac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2 = \binom{n+2}{2}^2;$$

ale to jest náš původní vzorec, v němž jsme místo $n$ psali $n+1$; platí-li tedy původní vzorec pro $n$, platí i pro $n+1$. Ukázali jsme, že platí pro $n = 2; 3; 4$, platí tedy i pro $4 + 1 = 5$, poněvadž platí pro 5, platí i pro $5 + 1 = 6$, čili platí pro všechna celá, kladná $n$.

Uveďme některé příklady k uvedeným vzorcům.

4. Mám 200 K, první K prodám za 1 hal., 2. K za 2 hal., 3. K za 3 hal., ..., 200. K za 200 hal. — získám či prodělám při tomto obchodě? Celkem obdržím $1 + 2 + 3 + \ldots + 200 = \frac{1}{2} \cdot 200 \cdot 201$ hal. $= 201$ K.

Jaký jest stav při podobném obchodě se 199 K?

5. (Stará německá úloha.) Na nejvyšší příčce žebříku sedí 1 holub, na druhé 2 holubi, až na nejnižší 50. příčce sedí 50 holubů, kolik jest jich celkem? (1275.)

6. Kolik jest všech možných čtverců na šachovnici? Čtverců o straně 1 jest v první řadě 8, ve všech ostatních rovněž po 8, tedy všech těchto čtverců jest $8^2$. Čtverců o straně 2 jest v první řadě 7, čtverců o téže základně v druhé řadě rovněž 7 atd., celkem $7^2$. Jest tedy všech čtverců $8^2 + 7^2 + 6^2 + 5^2 + 4^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 = \frac{1}{6} \cdot 8 \cdot 9 \cdot 17 = 204$.

7. Ukažte podobnou úvahou, že všech obdélníků na šachovnici jest $8^3 + 7^3 + 6^3 + 5^3 + 4^3 + 3^3 + 2^3 + 1^3 = (\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 9)^2 = 36^2 = 1296$.

8. Již v Ahmesově učebnici probleskuje znalost součtu $n$ členů geometrické řady $a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^{n-1} = a\dfrac{q^n - 1}{q - 1}$. Ahmes řeší tuto úlohu: 7 osob má po 7 kočkách, z nichž každá zadáví 7 myší; každá myš zničila 7 klasů, z nichž by každý dal 7 měrek zrní: kolik jest kterých tvorů a věcí a jaký jest celkový jich součet? $7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + 7^5 = 7\dfrac{7^5 - 1}{7 - 1} = 19607$.

9. Nesčetně variant má úloha, kterou vymyslili Indové: Jde o odměnu, kterou si vyžádal na králi vynálezce šachové

hry. — Za první pole chce jedno pšeničné zrno, za druhé 2, za třetí 4, za čtvrté 8 atd.; kolik žádá celkem? Žádá: $1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{63} = 2^{64} - 1$; my zasloužilému vynálezci přidáme ještě jedno zrno. Číslo vyjádřené mocninou $2^{64}$ uniká svojí velikostí jakékoliv lidské představě; jakž takž lze si přibližně toto číslo představiti takto: Světelný rok není doba, nýbrž dráha, kterou urazí světlo (rychlost 300000 km za vt.), tedy za rok jest to $9{,}5 \cdot 10^{12}$ km, čili $9{,}5 \cdot 10^{17}$ cm. Na jeden centimetr podle sebe lze položiti 4 pšeničná zrna, tedy podél délky světelného roku $38 \cdot 10^{17}$ zrn; ono množství zrn lze tedy položiti podél dráhy dané podílem $2^{64} : 38 \cdot 10^{17}$, t. j. asi 4,9 světelných roků. — Nejbližší stálice k Slunci jest alfa Centauri vzdálená asi 3 světelné roky.

10. Počet obyvatelstva na zeměkoli odhaduje se na 2 miliardy. Stala-li se o půlnoci nějaká příhoda, kterou objeví do čtvrt na jednu jediný člověk a jenž ji během příští čtvrthodiny sdělí opět jednomu člověkovi a tito dva během příští čtvrt hodiny dalším dvěma lidem atd., kdy o této události budou vědět všichni lidé na světě? Stane se tak za $x$ čtvrthodin: $2^{x-1} = 2 \cdot 10^9$, $x - 1 = \dfrac{9{,}30103}{0{,}30103} \doteq 31$, $x = 32$; tedy asi po 8. hodině ráno.

