Jak se studují geometrické útvary v prostoru. II. část

CESTA K VĚDĚNÍ

PROF. DR. JIŘÍ KLAPKA

JAK STUDOVATI GEOMETRICKÉ ÚTVARY V PROSTORU

II. ČÁST

S 9 obrazci

Vyšlo jako 23. svazek sbírky
CESTA K VĚDĚNÍ
vydávané Jednotou českých matematiků a fysiků v Praze za redakce
Dra R. BRDIČKY, Dra F. VYČICHLA a Dra L. ZACHOVALA

1942

NÁKLADEM JEDNOTY ČESKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ V PRAZE
TISKEM KNIHTISKÁRNY „PROMETHEUS“ V PRAZE VIII

ÚVOD.

Laskavému čtenáři připomínám především, že tento svazek Cesty k vědění tvoří logicky těsně spjatý celek se svazkem 18., který vyšel v březnu t. r. se stejným názvem jakožto první část spisu a který obsahuje ve třech kapitolách analytickou geometrii t. zv. útvarů lineárních (bod, přímka a rovina a útvary z nich složené).

Ve vnější úpravě této druhé části se zmíněná souvislost projevuje hlavně tím, že knížka začíná kapitolou IV., odstavcem 18., navazujíc tak na očíslování kapitol, odstavců, rovnic a obrazců části první. O obsahu celého spisu a o použitém způsobu výkladu, o studiu a o jiných učebnicích analytické geometrie bylo pojednáno v úvodu k I. části. V posledním, t. j. v 39. odstavci k tomu připojuji několik doplňků.

V celém spise bylo dbáno, aby — až na několik ústupků — k studiu nebylo používáno speciálnějšího druhu souřadnic než uvažovaná látka vyžaduje. Tím byla zachována souměrnost odvozených vzorců, jejichž geometrický smysl lze proto snadno postřehnouti.

Též do této druhé části spisu byly zařazeny četné příklady k cvičení (počtem 69), jakož i jistý počet typických příkladů s výpočty. Jejich rozřešením resp. studiem čtenář si osvojí pracovní postup, vhodný k rychlé klasifikaci a určení invariantů a polohy dané plochy druhého stupně, stejně jako k určení jiných prvků. Je proto velmi důležito po pochopení textu věnovati vypracování příkladů co největší péči.

V Žamberku v květnu 1942.

Jiří Klapka.

IV.

O PLOCHÁCH, ZEJMÉNA O PLOCHÁCH DRUHÉHO STUPNĚ V SOUŘADNICÍCH ČTYRSTĚNOVÝCH.

18. Pojem plochy. Nejjednodušší plocha je rovina. Jak víme, rovnice roviny je v lineárních souřadnicích (čtyrstěnových, rovnoběžkových) lineární. Při tom rovnicí roviny — nebo plochy vůbec — rozumíme podmínku, kterou splňují souřadnice jen těch bodů, které náležejí ploše.

Je-li tato podmínka algebraická rovnice n-tého stupně, pak též plocha se nazývá algebraická n-tého stupně.

V homogenních souřadnicích rovnice algebraické plochy je vždy homogenní; v nehomogenních souřadnicích tomu tak obecně není.

Příkladem je plocha druhého stupně, čili stručně kvadrika, jejíž rovnice v jakýchkoliv homogenních souřadnicích zní

$$\left.\begin{aligned} f(x, x) \equiv a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \\ + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{14}x_1x_4 + 2a_{24}x_2x_4 + \\ + 2a_{34}x_3x_4 + a_{44}x_4^2 = 0. \end{aligned}\right\} \quad (18,1)$$

V nehomogenních rovnoběžkových souřadnicích rovnice kvadriky má tvar

$$\left.\begin{aligned} f(x, y, z) \equiv a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + \\ + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0, \end{aligned}\right\} (18,2)$$

kde alespoň jeden z koeficientů a_{ik}, které předpokládáme vesměs reálné, nesmí býti roven nule.

Kromě ploch algebraických existují též plochy nealgebraické. V lineárních souřadnicích je rozpoznáme snadno: jejich rovnice není algebraická. Příkladem na takovou plochu je na př. přímá plocha šroubová o rovnici

$$x \operatorname{tg} \frac{z}{a} - y = 0.$$

Plocha však nemusí býti dána přímo rovnicí; může býti udána některá charakteristická vlastnost jejích bodů (na př. vzdálenost jejích bodů od jiného bodu je rovna konstantní délce a — plocha je kulová o poloměru a), takže plocha je definována jako geometrické místo bodů. K tomuto druhu určení plochy náleží též udání způsobu vytvoření plochy, na př. translací čili posouváním křivky nebo jejím otáčením (plochy translační a rotační) a pod. Je-li taková definice plochy úplná, je možno z ní usouditi, jaká je rovnice plochy.

K dané ploše přísluší nikoliv konečné množství rovnic. Nehledíme-li ani k tomu, že v každé souřadnicové soustavě rovnice plochy obecně je jiná, obdržíme z jedné její rovnice $f(x, y, z) = 0$ v určité souřadnicové soustavě každou jinou její rovnici v téže soustavě a při nezměněné poloze ve tvaru

$$\lambda \, . \, f(x, y, z) = 0,$$

kde λ je od nuly různý faktor.

Povšimněme si nyní rovnic některých druhů ploch.

1) Chybí-li v nehomogenní rovnici plochy některá proměnná, na př. z, obdržíme — omezíme-li se na rovinu $(\vec{x}\,\vec{y})$ — rovinnou čáru. Ke každému jejímu bodu, t. j. ke každé dvojici $(x; y)$ jeho souřadnic, můžeme připojiti všechny možné hodnoty z a všechny tak vzniklé trojice čísel $(x; y; z)$ jsou souřadnice bodů plochy, jež vyplňují přímku rovnoběžnou s osou $\vec{z}$. Plocha je tudíž válec, jehož tvořící přímky jsou rovnoběžny s osou $\vec{z}$. Obdobný význam má, chybí-li v rovnici plochy x nebo y.

Podobně nevyskytuje-li se v homogenní rovnici plochy jedna souřadnice, na př. x_i, plocha je kužel (při rovnoběžkových souřadnicích event. válec) jehož vrchol se ztotožňuje s vrcholem $\xi_i = 0$ souřadnicového čtyrstěnu.

Těchto kuželů event. válců často užíváme při zkoumání průmětů čar s vrcholu souř. čtyrstěnu do protější jeho stěny. Je-li čára dána na př. v nehomogenních souřadnicích jako průsečná čára dvou ploch o rovnicích $f(x, y, z) = 0$ a $f'(x, y, z) = 0$, obdržíme z nich vyloučením jedné souřadnice, na př. z, rovnici válce promítajícího čáru ve směru $\vec{z}$ a současně rovnici průmětu čáry v témž směru do roviny $(\vec{x}\,\vec{y})$.

Zvláštní pozornost věnujeme plochám rotačním již pro jejich praktický význam, snadnou představitelnost a nemalý počet jejich modelů, které se vyskytují v často užívaných předmětech denního života (povrch předmětů soustruhovaných, vázy, isolátory, pneumatiky atd.).

Rotační plochy vznikají otáčením rovinných (ovšem i prostorových čar — můžeme se však beze ztráty obecnosti omeziti na rovinné čáry — proč?) čar. Předpokládejme, že tato vytvořující čára čili poledník, nebo meridián plochy leží v rovině $(\vec{x}\,\vec{z})$ pravoúhlého kartézského trojhranu; osou rotační buď $\vec{z}$. Jsou-li $y = 0$, $F(x; z) = 0$ rovnice meridiánu, $(x_0; 0; z_0)$ bod téže čáry, takže

$$F(x_0, z_0) = 0, \tag{18,3}$$

vznikne jeho otáčením kružnice plochy (t. zv. rovnoběžka) o rovnicích

$$z = z_0, \quad x^2 + y^2 = x_0{}^2. \tag{18,4}$$

Vyloučením x_0 a z_0 z rovnic (18,3) a (18,4) vychází hledaná rovnice plochy rotační ve tvaru

$$F(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0, \tag{18,5}$$

z níž zpravidla ještě odstraňujeme odmocninu jejím isolováním a umocněním (což ovšem vždy není prakticky proveditelné).

Na př. otáčením kružnice

$$y = 0, \quad x^2 + z^2 - a^2 = 0$$

okolo osy $\vec{z}$ vznikne — jak známo — **kulová plocha**, jejíž rovnice podle (18,5) zní

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0.$$

Otáčením středové kuželosečky o rovnicích

$$y = 0, \quad \frac{x^2}{n} + \frac{z^2}{p} - 1 = 0, \tag{18,6}$$

vznikají **rotační středové kvadriky** (**elipsoidy**, **kul. plocha**, **hyperboloidy**) o rovnici

$$\frac{x^2 + y^2}{n} + \frac{z^2}{p} - 1 = 0. \tag{18,7}$$

Podobně otáčením paraboly

$$y = 0, \quad x^2 - 2pz = 0 \tag{18,8}$$

okolo osy $\vec{z}$ vznikne **rotační paraboloid** o rovnici

$$x^2 + y^2 - 2pz = 0. \tag{18,9}$$

Rovina nikoliv s osou $\vec{z}$ rovnoběžná

$$z + ax + by + c = 0 \tag{18,10}$$

protíná paraboloid v kuželosečce (elipse nebo kružnici), jejíž kolmý průmět do roviny $(\vec{x}\,\vec{y})$ obdržíme vyloučením souřadnice z z rovnic (18,9) a (18,10), čímž vychází

$$x^2 + y^2 + 2p\,(ax + by + c) = 0.$$

Odtud plyne známá věta:

Rovina nikoliv rovnoběžná s osou rotačního paraboloidu protíná jej (není-li to tečná rovina) v kuželosečce, jejíž kolmý průmět na rovinu kolmou k jeho ose je kružnice.

Jako poslední příklad na plochu rotační uvažme plochu vytvořenou rotací kružnice l v rovině $(\vec{x}\,\vec{z})$ a o rovnicích

$$y = 0, (x - m)^2 + z^2 - a^2 = 0 \tag{18,11}$$

$$m > a > 0,$$

otáčením okolo osy $\vec{z}$. Je to tak zv. **anuloid**, jehož rovnice podle (18,5) zní

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 + m^2 - 2m\sqrt{x^2 + y^2} = 0,$$

a po odstranění odmocniny

$$(x^2 + y^2 + z^2 - a^2 + m^2)^2 - 4m^2(x^2 + y^2) = 0; \qquad (18,12)$$

je to tudíž algebraická rotační plocha čtvrtého stupně (podrobněji o anuloidu viz odst. 38).

Protože v jeho rovnici se vyskytují pouze sudé mocniny souřadnic, je anuloid plocha kolmo souměrná podle všech tří stěn souřadnicového trojhranu. Proto též počátek O je středem souměrnosti anuloidu.

Příklady k cvičení.

77. Jakou plochu vyjadřuje rovnice v pravoúhlých kartézských souřadnicích a) $x^2 + z^2 - 2x - 2z - 2 = 0$, b) $a^2x^2 + b^2y^2 - 2abxy = 0$, c) $x^2 - 2pz = 0$, d) $x_1^2 - 3x_1x_4 + 2x_4^2$? [a) Kruhový válec o ose $\parallel \vec{y}$. b) Rovinu procházející osou $\vec{z}$. c) Parabolický válec rovnoběžný s $\vec{y}$. d) Dvě roviny rovnoběžné s rovinou $(\vec{y}\,\vec{z})$].

78. Napište rovnici kužele o vrcholu v počátku a o řídicí křivce o rovnicích

$$z = m, \quad y^2 - 2px = 0! \quad [my^2 - 2pxz = 0.]$$

79. Napište rovnici kužele o vrcholu v bodě (1; 2; 3) a o řídicí křivce o rovnicích $z = 0$, $x^2 + y^2 - 25 = 0$! [$9x^2 + 9y^2 - 20z^2 - 6xz - 12yz + 150z - 225 = 0$.]

80. Jak se jeví na rovnici kvadriky, že plocha prochází a) všemi vrcholy souřadnicového čtyrstěnu, b) jednotkovým bodem? [a) $a_{11} = a_{22} = a_{33} = a_{44} = 0$, b) $a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44} + 2a_{12} + 2a_{13} + 2a_{14} + 2a_{23} + 2a_{24} + 2a_{34} = 0$.]

81. Jak zní rovnice rotačního válce resp. kužele vytvořeného rotací těchto přímek okolo osy $\vec{z}$: a) $y = 0$, $\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0$, b) $y = 0$, $\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0$, c) $y = 0$, $x - a = 0$? [a), b) $\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$, c) $x^2 + y^2 - a^2 = 0$.]

82. Napište rovnici plochy vzniklé otáčením křivky o rovnicích $z = 0$, $xy - a^2 = 0$ okolo osy $\vec{x}$! [$x^2(y^2 + z^2) - a^4 = 0$.]

83. Zkoumejte kuželosečku, ve které rovina $x + y + z = 0$ protíná kvadriku $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz - 2yz - x - y - z + m = 0$! [Průměty do rovin $(\vec{x}\,\vec{y})$, $(\vec{x}\,\vec{z})$ a $(\vec{y}\,\vec{z})$ mají

rovnice: $4xy + 4y^2 + m = 0$, $4xz + 4z^2 + m = 0$, $4yz - m = 0$.]

84. Určete průsečíky kužele $x_1^2 + x_2^2 - x_4^2 = 0$ s přímkou o rovnicích a) $x_1 = 0$, $x_2 + x_3 + x_4 = 0$! b) $x_1 = 0$, $x_2 \pm x_4 = 0$! [a) body $(0; 1; -2; 1)$, $(0; 1; 0; -1)$, b) přímky leží na kuželi.]

19. Kvadriky singulární a nesingulární. Rovnici kvadriky (18,1) píšeme často stručněji ve tvaru

$$f(x, x) \equiv \sum_{i,k} a_{ik} x_i x_k = 0, \quad (i, k = 1, 2, 3, 4), \qquad (19,1)$$

kde $a_{ik} = a_{ki}$ jsou čísla reálná (z čehož, jak později poznáme, neplyne, že kvadrika má reálné body). Zaveďme označení

$$\left.\begin{aligned} f_1(x) &\equiv a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4, \\ f_2(x) &\equiv a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4, \\ f_3(x) &\equiv a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4, \\ f_4(x) &\equiv a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4. \end{aligned}\right\} \qquad (19,2)$$

Determinant z koeficientů těchto čtyř lineárních forem

$$A \equiv | a_{ik} | \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \qquad (19,3)$$

nazýváme *diskriminantem rovnice kvadriky* (19,1). Je to determinant souměrný, neboť jeho prvky, položené souměrně podle hlavní diagonály, jsou si navzájem rovny.

Platí identita

$$f(x, x) \equiv x_1 f_1(x) + x_2 f_2(x) + x_3 f_3(x) + x_4 f_4(x). \qquad (19,4)$$

Každá rovina protíná kvadriku v kuželosečce. K důkazu stačí určiti řez kvadriky kteroukoliv stěnou souřadnicového čtyrstěnu, který má ke kvadrice polohu zcela obecnou. Tak na př. ve stěně $(0; 0; 0; 1)$ ležící kuželosečka kvadriky má rovnice

$$\begin{aligned} x_4 = 0, \ f^*(x, x) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \\ + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0. \end{aligned} \qquad (19,5)$$

Rovnice kvadriky f obsahuje 10 různých koeficientů a_{ik}. K určení jejich poměrů stačí 9 nezávislých podmínek, na př. 9 bodů ležících na kvadrice, nebo plošná kuželosečka (která sama je určena 5 body jedné roviny) a 4 body.

Kvadrika se nazývá nesingulární, nebo singulární podle toho, je-li diskriminant

$$A \neq 0, \tag{19,6}$$

nebo

$$A = 0. \tag{19,7}$$

Jen v prvém případě čtyři mnohočleny (19,2) jsou lineárně nezávislé a čtyři rovnice $f_i(x) = 0$ nemají společné řešení (nehledě k triviálnímu řešení 0; 0; 0; 0). Čtyři roviny, definované těmito rovnicemi, nenáležejí témuž trsu rovin a tvoří v prostoru čtyrstěn.

V druhém případě — a jen tehdy — čtyři mnohočleny (19,2) jsou lineárně závislé a soustava čtyř rovnic $f_i(x) = 0$ má alespoň jedno nikoliv triviální řešení, t. j. čtyři roviny, rovnicemi této soustavy definované, mají alespoň jeden bod — označme jej y (y_1; y_2; y_3; y_4) — společný. Je tedy

$$f_i(y) = 0, \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

a — podle identity (19,4) —

$$f(y, y) \equiv y_1 f_1(y) + y_2 f_2(y) + y_3 f_3(y) + y_4 f_4(y) = 0,$$

t. j. bod y je bodem kvadriky. Nazýváme jej jejím **bodem singulárním**. Je vždy reálný, neboť jeho souřadnice, definované jako řešení soustavy lineárních rovnic o reálných koeficientech, mohou býti jen reálné.

Je tedy nesingulární kvadrika prosta singulárních bodů a naopak, alespoň jeden bod singulární kvadriky jest singulární.

Je-li tento singulární bod pouze jediný, kvadrika je kužel nebo válec druhého stupně s vrcholem v onom bodě.

Nutná a postačující podmínka pro to je, aby čtyři roviny $f_i = 0$ náležely jedinému trsu, nikoli však svazku rovin,

t. j. aby alespoň jeden minor třetího řádu diskriminantu A byl různý od nuly, t. j. aby A byl hodnosti 3.

Skutečně, za tohoto předpokladu rovnice kvadriky f se redukuje na rovnici kužele nebo válce; pro jednoduchost předpokládejme, že souřadnice singulárního bodu y jsou (0; 0; 0; 1). Ze soustavy rovnic $f_i(y) = 0$ pak vychází

$$a_{14} = a_{24} = a_{34} = a_{44} = 0, \tag{19,8}$$

takže rovnice kvadriky neobsahuje x_4 a je to tudíž kužel druhého stupně s vrcholem (0; 0; 0; 1), jak bylo dokázati.

Kvadrikami s více než jedním singulárním bodem se nebudeme zabývati. Lze totiž dokázati, že takové kvadriky jsou složeny z rovin, takže jejich studium lze převésti na studium dvojice rovin. Skutečně, je-li jeden ze singulárních bodů opět bod (0; 0; 0; 1), druhý bod (0; 0; 1; 0), platí kromě (19,8) ještě rovnice

$$a_{13} = a_{23} = a_{33} = 0$$

a rovnice kvadriky se redukuje na

$$f(x, x) \equiv a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0;$$

lze ji nahraditi dvěma lineárními rovnicemi

$$\alpha_2 x_1 - \alpha_1 x_2 = 0 \quad \text{a} \quad \beta_2 x_1 - \beta_1 x_2 = 0,$$

což jsou rovnice dvou rovin, jak bylo dokázati. Tyto roviny — stejně jako koeficienty α_1, α_2, β_1, β_2 — nemusí býti reálné.

Hodnost diskriminantu A je v tomto případě 2 nebo 1, což je současně počet různých rovin, z nichž je kvadrika složena.

20. Kvadrika a přímka. Zaveďme další označení

$$\left.\begin{aligned} f(y, z) \equiv\ & a_{11}y_1z_1 + a_{22}y_2z_2 + a_{33}y_3z_3 + a_{44}y_4z_4 + \\ & + a_{12}(y_1z_2 + y_2z_1) + a_{13}(y_1z_3 + y_3z_1) + a_{14}(y_1z_4 + y_4z_1) + \\ & + a_{23}(y_2z_3 + y_3z_2) + a_{24}(y_2z_4 + y_4z_2) + a_{34}(y_3z_4 + y_4z_3). \end{aligned}\right\} \tag{20,1}$$

Zřejmě jest

$$f(y, z) \equiv f(z, y). \tag{20,2}$$

Snadno se přesvědčíme, že platí další identity

$$f(y, z) \equiv \sum_i y_i f_i(z) \equiv \sum_i z_i f_i(y), \quad (i = 1, 2, 3, 4). \quad (20,3)$$

Hledejme nyní společné body kvadriky f a přímky, určené body y, z.

Bod této přímky

$$x = \lambda_1 y + \lambda_2 z \quad (20,4)$$

náleží kvadrice f jen tehdy, když

$$f(\lambda_1 y + \lambda_2 z, \lambda_1 y + \lambda_2 z) = 0,$$

t. j. když

$$\lambda_1^2 f(y, y) + 2\lambda_1\lambda_2 f(y, z) + \lambda_2^2 f(z, z) = 0. \quad (20,5)$$

Poslední rovnice obecně má dvě různá řešení, jež označme $\lambda_1 : \lambda_2$ resp. $\lambda'_1 : \lambda'_2$. Obecně tedy přímka (yz) protíná kvadriku f ve dvou různých bodech x a x', z nichž jeden je dán výrazem (20,4) a druhý je $x' = \lambda'_1 y + \lambda'_2 z$.

Jsou-li udavatelé obou poměrů, vypočtených z (20,5), reálné různé, totožné nebo sdružené komplexní, jsou takové i průsečíky x, x'.

Je-li současně — a jen tehdy —

$$f(y, y) = f(y, z) = f(z, z) = 0, \quad (20,6)$$

pak každý bod na (yz) náleží kvadrice f a **přímka (yz) je tvořící čili plošnou přímkou kvadriky.**

Nejsou-li splněny všechny 3 rovnice (20,6), je-li však

$$f^2(y, z) - f(y, y) f(z, z) = 0, \quad (20,7)$$

body x a x' se ztotožňují. Přímka (yz) se nazývá **tečnou kvadriky** f, bod x jejím dotykovým bodem; je-li to singulární bod kvadriky, je přímka (yz) její **tečnou v širším smyslu.**

Tvořící přímky kvadriky počítáme k jejím tečnám.

21. Tečny kvadriky, které procházejí daným bodem.

a) Zkoumejme nejdříve množství tečen kvadriky, které procházejí jejím nesingulárním bodem y.

V důsledku rovnice $f(y, y) = 0$, vyjadřující, že y je bod kvadriky f, redukuje se rovnice (20,7) na

$$f(y, z) = 0. \tag{21,1}$$

Jen tehdy, vyhovují-li souřadnice bodu z ($\{z\} \neq \{y\}$) rovnici (21,1), je přímka (yz) tečnou kvadriky f.

V této rovnici y_i jsou konstanty, z_i souřadnice běžné. Podle (20,3), ve tvaru uspořádaném podle z_i, je to rovnice lineární

$$z_1 f_1(y) + z_2 f_2(y) + z_3 f_3(y) + z_4 f_4(y) = 0; \tag{21,2}$$

rovina, kterou rovnice (21,2) vyjadřuje, nazývá se **tečná rovina kvadriky f v jejím bodě y**. Označme ji η; bod y je její dotykový bod a její rovinové souřadnice jsou dány jednoznačně úměrou

$$\eta_1 : \eta_2 : \eta_3 : \eta_4 = f_1(y) : f_2(y) : f_3(y) : f_4(y). \tag{21,3}$$

Má tedy kvadrika ve svém nesingulárním bodě y jedinou a určitou rovinu tečnou η. Je to rovina svazku tečen plochy o dotykovém bodě y.

Je-li y bod singulární, je $f_i(y) = 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$) a rovnice (21,2) a tudíž i (21,1) je splněna pro kterýkoliv bod z v prostoru. Všechny přímky procházející bodem y, které nejsou přímkami plošnými, jsou tečny kvadriky v širším smyslu.

Máme-li na př. určiti tečnou rovinu kvadriky

$$f(x, x) \equiv x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 - 4x_1x_4 - 6x_2x_4 - x_4^2 = 0$$

v jejím bodě y (-2; 1; 3; 1), utvoříme nejdříve čtyřčleny

$$f_1(x) = x_1 + x_3 - 2x_4, \quad f_2(x) = x_2 + x_3 - 3x_4,$$
$$f_3(x) = x_1 + x_2, \quad f_4(x) = -2x_1 - 3x_2 - x_4$$

a

$$f_1(y) = -1, \quad f_2(y) = 1, \quad f_3(y) = -1, \quad f_4(y) = 0;$$

rovnice tečné roviny podle (21,2) zní

$$-z_1 + z_2 - z_3 = 0.$$

b) Nyní zkoumejme množství tečen kvadriky f, které procházejí bodem y, nenáležejícím kvadrice, takže $f(y, y) \neq 0$.

Přímka (yz) je tečnou kvadriky jen tehdy, splňují-li souřadnice bodu z rovnici (20,7), která je v nich homogenní a druhého stupně. Je tedy (20,7) s konstantními souřadnicemi y_i rovnicí kvadriky Q v běžných souřadnicích z_i $(i = 1, 2, 3, 4)$.

Tvrdíme, že Q je kužel druhého stupně o vrcholu y, je-li f nesingulární.

Je-li f kužel, je Q složena ze dvou rovin, což pokládejme za známé.

Uvedené tvrzení dokážeme nejsnadněji, budeme-li předpokládati, že vrchol (0; 0; 0; 1) souřadnicového čtyrstěnu se ztotožňuje s bodem y.

Pak rovnice (20,7) kvadriky Q se redukuje podle (20,3) na

$$f_4^2(z) - a_{44}\, f(z, z) = 0. \tag{21,4}$$

Tato rovnice však neobsahuje z_4, je tedy Q kvadratický kužel o vrcholu y, což bylo dokázati.

Je-li z právě dotykový bod tečny (yz) kvadriky f, je též

$$f(z, z) = 0,$$

načež z (20,7) vychází

$$f(y, z) = 0; \tag{21,5}$$

to však je rovnice lineární v běžných souřadnicích z_i. Označíme-li rovinu o této rovnici opět η, platí věta:

Rovina η je buď tečná rovina plochy f v jejím nesingulárním bodě y nebo — nenáleží-li bod y kvadrice — rovina kuželosečky, podél které se kvadriky f dotýká kužel Q jejích tečen o vrcholu y.

Povšimněme si, že rovina η je vždy reálná, tedy i v těch případech, kdy její průsečná kuželosečka s f — a tedy i kužel Q — jsou imaginární. Kužel Q umožňuje zavedení pojmů „bod vně“ a „bod uvnitř“ kvadriky f. Je-li Q reálný kužel pravíme, že jeho vrchol leží vně kvadriky f, je-li Q imaginární, leží jeho vrchol uvnitř plochy f. Tyto definice neztrácejí smyslu je-li f kužel nebo válec, nahradíme-li v nich kužel tečen dvojicí rovin, vytvořených tečnami plochy f, které procházejí bodem y.

22. Polární rovina a čtyrstěn. Jak je patrno z (20,5), oba průsečíky x, x' přímky (yz) s kvadrikou f oddělují harmonicky dvojici bodů y, z jen tehdy, když

$$f(y, z) = 0, \tag{22,1}$$

t. j. když bod z leží v rovině η, příslušné k bodu y.

Pak body y, z nazýváme navzájem *polárně sdruženými* vzhledem ke kvadrice f.

Odtud vyplývá na tečném kuželi nezávislá definice roviny η, příslušné k bodu y.