Čísla rostoucí dle geometrické řady s podílem větší jedné, rostou, jak z posledních dvou příkladů vidno, velmi rychle. Jmenují se též čísla lavinová, rostou jako řítící se lavina. S pokusy sestrojiti co největší čísla, setkáváme se již u nejstarších orientálních národů; zřejmě jest tu snaha nějakým způsobem znázorniti si číslo nekonečně velké, nebo nekonečně velkou délku či nekonečně dlouhý čas.

Listy leknínu zaplňují plochu nádržky tak, že denní přírůstek jest roven včerejšímu stavu. Jaká část plochy byla zarostlá den před úplným rozšířením se leknínových listů po hladině nádržky? (Polovina.)

11. Rovněž ve starověku — a to Řekové — se setkali s druhým případem geometrických řad, t. j. s konvergentními řadami. Tak nazýváme řady, jež, ač mají nekonečně mnoho

členů, přece jen mají konečný součet. Tento případ nastává, kdy o podílu geometrické řady $q$ platí: $-1 < q < 1$. První setkání řeckých filosofů a matematiků s těmito řadami nebylo právě nejšťastnější. Zénon eleatský (490—430 př. Kr.) učil, že existuje podstatný rozdíl mezi smyslovým vnímáním a skutečností; smysly utkvívají na povrchu věcí a nepronikají k podstatě a jádru jejich. Zkrátka: svět je subjektivní výtvor naší mysli. Smysly na př. konstatují, že šíp letí, ale úvahou lze zjistiti, že tomu tak není. Šíp by musil proletěti polovinu dráhy, pak polovinu zbylé dráhy a opět polovinu nově zbylé dráhy a tak do nekonečna, a to není možné: ve skutečnosti se šíp ze svého místa ani nepohnul. Zenon nevěděl (či nechtěl věděti?), označíme-li čas potřebný k proletění poloviny dráhy $t$, že časy potřebné k proletění dalších polovin dráhy jsou $\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}t + \frac{1}{8}t$, jichž součet jest $\dfrac{\frac{1}{2}t}{1-\frac{1}{2}} = t$. — Podobně by bylo možno dokázati, že rychlonohý Achilles nedohoní želvu plazící se před ním ve vzdálenosti sto stop, ač jeho rychlost jest dvanáctkráte větší.

Archimedes (287—212 př. Kr.) měl však již správnější představy o konvergenci geometrické řady: Při studiu plochy paraboly a jejího těžiště sečetl řadu

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \ldots = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}.$$

12. Stanovte hodnotu nekonečného součinu $p = \sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\ldots}}}}$

Lze psáti $p = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+t}$.

Jakub Bernoulli počátkem XVIII. století počítá takto:

$$p^2 = a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\ldots}}}}, \text{ takže } p^2 = ap \text{ a } p = a.$$

Tohoto matematika přímo fascinovala konvergence nekonečných řad, jak svědčí jeho latinské verše, jež zde uvádíme v přízvučné metrice:

Jako má řada nemajíc konce konečný součet,
v členech pak bezmezná mez má konečnou přec,
právě tak vidíš Nejvyšší vůle v nejmenší věci

spár, leč zmizela mez, jež prv' přidána byla.
Viděti v nejmenším malé, řekni, jaká to rozkoš,
natož pak spatřiti Jej, bytost Nejvyšší v malém!

13. Z nesčetných slovních úloh o konvergentních řadách uveďme tuto: Do kružnice jest vepsán trojúhelník o vrcholech $A, B, C$ a úhlech $\alpha, \beta, \gamma$. Pak jest $\widehat{AB} = 2\gamma$, $\widehat{BC} = 2\alpha$, $\widehat{CA} = 2\beta$; tyto oblouky rozpůlme body $C_1, A_1, B_1$. Tak vznikne trojúhelník o vrcholech $A_1, B_1, C_1$, proti nimž leží oblouky o velikostech $\beta + \gamma$, $\gamma + \alpha$, $\beta + \alpha$, takže úhly nového trojúhelníka jsou $\alpha_1 = \frac{1}{2}(\beta + \gamma) = R - \frac{1}{2}\alpha$, $\beta_1 = R - \frac{1}{2}\beta$, $\gamma_1 = R - \frac{1}{2}\gamma$.