Rovina η *je místem bodů polárně sdružených s bodem* y *vzhledem ke kvadrice* f. Nazýváme ji *polární rovinou* bodu y, který jest jejím *pólem* vzhledem k f.

Polární rovina nesingulárního bodu kvadriky (vzhledem k téže kvadrice) je jeho rovina tečná.

Rovinové souřadnice polární roviny η bodu y jsou dány úměrou (21,3). Je-li y singulárním bodem kvadriky, jeho rovina polární není definována.

Je-li kvadrika f nesingulární, je úměrou (21,3) definována oboustranně jednoznačná korespondence mezi body prostoru a jejich rovinami polárními; nazýváme ji *polaritou* nebo *korrelací vzhledem ke kvadrice* f, která je t. zv. základní kvadrikou polarity.

Z tvaru úměry (21,3) lze snadno usouditi, že přímé řadě bodové odpovídá rovinový svazek, tedy přímce přímka, trsu rovin bodové pole rovinné a obráceně. Útvary složené z bodů, přímek a rovin polaritou se transformují v útvary duální; podotkněme, že dvojpoměr čtyř prvků se při tom zachovává.

Transformuje-li se polaritou vzhledem k nesingul. kvadrice f útvar U v U' a U' znovu v U'', je $U'' \equiv U$, t. j. výsledek dvou po sobě následujících polárních transformací vzhledem k téže základní kvadrice je transformace identická, ponechávající prostor beze změny.

Rovina polární η prochází svým pólem y jen tehdy, je-li η tečná rovina a y její dotykový bod na základní kvadrice f.

Skutečně, z

$$S\eta y = 0$$

plyne podle (21,3)

$$f(y, y) = 0,$$

což bylo dokázati.

Spojnici p dvou bodů nesingulární základní kvadriky koresponduje průsečnice jejich tečných rovin jako t. zv. **sdružená polára** q. Obě přímky obecně jsou mimoběžny; mají-li společný bod y, je to nutně bod základní kvadriky, neboť všechny body jedné z obou polár jsou sdruženy se všemi body druhé a obráceně. Polární rovina η bodu y je tedy tečná rovina základní kvadriky v jejím bodě y a obsahuje jak p tak q, jež tvoří dvojici t. zv. sdružených tečen plochy v jejím bodě y. Je zřejmé, že tato dvojice tečen odděluje harmonicky dvojici obou tvořících přímek (reálných nebo sdruženě imaginárních), procházejících bodem y, ve kterých tečná rovina η protíná základní kvadriku. Je-li $p \equiv q$, náleží tato přímka základní ploše jako její přímka tvořící.

Je-li základní kvadrika singulární, nazývá se tak i polarita, která pak není korespondencí oboustranně jednoznačnou. Skutečně, je-li základní kvadrika na př. kužel, polární roviny všech bodů, ležících na přímce procházející vrcholem kužele, se ztotožňují v jediné rovině, c. b. d.

Čtyrstěn se nazývá **polárním čtyrstěnem** nesingulární kvadriky f, když každá jeho stěna je polární rovinou jeho protějšího vrcholu. Z toho plyne, že protější hrany polárního čtyrstěnu jsou sdružené poláry vzhledem k f.

Abychom v prostoru sestrojili polární čtyrstěn dané nesingulární kvadriky f, volme první jeho vrchol zcela libovolně v prostoru v bodě P_1, neležícím na f; jeho polární rovina π_1 obsahuje další tři vrcholy P_2, P_3, P_4, z nichž P_2 zvolme v ní libovolně, ovšem tak, aby neležel na f. Jeho polární rovina π_2 je další stěna čtyrstěnu, prochází bodem P_1 a protíná π_1 v hraně čtyrstěnu P_3P_4. Pouze jeden z obou těchto bodů, na př. P_3, můžeme na ní voliti libovolně, ovšem tak, aby nenáležel kvadrice f. Jeho polární rovina π_3 je další stěnou čtyrstěnu a protíná hranu P_3P_4 v bodě P_4, neboť, jak známo, obsahuje vrcholy $P_1P_2P_4$.

Tím jsou všechny vrcholy čtyrstěnu určeny.

Z konstrukce je zřejmé, že existuje nekonečné množství polárních čtyrstěnů dané nesingulární kvadriky.

Podotkněme ještě, že každé dvě stěny polárního čtyrstěnu kvadriky f mají tu vlastnost, že každá z nich prochází pólem druhé. Takové dvě roviny budeme nazývati polárně sdružené vzhledem k f.

Všechny zde uvedené pojmy mají své obdoby v rovinné polaritě vzhledem k nesingulární kuželosečce. Prochází-li totiž rovina ϱ bodem P a je-li p průsečnice polární roviny π bodu P s rovinou ϱ, pak P a p jsou pól a polára vzhledem k průsečné kuželosečce f^* roviny ϱ se základní kvadrikou f. Je-li $\varrho \equiv P_1P_2P_3$ stěna polárního čtyrstěnu $P_1P_2P_3P_4$ plochy f, je $P_1P_2P_3$ polární trojúhelník kuželosečky f^*.

Je-li souřadnicový čtyrstěn polárním čtyrstěnem kvadriky f, projevuje se to na její rovnici charakteristickým způsobem. Pólu (1; 0; 0; 0) patrně koresponduje polární rovina (1; 0; 0; 0) a t. p.; z úměry (21,3) v důsledku toho vychází

$$a_{ik} = 0,$$

kdykoliv $i \neq k$. Proto rovnice kvadriky f se redukuje na rovnici

$$f(x, x) \equiv a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 = 0. \quad (22,2)$$

Z ní plyne

$$A = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}, \quad (22,3)$$

takže žádný z koeficientů rovnice (22,2) není roven nule, je-li f kvadrika nesingulární.

Proto, je-li souřadnicový čtyrstěn polární, obsahuje rovnice nesingulární kvadriky pouze čtverce všech čtyř souřadnic.

Je-li jeden z koeficientů rovnice (22,2) roven nule, kvadrika je kužel (nebo válec), jejíž vrchol se ztotožňuje s jedním z vrcholů čtyrstěnu. Zbývající tři jeho vrcholy tvoří polární trojúhelník kuželosečky, v níž jeho rovina plochu f protíná.

Je zřejmé, že kvadrika (22,2) je reálná jen tehdy, když koeficienty a_{ii} $(i = 1, 2, 3, 4)$ nemají vesměs stejná znaménka.

Příklady k cvičení.

85. Dána rovnice kvadriky f; rozhodněte, je-li kvadrika singulární, kužel nebo válec (v tom případě určete jeho sing. bod!), nebo je-li složena z rovin (v kterémž případě určete jejich rovnice!)

a) $64x_1^2 + 75x_2^2 + 96x_1x_3 + 36x_3^2 + 30x_2x_3 - 297x_4^2 = 0$. [$A = 4\,276\,800$, kvadrika nesingulární.]

b) $9x^2 + 4y^2 + z^2 + 12xy - 6xz - 4yz + 30x + 20y - 10z + 25 = 0$. [Všechny čtyři mnohočleny f_1, f_2, f_3, f_4 se navzájem liší pouhým konstantním faktorem. Proto hodnost diskriminantu A je 1 a kvadrika f je dvakrát počítaná rovina $3x + 2y - z + 5 = 0$.]

c) $9x^2 + 9y^2 - 20z^2 - 6xz - 12yz + 150z - 225 = 0$. [$A = 0$, soustava rovnic $f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = 0$ má společné jediné řešení $(1; 2; 3)$; jsou to současně souřadnice vrcholu kvadriky f, která je kužel o řídicí kružnici $z = 0$, $x^2 + y^2 - 25 = 0$.]

d) $3x^2 - 5y^2 - z^2 - 2xy - 2xz + 6yz + 22x - 42y + 10z - 16 = 0$. [$A$ je hodnosti 2, kvadrika je složena ze dvou rovin, a to $x + y - z + 8 = 0$, $3x - 5y + z - 2 = 0$.]

e) $my^2 - 2pxz = 0$ [$A = 0$, rovnice $f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = 0$ mají jediné spol. řešení $(0; 0; 0)$. Plocha f je kužel o vrcholu v počátku. Rovina $z = m$ $(m \neq 0)$ jej protíná v parabole $y^2 - 2px = 0$.]

f) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4\sqrt{2}xy + 2yz + 6x + 2y(2\sqrt{2} - 1) - 6z - 9 = 0$ [$A = 0$, rovnice $f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = 0$ v homog. souřadnicích mají jediné spol. řešení $(-4; 3\sqrt{2}; -\sqrt{2}; 0)$; jsou to současně homog. souřadnice nevlastního sing. bodu kvadriky, která je válec o řídicí kuželosečce (kružnici) $y = 0$, $x^2 + z^2 + 2x - 2z - 3 = 0$.]

86. Přesvědčte se, že diskriminant A kvadriky $(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4) \cdot (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4) = 0$ je hodnosti nejvýše 2!

87. Plocha (18,2) prochází počátkem jen když $a_{44} = 0$. Napište rovnici její tečné roviny v počátku! [$a_{14}x + a_{24}y + a_{34}z = 0$.]

88. Napište rovnici tečného kužele kvadriky (22,2) o vrcholu v bodě jednotkovém! [$a_{11}a_{22}(z_1 - z_2)^2 + a_{11}a_{33}(z_1 - z_3)^2 + a_{11}a_{44}(z_1 - z_4)^2 + a_{22}a_{33}(z_2 - z_3)^2 + a_{22}a_{44}(z_2 - z_4)^2 + a_{33}a_{44}(z_3 - z_4)^2 = 0$.]

89. Dokažte, že daný polární čtyrstěn kvadriky zastupuje 6 daných podmínek! [Z rovnice (22,2) nebo z jeho konstrukce!]

90. V co se transformuje Pascalův šestiúhelník nesingulární kuželosečky f^* polaritou o základní kuželosečce f^*? [V její Brianchonův šestiúhelník.]

23. Kvadrika v souřadnicích rovinových a přímkových.

Předpokládejme, že kvadrika f je nesingulární a že souřadnicový čtyrstěn je polární, takže rovnice kvadriky je (22,2).

Odvoďme její rovnici v souřadnicích rovinových, t. j. odvoďme nutnou a postačující podmínku pro to, aby rovina ξ $(\xi_1; \xi_2; \xi_3; \xi_4)$ byla tečnou rovinou plochy f.

Za učiněných předpokladů úměra (21,3) se redukuje na

$$\eta_1 : \eta_2 : \eta_3 : \eta_4 = a_{11}y_1 : a_{22}y_2 : a_{33}y_3 : a_{44}y_4$$

čili

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = \frac{\eta_1}{a_{11}} : \frac{\eta_2}{a_{22}} : \frac{\eta_3}{a_{33}} : \frac{\eta_4}{a_{44}}. \tag{23,1}$$

Rovina η je tečnou rovinou plochy jen tehdy, když

$$S\eta y = 0,$$

t. j. podle (23,1) když

$$\frac{\eta_1^2}{a_{11}} + \frac{\eta_2^2}{a_{22}} + \frac{\eta_3^2}{a_{33}} + \frac{\eta_4^2}{a_{44}} = 0.$$

Nazveme-li tečnou rovinu opět ξ, obdržíme hledanou rovnici kvadriky f v souřadnicích rovinových ve tvaru

$$\begin{aligned} F(\xi, \xi) \equiv a_{22}a_{33}a_{44}\xi_1^2 + a_{11}a_{33}a_{44}\xi_2^2 + a_{11}a_{22}a_{44}\xi_3^2 + \\ + a_{11}a_{22}a_{33}\xi_4^2 = 0. \end{aligned} \tag{23,2}$$

Podotkněme, že při obecné poloze souřadnicového čtyrstěnu rovnice kvadriky v souřadnicích rovinových je opět druhého stupně tvaru

$$F(\xi, \xi) \equiv \sum_{i,k} A_{ik}\xi_i\xi_k = 0, \quad (i, k = 1, 2, 3, 4), \tag{23,3}$$

kde koeficienty A_{ik} mají vlastnost $A_{ki} = A_{ik}$ a alespoň jeden z nich je různý od nuly.

Jsou-li A_{ik} minory diskriminantu A, příslušné k prvkům a_{ik}, je (23,3) rovnicí kvadriky (19,1). Označíme-li k diskriminantu A obdobný diskriminant rovnice (23,3)

$$a = | A_{ik} |,$$

souvisejí oba diskriminanty rovnicí

$$a = A^3. \tag{23,4}$$

Vycházejíce z rovnice (22,2) nesingulární kvadriky f, odvoďme její rovnici v souřadnicích přímkových. Hledaná rovnice bude vyjadřovati nutnou a postačující podmínku pro to, aby přímka p (p_{12}; p_{13}; p_{14}; p_{34}; p_{42}; p_{23}) byla tečnou plochy f.

Kterýmkoliv bodem v prostoru procházející tečny kvadriky f vytvořují, jak známo, kvadratický kužel, který ve zvláštních případech může býti nahrazen dvojicí rovin různých anebo ztotožňujících se.

Množství přímek v prostoru o této vlastnosti se nazývá přímkový komplex druhého stupně.

Přímka p našeho komplexu buď určena body (17,7), t. j. klaďme $p \equiv (yz)$, $y \equiv p_1$, $z \equiv p_2$. Podmínka, aby p byla tečnou kvadriky f vychází pak z (20,7) ve tvaru poněkud nesouměrném

$$(a_{33}p_{13}p_{23} + a_{44}p_{14}p_{24})^2 -$$
$$- (a_{22}p_{12}{}^2 + a_{33}p_{13}{}^2 + a_{44}p_{14}{}^2)(a_{11}p_{12}{}^2 + a_{33}p_{23}{}^2 + a_{44}p_{24}{}^2) = 0,$$

který však vlivem rovnice (17,4) se upravuje na tvar

$$\varphi(p, p) \equiv a_{11}a_{22}p_{12}{}^2 + a_{22}a_{33}p_{23}{}^2 + a_{44}a_{22}p_{42}{}^2 + a_{11}a_{33}p_{13}{}^2 +$$
$$+ a_{11}a_{44}p_{14}{}^2 + a_{33}a_{44}p_{34}{}^2 = 0. \tag{23,5}$$

Z (22,2), (23,2) a (23,5) je patrno, že jak v bodových, tak v rovinových i v přímkových homogenních souřadnicích rovnice kvadriky obsahuje pouze čtverce souřadnic, když (a jen tehdy) souřadnicový čtyrstěn je polární.

Mezi přímkami komplexu (23,5) jsou obsaženy též tvořící přímky kvadriky f, které vyhovují kromě (23,5) ještě dalším podmínkám, které určíme takto:

Polární roviny bodů p_1 a p_2 jsou roviny o souřadnicích $(0;\ a_{22}p_{12};\ a_{33}p_{13};\ a_{44}p_{14})$ resp. $(-a_{11}p_{12};\ 0;\ a_{33}p_{23};\ a_{44}p_{24})$; jejich průsečná přímka q je s p vzhledem k f sdružená polára $q\ (a_{33}a_{44}p_{34};\ a_{44}a_{22}p_{42};\ a_{22}a_{33}p_{23};\ a_{11}a_{22}p_{12};\ a_{11}a_{33}p_{13};\ a_{11}a_{44}p_{14})$, kde v závorce je uvedena uspořádaná šestice bodových (nikoli osových!) souřadnic přímky q.

Jen tehdy, ztotožňují-li se přímky p, q, t. j. když

$$\{p\} = \{q\}, \tag{23,6}$$

je p tvořící přímkou kvadriky f. Z (23,6) plyne 5 rovnic mezi souřadnicemi p_{ik}; nejsou to však rovnice navzájem nezávislé a jest jim všem vyhověno tehdy, když rovnice

$$a_{11}a_{22}p_{12}^2 - a_{33}a_{44}p_{34}^2 = 0, \quad a_{22}a_{44}p_{42}^2 - a_{11}a_{33}p_{13}^2 = 0,$$
$$a_{11}a_{44}p_{14}^2 - a_{22}a_{33}p_{23}^2 = 0$$

jsou splněny tím způsobem, že jest

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{a_{11}a_{22}}\,p_{12} \mp \sqrt{a_{33}a_{44}}\,p_{34} &= 0, \\ \sqrt{a_{22}a_{44}}\,p_{42} \mp \sqrt{a_{11}a_{33}}\,p_{13} &= 0, \\ \sqrt{a_{11}a_{44}}\,p_{14} \mp \sqrt{a_{22}a_{33}}\,p_{23} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{23,7}$$

kde současně platí buď všechna horní, nebo všechna dolní znaménka.

Obě soustavy rovnic (23,7) určují dvě obecně různé soustavy přímek plochy f, jež nazýváme jejími reguly.

Je tedy regulus množství přímek společné třem lineárním komplexům (23,7); dva reguly náležející téže kvadrice nazývejme komplementární.

Je ovšem známo, že na ploše druhého stupně se nemusí vyskytovati žádné reálné přímky, jak tomu je na př. u koule, u rotačních elipsoidů nebo u paraboloidu.

Aby soustavy rovnic (23,7) měly (po eventuelním krácení číslem $+\sqrt{-1}$) koeficienty reálné, k tomu je nutno a stačí, aby diskriminant

$$A = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$$

byl kladný. Je-li $A < 0$, pak v (23,7) se vyskytují krácením neodstranitelné imaginární koeficienty.

V prvém případě nesingulární reálná kvadrika f má dva různé reguly reálných přímek, v druhém případě na f neexistuje žádná reálná přímka.

Podotkněme, že tento význam znaménka diskriminantu A je nezávislý na poloze souřadnicové soustavy k ploše (viz na př. Bydžovský, Úvod do anal. geometrie, str. 381); lze podle něho snadno rozhodnouti, je-li nesingulární reálná kvadrika, daná svou rovnicí, přímková, nebo nepřímková.

Z (23,7) snadno vyplývá věta:

Dvě přímky, z nichž každá náleží jinému z obou (navzájem komplementárních) regulů kvadriky, jsou incidentní, t. j. protínají se.

Skutečně, vyhovuje-li prvá z obou přímek, jež označme p, q, svými souřadnicemi soustavě rovnic (23,7) s horními znaménky, druhá téže soustavě s dolními znaménky, je i $p_{34}q_{12} + p_{12}q_{34} = 0$, $p_{42}q_{13} + p_{13}q_{42} = 0$, $p_{14}q_{23} + p_{23}q_{14} = 0$; sečtením těchto rovnic vychází $Spq = 0$, což bylo dokázati.

24. Jiné zjednodušení rovnice kvadriky. Předpokládejme nyní, že dva vrcholy $V\,(0; 0; 0; 1)$ a $S_3\,(0; 0; 1; 0)$ souřadnicového čty stěnu leží na kvadrice f, která je nesingulární a reálná. Jeho stěny zvolme takto: stěna $x_3 = 0$ resp. $x_4 = 0$ buď tečná rovina kvadriky f v bodě V resp. v bodě S_3, stěny $x_1 = 0$ a $x_2 = 0$, procházející hranou (VS_3), nechť tvoří dvojici rovin polárně sdružených vzhledem k ploše f.

Z této volby plyne, že hrana (VS_3) je sdruženou polárou s protější hranou souřadnicového čtyrstěnu a že pól roviny $x_1 = 0$ resp. $x_2 = 0$ je jeho protější vrchol (1; 0; 0; 0) resp. (0; 1; 0; 0). Hrany e_1 a e_2 o rovnicích $x_1 = x_4 = 0$ resp. $x_2 = x_4 = 0$ jsou dvě sdružené tečny plochy f v jejím bodě S_3, podobně hrany $x_1 = x_3 = 0$ a $x_2 = x_3 = 0$ jsou sdružené tečny v bodě V.

Při této volbě souřadnicového čtyrstěnu v rovnici (19,1) kvadriky f jest

$$a_{12} = a_{13} = a_{23} = a_{14} = a_{24} = a_{33} = a_{44} = 0.$$

Tato rovnice se proto redukuje na

$$f(x, x) \equiv a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{34}x_3x_4 = 0, \tag{24,1}$$

čili, jsou-li souřadnice rovnoběžkové, takže $x_4 = 0$ je nevlastní rovina, na tvar nehomogenní

$$f(x, y, z) \equiv a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{34}z = 0. \tag{24,2}$$

Diskriminant rovnice kvadriky pak je

$$A = -a_{11}a_{22}a_{34}^2 \neq 0. \tag{24,3}$$

Tečná rovina $x_4 = 0$ protíná plochu v singulární kuželosečce

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 = 0,$$

která je složena ze dvou tvořících přímek t_1 a t_2, protínajících se v S_3, o rovnicích

$$x_4 = 0, \quad \sqrt{a_{11}}x_1 + \sqrt{-a_{22}}x_2 = 0, \tag{24,4}$$

a

$$x_4 = 0, \quad \sqrt{a_{11}}x_1 - \sqrt{-a_{22}}x_2 = 0. \tag{24,5}$$

Podle (24,3) jsou tyto přímky různé a — protože se liší jen ve znaménkách koeficientů při x_2 — skutečně oddělují harmonicky hrany e_1, e_2 souřadnicového čtyrstěnu, jež, jak víme, jsou sdružené tečny v S_3.

Tvořící přímky t_1, t_2 jsou reálné zřejmě jen tehdy, když $a_{11}a_{22} < 0$, t. j. podle (24,3) když $A > 0$, jak jsme zjistili již dříve.

Tečná rovina $x_3 = 0$ protíná kvadriku též v singulární kuželosečce, složené ze dvou přímek, procházejících bodem V, o rovnicích

$$\left.\begin{aligned} x_3 = 0, \quad \sqrt{a_{11}}\,x_1 + \sqrt{-a_{22}}\,x_2 = 0, \\ x_3 = 0, \quad \sqrt{a_{11}}\,x_1 - \sqrt{-a_{22}}\,x_2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{24,6}$$

Tyto přímky jsou různé, reálné nebo sdruženě imaginární za těchže podmínek jako přímky t_1, t_2. Odtud lze usouditi, že platí věta:

Procházejí-li jedním bodem P kvadriky dvě její přímky reálné, (sdruženě imaginární), je tomu tak ve všech bodech plochy.

Předpokládejme, že plocha je přímková, takže přímky t_1, t_2 jsou reálné. Jeden z obou regulů pak obdržíme jako místo přímek, ve kterých — k t_1 nehledě — kvadriku f protínají roviny, procházející přímkou t_1 a vytvářející svazek rovin o rovnici

$$\lambda_1 (\sqrt{a_{11}}\, x_1 + \sqrt{-a_{22}}\, x_2) - 2\lambda_2 x_4 = 0. \tag{24,7}$$

V rovině (24,7) ležící a od t_1 různá tvořící přímka leží podle (24,1) též v rovině

$$\lambda_2 (\sqrt{a_{11}}\, x_1 - \sqrt{-a_{22}}\, x_2) + \lambda_1 a_{34} x_3 = 0. \tag{24,8}$$

Mění-li se poměr $\lambda_1 : \lambda_2$ bez omezení, vytvořuje průsečná přímka rovin (24,7) a (24,8) jeden z obou regulů plochy f, k němuž t_1 nenáleží.

Obdobně svazek rovin o ose t_2

$$\mu_1 (\sqrt{a_{11}}\, x_1 - \sqrt{-a_{22}}\, x_2) - 2\mu_2 x_4 = 0 \tag{24,9}$$

spolu se svazkem

$$\mu_2 (\sqrt{a_{11}}\, x_1 + \sqrt{-a_{22}}\, x_2) + \mu_1 a_{34} x_3 = 0 \tag{24,10}$$

vytvořují druhý regulus plochy f.

Větu odst. *23* o incidenci přímek dvou komplementárních regulů můžeme nyní doplniti větou:

Dvě přímky jednoho regulu jsou mimoběžky.

Abychom ji dokázali, předpokládejme, že obě přímky náležejí na př. prvému z obou regulů; jedna nechť koresponduje poměru $\lambda_1 : \lambda_2$, druhá jinému poměru $\lambda'_1 : \lambda'_2$, takže

$$\lambda_1 \lambda'_2 - \lambda_2 \lambda'_1 \neq 0. \tag{24,11}$$

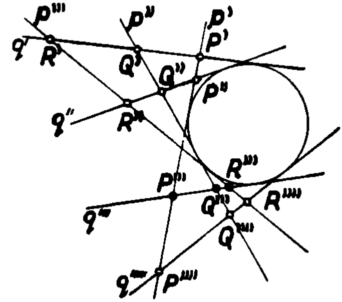
Nyní stačí ukázati, že 4 roviny, z nichž dvě mají rovnice (24,7) a (24,8) a zbývající dvě tytéž rovnice, v nichž pouze λ_1 bylo zaměněno za λ'_1, λ_2 za λ'_2, nenáležejí témuž trsu. Jen v opačném případě totiž obě uvažované přímky mají společný bod ve vrcholu trsu. Máme tedy, jak z algebry je známo, dokázati, že determinant z koeficientů rovnic všech čtyř rovin je různý od nuly. Tak tomu však podle (24,11) skutečně jest, neboť hodnota téhož determinantu jest

$$4\sqrt{A}\,(\lambda_1\lambda'_2 - \lambda_2\lambda'_1)^2,$$

čímž je uvedená věta dokázána.

Z obou vět o incidenci tvořících přímek nesingulární kvadriky lze vyvoditi několik důležitých důsledků.

Regulus je třemi svými navzájem mimoběžnými přímkami p', p'', p''' jednoznačně určen. Všechny jejich společné příčky — jichž je nekonečné množství — vytvořují regulus komplementární k danému; naopak, všechny přímky daného regulu protínají všechny přímky regulu komplementárního.



Obr. 15. Dvojpoměr čtveřice přímek q', q'', q''', q'''' regulu hyperboloidu.

Každým bodem P' přímky p' prochází jedna z přímek q' regulu komplementárního, určujíc s p' tečnou rovinu $\pi' \equiv (p'q')$ plochy f v bodě P'. Mění-li P' na p' svou polohu, vytvořuje π' svazek rovin o ose p'.

Přímky p'' a p''' protíná (obr. 15) rovina π' v těchže bodech jako tvořící přímka q'. Čtveřice rovin π', π'', π''', π'''', dotýkajících se plochy f v bodech P' resp. P'', P''', P'''' na přímce p', protíná přímky p'' a p''' v čtveřicích bodů Q',

Q'', Q''', Q'''', resp. R', R'', R''', R'''', jejichž dvojpoměry jsou podle známé věty (odst. 16) stejné. Avšak spojnice $(Q'R')$, $(Q''R'')$, $(Q'''R''')$, $(Q''''R'''')$ jsou tvořící přímky q', q'', q''', q'''' komplementárního regulu, takže platí věta:

Čtveřice přímek jednoho regulu protíná všechny přímky komplementárního regulu v bodových, čtveřicích stejného dvojpoměru δ. (Tento dvojpoměr jmenujeme dvojpoměr čtveřice přímek regulu.)

Přímky q', q'', q''', q'''' procházejí také čtveřicí bodů P' P'', P''', P'''' na p', jejíž dvojpoměr δ je tudíž roven dvojpoměru čtveřice rovin $\pi', \pi'', \pi''', \pi''''$. Tedy:

Dvojpoměr čtveřice rovin, dotýkajících se nesingulární kvadriky v bodech jedné tvořící přímky, je roven dvojpoměru čtveřice jejich bodů dotykových.