Opakujeme-li konstrukci, získáme trojúhelník $A_2, B_2, C_2$, jehož úhly jsou $\alpha_2 \doteq R - \frac{1}{2}\alpha_1 = R - \frac{1}{2}R + \frac{\alpha}{2^2}$, podobně i $\beta_2, \gamma_2$. Opakujeme-li tuto konstrukci $n$-kráte za sebou, jest

$$\alpha_n = R - \frac{R}{2} + \frac{R}{4} - \ldots \pm \frac{R}{2^n} + \frac{\alpha}{2^{n+1}},$$

takže pro ustavičně rostoucí $n$ jest

$$\alpha_\infty = R - \frac{R}{2} + \frac{R}{4} - \ldots = \frac{R}{1 + \frac{1}{2}} = 60^\circ.$$

Podobně i $\beta_\infty = \gamma_\infty = 60^\circ$. Blížíme se tedy stále opakovanou konstrukcí rovnostrannému trojúhelníku. Vypočtěme ještě, kde jsou vrcholy výsledního trojúhelníka. Po $n$-té konstrukci jest: $\widehat{AA_1} = 2\gamma + \alpha$, $\widehat{A_1A_2} = 2\gamma_1 + \alpha_1$, ..., $\widehat{A_{n-1}A_n} = 2\gamma_{n-1} + \alpha_{n-1}$, sečtením těchto rovnic dostaneme $\widehat{AA_n} = 2(\gamma + \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_{n-1}) + (\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{n-1})$. Avšak odvodili jsme $\alpha_1 = R - \frac{1}{2}\alpha$, $\alpha_2 = R - \frac{1}{2}\alpha$, ..., $\alpha_n = R - \frac{1}{2}\alpha_{n-1}$ a značíme-li $A_{n-1} = \alpha + \alpha_1 + \ldots + \alpha_{n-1}$, jest po sečtení posledních rovnic $A_{n-1} - \alpha + \alpha_n = nR - \frac{1}{2}A_{n-1}$ a odtud: $A_{n-1} = 2nR + \frac{2}{3}(\alpha - \alpha_n) + \frac{4}{3}(\gamma - \gamma_n)$ a podobně, $B_{n-1}$ a $C_{n-1}$. Nutno rozeznávati dva případy: 1. $n$ jest sudé, pak $\widehat{AA_{n-1}} \sim \frac{2}{3}(\alpha - \alpha_n) + \frac{4}{3}(\gamma -$

$-\gamma_n)$; 2. $n$ je liché: $\widehat{AA}_{n-1} \sim 180^\circ + \frac{2}{3}(\alpha - \alpha_n) + \frac{4}{3}(\gamma - \gamma_n)$. Poněvadž pro $n$ ustavičně rostoucí jest $\alpha_\infty = \beta_\infty = \gamma_\infty = 60^\circ$, jest v prvním případě $\widehat{AA}_\infty = \frac{2}{3}\alpha + \frac{4}{3}\gamma - 120^\circ = \frac{2}{3}(180 - \beta - \gamma) - 120^\circ = \frac{2}{3}(\gamma - \beta)$ a v druhém případě $\widehat{AA}_\infty = \frac{2}{3}(\gamma - \beta) + 180^\circ$, takže výsledné trojúhelníky (oba rovnostranné) jsou vlastně dva. (Uvažte důvod.)

O konvergenci geometrických řad viz v odstavci následujícím.

## 14.

## ARITMETICKÁ PARADOXA A SOFISMATA.

Matematickými sofismaty nebo paradoxy nazýváme zřejmě nesprávné výsledky odvozené zdánlivě správným způsobem. Školený čtenář snadno nalezne chybu; vždy se jedná o nesprávné, nebo neúplné použití některé matematické poučky.

1. Budiž $a \neq b$, $a + b = c$, pak jest $a = c - b$, $b = c - a$. Jistě jest $a(c - a) = b(c - b)$, odečtěme na obou stranách $ab$: vyjde nám $a(c - a - b) = b(c - b - a)$. Krátíme-li nyní $c - a - b$, obdržíme $a = b$, což jest v rozporu s předpokladem. Jest totiž $c - a - b = 0$, a nulou děliti ani krátiti nelze.