Připojme ještě stručnou úvahu o změně diskriminantu A při transformaci souřadnic (12,1). Nechť po provedení této transformace, t. j. po dosazení za x_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ do rovnice kvadriky (19,1) vznikne nová rovnice téže kvadriky

$$f'(x', x') \equiv \sum_k a'_{ik} x'_i x'_k = 0, \tag{24,12}$$

kde $i, k = 1, 2, 3, 4$, $a'_{ik} = a'_{ki}$, a jejíž diskriminant je $A' \equiv$ $\equiv | a'_{ik} |$. Protože koeficienty a'_{ik} nové rovnice kvadriky zřejmě jsou homogenní mnohočleny prvého stupně v a_{ik} a druhého stupně v c_{ik}, je i A' homogenní mnohočlen, a to stupně čtvrtého v a_{ik} a osmého v c_{ik}.

Z okolnosti, že rovnice $A = 0$ má význam nezávislý na souřadnicové soustavě (kvadrika je singulární), vyplývá, že současně s $A = 0$ je i $A' = 0$ a obráceně. Proto musí býti

$$A' = MA,$$

kde M je od nuly různý faktor za předpokladu, že takový je i determinant $C \equiv |c_{ik}|$ rovnic transformace (12,1).

Protože však A' i A jsou homogenní mnohočleny čtvrtého stupně v koeficientech a_{ik}, může M obsahovati pouze koeficienty c_{ik} transformace (12,1), takže je homogenním mnohočlenem stupně osmého v c_{ik}.

Přihlédneme-li ještě k tomu, že znaménko diskriminantu A též má význam nezávislý na poloze souřadnicové soustavy vzhledem ke kvadrice a že M se anuluje současně s determinantem transformace C (při $C = 0$ je totiž $f'(x', x')$ rovnice kvadriky singulární), můžeme usouditi, že platí vztah

$$A' = C^2 . A, \tag{24,13}$$

který lze stvrditi dvojnásobným použitím věty o násobení determinantů*). Vyslovíme jej větou:

Při lineární transformaci souřadnic diskriminant rovnice kvadriky se násobí čtvercem determinantu transformace.

Příklady k cvičení.

91. Napište rovnice středových ploch rotačních (18,7) v souřadnicích rovinových i přímkových! [$n(\xi^2 + \eta^2) + p\zeta^2 - 1 = 0$, $pp_{12}{}^2 + n(p_{23}{}^2 + p_{13}{}^2) - pn(p_{42}{}^2 + p_{14}{}^2) - n^2 p_{34}{}^2 = 0$.]

92. Napište rovnici kvadriky (24,1) v souřadnicích rovinových! $\left[\dfrac{\xi_1{}^2}{a_{11}} + \dfrac{\xi_2{}^2}{a_{22}} + 2\dfrac{\xi_3\xi_4}{a_{34}} = 0.\right]$

93. Jak zní rovnice kvadriky, která se dotýká všech čtyř stěn souřadnicového čtyrstěnu, v souřadnicích rovinových? [V (23,3) je $A_{11} = A_{22} = A_{33} = A_{44} = 0$.]

94. Daná přímka p kvadriky f svými souřadnicemi vzhledem k souřadnicovému čtyrstěnu, který je polární pro kvadriku f. Napište rovnici kvadriky! [$p_{34}p_{42}p_{23}x_1{}^2 + p_{34}p_{14}p_{13}x_2{}^2 + p_{14}p_{42}p_{12}x_3{}^2 + p_{12}p_{13}p_{23}x_4{}^2 = 0$; k odvození použijte soustavy rovnic (23,7).]

95. Jak zní rovnice přímkové nesing. kvadriky, jsou-li dvě její přímky jednoho regulu protějšími hranami souřadnicového čtyrstěnu a jiné dvě přímky komplementárního regulu též protějšími hranami téhož čtyrstěnu? [$a_{ik}x_ix_k + a_{lm}x_lx_m = 0$, kde i, k, l, m je jakákoliv permutace prvků 1, 2, 3, 4.]

96. Přímky protínající stěny čtyrstěnu v bodových čtveřicích daného dvojpoměru d, tvoří t. zv. tetraedrální komplex druhého stupně. Napište jeho rovnici předpokládajíce, že zmíněný čtyrstěn je souřadnicový. [Podle (17,8) hledaná rovnice je $p_{13}p_{24} - dp_{14}p_{23} = 0$.]

---

*) Viz na př. J. Vojtěch, Projektivní geometrie, str. 614 nebo Staude, Anal. Geometrie atd. str. 773.

V.

KVADRIKY V SOUŘADNICÍCH ROVNOBĚŽKOVÝCH.

25. Středové kvadriky. Nesingulární kvadrika, která se nedótýká nevlastní roviny, nazývá se kvadrika středová.

Pól S nevlastní roviny vzhledem k středové kvadrice proto není bodem nevlastním a neleží na kvadrice. Protože s ním sdružené póly jsou vesměs nevlastní body, je kvadrika podle něho středově souměrná. Proto pól S nazýváme středem kvadriky a přímky (tětivy) resp. roviny jím procházející jsou průměry resp. průměrové (diametrální) roviny plochy. Kuželosečky ležící v rovinách diametrálních jsou diametrální (průměrové) řezy plochy.

Nutná a postačující podmínka pro to, aby kvadrika f o rovnici (18,1) resp. (18,2) v souřadnicích rovnoběžkových homogenních resp. nehomogenních byla středová je, aby kromě $A \neq 0$ bylo též

$$A_{44} \neq 0, \tag{25,1}$$

kde, jak známo, A_{44} je k a_{44} příslušný minor v diskriminantu A.

Skutečně, jen je-li podmínka (25,1) splněna, nevlastní rovina není tečnou rovinou plochy f protínajíc ji v nesingulární kuželosečce f^* o rovnicích (19,5). Všechny body této kuželosečky jsou ovšem nevlastní; proto ji budeme nazývati nevlastní kuželosečkou plochy f. Minor A_{44} je zřejmě diskriminant kuželosečky f^* ve smyslu odst. 2, takže (25,1) skutečně vyjadřuje, že f^* není singulární kuželosečka.

K téže podmínce (25,1) bychom dospěli z rovnice (23,3) plochy f v souřadnicích rovinových; vyjadřuje pak, že souřadnice (0; 0; 0; 1) nevlastní roviny rovnici (23,3) nevyhovují, t. j. že nevlastní rovina není tečnou rovinou plochy f.

Souřadnice středu S kvadriky f o rovnici (18,1), nebo (18,2), vypočteme jako souřadnice pólu roviny (0; 0; 0; 1) podle (21,3) řešením soustavy rovnic

$$f_1(y) = 0, \quad f_2(y) = 0, \quad f_3(y) = 0, \tag{25,2}$$

z níž vyplývají souřadnice středu S

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = A_{14} : A_{24} : A_{34} : A_{44}. \tag{25,3}$$

Procházejíce pólem nevlastní roviny jsou roviny průměrové polárními rovinami nevlastních bodů. Je-li $(l; m; n; 0)$ jeden z nich, je

$$l\, f_1(x) + m\, f_2(x) + n\, f_3(x) = 0 \tag{25,4}$$

rovnice roviny průměrové, která je jeho polární rovinou ϱ. Směr o parametrech $(l; m; n)$ nazýváme sdružený se směrem roviny ϱ; průměr r tohoto směru je sdružen s průměrovou rovinou ϱ a obráceně.

Všeobecně lze definovati: směry dvou přímek, dvou rovin nebo přímky a roviny jsou sdružené vzhledem ke kvadrice f, jsou-li jejich nevlastní prvky polárně sdružené vzhledem k nevlastní kuželosečce f^* kvadriky f.

Tečné roviny v bodech diametrálního řezu, ležícího v ϱ, jsou vesměs rovnoběžny s r obalujíce válcovou plochu druhého stupně. Obráceně tečné roviny v průsečících průměru r s kvadrikou jsou rovnoběžny s ϱ.

Dva sdružené průměry středové kvadriky jsou sdruženy vzhledem k diametrálnímu řezu, ležícímu v jejich rovině. Existují též trojice průměrů navzájem sdružených. Označíme-li průměry takové trojice s jejich směrovými parametry $r\,(l; m; n)$, $r'\,(l'; m'; n')$, $r''\,(l''; m''; n'')$, jsou jejich nevlastní body vrcholy polárního trojúhelníka nevlastní kuželosečky f^* plochy f, což vyjadřuje rovnice

$$\begin{aligned} f^*(r, r') \equiv a_{11}ll' + a_{22}mm' + a_{33}nn' + a_{12}\,(lm' + l'm) + \\ + a_{13}\,(ln' + l'n) + a_{23}\,(mn' + n'm) = 0 \end{aligned} \tag{25,5}$$

a obdobné dvě rovnice

$$f^*(r, r'') = 0 \quad \text{a} \quad f^*(r', r'') = 0.$$

Dvojice stěn trojhranu r, r', r'' jsou sdružené roviny průměrové, t. j. prvá obsahuje průměr sdružený s druhou a obráceně.

Rovina nevlastní doplňuje trojhran r, r', r'' na polární čtyrstěn kvadriky f.

Takových čtyrstěnů existuje celé množství. Lze totiž prvý průměr r vésti středem S zcela libovolně, a průměr r' libovolně středem S v průměrové rovině ϱ sdružené s r, kdežto r'' je prvými dvěma jednoznačně určen.

Platí věta:

Rovnici středové kvadriky f v homogenních souřadnicích rovnoběžkových lze nekonečně mnoha způsoby redukovati na tvar (22,2), a to tím způsobem, že za souřadnicový čtyrstěn zvolíme jeden z polárních čtyrstěnů kvadriky f, jejichž jedna stěna je rovina nevlastní.

V nehomogenních souřadnicích rovnoběžkových tato redukovaná rovnice podle (5,2) zní

$$f(x, y, z) \equiv a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{44} = 0; \qquad (25,6)$$

z jejího tvaru je obráceně možno usouditi, že souřadnicový čtyrstěn je polární čtyrstěn středové kvadriky f, jehož jedna stěna je rovina nevlastní.

Kužel tečen středové kvadriky, procházejících jejím středem S, je t. zv. asymptotický kužel kvadriky f. Jeho tvořící přímky se dotýkají plochy f v bodech její nevlastní kuželosečky f^*, ve kterých tečné roviny kvadriky se ztotožňují stečnými rovinami kužele asymptotického.

Jeho rovnici obdržíme z (20,7), kam položme $z \equiv x$, $y_i = A_{i4}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ podle (25,3), takže tato rovnice zní

$$f^2(y, x) - f(y, y)\, f(x, x) = 0, \qquad (25,7)$$

kde

$$f(y, x) \equiv x_1 f_1(y) + x_2 f_2(y) + x_3 f_3(y) + x_4 f_4(y) \equiv x_4 f_4(y)$$

podle (20,3) a (25,2).

Stejným způsobem vychází

$$f(y, y) \equiv y_4 f_4(y),$$

kde ještě

$$f_4(y) \equiv a_{41}A_{14} + a_{42}A_{24} + a_{43}A_{34} + a_{44}A_{44} = A.$$

Rovnice asymptotického kužele (25,7) plochy f po krácení výrazem $-A \neq 0$ nabývá tvaru

$$A_{44} f(x, x) - A x_4^2 = 0,$$

čili v souřadnicích nehomogenních

$$A_{44} f(x, y, z) - A = 0. \qquad (25,8)$$

Libovolná rovina ϱ protíná kvadriku a její asymptotický kužel v dvojici kuželoseček dotýkajících se navzájem ve společných bodech roviny ϱ a nevlastní kuželosečky f^* plochy f. Rovina diametrální protíná asymptotický kužel v asymptotách diametrálního řezu plochy f, který v ní leží.

Rovina ϱ seče plochu f v parabole jen tehdy, když její nevlastní přímka je tečnou nevlastní kuželosečky f^*, t. j. jen když je rovnoběžná s některou tečnou rovinou asymptotického kužele. Může ovšem nastati i ten případ (odst. 33), že průsečná kuželosečka takové roviny s plochou není parabola, nýbrž je složena ze dvou rovnoběžných přímek.

Z nehomogenního tvaru (25,8) rovnice asymptotického kužele vyplývá velmi důležitá vlastnost minoru A_{44} diskriminantu A. Předpokládejme, že jsme rovnoběžkové souřadnice x, y, z transformovali v jiné rovnoběžkové souřadnice x', y', z' podle soustavy rovnic (12,4), kde podle (12,5) jest $\delta \neq 0$. Rovnice (18,2) kvadriky f nechť se tak transformovala v rovnici

$$f'(x', y', z') \equiv a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + a'_{33}z'^2 + 2a'_{12}x'y' +$$
$$+ 2a'_{13}x'z' + 2a'_{23}y'z' + 2a'_{14}x' + 2a'_{24}y' + 2a'_{34}z' + a'_{44} = 0.$$

Tvrdím, že jest

$$A'_{44} = \delta^2 A_{44}. \tag{25,9}$$

K důkazu stačí uvážiti, že soustava rovnic (12,4) je zvláštní případ soustavy (12,1) s determinantem

$$c = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \delta,$$

jak plyne rozvedením tohoto determinantu podle posledního řádku.

Při této transformaci je tedy podle (24,13)

$$A' = \delta^2 A. \tag{25,10}$$

Rovnice asymptotického kužele kvadriky v nových souřadnicích podle (25,8) zní

$$A'_{44} f'(x', y', z') - A' = 0, \tag{25,11}$$

odkud podle (25,10) a po dosazení $f'(x', y', z') \equiv f(x, y, z)$ vychází rovnice

$$A'_{44} f(x, y, z) - \delta^2 A = 0.$$

Jejím srovnáním s nehomogenním tvarem (25,8) vychází (25,9), což bylo dokázati.

Platí tedy věta:

Při transformaci rovnoběžkových souřadnic v jiné rovnoběžkové souřadnice násobí se minor A_{44} diskriminantu A rovnice kvadriky f čtvercem determinantu transformace.

26. Nestředové kvadriky. Nesingulární kvadrika, mající v nevlastní rovině tečnou rovinu, nazývá se kvadrikou nestředovou nebo paraboloidem.

Pól S_3 roviny nevlastní vzhledem k paraboloidu f je proto bod nevlastní.

Je to současně jediný existující singulární bod nevlastní kuželosečky f^* plochy f. Je tedy f^* složena ze dvou nevlastních přímek t_1, t_2, které jsou tvořícími přímkami paraboloidu a protínají se v S_3. Jsou vždy různé, a to buď reálné, nebo sdruženě imaginární. V prvém případě paraboloid se nazývá hyperbolický, v druhém eliptický.

Nutná a postačující podmínka pro to, aby rovnice (18,1) nebo (18,2) byla rovnicí paraboloidu v souřadnicích rovnoběžkových je — jak z úvah předchozího odstavce vyplývá —

$$A_{44} = 0. \tag{26,1}$$

S ohledem na to pro souřadnice dotykového bodu S_3 nevlastní roviny vychází z (25,3)

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = A_{14} : A_{24} : A_{34} : 0. \tag{26,2}$$

Jsou tedy A_{14}, A_{24}, A_{34} parametry směru charakterisovaného nevlastním bodem S_3; přímky tohoto směru budeme nazývati průměry a roviny s ním rovnoběžné průměrové roviny paraboloidu f.

Jsou tedy všechny průměry paraboloidu navzájem rovnoběžné; každý z nich protíná paraboloid — nehledě k nevlastnímu bodu S_3 — jen v jediném bodě, který je vždy reálný a vlastní.

Rovnici každého paraboloidu v souřadnicích rovnoběžkových lze dáti tvar (24,1) resp. (24,2). Skutečně, protože $x_4 = 0$ je rovnice roviny nevlastní, která je tečnou rovinou paraboloidu, stačí ve shodě s odst. 24 zvoliti v nevlastním bodě S_3 vrchol (0; 0; 1; 0) souřadnicového čtyrstěnu, další vrchol V (0; 0; 0; 1) v jiném (lastním) bodě paraboloidu, neležícím ani na t_1 ani na t_2, stěnu $x_3 = 0$ v tečné rovině bodu V a konečně stěny $x_1 = 0$ a $x_2 = 0$ ve dvou polárně sdružených rovinách, procházejících hranou S_3V.

Je-li takto zvolen souřadnicový čtyrstěn — což je zřejmě možno nekonečně mnoha způsoby — vyhovuje všem nutným a postačujícím podmínkám pro to, aby rovnice paraboloidu v rovnoběžkových souřadnicích měla tvar (24,1) resp. (24,2).

Nikoliv průměrová rovina ϱ je sdružena s průměrem r, když nevlastní přímka roviny ϱ a průměr r tvoří dvojici sdružených polár paraboloidu f.

Podle vět odstavců 23 a 24 paraboloid je hyperbolický, nebo eliptický, podle toho, je-li diskriminant jeho rovnice

$$A > 0 \text{ nebo } A < 0.$$

V prvém případě, t. j. na hyperbolickém paraboloidu, existují dva reguly přímek, z nichž prvý obsahuje nevlastní přímku t_1, druhý t_2. Odtud je, připomeneme-li si, že přímky různých regulů jsou incidentní, patrna věta:

Každý z obou regulů hyperbolického paraboloidu má řídící rovinu průměrovou, s níž jsou jeho přímky rovnoběžné. Obě řídící roviny jsou vždy různé.

Na eliptickém paraboloidu není žádných reálných přímek.

27. Roztřídění kvadrik podle reálnosti a podle druhu nevlastní kuželosečky. Nyní můžeme provésti roztřídění nesingulárních kvadrik podle těchto znaků:

1. Nevlastní kuželosečka f^* je nesingulární, nebo singulární (čili kvadrika f je středová, nebo paraboloid).

2. Nevlastní kuželosečka f^* je reálná, nebo imaginární.

3. Na kvadrice f existují, nebo neexistují reálné body (čili f je reálná, nebo imaginární kvadrika).

4. Na kvadrice f existují nebo neexistují reálné přímky (čili stručně kvadrika f je, nebo není přímková).

Tyto čtyři znaky nejsou ovšem navzájem zcela nezávislé. Tak na př. kvadrika přímková je též reálná, nebo na př. kvadrika se singulární reálnou kuželosečkou (hyperbolický paraboloid) je přímková i reálná a t. p. Neexistuje proto 16, nýbrž pouze 6 podle těchto znaků různých druhů nesingulárních kvadrik, a to:

1. Jednodílný hyperboloid je reálná přímková středová kvadrika s reálnou nevlastní kuželosečkou. Je zde $A > 0$, $A_{44} \neq 0$ a rovnici plochy v rovnoběžkových souřadnicích lze redukovati na tvar (25,6) se dvěma koeficienty kladnými a dvěma zápornými.

2. Dvojdílný hyperboloid je reálná středová kvadrika, nikoliv přímková, s reálnou nevlastní kuželosečkou.

Pro tento druh kvadrik je $A < 0$, $A_{44} \neq 0$ a rovnici plochy v rovnoběžkových souřadnicích lze dáti tvar (25,6) s koeficientem a_{11} kladným a ostatními zápornými.

3. Elipsoid je reálná středová kvadrika, nikoliv přímková, s imaginární nevlastní kuželosečkou. Je tedy $A < 0$, $A_{44} \neq 0$ a rovnice plochy v souřadnicích rovnoběžkových je redukovatelna na tvar (25,6) s jediným koeficientem a_{44} záporným.

4. Imaginární elipsoid je středová, nikoliv přímková, kvadrika, jejíž nevlastní kuželosečka je imaginární, což je ovšem obsaženo v tom, že celá kvadrika je imaginární.

V tomto případě je $A > 0$, $A_{44} \neq 0$ a v rovnoběžkových souřadnicích rovnici plochy je možno uvésti na tvar (25,6) s koeficienty vesměs kladnými.

Imaginární elipsoid zakončuje skupinu kvadrik středových. Přesto, že to je plocha imaginární, nelze ji pominouti již z toho důvodu, že s ní spojené geometrické útvary nejsou vesměs imaginární. Reálná je na př. polarita vzhledem k ní. Reálnost koeficientů rovnice kvadriky nemá totiž vždy za následek reálnost plochy, ale zaručuje reálnost polarity vzhledem k ní (při tom reálnou polaritou rozumějme takovou, ve které reálným bodům korespondují reálné roviny a obráceně). V důsledku toho je střed imaginárního elipsoidu reálný.

Do skupiny nestředových nesingulárních kvadrik náleží pouze dva nám již známé druhy kvadrik, a to:

5. Hyperbolický paraboloid, reálná přímková kvadrika s reálnou singulární kuželosečkou nevlastní. Je zde $A > 0$, $A_{44} = 0$ a rovnici plochy v souřadnicích rovnoběžkových lze redukovati na rovnici (24,2) s $a_{11}a_{22} < 0$.

6. Eliptický paraboloid, reálná nikoliv přímková kvadrika se singulární nevlastní kuželosečkou, složenou ze dvou sdruženě imaginárních nevlastních přímek. Pro ni jest $A < 0$, $A_{44} = 0$ a její rovnici lze redukovati na tvar (24,2) s $a_{11}a_{22} > 0$.

Tím je t. zv. afinní roztřídění nesingulárních kvadrik ukončeno. Doplňme jej stejným roztříděním kuželů a válců druhého stupně.

7. Kvadratický kužel reálný má reálný vlastní singulární bod, t. zv. vrchol, kterým procházejí všechny jeho tvořící přímky, vesměs reálné. Spojují vrchol kužele s nevlastními body jeho nevlastní kuželosečky, která je nesingulární a reálná. V jeho rovnici v souřadnicích rovnoběžkových je $A = 0$, $A_{44} \neq 0$ a lze ji redukovati na (25,6), kde $a_{44} = 0$ a zbývající tři koeficienty nemají vesměs stejná znaménka.

8. Kvadratický kužel imaginární má jediný bod reálný, který je vlastní a singulární a nazývá se opět vrchol kužele. Přímky tvořící jsou ovšem imaginární stejně jako nevlastní kuželosečka plochy, která je nesingulární. Koeficienty jeho rovnice v rovnoběžkových souřadnicích splňují vztahy $A = 0$, $A_{44} \neq 0$. Táž rovnice je redukovatelna na tvar (25,6) s $a_{44} = 0$ a se zbývajícími koeficienty vesměs kladnými.

9. Kvadratický válec hyperbolický má nevlastní kuželosečku singulární a reálnou, složenou ze dvou reálných nevlastních přímek. Jejich společným nevlastním bodem procházejí všechny tvořící přímky plochy, které jsou tedy rovnoběžné a reálné. Jeho rovnici lze redukovati na (25,6) s $a_{33} = 0$, $a_{11}a_{22} < 0$, takže je $A = A_{44} = 0$, což platí i u všech dalších druhů.

10. Kvadratický válec eliptický se od hyperbolického liší jen tím, že jeho singulární nevlastní kuželosečka je složena ze dvou sdruženě imaginárních přímek nevlastních, majících společný reálný bod nevlastní, jímž pro-

cházejí všechny tvořící přímky válce. Jeho rovnici lze redukovati na (25,6), kde $a_{33} = 0$, $a_{11}a_{44} < 0$, $a_{22}a_{44} < 0$.

11. Kvadratický válec imaginární má stejně jako předchozí druh nevlastní kuželosečku složenu ze dvou sdruženě imaginárních přímek nevlastních, jejichž společný nevlastní bod S je jediný reálný bod plochy. Je to ovšem bod singulární a procházejí jím všechny ostatní tvořící přímky kužele, které jsou ovšem též imaginární. V reálných rovinách procházejících bodem S leží dvojice těchto tvořících přímek, které jsou sdruženě imaginární a mají společný reálný bod S. Rovnici plochy lze opět redukovati na (25,6), kde $a_{33} = 0$, $a_{11}a_{44} > 0$, $a_{22}a_{44} > 0$.

12. Kvadratický válec parabolický je jediná plocha mezi nesingulárními kvadrikami, kuželi a válci, která má za nevlastní kuželosečku dvakráte počítanou reálnou nevlastní přímku u. Jinak řečeno, nevlastní rovina se parabolického válce podél u dotýká. Plocha je vždy reálná, neboť roviny obsahující u ji protínají po druhé v reálné vlastní přímce. Rovnici parabolického válce v rovnoběžkových souřadnicích lze dáti tvar (24,2) s $a_{22} = 0$.

Nevlastní kuželovečka středové kvadriky a její asymptotický kužel jsou vždy současně reálné, nebo imaginární; střed kvadriky je tudíž podle odst. **21** vnitřním bodem reálného elipsoidu, ale vnějším bodem obou hyperboloidů. Tím je dáno rozdělení bodů prostoru těmito plochami na vnitřní a vnější.

Příklady k cvičení.

97. Určete druh kvadriky dané rovnicí v souřadnicích rovnoběžkových (event. určete střed, směr průměrů, vrchol, nebo směr tvořících přímek):

a) $x^2 + y^2 + 5xy - 2xz - 16x - 9y + 2z + 9 = 0$, b) $2x^2 - 3y^2 - z^2 + 4xy - 8yz + 6xz + 2x - 8y - 11z - 2 = 0$, c) $3x^2 + 8y^2 + 6z^2 - 6x + 8y - 12z - 24 = 0$, d) $x_1^2 + x_3^2 - 2x_1x_4 - 2x_3x_4 - 2x_4^2 = 0$, e) $45x^2 + 116y^2 + 96yz + 144z^2 - 30x + 92y - 24z - 689 = 0$, f) $7x_1^2 + 100x_2^2 - 48x_1x_3 - 7x_3^2 + 62x_1x_4 - 100x_2x_4 - 34x_3x_4 + 98x_4^2 = 0$, g) $315x^2 + 216xy + 66y^2 + 24xz + 240yz + 464z^2 - 216x + 882y - 578z - 441 = 0$, h) $xy + z = 0$, i) $64x^2 + 75y^2 + 96xz +$

$+ 36z^2 + 30y - 297 = 0$, j) $3x^2 + 8xy - 3y^2 - 4xz - 2yz + z^2 - 8x + 6y + 2z = 0$, k) $16x^2 - 96xy + 144y^2 + 24xz - 72yz + 9z^2 - 133x - 108y - 480z + 20\frac{1}{4} = 0$. [Nejdříve určete hodnotu diskriminantu A, načež řešte soustavu tří rovnic $f_1 = f_2 = f_3 = 0$, čímž určíte souřadnice středu, nebo vrcholu kvadriky, popř. směr průměrů, nebo tvořících přímek kvadriky, nebo nevlastní přímku kvadriky, válce parabolického (po zavedení homog. souřadnic)].