2. Budiž $a^2 - b = c^2 - d$, $a \neq c$ a předpokládejme $b : a = d : c$. Přičtěme na obou stranách $\frac{b^2}{4a^2} = \frac{d^2}{4c^2}$; na obou stranách dostaneme úplné čtverce, po jichž odmocnění jest $a - \frac{b}{2a} = c - \frac{d}{2c}$. Přičtěme nyní na obou stranách $\frac{b}{2a} = \frac{d}{2c}$, čímž obdržíme $a = c$. Při odmocňování jsme totiž zapomněli, že nutno psáti

$$a - \frac{b}{2a} = \pm\left(c - \frac{d}{2c}\right)$$

a že jest nutno vzíti znaménko dolní; pak je $a - \frac{b}{2a} = -c + \frac{d}{2c}$, čili $a + c = \frac{b}{2a} + \frac{d}{2c} = \frac{bc + ad}{2ac} = \frac{2bc}{2ac} = \frac{b}{a}$ a posléze $a(a + c) = b$; k témuž výsledku však dojdeme, když do první rovnice dosadíme $d = \frac{bc}{a}$; jest totiž $a^2 - b = c^2 - \frac{bc}{a}$, čili $(a - c)(a + c) = \frac{b}{a}(a - c)$ a po krácení $a - c$ skutečně $a + c = \frac{b}{a}$.

3. Vyjděme z rovnice $2 \log a > \log a$, čili $\log a^2 > \log a$, a proto $a^2 > a$. Na př. pro $a = \frac{1}{2}$, jest $\frac{1}{4} > \frac{1}{2}$. Nesmíme zapomenout, že první rovnice platí, pokud $\log a > 0$, t. j. $a > 1$.

Podobně jest $3 > 2$, a též $3^m > 2^m$, tedy pro $m = -1$ je $\frac{1}{3} > \frac{1}{2}$; druhá rovnice však platí jen pro $m > 0$.

4. Ve vyšší matematice se dokazuje, že součet nekonečné řady $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ jest $\log 2$, kde log značí přirozený logaritmus. Násobme tuto řadu dvěma:

$$2 \log 2 = 2 - 1 + \tfrac{2}{3} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{5} - \tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{7} - \tfrac{1}{4} + \ldots,$$

čili

$$\log 4 = 1 + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{4} + \ldots$$

Sčítance kladné i záporné zůstaly tytéž, jen jejich pořad se vyměnil a přec jen součet řady zvětšil se dvakráte. — Zde se dopouštíme této chyby: Věta, že ve sčítání lze zaměniti pořad kladných i záporných sčítanců, platí jen v tom případě, že počet sčítanců jest konečný; toto pravidlo nesmíme tak beze všeho přenésti na součty o nekonečně mnoha sčítancích čili na nekonečné řady.

4. Něco podobného platí i o nekonečných součinech. Uvažujme o nekonečném součinu $(1 + 1)(1 - \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{3})$ .

$\cdot\, (1 - \frac{1}{4}) \ldots$; podržíme-li prvních $n$ činitelů, obdržíme $s_{2n} = 1$, podržíme-li $2n + 1$ prvních činitelů, jest jejich součin $\frac{2n+2}{2n+1} = 1 + \frac{1}{2n+1}$, necháme-li $n$ ustavičně vzrůstati, jest $\frac{1}{2n+1} = 0$, takže hodnota součinu jest opět 1. Pravíme prostě: Součin $s$ má hodnotu 1. — Ukažme především, že součin $s_1 = (1 + \ )(1 + \frac{1}{3})(1 + \frac{1}{5}) \ldots \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)$ s rostoucím $n$ roste nad každou mez; jest totiž

$$s_1 > 1 + 1 + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{17}\right) + \ldots > 2 + \frac{2}{8} + \frac{4}{16} + \ldots = 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \ldots,$$

takže učiníme-li takových souhrnů $n$, jest $s_1 > 2 + \frac{n}{4}$; zřejmě tedy $s_1$ s rostoucím $n$ roste nad každou mez, nebo jak říkáme, roste do nekonečna.