Výsledky.

a) Jednodílný hyperboloid o středu $(1; 2; -2)$. b) Dvojdílný hyperboloid o středu $(\frac{1}{2}; -1; 0)$. c) Elipsoid o středu $(1; -\frac{1}{2}; 1)$; směry os $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ tvoří trojici směrů navzájem sdružených. d) Eliptický válec s osou v rovinách $x - 1 = 0$ a $z - 1 = 0$. e) Elipsoid o středu $(\frac{1}{8}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{4})$. f) Dvojdílný hyperboloid o středu $(-1; \frac{1}{2}; 1)$. g) Eliptický paraboloid o směrových parametrech průměru $(4; -12; 3)$. h) Hyperbolický paraboloid dotýkající se v počátku roviny $(\vec{x}\,\vec{y})$, s průměrem v ose $\vec{z}$. i) Elipt. válec s osou o parametr. rovnicích $x = 3t$, $y = -\frac{1}{8}$, $z = -4t$. j) Hyperbolický válec s osou o parametr. rovnicích $x = 2t$, $y = 1 + t$, $z = 5t$. k) Parabolický válec s nevlastní tvořící přímkou v rovině $4x - 12y + 3z = 0$. Tvořící přímky jsou rovnoběžny též s rovinou $f_4 = 0$, t. j. s rovinou $133x + 108y + 480z = 0$.]

98. Jaký je význam rovnice (25,8) v případech $A = 0$, $A_{44} \neq 0$ resp. $A \neq 0$, $A_{44} = 0$ resp. $A = 0$, $A_{44} = 0$? [Je-li kvadrika kužel, asymptotický kužel se s ní ztotožňuje. Je-li kvadrika paraboloid, rovnice (25,8) dává nevlastní rovinu dvakrát počítanou. Pro parab. válec rovnice je splněna identicky.]

99. Jakým podmínkám vyhovují koeficienty rovnice plochy v souř. rovnoběžkových, leží-li její střed a) v některé rovině souřadnic, b) na některé souřadnicové ose, c) v počátku? [a) Jeden, b) dva, c) všechny tři z minorů A_{14}, A_{24}, A_{34} jsou nuly (podle (25,4)).]

100. Jsou-li (x_0, y_0, z_0) souřadnice středu kvadriky f, lze rovnici jejího asymptotického kužele psáti ve tvaru

$$a_{11}(x-x_0)^2 + a_{22}(y-y_0)^2 + a_{33}(z-z_0)^2 + 2a_{12}(x-x_0)(y-y_0) + 2a_{13}(x-x_0)(z-z_0) + 2a_{23}(y-y_0)(z-z_0) = 0. \quad (27,1)$$

Dokažte! [Buď dokažte, že (27,1) je kužel o vrcholu $(x_0; y_0; z_0)$ a o nevlastní kuželosečce totožné s nevlastní kuželosečkou kvadriky f, nebo dokažte totožnost kužele (27,1) s kuželem (25,8) dosadivše za souřadnice středu podle (25,3)!]

101. Podle rovnice (27,1) příkladu **100** napište rovnice asymptotických kuželů kvadrik o rovnicích v příkl. **97** a), b), c), e), f). [a) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + 5(x - 1)(y - 2) - 2(x - 1) \cdot (z + 2) = 0$. b) $2(x - \frac{1}{2})^2 - 3(y + 1)^2 - z^2 + 4(x - \frac{1}{2}) \cdot (y + 1) - 8(y + 1)z + 6(x - \frac{1}{2})z = 0$. c) $3(x - 1)^2 + 8(y + \frac{1}{2})^2 + 6(z - 1)^2 = 0$. e) $45(x - \frac{1}{3})^2 + 116(y + \frac{1}{2})^2 + 144(z - \frac{1}{4})^2 + 96(y + \frac{1}{2})(z - \frac{1}{4}) = 0$. f) $7(x + 1)^2 + 100(y - \frac{1}{2})^2 - 7(z - 1)^2 - 48(x + 1)(z - 1) = 0$.]

102. Určete bod půlící tětivu elipsoidu úlohy c) příkladu **97**, která leží na přímce o směrových parametrech (2; 3; 4) a jde bodem (1; 1; 1) aniž určíte průsečíky přímky plochou. [Hledaný bod leží v průměrové rovině (25,4), sdružené s daným směrem tětivy, jejíž rovnice je $x + 4y + 4z - 3 = 0$, a má souřadnice $(\frac{3}{5}; \frac{2}{5}; \frac{1}{5})$.]

103. Určete rovnice průměrů sdružených se směry souřadnicových rovin! [Z (25,4) plyne, že směr. parametry průměru sdruženého s rovinou $x_i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ vyhovují dvěma rovnicím

$$l_i a_{1r} + m_i a_{2r} + n_i a_{3r} = 0,$$
$$l_i a_{1s} + m_i a_{2s} + n_i a_{3s} = 0,$$

kde r, s jsou ona z čísel 1, 2, 3, která jsou od i různá. Odtud plyne

$$l_i : m_i : n_i = \left\| \begin{matrix} a_{1r} & a_{2r} & a_{3r} \\ a_{1s} & a_{2s} & a_{3s} \end{matrix} \right\|.]$$

VI.

KVADRIKY V PRAVOÚHLÝCH KARTÉZSKÝCH SOUŘADNICÍCH. ČÁST VŠEOBECNÁ.

28. Plocha kulová. V dalším budeme stále předpokládati, že souřadnicový trojhran je pravoúhlý kartézský. Definujme znovu plochu kulovou, kterou jsme se již v odst. 18 zabývali:

Plocha kulová je množství bodů, jejichž vzdálenosti od bodu S (t. zv. středu plochy) jsou stejné.

Budiž a tato vzdálenost, již nazýváme poloměr kulové plochy.

Je-li tedy $(x; y; z)$ bod kulové plochy, vyjadřuje rovnice

$$f(x, y, z) \equiv (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - a^2 = 0, \quad (28,1)$$

že jeho vzdálenost od středu $S_0\,(x_0; y_0; z_0)$ plochy jest a; je tedy (28,1) rovnice kulové plochy.

Je to rovnice druhého stupně, proto kulová plocha je kvadrika. Z jejích koeficientů utvořené determinanty A a A_{44} mají hodnoty

$$A = -a^2, \quad A_{44} = 1, \quad (28,2)$$

z nichž je patrno, že při $a \neq 0$ kulová plocha je nesingulární středová kvadrika nepřímková o středu S. Je-li $a = 0$, (28,1) kulová plocha je singulární, a to imaginární kužel (viz odst. 27, druh 8) o vrcholu ve středu S, t. zv. kužel isotropický.

Je-li středem kulové plochy počátek ($S \equiv 0$), rovnice kvadriky se redukuje na

$$f(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0,$$

která má tvar (25,6) s jediným koeficientem a_{44} záporným, je-li $a \neq 0$.

Nesingulární kulová plocha je tedy ve smyslu afinního roztřídění (odst. 27, druh 3) elipsoid. Její nevlastní kuželosečka je proto imaginární; po zavedení homogenních souřadnic její rovnice vycházejí

$$x_4 = 0, \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0. \tag{28,4}$$

Tyto rovnice zřejmě neobsahují ani poloměr kulové plochy ani souřadnice jejího středu, takže každá kulová plocha, isotropické kužele nevyjímaje, jí prochází. Nazýváme ji proto a b s o l u t n í k r u ž n i c e k u l o v á.

Asymptotický kužel kulové plochy (28,1) podle (25,8) nebo (27,1) je isotropický kužel o vrcholu ve středu S. Libovolná rovina diametrální protíná kulovou plochu v kružnici o středu S a asymptotický kužel v asymptotách oné kružnice, t. j. ve dvojici sdružených přímek isotropických, které procházejí středem S.

Provedeme-li v (28,1) naznačené umocnění, obdržíme rovnici

$$\begin{aligned} f(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2x_0x - 2y_0y - 2z_0z + x_0^2 + \\ + y_0^2 + z_0^2 - a^2 = 0, \end{aligned} \tag{28,5}$$

již pišme stručněji

$$f(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 + Lx + My + Nz + P = 0. \tag{28,6}$$

Vzhledem k obecné rovnici kvadriky mají tedy koeficienty rovnice kulové plochy v pravoúhlé kartézské soustavě souřadnic tyto zvláštní vlastnosti:

1. Koeficienty u xy, xz, yz jsou nuly.

2. Koeficienty u x^2, y^2, z^2 jsou od nuly různé a rovnají se navzájem (aby se rovnaly právě jedné, jak je tomu v (28,6), lze docíliti násobením rovnice vhodným faktorem).

Tyto podmínky vyjadřuje soustava pěti rovnic mezi koeficienty a_{ik} rovnice kvadriky

$$a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0, \quad a_{11} = a_{22} = a_{33} \neq 0. \tag{28,7}$$

Je tedy kulová plocha určena čtyřmi nezávislými podmínkami, na př. čtyřmi vlastními body neležícími v jedné rovině (čtyrstěnu lze opsati jedinou kulovou plochu).

Je-li plocha kulová (isotr. kužel) dána rovnicí tvaru (28,6), vzniká otázka, jaké souřadnice má její střed a jaký jest její poloměr. Snadným porovnáním koeficientů rovnic (28,5) a (28,6) vychází pro hledané veličiny

$$\left.\begin{array}{c} x_0 = -\tfrac{1}{2}L, \quad y_0 = -\tfrac{1}{2}M, \quad z_0 = -\tfrac{1}{2}N, \\ a^2 = x_0{}^2 + y_0{}^2 + z_0{}^2 - P. \end{array}\right\} \qquad (28,8)$$

Na př. z rovnice kulové plochy

$$f(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 3z - 5 = 0$$

vycházejí souřadnice středu

$$x_0 = -2, \quad y_0 = 1, \quad z_0 = \tfrac{3}{2}$$

a dvojmoc poloměru

$$a^2 = 4 + 1 + \tfrac{9}{4} + 5 = \tfrac{49}{4}, \text{ t. j. } a = \tfrac{7}{2}.$$

Středový tvar (28,1) rovnice této kulové plochy proto zní

$$f(x, y, z) \equiv (x + 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - \tfrac{3}{2})^2 - \tfrac{49}{4} = 0.$$

Při $a^2 < 0$ kulová plocha je imaginární (viz odst. 27, druh 4). Její střed a polarita vzhledem k ní jsou však reálné.

Polaritě vzhledem ke kulové ploše zvláštní význam dává věta:

Dvě přímky, dvě roviny nebo přímka a rovina jsou navzájem kolmé jen tehdy, když jejich směry jsou sdružené vzhledem ke kterékoliv kulové ploše.

Jinak řečeno, takové útvary jsou kolmé jen tehdy, když jejich nevlastní prvky jsou polárně sdružené vzhledem k absolutní kulové kružnici.

Větu dokážeme nejdříve pro dvě přímky o trojicích směrových parametrů $(l_1; m_1; n_1)$ resp. $(l_2; m_2; n_2)$. Nutná a postačující podmínka jejich kolmosti, jak víme, je (7,3). Avšak také podmínka, vyjadřující, že nevlastní body obou přímek $(l_1; m_1; n; 0)$ resp. $(l_2; m_2; n_2; 0)$ jsou polárně sdružené vzhledem k absolutní kulové kružnici (28,4) je zřejmě též (7,3), což bylo dokázati.

Odtud plyne, že nevlastní přímka roviny kolmé k danému směru je polára nevlastního bodu v tomto směru ležícího vzhledem k absolutní kulové kružnici a obráceně, osnova kolmic k dané rovině má společný nevlastní bod (někdy též zv. orthocentrum roviny), který je pólem nevlastní přímky dané roviny vzhledem k téže absolutní kružnici. Stejně je nyní zřejma správnost uvedené věty pro dvojici rovin.

Příklady k cvičení.

104. Jak zní rovnice kulové plochy, která prochází body a) (0; 0; 0), (0; 0; 2), (0; 3; 0), (— 1; 0; 0;). b) (0; 0; 0), (1; 0; 0), (0; 1; 0), (0; 0; 1)? [a) $x^2 + y^2 + z^2 + x - 3y - 2z = 0$. b) $x^2 + y^2 + z^2 - x - y - z = 0$.]

105. Určete souřadnice středů a poloměry obou kulových ploch příkladu **104** a napište středové tvary jejich! [a) $S\,(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; 1)$, $a = \frac{1}{2}\sqrt{14}$. b) $S\,(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2})$, $a = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.]

106. Určete rovnice tečných rovin obou ploch příkladu **104**, které se jich dotýkají v počátku! [a) $x - 3y - 2z = 0$. b) $x + y + z = 0$.]

107. Kdy kulová plocha o rovnici (28,6) je reálná, kdy singulární, kdy imaginární a nesingulární? [Když $L^2 + M^2 + N^2 - 4P \gtreqqless 0$.]

108. Je-li $P_1\,(x_1; y_1; z_1)$ libovolný bod, $f(x, y, z) = 0$ rovnice kulové plochy f, je $\dfrac{f(x_1, y_1, z_1)}{a_{11}}$ t. zv. mocnost bodu P_1 vzhledem k ploše f.

Ukažte, že její význam je týž jako význam mocnosti bodu ke kružnici!

109. Určete geometrické místo bodů stejné mocnosti ke dvěma kulovým plochám. V čem toto geometrické místo protíná obě plochy? [Rovina, zvaná potenční, kolmá na střednou; obě plochy protíná v jejich průsečné kružnici.]

110. Dokažte, že roviny potenční tří kulových ploch náležejí jednomu svazku. Jaká je poloha jeho osy? [Kolmá na rovinu tří středů.]

111. Dokažte, že roviny potenční čtyř kulových ploch náležejí jednomu trsu, jehož vrchol (t. zv. potenční střed) určete!

112. Napište rovnici geometrického místa středů kulových ploch, které se dotýkají a) kulové plochy $x^2 + y^2 + (z + e)^2 - 4a^2 = 0$ a procházejí bodem $(0; 0; e)$; b) roviny $z - \frac{1}{2}p = 0$ a procházejí bodem $(0; 0; \frac{1}{2}p)$! [a) Středová rotační kvadrika $\dfrac{x^2 + y^2}{a^2 - e^2} + \dfrac{z^2}{a^2} - 1 = 0$. b) Rot. paraboloid (18,9).]

29. Charakteristická rovnice kvadriky. Hlavní směry a roviny. Buď (18,1) homogenní a (18,2) nehomogenní rovnice kvadriky f v pravoúhlých kartézských souřadnicích. Nevlastní kuželosečka f^* kvadriky f má rovnice (19,5) a je totožna s absolutní kulovou kružnicí (28,4) jen tehdy, když f je kulová plocha. Není-li tomu tak, obě kuželosečky v rovině nevlastní jsou různé a určují t. zv. charakteristický svazek kuželoseček (viz odst. 2) o rovnicích

$$x_4 = 0, \quad h(x, x) \equiv f^*(x, x) - \varrho(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = 0,$$

neboli

$$x_4 = 0, \ h(x, x) \equiv (a_{11} - \varrho)\, x_1^2 + (a_{22} - \varrho)\, x_2^2 + (a_{33} - \varrho)\, x_3^2 + \\ + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0. \qquad (29,1)$$

Jsou-li $ABCD$ body base charakteristického svazku — ovšem imaginární, neboť na absolutní kružnici není reálných bodů — pak singulárním kuželosečkám, vzniklým spojováním dvojic těchto bodů, náležející hodnoty ϱ jsou kořeny rovnice (srovnej s 2,18)

$$D(\varrho) \equiv \begin{vmatrix} a_{11} - \varrho & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \varrho & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \varrho \end{vmatrix} = 0, \qquad (29,2)$$

čili rovnice

$$-D(\varrho) \equiv \varrho^3 - I\varrho^2 + J\varrho - A_{44} = 0, \qquad (29,3)$$

kde

$$I = a_{11} + a_{22} + a_{33},$$
$$J = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 + a_{22}a_{33} - a_{23}^2 + a_{11}a_{33} - a_{13}^2$$

a A_{44} je známý minor diskriminantu A.

Rovnice (29,3) se nazývá charakteristickou rovnicí kvadriky f. Její důležitost je patrna z věty:

Kořeny charakteristické rovnice nezávisí na poloze pravoúhlé kartézské soustavy souřadnic vzhledem ke kvadrice f.

Jinak řečeno, na kořeny charakteristické rovnice nemá vlivu ortogonální transformace (12,4) s koeficienty (12,8) a s $\delta = +1$.

Abychom to dokázali, uvažme, že $D(\varrho)$ je minor $\bar{A}_{44}$ diskriminantu rovnice kvadriky

$$(a_{11} - \varrho)\, x^2 + (a_{22} - \varrho)\, y^2 + (a_{33} - \varrho)\, z^2 + 2a_{12}xy + \\ + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0. \quad (29,4)$$

Změní-li se vlivem uvažované transformace koeficienty a_{ik} v a'_{ik}, zní charakteristická rovnice v nových souřadnicích

$$D'(\varrho) \equiv \begin{vmatrix} a'_{11} - \varrho & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} - \varrho & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} - \varrho \end{vmatrix} = 0,$$

čili

$$- D'(\varrho) \equiv \varrho^3 - I'\varrho^2 + J'\varrho - A'_{44} = 0.$$

Je však $D'(\varrho)$ minor $\bar{A}'_{44}$ diskriminantu $\bar{A}'$ rovnice vznikající z (29,4) uvažovanou ortogonální transformací (viz 12, 13!), takže podle (25,9) jest

$$D'(\varrho) = D(\varrho), \quad (29,5)$$

a to při každé hodnotě ϱ. Proto musí být

$$I' = I, \quad J' = J, \quad A'_{44} = A_{44}.$$

Poslední z těchto rovnic jsme poznali již dříve za obecnějších předpokladů, stejně jako rovnici $A' = A$.

Výrazy I, J, A_{44}, A, na jejichž hodnotu nemá vliv ortogonální transformace souřadnic, nazývají se **ortogonální invarianty kvadriky** f. Jimi jest kvadrika jednoznačně určena až na svou polohu vzhledem k souřadnicové soustavě. Každý další ortogonální invariant kvadriky f jest jejich funkcí; platí to i o kořenech $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ charakteristické rovnice (29,3). Ukažme nyní další vlastnost těchto kořenů, již vyjadřuje věta:

Kořeny charakteristické rovnice jsou reálné.

Abychom ji dokázali, uvažme, že $D(\varrho) = 0$ je nutná a postačující podmínka pro to, aby soustava lineárních rovnic

$$f^*_1(x) = \varrho x_1, \ f^*_2(x) = \varrho x_2, \ f^*_3(x) = \varrho x_3, \qquad (29,6)$$

kde $f^*_1(x)$ atd. jsou z kvadratické formy $f^*(x, x)$ (viz 19,5) utvořené trojčleny

$$\begin{aligned} f^*_1(x) &\equiv a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ f^*_2(x) &\equiv a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ f^*_3(x) &\equiv a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3, \end{aligned}$$

měla řešení $(x_1; x_2; x_3)$ různé od $(0; 0; 0)$.

Provedeme důkaz nepřímý. Předpokládejme, že v soustavě (29,6) ϱ je komplexní kořen rovnice $D(\varrho) = 0$. Pak ovšem nutno předpokládati, že i řešení $(x_1; x_2; x_3)$ této soustavy je trojice čísel komplexních. Položme proto

$$x_1 = y_1 + iz_1, \quad x_2 = y_2 + iz_2, \quad x_3 = y_3 + iz_3,$$

čili symbolicky

$$x = y + iz.$$

Nechť dále $\bar{x}_1 = y_1 - iz_1$ atd. je trojice komplexních čísel sdružených s x_1, x_2, x_3, t. j. symbolicky

$$\bar{x} = y - iz.$$

Podle identity (20,3), přizpůsobené pro formu $f^*(x, x)$, je

$$f^*(x, \bar{x}) \equiv \bar{x}_1 f^*_1(x) + \bar{x}_2 f^*_2(x) + \bar{x}_3 f^*_3(x). \qquad (29,7)$$

Z této identity spojením se soustavou rovnic (29,6) vychází rovnice

$$f^*(x, \bar{x}) = \varrho(x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + x_3\bar{x}_3). \qquad (29,8)$$

Levá strana této rovnice je reálná, neboť

$$f^*(x, \bar{x}) = f^*(y + iz, y - iz) = f^*(y, y) + f^*(z, z).$$

Avšak i koeficient při ϱ v rovnici (29,8) je číslo reálné a kladné, neboť zřejmě jest

$$x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + x_3\bar{x}_3 = y_1^2 + z_1^2 + y_2^2 + z_2^2 + y_3^2 + z_3^2,$$

takže ϱ nemůže býti komplexní číslo, proti předpokladu.

Důkaz věty je tím proveden. Současně je zřejmé, že i řešení $(x_1; x_2; x_3)$ soustavy (29,6) je trojice reálných čísel.

Označme h_i singulární kuželosečku charakteristického svazku (29,1), jejíž rovnice obdržíme dosazením kořene ϱ_i $(i = 1, 2, 3)$ rovnice (29,2) do (29,1). Protože všechna ϱ_i jsou reálná, jsou reálné i rovnice těchto singulárních kuželoseček. Z toho plyne, že každá ze singulárních kuželoseček η_i má alespoň jeden reálný singulární bod S_i, t. j. tato kuželosečka je složena ze dvou nevlastních přímek reálných a různých nebo sdruženě imaginárních nebo reálných a ztotožňujících se.

Tvrdíme, že trojice směrových parametrů $(l_i; m_i; n_i)$ bodu S_i je totožna s řešením soustavy rovnic (29,6), kde $\varrho = \varrho_i$ je kořen rovnice charakteristické, t. j. platí rovnice

$$\left.\begin{aligned} a_{11}l_i + a_{12}m_i + a_{13}n_i &= \varrho_i l_i, \\ a_{21}l_i + a_{22}m_i + a_{23}n_i &= \varrho_i m_i, \\ a_{31}l_i + a_{32}m_i + a_{33}n_i &= \varrho_i n_i. \end{aligned}\right\} \qquad (29,9)$$

Skutečně, bod S_i je dotykový bod nevlastní roviny $(0; 0; 0; 1)$ s nestředovou kvadrikou, v jejíž rovnici (29,4) je $\varrho = \varrho_i$. Podle (21,3) vyhovují souřadnice bodu S_i právě soustavě (29,9), což bylo dokázati.

Směry charakterisované singulárními nevlastními body S_i singulárních kuželoseček charakteristického svazku nazýváme *hlavní směry* kvadriky f.

Platí věta:

Jsou-li ϱ_1, ϱ_2 dva různé kořeny charakteristické rovnice, pak body S_1, S_2 jsou polárně sdružené jak vzhledem k absolutní kulové kružnici, tak vzhledem ke kvadrice f.

Jinak řečeno, dva hlavní směry, korespondující dvěma různým kořenům charakteristické rovnice, jsou kolmé a vzhledem ke kvadrice f sdružené.

Že oba hlavní směry jsou kolmé, dokážeme z obou soustav rovnic (29,9), s $i = 1$ resp. $i = 2$. Násobme prvou rovnici prvé soustavy faktorem l_2, druhou faktorem m_2, třetí faktorem n_2, načež násobme prvou rovnici druhé soustavy faktorem l_1, druhou m_1, třetí n_1, načež všech šest rovnic sečtěme!

Vychází

$$(\varrho_1 - \varrho_2)(l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2) = 0;$$

za učiněného předpokladu $\varrho_1 \neq \varrho_2$ je roven nule pouze druhý z obou činitelů, t. j. platí rovnice (7,3), vyjadřující kolmost obou hlavních směrů, čímž prvá část věty je dokázána.

Druhou část dokážeme z rovnice polární roviny bodu S_1 $(l_1; m_1; n_1; 0)$, která podle (20,3) zní

$$(a_{11}l_1 + a_{12}m_1 + a_{13}n_1)\,x_1 + (a_{21}l_1 + a_{22}m_1 + a_{23}n_1)\,x_2 + \\ + (a_{31}l_1 + a_{32}m_1 + a_{33}n_1)\,x_3 + (a_{41}l_1 + a_{42}m_1 + a_{43}n_1)\,x_4 = 0,$$

t. j. podle (29,9)

$$\varrho_1(l_1x_1 + m_1x_2 + n_1x_3) + (a_{41}l_1 + a_{42}m_1 + a_{43}n_1)x_4 = 0, \quad (29,10)$$

jíž však — podle již dokázané prvé části věty — souřadnice singulárního nevlastního bodu S_2 $(l_2; m_2; n_2; 0)$ vyhovují, čímž je i druhá část věty dokázána.

Z ní plyne (srovnej s příkl. 11, kapit. I.):

Jsou-li všechny tři kořeny charakteristické rovnice různé, jsou singulární body $S_1S_2S_3$ vrcholy společného polárního trojúhelníka nevlastní kuželosečky f^* plochy f a absolutní kulové kružnice.

Polární rovina (29,10) bodu S_1 se nazývá hlavní rovina kvadriky f, sdružená se směrem $(l_1; m_1; n_1)$, je-li to rovina vlastní. Stojí na sdružený směr kolmo a kvadrika je podle ní kolmo souměrná.

Dosud jsme předpokládali, že kořeny charakteristické rovnice jsou různé. Nyní naopak předpokládejme, že $\varrho_2 = \varrho_1$, $\varrho_3 \neq \varrho_1$, takže ϱ_1 je dvojnásobný, ϱ_3 jednoduchý kořen. Pak charakteristická rovnice má tvar

$$-D(\varrho) \equiv (\varrho - \varrho_1)^2 (\varrho - \varrho_3) = 0. \qquad (29,11)$$

Protože kořeny této rovnice nezávisejí na poloze souřadnicového trojhranu vzhledem ke kvadrice, můžeme předpokládati, že osa $\vec{z}$ má směr totožný s hlavním směrem korespondujícím jednoduchému kořeni ϱ_3. Pro $i = 3$ ze soustavy (29,9) nutně tedy plyne $l_3 = m_3 = 0$, $n_3 \neq 0$, takže musí býti

$$a_{13} = a_{23} = 0, \quad a_{33} = \varrho_3.$$

S ohledem na tyto hodnoty koeficientů je

$$D(\varrho) \equiv \begin{vmatrix} a_{11} - \varrho & a_{12} & 0 \\ a_{12} & a_{22} - \varrho & 0 \\ 0 & 0 & \varrho_3 - \varrho \end{vmatrix},$$

t. j.

$$-D(\varrho) \equiv (\varrho - \varrho_3)\,[\varrho^2 - (a_{11} + a_{22})\,\varrho + a_{11}a_{22} - a_{12}{}^2].$$

Je-li $\varrho_1 = \varrho_2$, je výraz

$$\varrho^2 - (a_{11} + a_{22})\,\varrho + a_{11}a_{22} - a_{12}{}^2 \tag{29,12}$$

úplný čtverec, proto diskriminant

$$(a_{11} + a_{22})^2 - 4\,(a_{11}a_{22} - a_{12}{}^2) \equiv (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}{}^2$$

je roven nule. To je však možno — protože koeficienty a_{ik} jsou reálná čísla — jen tak, že

$$a_{11} - a_{22} = 0, \quad a_{12} = 0. \tag{29,13}$$

Pak výraz (29,12) skutečně je úplný čtverec

$$(\varrho - a_{11})^2$$

takže

$$\varrho_1 = \varrho_2 = a_{11}. \tag{29,14}$$

S ohledem na (29,13) a (29,14) soustava rovnic (29,9) pro $i = 1$ se redukuje na soustavu $\varrho_1 l_1 = \varrho_1 l_1$, $\varrho_1 m_1 = \varrho_1 m_1$, $\varrho_3 n_1 = \varrho_1 n_1$, jejíž první dvě rovnice jsou identity a z třetí vychází $n_1 = 0$. Lze tedy vysloviti větu:

Má-li charakteristická rovnice jeden kořen dvojnásobný a jeden jednoduchý, náleží dvojnásobnému kořeni množství hlavních směrů; jsou to všechny směry kolmé na hlavní směr náležející kořeni jednoduchému.