Ukážeme nyní, že první součin $s$ lze změnou pořadu činitelů změniti v jiný součin, jehož činitelé jsou vesměs větší než 1, takže jeho hodnota jest větší než 1, což jest v rozporu s prvním tvrzením. Vezměme vždy tolik činitelů se znaménkem kladným a jeden se znaménkem záporným, aby jejich součin byl větší než 1, na př. $1 + 1$; $(1 + \frac{1}{3})(1 + \frac{1}{5})(1 + \frac{1}{7}) \,\cdot$ $\cdot\, (1 + \frac{1}{9})(1 - \frac{1}{2}) = \frac{64}{63}$.

Nyní vytvořme další součin tak, aby

$$\left(1 + \frac{1}{11}\right)\left(1 + \frac{1}{13}\right) \ldots \left(1 + \frac{1}{11 + 2n - 2}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right) > 1,$$

čili $\left(1 + \frac{1}{11}\right)\left(1 + \frac{1}{13}\right) \ldots \left(1 + \frac{1}{11 + 2n - 2}\right) > \frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3}$

Stačí tedy voliti $n$ tak, aby

$$\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\ldots+\frac{1}{9+2n}>\frac{1}{3},$$

což nastane, volíme-li $n$ tak, aby $\frac{n}{9+2n}>\frac{1}{3}$, t. j. $n>9$; na př. $n=10$. Jest tedy

$$\left(1+\frac{1}{11}\right)\left(1+\frac{1}{13}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{29}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)>1.$$

Nyní bychom hledali $n$ tak, aby

$$\left(1+\frac{1}{31}\right)\left(1+\frac{1}{33}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{31+2n-2}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)>1;$$

týmž postupem bychom stanovili $n>\frac{29}{3}$, stačí tedy $n=10$, atd.

Vhodné $n$ jsme s to vždy nalézti, jelikož hodnota součinu $s$ roste nad každou mez, takže naše zásoby jsou nevyčerpatelné.

5. Čtenář obeznámený s derivováním funkcí jedné proměnné ví, že derivace $\sin^2 x$ a $-\cos^2 x$ jest táž jsou rovna $2\sin x\cos x$; nelze však z toho usuzovati, že $\sin^2 x = (-\cos^2 x)$! Příslušná poučka zní: Funkce lišící se o konstantu mají derivace stejné, skutečně v našem případě jest $\sin^2 x-(-\cos^2 x)=1$.

6. Pojem konvergence řad se tříbil velmi zvolna a lze říci, že úplně objasněn byl až matematiky z počátku předešlého století. Jest tedy přirozeno, že v dřívějších dobách objevily se některé výsledky, na něž se dnes díváme s úsměvem, předkládajíce je začátečníkům jako snadno vysvětlitelná sofismata. Současník Jakuba Bernoulliho, italský matematik Grandi, provedl obvyklým způsobem dělení $1:(1+x)$ s výsledkem $1-x+x^2+x^3+x^4-\ldots$ a položil do tohoto výsledku $x=1$. Na levé straně obdržel $\frac{1}{2}$; sečetl-li na pravé straně sudý počet členů, obdržel 0, součet

lichých členů pak jest vždy 1. Jest tedy buď $0 = 1$, nebo $0 = \frac{1}{2}$ a tedy též $\frac{1}{2} = 1$, takže po násobení dvěma jest $1 = 2$ atd. Vysvětlení jest pro nás velmi jednoduché: podíl $1 - x + x^2 + x^3 + \ldots$ jest vlastně geometrická řada, která konverguje jen tenkráte, když $-1 < x < 1$: nelze tedy dosazovati ani $x = -1$, ani $x = +1$. Grandi si však při svém výkladu pomáhal touto historkou: Otec umírá, má dva syny a rozkáže, aby se o zbylé jmění rozdělili naprosto stejným způsobem. Jeho přání jest splněno, zbývá však jen drahocenný prsten, který dědicové nechtějí rozpůliti. I dohodnou se, že jeden rok bude nosit tento prsten první, druhý rok pak druhý syn a opět první a po něm druhý atd. Majetek vztahující se k prstenu prý jest dán řadou $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$: tedy každý z bratrů prsten má i nemá a oba jej mají na polovičku.

Jak vysvětlíte toto paradoxon: $\dfrac{1 + x + x^2 + \ldots + x^{m-1}}{1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}} = 1 - x^m + x^n - x^{m+n} + x^{2n} - x^{m+2n} + \ldots$, $m < n$; dosadíme-li $x = 1$, jest napravo opět řada $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots$, vlevo pak $\dfrac{m}{n}$; takže $0 = 1 = \dfrac{m}{n}$?