Vlivem rovnic (29,13) a (29,14) rovnice kvadriky f se redukuje na rovnici

$$f(x, y, z) \equiv \varrho_1(x^2 + y^2) + \varrho_3 z^2 + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + \\ + a_{44} = 0. \qquad (29{,}15)$$

Je-li $\varrho_1\varrho_3 \neq 0$, transformuje se tato rovnice translací

$$x = x' - \frac{a_{14}}{\varrho_1}, \quad y = y' - \frac{a_{24}}{\varrho_1}, \quad z = z' - \frac{a_{34}}{\varrho_3}$$

v rovnici

$$\varrho_1(x'^2 + y'^2) + \varrho_3 z'^2 + a'_{44} = 0. \qquad (29{,}16)$$

Srovnáním s (18,7) snadno zjistíme, že při $a'_{44} \neq 0$ je to rovnice rotační středové kvadriky, při $a'_{44} = 0$ rotačního kužele; v obou případech rotační osa plochy je $\vec{z}$.

Je-li $\varrho_1 = \varrho_3 \neq 0$, plocha (29,16) je nesingulární kulová (při $a'_{44} \neq 0$), nebo isotropický kužel (při $a'_{44} = 0$). Pak ovšem — a jen tenkráte — charakteristická rovnice má trojnásobný od nuly různý kořen.

Je-li $\varrho_1 \neq 0$, $\varrho_3 = 0$, $a_{34} \neq 0$ transformuje se rovnice (29,15) translací

$$x = x' - \frac{a_{14}}{\varrho_1}, \quad y = y' - \frac{a_{24}}{\varrho_1}, \quad z = z' - \frac{a_{44}}{2a_{34}} - \frac{a_{14}^2 + a_{24}^2}{2\varrho_1 a_{34}}$$

v rovnici

$$\varrho_1(x'^2 + y'^2) + 2a_{34}z' = 0,$$

ze které srovnáním s (18,9) snadno poznáváme, že kvadrika f je rotační paraboloid o rotační ose $\vec{z}'$.

Je-li $\varrho_1 \neq 0$, $\varrho_3 = 0$, $a_{34} = 0$, pak translací

$$x = x' - \frac{a_{14}}{\varrho_1}, \quad y = y' - \frac{a_{24}}{\varrho_1}, \quad z = z'$$

rovnice (29,15) se transformuje v rovnici

$$\varrho_1(x'^2 + y'^2) + a'_{44} = 0,$$

což je rovnice rotačního válce o ose $\vec{z}$ (při $a'_{44} \neq 0$), nebo dvojice sdružených imaginárních rovin (t. zv. rovin isotropických), jejichž imaginární nevlastní přímky jsou tečny absolutní kulové kružnice (při $a'_{44} = 0$).

Konečně při $\varrho_1 = 0$, $\varrho_3 \neq 0$ vychází po zavedení homogenních souřadnic do (29,15), že nevlastní kuželosečka f^* plochy f je dvakrát počítaná nevlastní přímka $x_3 = x_4 = 0$; plocha je parabolický válec, je-li alespoň jeden z koeficientů a_{14}, a_{24} od nuly různý. Při $a_{14} = a_{24} = 0$ plocha je složena ze dvou rovnoběžných rovin různých nebo splývajících.

Při $\varrho_1 = \varrho_3 = 0$ kvadrika je složena ze dvou rovin, z nichž alespoň jedna je nevlastní.

Význam dvojnásobného kořene charakteristické rovnice můžeme nyní, doplňujíce poslední větu, vyjádřiti v celku takto:

Je-li $\varrho_1 = \varrho_2$ dvojnásobný kořen charakteristické rovnice kvadriky f, nikoliv složené z rovin, je f plocha rotační, a to středová, nebo kužel při $\varrho_1 \neq 0$, $\varrho_3 \neq 0$ (při $\varrho_1 = \varrho_3 \neq 0$ plocha kulová, nebo isotrop. kužel), rotační paraboloid, nebo rotační válec při $\varrho_1 \neq 0$, $\varrho_3 = 0$, parabolický válec při $\varrho_1 = 0$, $\varrho_3 \neq 0$. Směr rotační osy plochy je vždy totožný s oním hlavním směrem, který koresponduje jednoduchému kořeni charakteristické rovnice.

Ukončivše rozbor případu s dvojnásobným kořenem, uvažme obecně význam nulového kořene charakteristické rovnice. Nutná a postačující podmínka toho, aby jeden z kořenů charakteristické rovnice (29,3) byl nula, zřejmě je $A_{44} = 0$, t. j. kvadrika je nestředová (paraboloid, válec).

30. Prvá redukce rovnice kvadriky na tvar seminormální. O reálnosti cyklických rovin. Z rozboru odstavce 29 vyplývá — ať f je jakákoliv kvadrika — že vždy existuje alespoň jedna trojice navzájem kolmých hlavních směrů plochy f.

Jen jedna taková trojice existuje u kvadriky, jejíž charakteristická rovnice má pouze jednoduché kořeny. V případě jednoho kořene dvojnásobného je pouze onen hlavní směr, který koresponduje kořeni jednoduchému, jednoznačně určen. Za další dva hlavní směry trojice je možno voliti kterékoliv dva směry, kolmé k prvému a navzájem. Konečně v případě od nuly různého kořene trojnásobného kvadrika je kulová plocha (isotropický kužel); tu patrně kterékoliv tři navzájem kolmé směry lze pokládati za trojici směrů hlavních.

Proto můžeme předpokládati, aniž bychom tím některou kvadriku vylučovali, že rovnice kvadriky f byla ortogonální substitucí (12,4) s $\delta = +1$ a s $d_{14} = d_{24} = d_{34} = 0$ transformována tak, že směry nových souřadnicových os $\vec{x}'$, $\vec{y}'$, $\vec{z}'$ se ztotožňují s hlavními směry kvadriky (pootočení souřadnicové soustavy okolo počátku).

V odst. 29 jsme zjistili, že jen tehdy směr osy $\vec{z}$ se ztotožňuje s hlavním směrem korespondujícím kořeni ϱ_3, když $a_{13} = a_{23} = 0$, $a_{33} = \varrho_3$. Odtud lze usouditi, že v nové souřadnicové soustavě $\vec{x}'$, $\vec{y}'$, $\vec{z}'$, jejíž osy mají směry totožné s hlavními směry kvadriky, korespondujícími kořenům ϱ_1, resp. ϱ_2, resp. ϱ_3, rovnice charakteristické, redukuje se rovnice kvadriky na rovnici

$$f'(x', y', z') = \varrho_1 x'^2 + \varrho_2 y'^2 + \varrho_3 z'^2 + 2a'_{14}x' + 2a'_{24}y' + \\ + 2a'_{34}z' + a'_{44} = 0, \qquad (30,1)$$

kde $a'_{44} = a_{44}$.

Budeme ji nazývati seminormálním tvarem rovnice kvadriky f.

Z ní vychází hodnoty ortogonálních invariantů

$$\left.\begin{aligned} I = I' = \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3, \\ J' = J' = \varrho_2\varrho_3 + \varrho_1\varrho_3 + \varrho_1\varrho_2, \quad A_{44} = A'_{44} = \varrho_1\varrho_2\varrho_3, \\ A = A' = \begin{vmatrix} \varrho_1 & 0 & 0 & a'_{14} \\ 0 & \varrho_2 & 0 & a'_{24} \\ 0 & 0 & \varrho_3 & a'_{34} \\ a'_{14} & a'_{24} & a'_{34} & a'_{44} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a'_{44}\varrho_1\varrho_2\varrho_3 - a'^2_{14}\varrho_2\varrho_3 - \\ - a'^2_{24}\varrho_1\varrho_3 - a'^2_{34}\varrho_1\varrho_2 \end{array} \end{aligned}\right\} \quad (30,2)$$

K tomu připomeňme, že jsme již odůvodnili, proč se budeme zabývati pouze kvadrikami nikoliv složenými z rovin, t. j. takovými, jejichž rovnice má diskriminant A hodnosti alespoň 3.

Danou rovnici kvadriky f lze transformovati (redukovati) na seminormální tvar (30,1) pouhým pootočením soustavy souřadnic okolo jejího počátku, neboť tím lze docíliti, aby směry nových os byly totožny s hlavními směry kvadriky f.

Pak rovnice (29,1) jejího charakteristického svazku kuželoseček v rovině nevlastní se zjednodušují na

$$x'_4 = 0, \quad (\varrho_1 - \varrho)\, x'^2_1 + (\varrho_2 - \varrho)\, x'^2_2 + (\varrho_3 - \varrho)\, x'^2_3 = 0, \quad (30,3)$$

neboť rovnice nevlastní kuželosečky plochy (30,1) jsou

$$x'_4 = 0, \quad f'^*(x', x') \equiv \varrho_1 x'^2 + \varrho_2 x'^2_2 + \varrho_3 x'^2_3 = 0, \quad (30,4)$$

kdežto rovnice absolutní kulové kružnice v důsledku rovnice (12,13) podržují svůj tvar

$$x'_4 = 0, \qquad x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3 = 0.$$

Označíme-li p_i, q_i obě nevlastní přímky, z nichž je složena singulární kuželosečka h_i ($i = 1, 2, 3$) svazku (30,3), jest jejich průsečík $S_i \equiv (p_i q_i)$, jak známo, vždy reálný nevlastní bod.

Rovnice těchto singulárních kuželoseček patrně jsou

$$\left.\begin{aligned} & x'_4 = 0, \; h_1(x', x') \equiv (\varrho_2 - \varrho_1)\, x'^2_2 + (\varrho_3 - \varrho_1)\, x'^2_3 = 0 \\ & \text{resp.} \\ & x'_4 = 0, \; h_2(x', x') \equiv (\varrho_1 - \varrho_2)\, x'^2_1 + (\varrho_3 - \varrho_2)\, x'^2_3 = 0 \\ & \text{resp.} \\ & x'_4 = 0, \; h_3(x', x') \equiv (\varrho_1 - \varrho_3)\, x'^2_1 + (\varrho_2 - \varrho_3)\, x'^2_2 = 0. \end{aligned}\right\} \quad (30,5)$$

Kterákoliv z šesti nevlastních přímek p_i, q_i má zřejmý geometrický význam: je nevlastní přímkou rovin, které protínají kvadriku f v kružnicích, po případě v dvojicích přímek isotropických, ovšem za předpokladu, že uvažovaná nevlastní přímka není ani tvořící přímkou kvadriky f ani tečnou absolutní kulové kružnice.

Takové roviny budeme nazývati cyklické.

Bez ohledu na reálnost lze tedy říci, že na kvadrice existuje obecně 6 soustav kružnic, vyťatých na ní šesti osnovami cyklických rovin.

Počet těchto osnov se zmenší jen tehdy, když obě přímky p_i, q_i, skládající singulární kuželosečku h_i, se ztotožňují. To však podle (30,5) nastane jen tehdy, když dva z kořenů charakteristické rovnice jsou si rovny, na př. když $\varrho_1 = \varrho_2$. Pak se však ztotožňuje celá kuželosečka h_1 s h_2, t. j. přímky p_1, q_1, p_2, q_2 splývají v jediné přímce t o rovnicích $x'_3 =$ $= x'_4 = 0$, t. j. v nevlastní přímce roviny $(\overrightarrow{x'}\overrightarrow{y'})$.

Plocha f je pak — jak jsme v odst. 29 zjistili — buď rotační kvadrika o ose $\overrightarrow{z'}$, nebo parabolický válec.

V prvém z obou případů v seminormálním tvaru (30,1) rovnice plochy f je $\varrho_1 \neq 0$ a — po zavedení homogenních souřadnic — rovnice nevlastní kuželosečky plochy f jsou

$$x'_4 = 0, \quad \varrho_1(x'^2_1 + x'^2_2) + \varrho_3 x'^2_3 = 0. \qquad (30,6)$$

Z nich je patrno, že nevlastní kuželosečka plochy f se dotýká absolutní kružnice ve dvou bodech přímky t.

Obráceně, rotační kvadriky jsou ony, jejichž nevlastní kuželosečky se dotýkají absolutní kružnice kulové ve dvou sdruženě imaginárních bodech.

Každý bod nevlastní přímky t charakterisuje jeden z hlavních směrů rotační kvadriky, náležející dvojnásobnému kořeni charakteristické rovnice. Přímka t je vždy reálná a její pól — současně týž vzhledem ke všem kuželosečkám charakteristického svazku — určuje hlavní směr (isolovaný) náležející jednoduchému kořeni ϱ_3. Je to současně singulární bod S_3 kuželosečky h_3, která je složena z obou sdruženě imaginárních tečen p_3, q_3 absolutní kružnice v jejích bodech na t. Nevlastní přímky p_3, q_3 proto neurčují žádné osnovy cyklických rovin. Na rotační kvadrice existuje tudíž jediná soustava kružnic a to v reálných rovinách kolmých na rotační osu.

V případě parabolického válce ($\varrho_1 = 0$, $\varrho_3 \neq 0$) nevlastní rovina se dotýká válce podél nevlastní a reálné jeho tvořící přímky t, s níž se p_1, q_1, p_2, q_2 opět ztotožňují. Avšak roviny o nevlastní přímce t nejsou cyklickými rovinami válce, neboť jej protínají kromě v nevlastní přímce t v jiné jeho přímce tvořící, vždy reálné. Singulární kuželosečka h_3 je i zde složena ze dvou sdruženě imaginárních tečen absol. kružnice v jejích bodech na t. Na parabolickém válci neexistují tudíž kružnice a plocha nemá žádných cyklických rovin.

Pravým opakem tohoto případu je plocha kulová, resp. kužel isotropický; pro tuto plochu každá reálná rovina jest cyklická.

Přistupme nyní k otázce reálnosti osnov cyklických rovin obecné kvadriky f.

Z (30,5) lze snadno vyčísti nutnou a postačující podmínku pro to, aby nevlastní přímky p_i, q_i, skládající singulární kuželosečku h_i, byly reálné. Jsou-li všechny tři kořeny charakteristické rovnice navzájem různé a tak uspořádány, že

$$\varrho_1 < \varrho_2 < \varrho_3,$$

jsou oba koeficienty u čtverců souřadnic v rovnici (30,5) kuželosečky h_1 kladné, kdežto v rovnici kuželosečky h_3 záporné. Pouze v rovnici singulární kuželosečky h_2 je prvý koeficient záporný, druhý kladný, proto pouze nevlastní přímky p_2, q_2 jsou reálné mezi šesti přímkami p_i, q_i.

Nejsou-li přímky p_2, q_2 tvořícími přímkami kvadriky f, každá rovina procházející jednou z nich je cyklická rovina plochy f. Lze tedy vysloviti větu:

Kvadrika, která není ani hyperbolickým paraboloidem ani hyperbolickým válcem, jejíž charakteristická rovnice má pouze jednoduché kořeny, má dvě soustavy kružnic, jejichž roviny tvoří dvě osnovy reálných cyklických rovin plochy. Všechny tyto cyklické roviny jsou rovnoběžny s hlavním směrem, který koresponduje kořeni střední velikosti rovnice charakteristické.

Kolmou souměrností podle kterékoliv hlavní roviny kvadriky vzniká z její kružnice opět kružnice.

V případě hyperbolického válce nebo hyperbolického paraboloidu obě reálné nevlastní přímky p_2, q_2 singulární kuželosečky h_2 jsou tvořící přímky plochy. Rovina osnovy, určené na př. nevlastní přímkou p_2, protíná plochu — kromě v p_2 v jiné reálné tvořící přímce r. Dvojice přímek p_2, r tvoří singulární kuželosečku, procházející kruhovými body a bylo by ji (jak někteří autoři činí) možno pokládati za singulární kružnici a její rovinu za cyklickou rovinu plochy. Poněvadž my tak neučiníme, můžeme vysloviti větu:

Kromě parabolického válce též hyperbolický válec a hyperbolický paraboloid nemají žádných reálných rovin cyklických a tudíž ani kružnic.

Na všech ostatních nesingulárních kvadrikách, kuželích a válcích existují kružnice (po případě jen imaginární — na př. na imaginárním elipsoidu) v reálných cyklických rovinách uspořádaných ve dvě osnovy, které splývají jen tehdy, je-li kvadrika rotační.

Výjimku tvoří kulová plocha a isotropický kužel, pro něž každá reálná rovina je cyklická. V těchto větách je obsaženo:

Každý nerotační kužel a každý nerotační válec eliptický lze pokládati za kruhový dvěma různými způsoby; u rotačních kuželů a válců je tento způsob jediný.

Uvažme ještě geometrické místo středů kružnic plochy f jedné soustavy; jsou-li to kružnice v cyklických rovinách osnovy, určené jednou z obou reálných nevlastních přímek singulární kuželosečky h_2, na př. přímkou p_2, **je toto geometrické místo polára sdružená s** p_2, **čili průměr** r **plochy** f.

Protíná-li průměr r kvadriku f v reálném a nesingulárním bodě R, pak obě sdružené isotropické přímky, procházející bodem R a ležící v jeho tečné rovině, jsou tvořící přímky plochy f. Bod R se pak nazývá **kruhovým bodem kvadriky**.

Takové body se zřejmě mohou vyskytovati pouze na nesingulárních reálných kvadrikách nepřímkových, t. j. na elipsoidu, dvojdílném hyperboloidu a eliptickém paraboloidu.

Na reálné kulové ploše je každý její bod kruhový. Ve všech ostatních případech počet kruhových bodů je konečný, obecně 4.

31. Druhá redukce a normální tvary rovnice kvadriky. Seminormální tvar (30,1) rovnice kvadriky, ke kterému jsme dospěli z rovnice (18,2) ortogonální transformací (12,4), která vyjadřuje pootočení pravoúhlé kartézské souřadnicové soustavy okolo počátku, lze dále redukovati na tvar s ještě méně členy, a to translací souřadnicové soustavy, která je však pro každý druh kvadriky jinak definována.

1. Je-li f kvadrika středová a nesingulární ($A \neq 0$, $A_{44} \neq 0$), transformujme seminormální tvar její rovnice translací, po které počátek nové soustavy souřadnic leží ve středu S (x_0, y_0, z_0) kvadriky. V nové soustavě rovnice plochy f zní

$$\varrho_1 X^2 + \varrho_2 Y^2 + \varrho_3 Z^2 + a''_{44} = 0, \tag{31,1}$$

neboť translace souřadnicové soustavy — jak snadno zjistíme — nemá vlivu na koeficienty kvadratických členů nehomogenní rovnice kvadriky a vymizení členů lineárních je charakteristické pro počátek souřadnicové soustavy ležící ve středu plochy.

Že nová rovnice plochy má tvar (31,1) lze odůvodniti též okolností, že souřadnicový čtyrstěn $SS_1S_2S_3$ je pro plochu f polární.

Protože diskriminant rovnice (31,1) má hodnotu

$$A = \varrho_1\varrho_2\varrho_3 a''_{44}, \tag{31,2}$$

kdežto jeho minor

$$A''_{44} = A_{44} = \varrho_1\varrho_2\varrho_3, \tag{31,3}$$

není za našich předpokladů žádný z koeficientů rovnice (31,1) roven nule.

Koeficient a''_{44} lze vypočísti z původní rovnice $f(x, y, z) = 0$ kvadriky f výpočtem jednoho ze tří výrazů

$$a''_{44} = \frac{A}{A_{44}} = f(x_0, y_0, z_0) = f_4(x_0, y_0, z_0), \tag{31,4}$$

kde (x_0, y_0, z_0) jsou opět souřadnice středu kvadriky v původní souřadnicové soustavě a kde $f_i(x, y, z) = a_{i1}x + a_{i2}y + a_{i3}z + a_{i4}$.

Prvý z výrazů (31,4) pro a''_{44} plyne z (31,2) a (31,3). K druhému dospějeme z nehomogenní rovnice (25,8) asymptotického kužele, vyjádříme-li, že střed S $(x_0; y_0; z_0)$ na něm leží. Skutečně, dosazením souřadnic středu S do rovnice (25,8) vychází

$$A_{44}\, f(x_0, y_0, z_0) - A = 0,$$

odkud plyne $f(x_0, y_0, z_0) = \dfrac{A}{A_{44}}$, čímž je tvrzení dokázáno.

Třetí z výrazů (31,4) pro a''_{44} plyne z okolnosti, že souřadnice x_0, y_0, z_0, jak známo, vyhovují soustavě rovnic $f_1(x, y, z) = f_2(x, y, z) = f_3(x, y, z) = 0$ (srovnej s 25,2!). Kromě toho platí identita (19,4), t. j. v nehomogenních souřadnicích jest

$$f(x, y, z) = x\, f_1(x, y, z) + y\, f_2(x, y, z) + z\, f_3(x, y, z) + \\ + f_4(x, y, z),$$

odkud po dosazení souřadnic středu S vychází

$$f(x_0, y_0, z_0) = f_4(x_0, y_0, z_0),$$

což jsme měli dokázati.

Jsou-li všechny tři kořeny $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ různé navzájem i od nuly, kvadrika se nazývá trojosá; osami kvadriky při tom rozumíme průsečnice jejích navzájem kolmých hlavních rovin, příslušných k isolovaným hlavním směrům. Osy trojosé kvadriky (31,1) se patrně ztotožňují s osami $\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}$.

α) Ve shodě s roztříděním kvadrik v odst. 27 plocha (31,1) je trojosý hyperboloid jednodílný, když její nevlastní kuželosečka

$$X_4 = 0, \quad \varrho_1 X_1{}^2 + \varrho_2 X_2{}^2 + \varrho_3 X_3{}^2 = 0,$$

je reálná a když diskriminant (31,2) je kladný. Tak tomu je jen tehdy, když dva z kořenů $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ mají znaménka opačná než a''_{44} a jeden shodné.

Jsou-li ony dva kořeny se znaménky opačnými než znamení členu a''_{44} stejné, jednodílný hyperboloid je rotační a jeho rotační osa má směr totožný s hlavním směrem korespondujícím jednoduchému kořeni.

β) Uvažujeme-li obdobným způsobem nalezneme, že nutné a postačující podmínky pro to, aby (31,1) byla rovnicí trojosého hyperboloidu dvojdílného jsou: dva z kořenů charakteristické rovnice mají znaménka shodná s a''_{44}, třetí znaménko opačné.

Jsou-li prvé dva kořeny stejné, dvojdílný hyperboloid je rotační a směr jeho osy rotace je hlavní směr korespondující třetímu, jednoduchému kořeni.

γ) Jsou-li znaménka všech kořenů charakteristické rovnice opačná než znaménko prostého členu a''_{44}, kvadrika (31,1) je trojosý elipsoid. Jsou-li dva z kořenů stejné, elipsoid je rotační. Je-li absolutní hodnota jednoduchého kořene menší n ž kořene dvojnásobného, rotační elipsoid se nazývá prodloužený, v opačném případě zploštělý. Jsou-li všechny tři kořeny stejné a různé od nuly, plocha je kulová.

δ) Jsou-li znaménka všech kořenů charakteristické rovnice shodná se znaménkem členu a''_{44}, kvadrika je imaginární elipsoid; i ten je trojosý nebo rotační nebo imaginární plocha kulová podle toho, má-li charakteristická rovnice všechny kořeny různé, nebo dva či tři stejné.

2. Je-li kvadrika paraboloidem ($A \neq 0$, $A_{44} = 0$), je známo — a plyne z (30,2) — že jeden z kořenů charakteristické rovnice je nula. Buď $\varrho_3 = 0$ tento kořen. Seminormální rovnici (30,1) lze ještě více zredukovati translací, po které počátek nové souřadnicové soustavy se ztotožňuje s vrcholem V paraboloidu, t. j. s oním bodem plochy, jehož tečná rovina stojí kolmo na hlavní směr korespondující kořeni $\varrho_3 = 0$.

Protože počátek nové soustavy je bodem kvadriky, bude v její nové rovnici $a''_{44} = 0$. Rovnice tečné roviny v počátku (srovnej s příkl. 87)

$$a''_{14}X + a''_{24}Y + a''_{34}Z = 0,$$

se v důsledku polohy bodu V redukuje na $Z = 0$, takže jest

$$a''_{14} = a''_{24} = 0, \quad a''_{34} \neq 0,$$

a rovnice paraboloidu v nové soustavě zní

$$\varrho_1 X^2 + \varrho_2 Y^2 + 2a''_{34}Z = 0, \tag{31,5}$$

kde je možno předpokládati $\varrho_1 \geqq \varrho_2$. Je to tvar shodný s (24,2), což dokazuje, že souřadnicový čtyrstěn má vzhledem k paraboloidu polohu popsanou v odst. 26, takže osy $\vec{X}$, $\vec{Y}$ soustavy souřadnic jsou sdružené tečny paraboloidu v jeho vrcholu V (t. zv. hlavní tečny).

Protože z (31,5) plyne

$$A = -\varrho_1\varrho_2 a''^2_{34}$$

lze koeficient a''_{34} vypočísti ze vzorce

$$a''_{34} = \pm\sqrt{-\frac{A}{\varrho_1\varrho_2}} = \pm\sqrt{-\frac{A}{J}}. \tag{31,6}$$

Nevlastní kuželosečka paraboloidu je singulární a její z (31,5) odvozené rovnice jsou

$$X_4 = 0, \ \varrho_1 X_1^2 + \varrho_2 X_2^2 = 0.$$

Je reálná při $\varrho_1\varrho_2 < 0$, imaginární při $\varrho_1\varrho_2 > 0$; v prvém případě plocha je přímková — paraboloid hyperbolický ($A > 0$) — v druhém nepřímková — paraboloid eliptický ($A < 0$). Je tedy podle (31,6) v obou případech koeficient a''_{34} reálný. Aby rovnice (31,5) byla určena jednoznačně, volme znaménko v (31,6) tak, aby bylo $\varrho_1 a''_{34} < 0$.

Je-li paraboloid rotační, je nutně eliptický, neboť z $\varrho_1 = \varrho_2$ plyne $A = -\varrho_1^2 a''^2_{34}$, t. j. $A < 0$. Hyperbolický paraboloid rotační neexistuje.

3. Je-li kvadrika kužel ($A = 0$, $A_{44} \neq 0$), lze jeho seminormální rovnici (30,1) ještě více redukovati translací souřadnicové soustavy; po níž počátek nové soustavy leží ve vrcholu kužele. Pak jeho rovnice — jak plyne z odst. 22 — se redukuje na tvar

$$\varrho_1 X^2 + \varrho_2 Y^2 + \varrho_3 Z^2 = 0, \tag{31,7}$$

kde $\varrho_1\varrho_2\varrho_3 \neq 0$. Mají-li všechny tři kořeny ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 stejná znaménka, kužel je imaginární, jindy je reálný. Podle násobnosti kořenů charakteristické rovnice může opět býti trojosý, rotační nebo isotropický.