7. Paradoxně zní i tento výsledek: Obec má povinnost jednou za třicet let provésti opravu mostu nákladem 1000 K; kolik musí najednou složit, aby se své povinnosti jednou pro vždy zbavila? Při první úvaze zdá se, že se jedná o částku nesmírně velikou, ne-li nekonečně velikou; avšak — postavila-li obec právě most, jest hodnota příštích povinných splátek dána konvergentní geometrickou řadou:

$$\frac{1000}{r^{30}} + \frac{1000}{r^{40}} + \frac{1000}{r^{50}} + \ldots = \frac{1000}{r^{30} - 1}, \quad r = 1 + \frac{p}{100},$$

$p$ počet procent.

8. Množinou nazýváme soubor věcí přesně definovaných — na př. množinou jest prvních deset čísel celých, nebo

všechna čísla celá, nebo všechna čísla dělitelná sedmi; množinou jsou všechny body, v nichž se protíná $n$ přímek, nebo všechny body na kružnici; množinu však tvoří na př. všechny body v Baťově prodejně. Množinou jest však i soubor i jiných množin, na př. množina množin čísel dělitelných 7, nebo 11, nebo 13. Jsou pak dva druhy množin: První druh jsou množiny, které obsahují samy sebe jako prvek; sem patří na př. množina všech abstraktních pojmů, poněvadž pojem množiny abstraktních pojmů jest rovněž abstraktní pojem. K druhému druhu náleží množiny, které nejsou samy sobě prvkem, na př. množina 2, 4, 6, 8. Každá množina jest tedy buď prvního, nebo druhého druhu. Uvažujme nyní množinu, jejíž prvky jsou všechny množiny druhého druhu, nazvěme ji $M$. Má-li patřiti k prvnímu druhu, musí obsahovati sebe jako prvek, ale to odporuje způsobu, jakým byla utvořena. Musí tedy patřiti k množinám druhého druhu. Tu by však náležela $M$ do $M$ — což jest opět proti jejímu výtvarnému zákonu.

Jsou však úlohy, jež svým řešením překvapují ne méně než paradoxa. Na př. lze dokázati, že v Praze jsou aspoň dva lidé, kteří mají týž počet vlasů na hlavě — výsledek jest samozřejmý, uvědomíme-li si, že počet obyvatelstva Prahy blíží se milionu, kdežto počet vlasů nedosahuje čtvrt milionu. Základní myšlenky této úlohy, za jejíhož původce bývá pokládán Voltaire, užívá se často v matematických důkazech, a lze jí dáti tento přehledný text: Máme-li $m$ skřínek a v nich $n > m$ penízů, jistě aspoň v jedné skřínce jsou dva peníze. Neboť kdyby v každé skřínce byl nejvýše jeden peníz nebo právě po jednom penízi, bylo by ve skřínkách nejvýše $m$ penízů, bylo by nejméně $n - m$ penízů mimo skřínky — proti předpokladu.

**Překlady.** 1. Dívka má na půdě pět párů punčoch bílých a pět černých. Jde-li si po tmě pro punčochy určité barvy (na př. bílé), kolik ~~párů~~ punčoch si musí vzíti, aby měla jistě 2 punčochy volené barvy? (12.) (Chce-li však obléci punčochy stejné barvy — aniž jí záleží na tom, zdaž jsou bílé nebo černé, stačí, přinese-li si punčochy tři.)

2. Pavel jest dlužen Karlovi 102 K; Karel ho vyzve, aby mu dlužnou částku poslal jedinou poštovní poukázkou. Porto na částku činí 2 K; strhne-li si je Pavel, má poslati pouze 100 K, na něž stačí porto 1 K; vydělává tedy 1 K proti svolení Karlovu. Strhne-li si však pouze 1 K, má poslati částku 101 K a musí platiti porto 2 K, zkracuje tedy sebe o 1 K. — Jest to tedy úloha v jistém smyslu neřešitelná, leč bychom připustili zaslání této částky dvěma poštovními poukázkami po 50 K; pak na každou nutno dáti korunové porto, čímž povolená srážka jest vyčerpána.

# OBSAH

CESTA K VĚDĚNÍ

JČMF

K 16,20