Vrchol kužele je v každém případě reálný; u imaginárních kuželů je to jediný jejich reálný bod.

4. Válec je charakterisován rovnicemi $A = 0$, $A_{44} = 0$, diskriminant A ovšem musí býti hodnosti 3. Rovnice charakteristická má jeden kořen nulový; budiž to kořen $\varrho_3 = 0$. V rovnici (30,1) je $a'_{34} = 0$, jak vyplývá z (30,2) a z $A = 0$. Seminormální tvar rovnice válce proto zní

$$f'(x', y', z') \equiv \varrho_1 x'^2 + \varrho_2 y'^2 + 2a'_{14}x' + 2a'_{24}y' + a'_{44} = 0. \tag{31,8}$$

Jeho tvořící přímky jsou rovnoběžny s osou $\overrightarrow{z'}$, a jeho řídící kuželosečka v rovině $(\overrightarrow{x'}\overrightarrow{y'})$ má též rovnici (31,8).

Je to středová kuželosečka, je-li $\varrho_1\varrho_2 \neq 0$, a válec je neparabolický; je-li jeden z kořenů ϱ_1, ϱ_2 nula, řídící kuželosečka je parabola a válec je parabolický.

V prvém případě je možno provésti takovou translaci souřadnicové soustavy, že její nový počátek se ztotožňuje se středem řídící kuželosečky a nová rovnice válce nabude tvaru

$$\varrho_1 X^2 + \varrho_2 Y^2 + a''_{44} = 0, \tag{31,9}$$

který již více redukovati nelze, neboť $\varrho_1\varrho_2 a''_{44} \neq 0$, protože A je hodnosti 3.

Prostý člen a''_{44} rovnice (31,9) lze vypočísti z koeficientů původní rovnice kvadriky podle některého ze vztahů*)

$$a''_{44} = \frac{A_{11}}{a_{22}a_{33} - a_{23}^2} = \frac{A_{22}}{a_{11}a_{33} - a_{13}^2} = \frac{A_{33}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} = \frac{A_{11} + A_{22} + A_{33}}{\varrho_1\varrho_2}. \tag{31,10}$$

Alespoň dva z těchto výrazů pro a''_{44} jsou k jeho výpočtu použitelny, t. j. nemají v čitateli i jmenovateli nuly.

Z rovnice plochy je patrné, že při $\varrho_1\varrho_2 < 0$ válec je hyperbolický, při $\varrho_1 a''_{44} < 0$, $\varrho_2 a''_{44} < 0$ eliptický (je-li kromě toho $\varrho_1 = \varrho_2$ je to reálný válec rotační), konečně při $\varrho_1 a''_{44} > 0$, $\varrho_2 a''_{44} > 0$ imaginární (je-li ještě $\varrho_1 = \varrho_2$ rotační imaginární).

Zbývá ještě případ, kdy jeden z kořenů ϱ_1, ϱ_2 je též nula, na př. $\varrho_1 = 0$. Charakteristická rovnice má pak dvojnásobný kořen $\varrho_1 = \varrho_3 = 0$ a rovnici kvadriky lze redukovati na tvar

$$\varrho_2 Y^2 + 2a''_{14} X = 0, \tag{31,11}$$

a to translací souřadnicové soustavy, po níž nový počátek leží ve vrcholu řídící kuželosečky (31,8), která — vzhledem k $\varrho_1 = 0$ — je parabolou.

---

*) Viz na př. Staude, Analytische Geometrie atd., str. 515 a 530.

Koeficient a''_{14} rovnice (31,11) lze vypočísti z koeficientů původní rovnice kvadriky podle vzorce*)

$$a''_{14} = \pm \sqrt{-\frac{A_{11} + A_{22} + A_{33}}{\varrho_2}}; \tag{31,12}$$

dvojímu znaménku korespondují dva shodné parabolické válce, z nichž jeden přechází v druhý pootočením okolo osy $\vec{Y}$ o přímý úhel.

Rovnice (31,1), (31,5), (31,7), (31,9) a (31,11) středové kvadriky, paraboloidu, kužele, válce neparabolického resp. parabolického, nelze již více redukovati, t. j. nahraditi rovnicí s menším počtem členů. Z nich obdržíme normální tvary rovnic těchto druhů kvadrik násobením vhodným faktorem. V dalším je sestaven přehled těchto normálních tvarů podle druhu kvadriky. V rovnicích se vyskytující koeficienty a, b, c, p, q jsou vesměs reálné a kladné.

1. Středové nesingulární kvadriky.

α) Trojosý hyperboloid jednodílný:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} - 1 = 0, \ (a^2 \neq b^2). \tag{31,13}$$

Rotační hyperboloid jednodílný o rotační ose $\vec{Z}$:

$$\frac{X^2 + Y^2}{a^2} - \frac{Z^2}{c^2} - 1 = 0. \tag{31,14}$$

β) Trojosý hyperboloid dvojdílný:

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} - 1 = 0, \ (b^2 \neq c^2). \tag{31,15}$$

Rotační hyperboloid dvojdílný o rotační ose $\vec{X}$:

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2 + Z^2}{b^2} - 1 = 0. \tag{31,16}$$

γ) Trojosý elipsoid:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} - 1 = 0, \tag{31,17}$$

(Žádná dvě z čísel a^2, b^2, c^2 se nerovnají.)

*) Viz pozn. na str. 62.

Rotační elipsoid o rotační ose $\vec{Z}$:

$$\frac{X^2 + Y^2}{a^2} + \frac{Z^2}{c^2} - 1 = 0, \tag{31,18}$$

($a^2 \neq c^2$; při $c^2 > a^2$ prodloužený, při $c^2 < a^2$ zploštělý).

Kulová plocha:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - a^2 = 0. \tag{31,19}$$

δ) Imaginární elipsoid:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} + 1 = 0, \tag{31,20}$$

(při a^2, b^2, c^2 navzájem různých trojosý, při $a^2 = b^2 \neq c^2$ rotační o rotační ose $\vec{Z}$, při $a^2 = b^2 = c^2$ imaginární plocha kulová).

2. Paraboloidy.

α) Hyperbolický paraboloid:

$$\frac{X^2}{p} - \frac{Y^2}{q} - 2Z = 0. \tag{31,21}$$

β) Eliptický paraboloid:

$$\frac{X^2}{p} + \frac{Y^2}{q} - 2Z = 0, \ (p \neq q). \tag{31,22}$$

Rotační paraboloid o rotační ose $\vec{Z}$:

$$\frac{X^2 + Y^2}{p} - 2Z = 0. \tag{31,23}$$

3. Kvadratické kužele. (Čísla a^2, b^2, c^2 jsou určena plochou až na faktor úměrnosti.)

α) Trojosý reálný kužel kvadratický:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 0 \ (a^2 \neq b^2). \tag{31,24}$$

Rotační reálný kužel o rotační ose $\vec{Z}$:

$$\frac{X^2 + Y^2}{a^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 0. \tag{31,25}$$

β) Imaginární kužel kvadratický:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 0, \tag{31,26}$$

(při a^2, b^2, c^2 vesměs různých trojosý, při $a^2 = b^2 \neq c^2$ rotační o rotační ose $\vec{Z}$, při $a^2 = b^2 = c^2$ isotropický).

4. Kvadratické válce.

α) Hyperbolický válec:

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} - 1 = 0. \tag{31,27}$$

β) Eliptický válec:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - 1 = 0, \ (a^2 \neq b^2). \tag{31,28}$$

Rotační válec s rotační osou $\vec{Z}$:

$$\frac{X^2 + Y^2}{a^2} - 1 = 0. \tag{31,29}$$

γ) Imaginární válec kvadratický:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + 1 = 0, \ (a^2 \neq b^2) \tag{31,30}$$

(při $a^2 = b^2$ rotační o rotační ose $\vec{Z}$).

δ) Parabolický válec:

$$Y^2 - 2pX = 0. \tag{31,31}$$

32. Několik příkladů na transformaci rovnice kvadriky na normální tvar. Velmi běžný v matematických aplikacích jest úkol, z dané rovnice plochy druhého stupně 1. rozpoznati, jakého je druhu; 2. napsati její rovnici ve tvaru normálním; 3. eventuelně napsati i rovnice ortogonální transformace, která transformuje danou rovnici kvadriky v její tvar normální.

Ukážeme na několika typických příkladech, jak tyto úkoly řešíme.

Příklad 1. Dána rovnice kvadriky

$$f(x, y, z) \equiv 11x^2 - 4y^2 + 11z^2 + 20xy - 40xz - 20yz + 168x + \\ + 84y - 114z + 315 = 0.$$

Její charakteristická rovnice

$$D(\varrho) = \begin{vmatrix} 11 - \varrho & 10 & -20 \\ 10 & -4 - \varrho & -10 \\ -20 & -10 & 11 - \varrho \end{vmatrix} = 0,$$

čili

$$\varrho^3 - 18\varrho^2 - 567\varrho - 2916 = 0,$$

má kořeny $\varrho_1 = \varrho_2 = -9$, $\varrho_3 = 36$. Protože žádný z nich není nula, kvadrika může býti jen buď nesingulární středová nebo kužel, a to rotační, neboť dva kořeny se rovnají. Její rovnici lze redukovati na tvar (viz (31,1) resp. (31,7))

$$-9(X^2 + Y^2) + 36Z^2 + a''_{44} = 0,$$

kde a''_{44} zbývá určiti (při $a''_{44} = 0$ by plocha byla kuželem, při $a''_{44} \neq 0$ je nesingulární). Řešení x_0, y_0, z_0 soustavy rovnic

$$\begin{aligned} f_1(x, y, z) &\equiv 11x + 10y - 20z + 84 = 0, \\ f_2(x, y, z) &\equiv 10x - 4y - 10z + 42 = 0, \\ f_3(x, y, z) &\equiv -20x - 10y + 11z - 57 = 0, \end{aligned}$$

jsou souřadnice buď středu nebo singulárního bodu kvadriky. Vychází jediné řešení $x_0 = -\frac{2}{3}$, $y_0 = -\frac{1}{3}$, $z_0 = \frac{11}{3}$. Nyní konečně určíme $a''_{44} = f_4(x_0, y_0, z_0)$ podle (31,4). Je $f_4(x, y, z) = 84x + 42y - 57z + 315$, takže $a''_{44} = 36$ a kvadrika je nesingulární. Z její redukované rovnice $-9(X^2 + Y^2) + 36Z^2 + 36 = 0$ obdržíme krácením číslem -36 tvar normální

$$\frac{X^2 + Y^2}{4} - Z^2 - 1 = 0.$$

Je to podle (31,14) rovnice rotačního hyperboloidu jednodílného o rot. ose $\vec{Z}$; $a^2 = b^2 = 4$, $c^2 = 1$.

Abychom ještě určili rovnice transformace, která danou rovnici $f(x, y, z) = 0$ převádí na právě nalezený tvar normální, určeme směrové parametry rotační osy vzhledem k původní soustavě souřadnic. Nalezneme je z kterýchkoliv dvou rovnic soustavy (29,9) pro $i = 3$, na př. z rovnic

$$\begin{aligned} -25l_3 + 10m_3 - 20n_3 &= 0, \\ 10l_3 - 40m_3 - 10n_3 &= 0, \end{aligned}$$

odkud

$$l_3 : m_3 : n_3 = \begin{Vmatrix} -5 & 2 & -4 \\ 1 & -4 & -1 \end{Vmatrix},$$

t. j. $l_3 : m_3 : n_3 = 2 : 1 : -2$. Podle (4,6) určíme směrové kosiny rotační osy

$$\cos\alpha_3 = \tfrac{2}{3},\ \cos\beta_3 = \tfrac{1}{3},\ \cos\gamma_3 = -\tfrac{2}{3}.$$

Její směr je hlavní směr isolovaný, korespondující jednoduchému kořeni ϱ_3, a nová soustava souřadnic má osu $\vec{Z}$ tohoto směru. Směry os $\vec{X}$ a $\vec{Y}$ můžeme voliti libovolně, ovšem tak, aby byly kolmy navzájem i k ose $\vec{Z}$. Determinant δ ze směrových kosinů os [viz (12,5), (12,7), (12,8)] musí míti hodnotu $+1$. Tomu vyhovuje volba, patrná ze schematu (12,7), k němuž je praktické připojiti souřadnice x_0, y_0, z_0, takže toto schema pro náš příklad jest

	$\vec{x}$	$\vec{y}$	$\vec{z}$
$\vec{X}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$
$\vec{Y}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
$\vec{Z}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{11}{3}$

.

Podle něho snadno napíšeme hledané rovnice transformace (12,4)

$$\begin{aligned} x &= -\tfrac{2}{3}X + \tfrac{1}{3}Y + \tfrac{2}{3}Z - \tfrac{2}{3}, \\ y &= \tfrac{2}{3}X + \tfrac{2}{3}Y + \tfrac{1}{3}Z - \tfrac{1}{3}, \\ z &= -\tfrac{1}{3}X + \tfrac{2}{3}Y - \tfrac{2}{3}Z + \tfrac{11}{3}. \end{aligned}$$

Dosadíme-li podle nich za x, y, z do dané rovnice kvadriky, vychází nalezený normální tvar rovnice plochy, čímž je potvrzena správnost jak jeho, tak rovnic transformačních, t. j. směrových kosinů osy i souřadnic středu.

P ř í k l a d 2. Dána kvadrika rovnicí

$$f(x, y, z) \equiv 2x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xy + \sqrt{2}\,.\,xz - \sqrt{2}\,.\,yz - \\ - \sqrt{2}\,.\,x - \sqrt{2}\,.\,y + 1 = 0.$$

Její charakteristická rovnice

$$D(\varrho) \equiv \begin{vmatrix} 2-\varrho & -1 & \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \\ -1 & 2-\varrho & -\tfrac{1}{2}\sqrt{2} \\ \tfrac{1}{2}\sqrt{2} & -\tfrac{1}{2}\sqrt{2} & 3-\varrho \end{vmatrix} = 0,$$

t. j. $\varrho^3 - 7\varrho^2 + 14\varrho - 8 = 0$, má kořeny $\varrho_1 = 4$, $\varrho_2 = 2$, $\varrho_3 = 1$. Protože žádný z nich není nula, kvadrika může býti jen buď nesingulární středová nebo kužel. Její rovnici lze redukovati na tvar [viz (31,1) resp. (31,7)]

$$4X^2 + 2Y^2 + Z^2 + a''_{44} = 0,$$

kde a''_{44} zbývá určiti. K tomu cíli — stejně jako v minulém příkladě — řešme nejdříve soustavu rovnic

$$\begin{aligned} f_1(x, y, z) &\equiv 2x - y + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}z - \tfrac{1}{2}\sqrt{2} = 0, \\ f_2(x, y, z) &\equiv -x + 2y - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}z - \tfrac{1}{2}\sqrt{2} = 0, \\ f_3(x, y, z) &\equiv \tfrac{1}{2}\sqrt{2}x - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}y + 3z = 0, \end{aligned}$$

mající jediné řešení $x_0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $y_0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $z_0 = 0$. Z $f_4(x, y, z) \equiv - \frac{1}{2}\sqrt{2}x - \frac{1}{2}\sqrt{2}y + 1$ vypočteme podle (31,4) $a''_{44} = f_4(x_0, y_0, z_0) = 0$, takže kvadrika je kužel s rovnicí o normálním tvaru (srovnej s 31,26)

$$X^2 + \tfrac{1}{2}Y^2 + \tfrac{1}{4}Z^2 = 0.$$

Je to trojosý kužel imaginární.

K určení transformace, převádějící danou rovnici kvadriky na právě nalezený normální tvar vycházejí z prvých dvou rovnic soustavy (29,9) s $i = 1$, t. j. z rovnic

$$\begin{aligned} -2l_1 - m_1 + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}n_1 &= 0, \\ -l_1 - 2m_1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}n_1 &= 0, \end{aligned}$$

směrové parametry prvního hlavního směru $l_1 : m_1 : n_1 = \sqrt{2} : -\sqrt{2} : 2$, a podle (4,6) jeho směrové kosiny

$$\cos\alpha_1 = \tfrac{1}{2}, \quad \cos\beta_1 = -\tfrac{1}{2}, \quad \cos\gamma_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Stejným způsobem obdržíme pro další dva hlavní směry ze soustav rovnic (29,9) s $i = 2$ resp. $i = 3$ trojice směrových kosinů

$$\cos\alpha_2 = \tfrac{1}{2}, \quad \cos\beta_2 = -\tfrac{1}{2}, \quad \cos\gamma_2 = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$

a

$$\cos\alpha_3 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}, \quad \cos\beta_3 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}, \quad \cos\gamma_3 = 0.$$

Kdyby determinant δ ze směrových kosinů měl hodnotu -1, stačí — a je dovoleno — změniti znaménka všech kosinů jedné trojice, načež bude $\delta = +1$. V našem případě tato podmínka je splněna.

Nalezené směrové kosiny a souřadnice vrcholu opět sestavme v schema

	$\vec{x}$	$\vec{y}$	$\vec{z}$
$\vec{X}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\vec{Y}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\vec{Z}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0
	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0

z něhož snadno sestavíme hledané rovnice transformace

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2}X + \tfrac{1}{2}Y + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}Z + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}, \\ y &= -\tfrac{1}{2}X - \tfrac{1}{2}Y + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}Z + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}, \\ z &= \tfrac{1}{2}\sqrt{2}X - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}Y, \end{aligned}$$

o nichž se snadno přesvědčíme dosazením za x, y, z do dané rovnice kvadriky, že jsou správné stejně jako nalezený tvar normální.

Příklad 3. Dána rovnice kvadriky $f(x, y, z) \equiv 2xy + 2y + z = 0$.

Její charakteristická rovnice

$$D(\varrho) \equiv \begin{vmatrix} -\varrho & 1 & 0 \\ 1 & -\varrho & 0 \\ 0 & 0 & -\varrho \end{vmatrix} = 0$$

má kořeny $\varrho_1 = 1$, $\varrho_2 = -1$, $\varrho_3 = 0$, jejichž označení je tak voleno, aby bylo $\varrho_1 > \varrho_2$, jak je tomu v (31,5). Protože jeden z kořenů je nula, kvadrika — není-li složena z rovin — je buď paraboloid, nebo neparabolický válec. To musíme rozhodnouti nejdříve. Za tím účelem určeme hlavní směry náležející kořenům ϱ_1, ϱ_2. Parametry prvého z nich vyhovují soustavě rovnic (29,9) s $i = 1$, z nichž poslední dvě jsou $l_1 - m_1 = 0$, $n_1 = 0$, odkud $l_1 : m_1 : n_1 = 1 : 1 : 0$. Stejně ze soustavy (29,9) s $i = 2$ vychází $l_2 : m_2 : n_2 = 1 : -1 : 0$. (Zkontrolujte, jsou-li oba hl. směry kolmé!) Hlavní roviny kvadriky náležející těmto hlavním směrům jsou polární roviny nevlastních bodů (1; 1; 0; 0) resp. (1; — 1; 0; 0), t. j. roviny $f_1(x, y, z) \pm f_2(x, y, z) = 0$.

Odtud vycházejí jejich rovnice

$$x + y + 1 = 0 \quad \text{a} \quad x - y + 1 = 0.$$

Spolu s danou rovnicí kvadriky tvoří rovnice těchto hlavních rovin soustavu, již řešiti znamená určiti společný bod V průsečnice o obou hlavních rovin — t. j. osy kvadriky — s plochou. Směr této osy je patrně třetí hlavní směr kvadriky, odpovídající kořeni $\varrho_3 = 0$. Proto jeden z průsečíků osy o s kvadrikou je nevlastní bod S_3, singulární bod singulární kuželosečky h_3 charakteristického svazku.

Druhý průsečík, jak řešením zmíněné soustavy vychází, je bod $V(-1; 0; 0)$. Kdyby i ten byl nevlastní, kvadrika by byla neparabolický válec. V našem případě je tedy rozhodnuto, že daná kvadrika je paraboloid o ose o a vrcholu V.

Jeho rovnici lze redukovati na tvar (31,5), t. j. na

$$X^2 - Y^2 + 2a''_{34}Z = 0,$$

kde a''_{34} vypočteme podle (31,6).

Protože $A = \frac{1}{4}$, je $a''_{34} = -\frac{1}{2}$, kde znaménko je zvoleno opačné, než znaménko kořene ϱ_1. Násobíme-li ještě redukovanou rovnici paraboloidu dvěma, obdržíme její normální tvar

$$\frac{X^2}{\frac{1}{2}} - \frac{Y^2}{\frac{1}{2}} - 2Z = 0,$$

z něhož srovnáním s (31,21) je patrno, že paraboloid je hyperbolický (s $p = q$, což je t. zv. rovnostranný paraboloid).

K určení transformačních rovnic vypočtěme nejdříve směrové kosiny osy $o = \vec{Z}$. Dosazením $i = 3$ do (29,9) vzniká soustava rovnic, z nichž prvé dvě jsou

$$a_{11}l_3 + a_{12}m_3 + a_{13}n_3 = 0,$$
$$a_{12}l_3 + a_{22}m_3 + a_{23}n_3 = 0.$$

Zavedeme-li označení

$$a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13} = a_1, \; a_{13}a_{12} - a_{11}a_{23} = a_2, \; a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = a_3,$$

vychází z těchto rovnic směrové kosiny osy o

$$\cos \alpha_3 = \lambda a_1, \quad \cos \beta_3 = \lambda a_2, \quad \cos \gamma_3 = \lambda a_3,$$

kde $\lambda = \pm \dfrac{1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$. Znaménko faktoru λ zvolme shodné se znaménkem koeficientu a''_{34}, t. j. opačné než znaménko kořene ϱ_1.*)

Tak obdržíme v našem případě

$$\cos \alpha_3 = 0, \quad \cos \beta_3 = 0, \quad \cos \gamma_3 = -1.$$

Vypočtěme ještě trojice směrových kosinů hlavních směrů, náležejících kořenům ϱ_1 a ϱ_2, z již známých trojic jejich směrových parametrů; znaménka volme opět tak, aby bylo $\delta = +1$,

Tak nalezneme schema

	$\vec{x}$	$\vec{y}$	$\vec{z}$
$\vec{X}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0
$\vec{Y}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0
$\vec{Z}$	0	0	-1
V	-1	0	0

kde v posledním řádku jsou připojeny souřadnice vrcholu V paraboloidu.

Podle něho snadno napíšeme hledané rovnice ortogonální transformace

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,(X + Y) - 1, \\ y &= \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,(X - Y), \\ z &= -Z. \end{aligned}$$

Neopomeňme nikdy zkontrolovati správnost výpočtu dosazením za x, y, z podle rovnic transformace do dané rovnice kvadriky.

Příklad 4. Dána rovnice kvadriky

$$f(x, y, z) \equiv 8x^2 + 20y^2 + 17z^2 - 8xy - 20xz + 28yz + 24y + \\ + 12z - 316 = 0.$$

Její charakteristická rovnice

$$D(\varrho) \equiv \begin{vmatrix} 8-\varrho & -4 & -10 \\ -4 & 20-\varrho & 14 \\ -10 & 14 & 17-\varrho \end{vmatrix} = 0,$$

čili $\varrho^3 - 45\varrho^2 + 324\varrho = 0$, má kořeny $\varrho_1 = 9$, $\varrho_2 = 36$, $\varrho_3 \doteq 0$.

*) O významu této volby viz na př. Bydžovský, Úvod do anal. geometrie, str. 356 a 366.

Protože pouze jeden z nich je nula, kvadrika — není-li složena z rovin — je buď paraboloid nebo neparabolický válec. To musíme rozhodnouti nejdříve.

Za tím účelem určeme hlavní směry náležející oběma od nuly různým kořenům ϱ_1 a ϱ_2. Ze soustavy (29,9) s $i = 1$ vychází (stačí prvé dvě rovnice) $l_1 : m_1 : n_1 = 2 : 2 : -1$, kdežto pro $i = 2$ táž soustava dává $l_2 : m_2 : n_2 = -1 : 2 : 2$. Hlavní roviny, kolmé na tyto směry, jsou polární roviny bodů (2; 2; — 1; 0) resp. (— 1; 2; 2; 0), t. j. roviny

$$2f_1(x, y, z) + 2f_2(x, y, z) - f_3(x, y, z) = 0$$

resp. $$-f_1(x, y, z) + 2f_2(x, y, z) + 2f_3(x, y, z) = 0;$$

protože jest

$$f_1(x, y, z) \equiv 8x - 4y - 10z,\; f_2(x, y, z) \equiv -4x + 20y + 14z + 12,$$
$$f_3(x, y, z) \equiv -10x + 14y + 17z + 6,$$

zní rovnice těchto hlavních rovin po zkrácení

$$2x + 2y - z + 2 = 0$$

resp. $$x - 2y - 2z - 1 = 0.$$

Jejich průsečnice — osa o kvadriky — protíná rovinu $(\overrightarrow{x}\,\overrightarrow{y})$ v bodě Ω $(-\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; 0)$ a její směrové parametry jsou $l_3 : m_3 : n_3 = 2 : -1 : 2$. Podle (6,6) parametrické rovnice osy o jsou

$$x = -\tfrac{1}{3} + 2t,\; y = -\tfrac{2}{3} - t,\; z = 2t.$$

Abychom určili její průsečíky s kvadrikou (o jednom víme napřed, že to je její dotykový bod s rovinou nevlastní S_3), dosaďme podle těchto parametrických rovnic za x, y, z do dané rovnice kvadriky, čímž obdržíme obecně rovnice druhého stupně v t. V našem příkladě však koeficienty při t^2 i při t v této rovnici jsou nuly, zatím co prostý člen má hodnotu — 324. K tomuto sporu jsme došli, protože žádný z obou průsečíků osy o s kvadrikou není vlastní bod, nýbrž oba jsou nevlastní a ztotožňují se v S_3. Kvadrika je proto neparabolický válec o ose o. (Je tedy $A = 0$.) Jeho zredukovaná rovnice (31,9) zní

$$9X^2 + 36Y^2 + a''_{44} = 0,$$

kde a''_{44} určíme podle na př. třetího ze vzorců (31,10). Je $A_{33} = -46\,656$, $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 144$, proto $a''_{44} = -324$ a redukovaná rovnice zní $9X^2 + 36Y^2 - 324 = 0$, t. j. po krácení číslem 324

$$\frac{X^2}{36} + \frac{Y^2}{9} - 1 = 0,$$

což je podle (31,28) normální rovnice eliptického válce.

Transformace převádějící danou rovnici válce na právě nalezený normální tvar je složena z pootočení okolo počátku a z translace, po které počátek nové souřadnicové soustavy se ztotožní s kterýmkoliv bodem osy válce, na př. s bodem Ω. Schema této ortogonální transformace proto je

	$\vec{x}$	$\vec{y}$	$\vec{z}$
$\vec{X}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$
$\vec{Y}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
$\vec{Z}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
Ω	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0

Podle něho hledané rovnice transformace jsou

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{2}{3}X - \tfrac{1}{3}Y + \tfrac{2}{3}Z - \tfrac{1}{3}, \\ y &= \tfrac{2}{3}X + \tfrac{2}{3}Y - \tfrac{1}{3}Z - \tfrac{2}{3}, \\ z &= -\tfrac{1}{3}X + \tfrac{2}{3}Y + \tfrac{2}{3}Z, \end{aligned}$$

o jejichž správnosti se dosazením do dané rovnice snadno přesvědčíme.

Příklad 5. Dána rovnice kvadriky

$$f(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 - 2xy + 2x + 2y - 2\sqrt{2} \, . \, z - 8 = 0.$$

Její charakteristická rovnice

$$D(\varrho) \equiv \begin{vmatrix} 1-\varrho & -1 & 0 \\ -1 & 1-\varrho & 0 \\ 0 & 0 & -\varrho \end{vmatrix} = 0,$$

čili $\varrho^3 - 2\varrho^2 = 0$, má dvojnásobný kořen $\varrho_1 = \varrho_3 = 0$, a jednoduchý $\varrho_2 = 2$. Kvadrika je proto buď parabolický válec, anebo je složena ze dvou rovnoběžných rovin. To musíme vyšetřiti nejdříve.

Nenulovému kořeni $\varrho_2 = 2$ náleží hlavní směr, jehož parametry podle (29,9), kde $i = 2$, vyhovují rovnicím $l_2 + m_2 = 0$, $n_2 = 0$, takže lze klásti $l_2 : m_2 : n_2 = 1 : -1 : 0$. Hlavní rovina, náležející k témuž hlavnímu směru, t. j. polární rovina bodu $(1; -1; 0; 0)$, má rovnici $f_1(x, y, z) - f_2(x, y, z) = 0$, t. j. $x - y = 0$.

Podle průsečné čáry této hlavní roviny s danou plochou lze rozhodnouti o jejím druhu. Je-li totiž průsečná čára složena ze dvou přímek, z nichž jen jedna je nevlastní, plocha je parabolický válec; jsou-li obě tyto přímky nevlastní, nebo je-li uvažovaná hlavní rovina částí kvadriky, jedná se o plochu složenou z rovin.

V našem příkladě průsečná čára hlavní roviny $x - y = 0$ s danou kvadrikou, jejíž rovnici lze psáti $(x - y)^2 + 2(x + y - z\sqrt{2} - 4) = 0$, je — jak by po homogenisaci obou rovnic bylo zřejmo — složena z nevlastní přímky této hlavní roviny a z přímky vlastní, ležící též v rovině $x + y - z\sqrt{2} - 4 = 0$, která zřejmě je na rovinu $x - y = 0$ kolma.

Daná plocha je tedy **parabolický válec**, jehož hlavní rovina $x - y = 0$ jej protíná v t. zv. **vrcholové tvořící přímce**, podél níž se jej dotýká rovina $x + y - z\sqrt{2} - 4 = 0$. Z rovnic obou rovin, které určují vrcholovou přímku, snadno vypočteme její směrové parametry

$$l_3 : m_3 : n_3 = 1 : 1 : \sqrt{2},$$

odkud vycházejí její směrové kosiny

$$\cos\alpha_3 = \tfrac{1}{2}, \quad \cos\beta_3 = \tfrac{1}{2}, \quad \cos\gamma_3 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2},$$

což je v souhlase s (29,9). Ve vrcholové tvořící přímce zvolíme novou osu $\overrightarrow{Z}$, kdežto osu $\overrightarrow{Y}$ zvolíme v onom hlavním směru, který náleží kořeni jednoduchému, jehož směrové parametry $l_2 : m_2 : n_2$ již dříve byly vypočteny. Z nich vycházejí jeho směrové kosiny

$$\cos\alpha_2 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}, \quad \cos\beta_2 = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2}, \quad \cos\gamma_2 = 0.$$

Třetí hlavní směr volíme k oběma prvým kolmý, takže jeho směrové parametry lze vypočísti způsobem patrným z (7,4) a z nich směrové kosiny

$$\cos\alpha_1 = -\tfrac{1}{2}, \quad \cos\beta_1 = -\tfrac{1}{2}, \quad \cos\gamma_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2},$$

jejichž znaménka byla zvolena tak, aby bylo $\delta = +1$.

Rovnici plochy lze podle (31,11) a ve shodě s volbou nových os souřadnic redukovati na tvar

$$2Y^2 + 2a''_{14}X = 0,$$

kde a''_{14} vypočteme podle (31,12).

Protože je $A_{11} = -2$, $A_{22} = -2$, $A_{33} = -4$, je $a''_{14} = \pm\sqrt{4}$ a — rozhodneme-li se pro dolní znaménko — je $a''_{14} = -2$ a **normální tvar rovnice daného parabolického válce** zní

$$Y^2 - 2X = 0.$$

Je ovšem též možno k této rovnici dojíti skutečným provedením ortogonální transformace souřadnicové soustavy. K napsání rovnic transformace potřebujeme k již známým směrovým kosinům nových os určiti souřadnice kteréhokoliv bodu na vrcholové tvořící přímce.

Z rovnic rovin $x - y = 0$, $x + y - z\sqrt{2} - 4 = 0$, jimiž je tato přímka určena, vyplývá, že bod $\Omega\,(0; 0; -2\sqrt{2})$ na ní leží. Lze tedy rovnice transformace napsati podle schematu

	$\vec{x}$	$\vec{y}$	$\vec{z}$
$\vec{X}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\vec{Y}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0
$\vec{Z}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
Ω	0	0	$-2\sqrt{2}$

,

t. j.

$$\begin{aligned} x &= -\tfrac{1}{2}X + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}Y + \tfrac{1}{2}Z, \\ y &= -\tfrac{1}{2}X - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}Y + \tfrac{1}{2}Z. \\ z &= \tfrac{1}{2}\sqrt{2}X + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}Z - 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Příklad 6. Dána rovnice kvadriky

$$f(x, y, z) \equiv x^2 - y^2 + z^2 + 2xz - 2y - 1 = 0.$$

Její rovnice charakteristická

$$D(\varrho) \equiv \begin{vmatrix} 1-\varrho & 0 & 1 \\ 0 & -1-\varrho & 0 \\ 1 & 0 & 1-\varrho \end{vmatrix} = 0,$$

čili

$$\varrho^3 - \varrho^2 - 2\varrho = 0,$$

má kořeny $\varrho_1 = 2$, $\varrho_2 = -1$, $\varrho_3 = 0$. Není-li daná kvadrika složena z rovin, je proto buď paraboloid nebo neparabolický válec. Abychom o tom rozhodli, určeme oba hlavní směry a k nim příslušné hlavní roviny, korespondující kořenům ϱ_1 a ϱ_2. Známým způsobem nalezneme řešením soustavy (29,9) pro $i = 1$ resp. $i = 2$

$$l_1 : m_1 : n_1 = 1 : 0 : 1 \text{ resp. } l_2 : m_2 : n_2 = 0 : 1 : 0.$$

Hlavní rovina náležející k prvému resp. druhému z nich je polární rovina nevlastního bodu (1; 0; 1; 0) resp. (0; 1; 0; 0);

je tedy rovnice prvé hlavní roviny $f_1(x, y, z) + f_3(x, y, z) = 0$, druhé $f_2(x, y, z) = 0$, t. j. $x + z = 0$ a $y + 1 = 0$. O druhu kvadriky nyní rozhodnou průsečíky osy o — která je společnou přímkou obou určených hlavních rovin — s kvadrikou. Snadno zjistíme, že po dosazení $y = -1$, $z = -x$ do dané rovnice kvadriky vznikne identita, t. j. všechny body osy náleží ploše, která je proto nutně složena z rovin osou o procházejících. Obě tyto roviny, náležejíce svazku o ose o, mají rovnice tvaru

$$\lambda_1 (x + z) + \lambda_2 (y + 1) = 0$$

a

$$\mu_1 (x + z) + \mu_2 (y + 1) = 0.$$

Znásobením obou rovnic a porovnáním koeficientů součinu levých stran s koeficienty dané rovnice kvadriky — nebo jiným způsobem — zjistíme, že jest $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = -1$ a daná kvadrika je složena z rovin o rovnicích $x - y + z - 1 = 0$ a $x + y + z + 1 = 0$.

Příklady k cvičení. V příkladech **113—121** určete z dané rovnice kvadriky její druh, napište normální tvar její rovnice, jakož i rovnice příslušné ortogonální transformace!

113. $7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 22x + 24y + 2z + 30 = 0$ [trojosý elipsoid $\frac{1}{2}X^2 + Y^2 + \frac{3}{2}Z^2 - 1 = 0$, transformace $x = \frac{1}{3}X + \frac{2}{3}Y - \frac{2}{3}Z + 1$, $y = \frac{2}{3}X + \frac{1}{3}Y + \frac{2}{3}Z - 2$, $z = \frac{2}{3}X - \frac{2}{3}Y - \frac{1}{3}Z - 1$].

114. $7x^2 + 100y^2 - 48xz - 7z^2 + 62x - 100y - 34z + 98 = 0$ [dvojdíl. hyperboloid trojosý $X^2 - Y^2 - 4Z^2 - 1 = 0$; transf. rovnice $x = \frac{3}{5}X + \frac{4}{5}Y - 1$, $y = Z + \frac{1}{2}$, $z = \frac{4}{5}X - \frac{3}{5}Y + 1$].

115. $2x^2 + 2y^2 + 4xz + 4yz - 8x - 12y + 1 = 0$ [trojosý kužel $\frac{1}{2}X^2 + Y^2 - \frac{1}{2}Z^2 = 0$, transf. rovnice $x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}X + \frac{1}{3}\sqrt{3}Y + \frac{1}{6}\sqrt{6}Z - \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}\sqrt{2}X + \frac{1}{3}\sqrt{3}Y + \frac{1}{6}\sqrt{6}Z + \frac{1}{2}$, $z = \frac{1}{3}\sqrt{3}Y + \frac{1}{3}\sqrt{6}Z + \frac{5}{3}$].

116. $315x^2 + 216xy + 66y^2 + 24xz + 240yz + 464z^2 - 216x + 882y - 578z - 441 = 0$ [elipt. paraboloid $X^2 + \frac{2}{3}Y^2 - 2Z = 0$, transf. rovnice $x = \frac{3}{13}X - \frac{12}{13}Y + \frac{4}{13}Z - \frac{1}{3}$, $y = \frac{4}{13}X - \frac{3}{13}Y - \frac{12}{13}Z + \frac{1}{2}$, $z = \frac{12}{13}X + \frac{4}{13}Y + \frac{3}{13}Z + \frac{1}{4}$].

117. $3(x^2 + y^2 + z^2) + 4\sqrt{2}xy + 2yz + 6x + 2y(2\sqrt{2} - 1) - 6z - 9 = 0$ [eliptický válec $\frac{1}{5}X^2 + \frac{2}{5}Y^2 - 1 = 0$, transform. rovnice $x = \frac{1}{3}X + \frac{2}{3}Y + \frac{2}{3}Z - 1$, $y = \frac{1}{2}\sqrt{2}(Y - Z)$, $z = -\frac{2}{3}\sqrt{2}X + \frac{1}{6}\sqrt{2}(Y + Z) + 1$].

118. $16x^2 - 96xy + 144y^2 + 24xz - 72yz + 9z^2 - 133x - 108y - 480z + 20\frac{1}{4} = 0$ [parabolický válec $Y^2 - 3X = 0$, transf. rovnice $x = \frac{1}{13}(3X + 4Y + 12Z)$, $y = \frac{1}{13}(4X - 12Y + 3Z) - \frac{7}{48}$, $z = \frac{1}{13}(12X + 3Y - 4Z) + \frac{1}{12}$].

119. $4x^2 + 6y^2 + 6z^2 + 11xy + 14xz + 13yz + 17x + 14y + 11z + 4 = 0$ [dvě různoběž. roviny $x + 2y + 3z + 4 = 0$ a $4x + 3y + 2z + 1 = 0$].

120. $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz - 1 = 0$ [dvě rovnoběž. roviny $x + y + z + 1 = 0$ a $x + y + z - 1 = 0$].

121. $4x^2 + y^2 + 4z^2 - 4xy + 8xz - 4yz - 4x + 2y - 4z + 1 = 0$ [dvakrát počítaná rovina $2x - y + 2z - 1 = 0$].

122. Determinant $D(\varrho_1)$ má všechny minory druhého řádu rovny nule, jestliže $\varrho_1 = \varrho_2$ je dvojnásobný kořen rovnice $D(\varrho) = 0$. — Dokažte tuto větu alespoň za předpokladu, že hlavní směr náležející jednoduchému kořeni ϱ_3 je směr osy $\vec{z}$ (viz odst. **29**). [Za tohoto předpokladu je $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$ $a_{11} = a_{22} = \varrho_1$, $a_{33} = \varrho_3$ a v determinantu $D(\varrho_1)$ je pouze jeden prvek od nuly různý, čímž věta dokázána.]

123. Jaká jest kvadrika, v jejíž rovnici souhrn kvadratických členů $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$ lze rozložiti v součin dvou lineárních trojčlenů [paraboloid, válec neparabolický, nebo dvě nikoliv rovnoběžné roviny, neliší-li se oba činitelé pouhým konstantním faktorem — v opačném případě plocha je parabolický válec, dvě roviny rovnoběžné nebo rovina dvakrát počítaná].

VII.

KVADRIKY V PRAVOÚHLÝCH KARTÉZSKÝCH SOUŘADNICÍCH. POPIS JEDNOTLIVÝCH DRUHŮ.

33. O jednodílném hyperboloidu.

a) Z normálního tvaru rovnice jednodílného hyperboloidu trojosého

$$f(x, y, z) \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \qquad (33,1)$$

nejsnadněji odvodíme jeho hlavní vlastnosti. Je zřejmé, že všechny tři stěny souřadnicového trojhranu jsou jeho roviny souměrnosti a jejich průsečné přímky, hrany trojhranu souřadnic, jsou osy souměrnosti plochy. Nazýváme je osy hyperboloidu.

Stejně je tomu u všech středových kvadrik, máme-li na mysli jejich rovnice v normálním tvaru.

Průsečíky kvadriky s jejími osami jsou její vrcholy. Pouze čtyři z šesti vrcholů trojosého hyperboloidu jednodílného jsou reálné; dva z nich $(\pm a; 0; 0)$ leží na ose $\vec{x}$, jiné dva $(0; \pm b; 0)$ na $\vec{y}$. Na ose $\vec{z}$ ležící vrcholy $(0; 0; \pm ic)$ jsou sdruženě imaginární.

Délky a, b, ic jsou poloosy plochy (obr. 16).

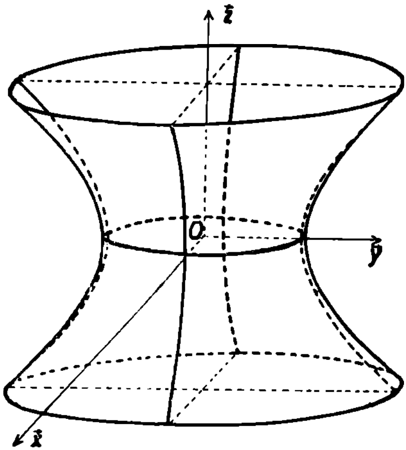
Roviny rovnoběžné s $(\vec{x}\,\vec{y})$ o rovnici $z = k$, kde k je reálná konstanta, protínají plochu (33,1) v elipsách o rovnicích

$$z - k = 0, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \left(1 + \frac{k^2}{c^2}\right) = 0,$$

čili o rovnicích

$$z - k = 0, \quad \frac{x^2}{\frac{a^2\,(c^2 + k^2)}{c^2}} + \frac{y^2}{\frac{b^2\,(c^2 + k^2)}{c^2}} - 1 = 0. \qquad (33,2)$$

Poměr poloos těchto elips zřejmě nezávisí na k. Z toho lze souditi, že osnova rovin rovnoběžných s hlavní rovinou $(\vec{x}\ \vec{y})$ protíná jednodílný hyperboloid (33,1) v soustavě elips podobných, promítající se kolmo do téže hlavní roviny v soustavu homotetických elips, jejichž osy leží v osách $\vec{x}$ a $\vec{y}$ (obr. 16).



Obr. 16. Jednodílný hyperboloid trojosý s hlavními hyperbolami a elipsou.

Se zvětšujícím se $|k|$ zvětšují se i poloosy průsečné elipsy; svého minima tedy dosahují pro $k = 0$; tuto nejmenší ze všech elips soustavy (33,2)

$$z = 0, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \tag{33,3}$$

nazýváme hrdlovou elipsou jednodílného hyperboloidy trojosého. Tečné roviny plochy v bodech hrdlové elipsu jsou rovnoběžny s osou $\vec{z}$ a obalují eliptický válec, v jehož vnitřní části není reálných bodů hyperboloidu.

Vrcholy elips soustavy (33,2) leží po dvou (protějších) na t. zv. **hlavních hyperbolách** plochy v hlavních rovinách, o rovnicích

$$y = 0, \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \tag{33,4}$$

resp.

$$x = 0, \qquad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0. \tag{33,5}$$

Hrdlová elipsa a obě hlavní hyperboly jsou současně obrysy kolmých průmětů plochy do rovin těchto kuželoseček, t. j. do rovin hlavních.

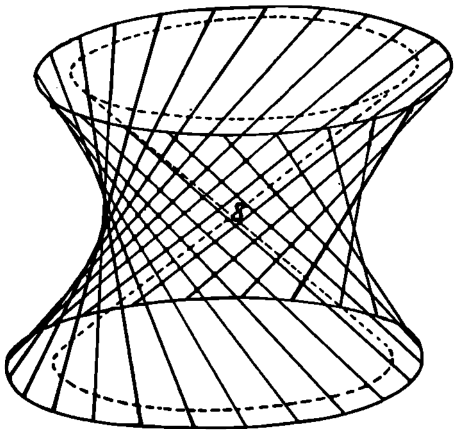
b) Z rovnice hyperboloidu (33,1) vychází $A = -A_{44} = = \frac{1}{a^2b^2c^2} > 0$, proto jednodílný hyperboloid je kvadrika **přímková**. Asymptotický kužel (obr. 17) má podle (25,8) rovnici

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \tag{33,7}$$

a zřejmě je reálný. Z jeho rovnice je patrno, že jeho roviny kolmé souměrnosti (roviny hlavní) se ztotožňují s rovinami souměrnosti hyperboloidu, proto i osy obou ploch se ztotožňují.

Jen u jednodílného hyperboloidu může nastati případ, předvídaný v odst. 25, kdy diametrální řez plochy je singulární kuželosečka, složená ze dvou rovnoběžných tvořících přímek p, q hyperboloidu. **Rovina ϱ tohoto řezu musí pak býti tečnou rovinou kužele asymptotického a dotýkati se jej podél přímky, která je rovnoběžna s přímkami p, q.**

Ze vztahu plochy k jejímu asymptotickému kuželi dále plyne, že na jednodílném hyperboloidu existují kuželosečky všech druhů; mezi nimi paraboly leží v rovinách rovnoběžných s tečnými rovinami asymptotického kužele. Máme-li rozhodnouti o druhu průsečné kuželosečky dané roviny s hyperboloidem, stačí místo něho uvažovati kužel asymptotický. S výjimkou řezů rovinami diametrálními obdržíme na asymptotickém kuželi kuželosečku téhož druhu, soustřednou a podle společného středu homotetickou, neboť asymptoty — ať již reálné nebo sdruženě imaginární — obou křivek jsou tytéž.



Obr. 17. Jednodílný hyperboloid s regulem přímek a kuželovou plochou asymptotickou.

Všechny dosud řečené vlastnosti má též jednodílný hyperboloid rotační ($a^2 = b^2$). Místo elips soustavy (33,2) máme zde ovšem kružnice (rovnoběžky) hyperboloidu, z nichž nejmenší poloměr má hrdlová kružnice v jeho hlavní rovině $(\vec{x}\ \vec{y})$. Obě hlavní hyperboly jsou zde shodné, neboť plochu lze vytvořiti rotací kterékoliv z nich kolem rotační osy $\vec{z}$.

Rotací jejich asymptot vznikne asymptotický kužel plochy, který tudíž je též rotační.

Charakteristická rovnice trojosého jednodílného hyperboloidu (33,1) má kořeny

$$\varrho_1 = \frac{1}{a^2}, \quad \varrho_2 = \frac{1}{b^2}, \quad \varrho_3 = -\frac{1}{c^2}. \tag{33,8}$$

Je-li $a > b$, pak ϱ_1 je kořen prostřední velikosti a podle odst. 30 pouze singulární kuželosečka h_1 charakteristického svazku

$$x_4 = 0, \quad \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} - \frac{1}{a^2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = 0, \tag{33,9}$$

je složena z reálných přímek nevlastních. Jimi jsou určeny dvě osnovy reálných rovin cyklických, které jsou vesměs rovnoběžny s osou $\vec{x}$ a položeny souměrně podle hlavních rovin $(\vec{x}\,\vec{y})$ a $(\vec{x}\,\vec{z})$. Z (33,9) vychází, že každá z obou rovin

$$c\sqrt{a^2 - b^2} \,.\, y \pm b\sqrt{a^2 + c^2} \,.\, z, \tag{33,10}$$

určuje svým směrem jednu z obou osnov cyklických rovin.

Středy kružnic každé z obou soustav vyplňují průměr hyperboloidu, ležící v rovině $(\vec{y}\,\vec{z})$ a sdružený vzhledem k hlavní hyperbole (33,5) s průměrem (33,10). Tak vycházejí rovnice obou průměrů

$$x = 0, \quad z = \pm \frac{c}{b}\sqrt{\frac{a^2 + c^2}{a^2 - b^2}}\, y. \tag{33,11}$$

Na jednodílném hyperboloidu, jak víme (odst. 30), není reálných kruhových bodů a žádný z průměrů (33,11) nemá s plochou reálných bodů společných. Průměr kružnice se s polohou cyklické roviny ovšem mění; délky průměrů (33,10) hyperboly (33,5) jsou stejné a rovny průměru obou shodných nejmenších plošných kružnic.

Je-li jednodílný hyperboloid rotační, obě soustavy jeho kružnic se ztotožňují v soustavě kružnic (rovnoběžek) hyperboloidu.

c) Z normálního tvaru (33,1) rovnice trojosého hyperboloidu jednodílného vychází podle (23,5) jeho rovnice v přímkových souřadnicích

$$a^2p_{23}^2+b^2p_{13}^2-c^2p_{12}^2+b^2c^2p_{14}^2+a^2c^2p_{42}^2-a^2b^2p_{34}^2=0. \quad (33,12)$$

Souřadnice přímky q jednoho z regulů (obr. 17) vyhovují podle (23,7) trojici rovnic

$$abq_{34}+cq_{12}=0,\ acq_{42}-bq_{13}=0,\ bcq_{14}-aq_{23}=0, \quad (33,13)$$

kdežto souřadnice přímky r druhého regulu vyhovují rovnicím

$$abr_{34}-cr_{12}=0,\ acr_{42}+br_{13}=0,\ bcr_{14}+ar_{23}=0. \quad (33,14)$$

Přímka p je tvořící přímkou asymptotického kužele (33,7), když její souřadnice splňují soustavu rovnic

$$p_{12}=p_{13}=p_{23}=0,\quad \frac{p_{41}^2}{a^2}+\frac{p_{42}^2}{b^2}-\frac{p_{43}^2}{c^2}=0. \quad (33,15)$$

Je-li jednodílný hyperboloid (33,1) rotační, svírají tvořící přímky jeho asymptotického kužele s osou $\vec{z}$ týž úhel ε, o němž platí $\operatorname{tg}\varepsilon=\dfrac{a}{c}$. Protože tvořící přímky hyperboloidu jsou rovnoběžny s tvořícími přímkami jeho asympt. kužele, svírají s osou $\vec{z}$ touž odchylku ε, jsou s ní však mimoběžny.

Je-li q jedna z tvořících přímek rotačního hyperboloidu, obdržíme každou jinou z přímek téhož regulu pootočením přímky q okolo osy $\vec{z}$. Abychom stejným způsobem vytvořili i druhý regulus, postačí znáti jednu jeho přímku, na př. onu, která je s q souměrně položena podle kterékoliv roviny procházející osou $\vec{z}$.

Při otáčení přímky q okolo $\vec{z}$ její body opisují kružnice plochy, z nichž nejmenší poloměr má ona, kterou opisuje od osy $\vec{z}$ nejméně vzdálený bod přímky q. Jest to, jak známo, pata společné kolmice (osy) obou mimoběžek q, $\vec{z}$ a kružnice jím opsaná je hrdlová kružnice hyperboloidu. Z toho plyne, že osa mimoběžek $q, \vec{z}$ leží v rovině $(\vec{x}\ \vec{y})$ a protíná osu $\vec{z}$ v počátku. Platí tedy věta:

Otáčením přímky q okolo osy o s ní mimoběžné, nikoli však k ní kolmé, se vytvořuje jednodílný rotační hyperboloid; souhrn všech přímek, jež při tomto pohybu zaujme přímka q, tvoří jeden regulus tvořících přímek hyperboloidu. Druhý obdržíme zrcadlením podle roviny kteréhokoliv meridiánu, nebo otáčením jedné z jeho přímek okolo o. Hrdlová kružnice je vytvořena otáčením onoho bodu přímky q, jehož vzdálenost od o je nejmenší.

Je tedy rotační hyperboloid jednodílný jednoznačně určen svou rotační osou a s ní mimoběžnou tvořící přímkou.

Jeho vytvoření otáčením přímky jest podkladem pro jeho modely z pružných vláken. Mysleme si rotační válec, omezený dvěma kruhovými podstavami, které na modelu jsou realisovány dvěma shodnými kruhovými kotouči, otáčivými okolo hmotné osy válce. Jsou-li tvořící přímky válce pružná vlákna, napjatá mezi obvody obou kotoučů, změní se po pootočení jednoho z obou kotoučů — které ovšem má svou hranici — celá soustava tvořících přímek válce v jeden z regulů rotačního hyperboloidu jednodílného (obr. 17). Komplementární regulus vzniká pootočením téhož kotouče z jeho původní polohy o týž úhel, ale v opačném smyslu.

Při zvětšování úhlu pootočení zmenšuje se poloměr hrdlové kružnice a při určité jeho velikosti vznikne kužel. Při ještě větším pootočení vlákna se ve středu válce lomí.

d) Názorné je vytvoření jednodílného hyperboloidu trojosého z rotačního transformací, jíž nazýváme **kolmou perspektivní prostorovou afinitou.**

Položíme-li v (31,14)

$$X = x, \quad Y = \frac{a}{b} y, \quad Z = z, \tag{33,16}$$

obdržíme právě (33,1).

Z rovnic (33,16), vyjadřujících uvedenou afinitu, je její geometrický význam patrný na prvý pohled. Dva korespondující body se shodují v prvé i v třetí souřadnici, pouze druhá se násobí kladným číslem $\frac{b}{a}$. Body roviny $(\overrightarrow{x}\overrightarrow{z})$ jsou neproměnné (invariantní), proto ji nazýváme samodružnou (invariantní) rovinou afinity. Libovolný bod v prostoru se transformuje v jiný, ležící s původním na společné kolmici k samodružné rovině. Vzdálenost transformovaného bodu od této roviny jest $\frac{b}{a}$ násobkem vzdálenosti bodu původního $\left(\frac{b}{a} = \text{poměr afinity}\right)$. Lze tedy vysloviti větu:

Kolmá perspektivní afinita, jejíž samodružná rovina σ prochází osou o rotačního hyperboloidu jednodílného, transformuje jej v soustředný trojosý hyperboloid jednodílný, s jednou hlavní rovinou a hlavní hyperbolou v rovině σ a s osou o. Při této transformaci hrdlová kružnice rotačního hyperboloidu se transformuje v hrdlovou elipsu hyperboloidu trojosého.

Jak je z (33,16) patrno, použitá transformace je lineární, takže rovina se jí transformuje v rovinu, přímka v přímku. Oba reguly rotačního hyperboloidu se jí transformují v oba reguly hyperboloidu trojosého.

Jak víme, žádný z těchto regulů neobsahuje přímek nevlastních. Takové reguly se nazývají **hyperboloidické.**

Při transformaci (33,16) pól a polární rovina plochy (31,14) přecházejí v pól a polární rovinu plochy (33,1). Totéž platí o bodu na ploše a jeho rovině tečné. Rovnici tečné roviny plochy (33,1) v jejím bodě $(x_0; y_0; z_0)$ dovedeme ovšem napsati přímo podle odst. 21 ve tvaru

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - \frac{zz_0}{c^2} - 1 = 0;$$

není-li $(x_0; y_0; z_0)$ bodem plochy, je to rovnice jeho roviny polární.

Příklady k cvičení.

124. Dokažte: Obě polární roviny libovolného bodu nevlastního vzhledem k jednodílnému hyperboloidu a jeho asymptotickému kuželi se ztotožňují. [Napište rovnice obou rovin podle odst. **21**, homogenisujíce napřed rovnice (33,1) a (33,7)!

125. Dokažte: Obě úsečky, omezené dvojicemi bodů, které na libovolné sečně vytíná jednak hyperboloid, jednak jeho asymptot. kužel, mají společný půlící bod. Jak tedy lze sestrojovati další body hyperboloidu, je-li dán jeho jeden bod a kužel asymptotický? [Plyne z věty příkladu **124.**]

126. Dokažte: Tečna asymptotického kužele v jeho bodě P protíná hyperboloid v dvojici bodů, jejichž vzdálenost bod P půlí. [Plyne z věty příkladu **125.**]

127. Dokažte: Tečná rovina σ asymptotického kužele v bodech jeho tvořící přímky p protíná hyperboloid ve dvou rovnoběžných přímkách, jejichž vzdálenost přímka p půlí. [Plyne z věty příkl. **126.**]

128. Dokažte, že přímka q je jen tehdy tvořící přímkou rotačního hyperboloidu jednodílného (31,14), když její souřadnice vyhovují rovnici $q_{14}q_{13} - q_{23}q_{42} = 0$! [Vychází buď z (33,13), kde $a = b$, nebo přímo jako podmínka, aby osa mimoběžek $q, \vec{z}$ procházela počátkem.]

129. Jak zní rovnice rotačního hyperboloidu (31,14), dána-li jeho tvořící přímka q, jejíž souřadnice splňují rovnici příkladu **128**? [Viz příklad **130.**]

130. Jak zní normální rovnice (31,13) trojosého hyperboloidu jednodílného, určeného osami $\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}$ a přímkou q? [Podle

(33,13) nebo (33,14) vypočtěte a^2, b^2, c^2! Hledaná rovnice je až na faktor

$$q_{23}q_{34}q_{42}x^2 + q_{13}q_{34}q_{14}y^2 + q_{12}q_{42}q_{14}z^2 + q_{12}q_{13}q_{23} = 0.]$$

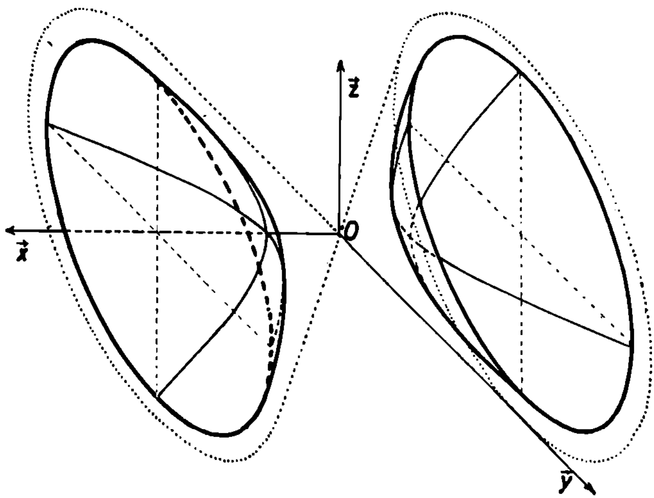
131. Dokažte, že tři přímky téhož hyperboloidického regulu nejsou komplanární (t. j. rovnoběžny s jednou rovinou)! [V opačném případě by komplementární regulus obsahoval společnou nevlastní příčku daných přímek a nebyl by hyperboloidický; pak by však nebyl hyperboloidický ani původní regulus.]

132. Dokažte, že kulová plocha $x^2 + y^2 + z^2 - b^2 = 0$ protíná jednodílný hyperboloid trojosý (33,1), při $a > b$ ve dvou shodných kružnicích v rovinách (33,10)! [Vylučte x z rovnic obou ploch!]

34. O dvojdílném hyperboloidu.

a) Pouze dva z šesti vrcholů trojosého hyperboloidu dvojdílného (obr. 18)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \qquad (34,1)$$



18. Dvojdílný hyperboloid trojosý s asymptotickou kuželovou plochou a hlavními hyperbolami.

jsou reálné a to vrcholy $(\pm a; 0; 0)$ na ose $\vec{x}$, jíž říkáme **reálná osa hyperboloidu.** Naproti tomu na jeho **imaginárních osách** $\vec{y}, \vec{z}$ ležící vrcholy $(0; \pm ib; 0)$ a $(0; 0; \pm ic)$ jsou sdruženě imaginární.

Protože

$$A = -A_{44} = -\frac{1}{a^2b^2c^2} < 0, \tag{34,2}$$

není na ploše přímek. Přes to asymptotický kužel dvojdílného hyperboloidu je reálný a má podle (25,8) rovnici

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Roviny rovnoběžné s $(\vec{y}\ \vec{z})$ ve vzdálenosti k protínají hyperboloid v soustavě kuželoseček o rovnicích

$$x - k = 0, \quad \frac{y^2}{\frac{b^2}{a^2}(k^2 - a^2)} + \frac{z^2}{\frac{c^2}{a^2}(k^2 - a^2)} - 1 = 0; \tag{34,3}$$

reálné z nich jsou patrně jen ty, pro něž $|k| > a$. Pak jsou všechny kuželosečky soustavy (34,3) elipsy (obr. 18) a to podobné, neboť poměr čtverců jejich poloos $\frac{b^2}{c^2}$ nezávisí na k. S rostoucím k rostou i poloosy průsečné elipsy a to tak, že dva její protější vrcholy vytvořují hlavní hyperbolu plochy v hlavní rovině $(\vec{x}\ \vec{y})$ o rovnicích

$$z = 0, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \tag{34,4}$$

kdežto zbývající dva vrcholy vytvořují hlavní hyperbolu v rovině $(\vec{x}\ \vec{z})$ o rovnicích

$$y = 0, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0. \tag{34,5}$$

Obě hlavní hyperboly jsou současně obrysy kolmých průmětů plochy do svých rovin.

Pro $|k| = a$ průsečná kuželosečka je singulární; jsou tedy roviny $x \mp a = 0$ tečné roviny plochy v jejích reálných vrcholech. Mezi nimi není reálných bodů plochy.

Z uvedených vlastností lze si učiniti představu o tvaru plochy, která, jak název naznačuje, je složena ze dvou oddělených částí.

Z reálnosti asymptotického kužele (34,2) lze usouditi, že též na dvojdílném hyperboloidu existují kuželosečky všech druhů. Řezy hyperboloidu a jeho asymptotického kužele nikoliv diametrální rovinou σ jsou kuželosečky téhož druhu. Jsou-li středové, jsou soustředné a homotetické podle společného středu, neboť mají společné asymptoty, ať již reálné, nebo sdruženě imaginární. Parabolické řezy vzniknou na obou plochách jen tehdy, je-li rovina σ rovnoběžná s některou tečnou rovinou asymptotického kužele.

Na rozdíl od jednodílného hyperboloidu leží všechny body hyperboloidu dvojdílného uvnitř jeho asymptotického kužele.

Je-li $b = c$, dvojdílný hyperboloid (34,1) je rotační o ose rotace $\vec{x}$, což platí i o jeho asymptotickém kuželi.

Rotační hyperboloid dvojdílný lze definovati jako geometrické místo bodů v prostoru, které mají od dvou různých bodů F, G stálý rozdíl vzdáleností. Spojnice FG je rotační osa plochy, body FG jsou společná ohniska všech jejích meridiánů, jež jsou shodné hyperboly.

b) Na trojosém hyperboloidu dvojdílném existují dvě soustavy kružnic. Protože charakteristická rovnice plochy (34,1) má kořeny

$$\varrho_1 = \frac{1}{a^2}, \quad \varrho_2 = -\frac{1}{b^2}, \quad \varrho_3 = -\frac{1}{c^2},$$

je při $c < b$ kořen ϱ_2 střední velikosti. Jen singulární kuželosečka h_2 charakteristického svazku je reálná a má rovnice

$$x_4 = 0, \quad \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} + \frac{1}{b^2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = 0.$$

Obě osnovy cyklických rovin jsou proto určeny rovinami

$$xc\sqrt{a^2 + b^2} \pm za\sqrt{b^2 - c^2} = 0, \tag{34,6}$$

procházejícími osou $\vec{y}$, takže všechny cyklické roviny jsou s touto osou rovnoběžny. Geometrickým místem středů kružnic oné soustavy, jež odpovídá hornímu znaménku v (34,6), je průměr hyperboloidu

$$y = 0, \quad xc\sqrt{b^2 - c^2} + za\sqrt{a^2 + b^2} = 0, \tag{34,7}$$

kdežto kružnice druhé soustavy mají své středy na průměru

$$y = 0, \quad xc\sqrt{b^2 - c^2} - za\sqrt{a^2 + b^2} = 0. \tag{34,8}$$

O správnosti těchto rovnic se snadno přesvědčíme na př. určením polárních rovin nevlastních bodů obou průměrů; lze je ovšem též odvoditi jako rovnice k (34,6) sdružených průměrů vzhledem k hlavní hyperbole (34,5).

Na rozdíl od jednodílného hyperboloidu existují zde reálné body kruhové. Dva z nich leží na průměru (34,7), další dva na průměru (34,8). Jejich souřadnice jsou dány výrazy

$$x = \pm a\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2 + c^2}}, \quad y = 0, \quad z = \pm c\sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 + c^2}}, \tag{34,9}$$

kde je dovoleno znaménka jakkoliv kombinovati. Určují tudíž kruhové body dvojdílného hyperboloidu obdélník v hlavní rovině, kolmé k rovinám cyklickým, a to kolmo souměrný podle os hyperboloidu, ležících v téže rovině.

Rovnice polární roviny, resp. tečné roviny plochy v jejím bodě $(x_0; y_0; z_0)$ zní

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} - \frac{zz_0}{c^2} - 1 = 0; \tag{34,10}$$

odtud vychází, že rovnice tečných cyklických rovin (protínajících plochu v dvojicích sdružených isotropických přímek), t. j. tečných rovin v kruhových bodech, jsou

$$\pm \frac{x}{a} \sqrt{a^2 + b^2} \pm \frac{z}{c} \sqrt{b^2 - c^2} - \sqrt{a^2 + c^2} = 0, \quad (34,11)$$

kde opět jest kombinovati znaménka všemi způsoby. Rozhodování o tom, v kterém kruhovém bodě se některá z rovin (34,18) dotýká plochy a na kterém z obou průměrů (34,7), (34,8) některý z kruhových bodů (34,9) leží, nečiní žádných obtíží.

Stejně jako trojosý hyperboloid jednodílný lze i dvojdílný vytvořiti kolmou perspektivní afinitou z dvojdílného hyperboloidu rotačního. Skutečně, transformací

$$X = x, \quad Y = y, \quad Z = \frac{b}{c} z \qquad (34,12)$$

rovnice (31,16) přechází v (34,1). Odtud je patrno, že za invariantní rovinu afinity lze zvoliti rovinu kteréhokoliv meridiánu rotačního hyperboloidu dvojdílného.

Příklady k cvičení.

133. Dokažte, že věty příkladů **124**, **125** platí i pro hyperboloid dvojdílný! Jak je nutno pozměniti větu příkladu **126**, aby platila pro jednodílný hyperboloid? [Zaměniti hyperboloid s asympt. kuželem.]

134. Kdy obdélník o vrcholech v kruhových bodech dvojdílného hyperboloidu (34,1) s $c < b$ je čtverec? Kolik kruhových bodu má rotační hyperboloid dvojdílný a kde tyto body leží? [Když $a^4 + c^4 + a^2b^2 - b^2c^2 = 0$. — Dva; na ose rotace plochy.]

35. O elipsoidech. a) Z normální rovnice trojosého reálného elipsoidu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \qquad (35,1)$$

je patrno, že má šest vesměs reálných vrcholů ($\pm\, a$; 0; 0), (0; $\pm\, b$; 0), (0; 0; $\pm\, c$). Délky a, b, c jsou poloosy elipsoidu.

Protože jest

$$A = -A_{44} = -\frac{1}{a^2b^2c^2} < 0, \tag{35,2}$$

jsou elipsoidy plochy nepřímkové.

Nevlastní kuželosečka plochy o rovnicích

$$x_4 = 0,\ \frac{x_1^{\ 2}}{a^2} + \frac{x_2^{\ 2}}{b^2} + \frac{x_3^{\ 2}}{c^2} = 0, \tag{35,3}$$

zřejmě nemá žádných bodů reálných a je imaginární stejně jako asymptotický kužel

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0. \tag{35,4}$$

Je-li $a = b$, elipsoid je rotační. Z jeho rovnice (31,18) je patrné, že vzniká rotací elipsy (srovnej s 18,6)

$$Y = 0,\quad \frac{X^2}{a^2} + \frac{Z^2}{c^2} - 1 = 0 \tag{35,5}$$

okolo osy $\vec{Z}$.

Kolmá perspektivní afinita

$$X = x,\quad Y = \frac{a}{b}\,y,\quad Z = z, \tag{35,6}$$

jejíž samodružná rovina je meridián $(\vec{X}\vec{Z})$ rotačního elipsoidu (31,18) jej transformuje v trojosý elipsoid (35,1). Rovník rotačního elipsoidu při této transformaci přechází v hlavní elipsu E (obr. 19)

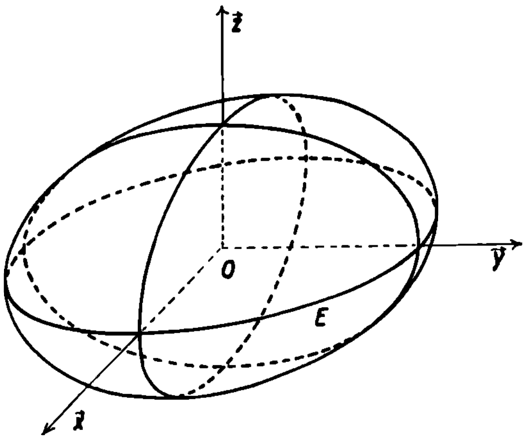
v rovině $(\vec{x}\ \vec{y})$ o rovnicích

$$z = 0,\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

kdežto meridiány rotačního elipsoidu v rovinách $(\vec{Z}\vec{Y})$ resp.

$(\overrightarrow{ZX})$ se transformují v další dvě hlavní elipsy trojosého elipsoidu. Posledně uvedený meridián zůstává transformací nezměněn, neboť leží v rovině invariantní, takže je to společná křivka obou ploch; kromě toho se obě plochy podél ní dotýkají.

Z vytvoření trojosého elipsoidu kolmou perspektivní afinitou vyplývá, že i trojosý elipsoid — stejně jako rotační — je plocha uzavřená; všechny její řezy rovinami nikoliv



Obr. 19. Trojosý elipsoid s hlavními elipsami.

tečnými jsou elipsy, reálné ovšem jen tehdy, leží-li pól jejich roviny vně elipsoidu, t. j. v opačné části prostoru než střed elipsoidu.

Z rovnice (35,1) vychází

$$z = \pm c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}. \qquad (35,7)$$

Aby tedy z bylo reálné, musí býti

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqq 1,$$

t. j. pouze bodům uvnitř elipsy E (obr. 19) přísluší reálné souřadnice z, což je patrno i z okolnosti, že hlavní elipsy jsou obrysy kolmých průmětů elipsoidu.

Každá rovina, procházející některou osou, na př. $\vec{z}$, protíná elipsoid v elipse, jejíž dva protější vrcholy se ztotožňují s vrcholy elipsoidu na $\vec{z}$, zatím co zbývající dva vrcholy průsečné elipsy leží na E. Soustava elips v těchto rovinách umožňuje představu plochy.

Je-li $a > b > c$, oba vrcholy elipsoidu na ose $\vec{x}$ ležící náleží kulové ploše o poloměru a, soustředné s elipsoidem, a všechny ostatní jeho body leží uvnitř téže kulové plochy. Obráceně, všechny body elipsoidu až na dva jeho vrcholy na $\vec{z}$ leží vně kulové plochy soustředné o poloměru c. Odtud plyne: Oba vrcholy na $\vec{x}$ resp. na $\vec{z}$ jsou ony body elipsoidu, jejichž vzdálenost od jeho středu je maximální resp. minimální.

b) Na trojosém elipsoidu existují dvě soustavy kružnic; protože $\frac{1}{b^2}$ je za již učiněného předpokladu o velikosti poloos kořen charakteristické rovnice prostřední velikosti, singulární kuželosečka charakteristického svazku

$$x_4 = 0, \quad \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} - \frac{1}{b^2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = 0 \quad (35,8)$$

je složena z dvojice reálných nevlastních přímek cyklických rovin obou osnov. Odtud vyplývá, že každá z obou osnov je určena jednou z rovin

$$xc\sqrt{a^2 - b^2} \pm za\sqrt{b^2 - c^2} = 0. \quad (35,9)$$

Obě kružnice v těchto rovinách leží též na kulové ploše, opsané ze středu elipsoidu poloměrem rovným poloose prostřední délky. Skutečně, vyloučením y z rovnice (35,1) a z rovnice

$$x^2 + y^2 + z^2 - b^2 = 0,$$

vychází rovnice (35,9), čímž tvrzení je dokázáno.

Cyklické roviny, rovnoběžné s rovinou (35,9), protínají elipsoid v kružnicích, jejichž středy vyplňují jeho průměr o rovnicích

$$y = 0, \quad za\sqrt{a^2 - b^2} \mp xc\sqrt{b^2 - c^2} = 0, \qquad (35,10)$$

při čemž v (35,9) a v (35,10) jest bráti současně buď horní nebo dolní znaménka. Oba průměry jsou sdruženy s průměry (35,9) hlavní elisy v rovině $(\vec{x}\ \vec{z})$ a protínají ji v čtyřech kruhových bodech elipsoidu o souřadnicích

$$x = \pm a\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}, \quad y = 0, \quad z = \pm c\sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}} \qquad (35,11)$$

V rovinách (35,9) ležící kružnice jsou shodné a mají ze všech největší poloměr. S rostoucí vzdáleností cyklické roviny od středu elipsoidu, klesá poloměr kružnice; tečná rovina v kruhovém bodě protíná plochu v dvojici sdružených isotropických přímek, cyklické roviny ještě vzdálenější od středu protínají elipsoid v kružnicích imaginárních.

Z rovnice polární (případně tečné) roviny

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} - 1 = 0$$

a ze souřadnic kruhových bodů snadno lze napsati rovnice tečných rovin v kruhových bodech elipsoidu.

c) Je-li elipsoid rotační ($a = b$, rotační osa $\vec{z}$) obě osnovy cyklických rovin se ztotožňují v osnově rovnoběžkových kružnic plochy. Počet bodů kruhových se redukuje na 2 body, ztotožňující se s vrcholy plochy na rotační ose. Je-li $c > a = b$, všechny meridiány elipsy mají společná ohniska F, G na rotační ose $\vec{z}$. Elipsoid se pak nazývá prodloužený a body F, G jsou jeho ohniska.

Prodloužený elipsoid rotační lze definovati jako geometrické místo bodů v prostoru, jejichž vzdálenosti od dvou bodů F, G mají stálý součet $2c$.

Je-li $c < a = b$, nazývá se rotační elipsoid (35,1) zploštělý. Vzniká otáčením elipsy okolo její vedlejší osy. Ohniska jeho meridiánů vyplňují kružnici v rovině $\overrightarrow{x}\,\overrightarrow{y}$, s elipsoidem soustřednou, o poloměru $\sqrt{a^2 - c^2}$.

Příklady k cvičení:

135. Určete kruhové body elipsoidů:

a) $\frac{1}{36}x^2 + \frac{1}{25}y^2 + \frac{1}{16}z^2 - 1 = 0$ $[\pm\, 6\sqrt{\frac{11}{20}};\ 0;\ \pm\, 12\sqrt{\frac{1}{20}}]$.

b) $\frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{4}y^2 + z^2 - 1 = 0$ $[\pm\, 3\sqrt{\frac{5}{8}};\ 0;\ \pm \sqrt{\frac{3}{8}}]$.

136. Dokažte, že rovnice tečné roviny elipsoidu (35,1), kolmé ke směru o kosinech $(\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$ má tvar

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma \pm \sqrt{a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\gamma} = 0.$$

137. Dokažte: Geometrickým místem vrcholů pravoúhlého trojhranu, jehož stěny jsou tečnými rovinami elipsoidu (35,1), jest kulová plocha $x^2 + y^2 + z^2 - a^2 - b^2 - c^2 = 0$. [Užijte rovnice tečné roviny udané v příkladě **136**.]

138. Vypočtěte souřadnice středu elipsy, ve které rovina $a_1x + a_2y + a_3z + a_4 = 0$ protíná elipsoid (35,1). [Střed leží na průměru s danou rovinou sdruženém, t. j. na poláře sdružené s její nevlastní přímkou.]

139. Ukažte, že elipsoid (35,1) lze parametricky vyjádřiti rovnicemi

$$x = a\sin\gamma\cos\varphi, \quad y = b\sin\gamma\sin\varphi, \quad z = c\cos\gamma$$

s parametry φ, γ. Jaké jsou čáry na ploše, pro něž jeden z obou parametrů je konstantní? [γ = const. jsou elipsy v rovinách rovnoběžných s $(\overrightarrow{x}\,\overrightarrow{y})$, φ = const. jsou elipsy v rovinách procházejících osou $\overrightarrow{z}$.]

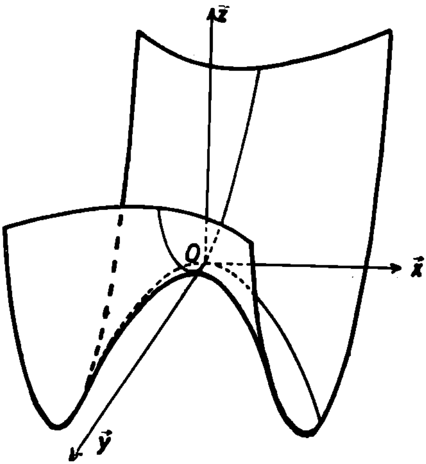
140. Napište rovnice středových kvadrik v souřadnicích rovinových a přímkových, vycházejíce z normálních tvarů jejich rovnic [podle (23,2) resp. (23,5)].

36. O hyperbolickém paraboloidu.

a) Z rovnice plochy ve tvaru normálním

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} - 2z = 0, \qquad (36,1)$$

je zřejmé, že pouze souřadnicové roviny $(\vec{x}\,\vec{z})$ a $(\vec{y}\,\vec{z})$ jsou hlavní roviny, t. j. roviny kolmé souměrnosti plochy (obr. 20),



Obr. 20. Hyperbolický paraboloid s hlavními parabolami.

která má proto jedinou osu $\vec{z}$. Rovina $(\vec{x}\,\vec{y})$ se plochy dotýká v jejím *vrcholu*, který se ztotožňuje s počátkem O; nazýváme ji proto *vrcholovou tečnou rovinou paraboloidu*. Osy $\vec{x}$ a $\vec{y}$ jsou sdružené a současně kolmé tečny paraboloidu v jeho vrcholu.

To vše zůstává v platnosti i pro paraboloid eliptický, máme-li na mysli normální tvar jeho rovnice.

Nevlastní kuželosečka hyperbolického paraboloidu (36,1) je složena ze dvou reálných nevlastních tvořících přímek t_1, t_2 o rovnicích

$$x_4 = 0, \quad \sqrt{q}\,x_1 \pm \sqrt{p}\,x_2, \tag{36,2}$$

jejichž průsečík je nevlastní bod osy paraboloidu.

Každá rovina protíná nevlastní kuželosečku plochy reálně, proto na hyperbolickém paraboloidu není ani elips ani kružnic, takže každá nikoliv tečná rovina jej protíná v hyperbole, nebo v parabole. Poslední případ nastává patrně jen tehdy, když rovina řezu je rovnoběžná s osou paraboloidu. Na př. obě jeho roviny hlavní jej protínají v t. zv. hlavních parabolách o rovnicích

$$y = 0, \quad x^2 - 2pz = 0, \tag{36,3}$$

resp.

$$x = 0, \quad y^2 + 2qz = 0. \tag{36,4}$$

Je zřejmé, že body hlavní paraboly (36,3) mají souřadnice $z \geqq 0$, kdežto body hlavní paraboly (36,4) naopak mají $z \leqq 0$. Leží tedy hlavní paraboly na opačných stranách tečné roviny vrcholové.

Roviny kolmé na osu paraboloidu jej protínají v hyperbolách o rovnicích

$$z - k = 0, \quad \frac{x^2}{2pk} - \frac{y^2}{2qk} - 1 = 0 \tag{36,5}$$
$$(k = \text{konst.} \neq 0).$$

Tyto hyperboly tvoří soustavu o asymptotách v rovinách

$$\sqrt{q}\,x \pm \sqrt{p}\,y = 0, \tag{36,6}$$

určených osou paraboloidu a jeho tvořícími přímkami v tečné rovině vrcholové $z = 0$. Každá z hyperbol soustavy (36,5) má své vrcholy na hlavní parabole (36,3) resp. (36,4) podle toho, je-li $k > 0$ nebo $k < 0$.

Z těchto vztahů je možno si učiniti představu o tvaru plochy. K ještě názornějšímu vytvoření hyperbolického paraboloidu vede studium řezů plochy rovinami rovnoběžnými s hlavními rovinami plochy.

Na př. rovina $y - d = 0$, rovnoběžná s hlavní rovinou $(\vec{x}\,\vec{z})$ protíná hyperbolický paraboloid (36,1) v parabole o rovnicích

$$y - d = 0, \qquad \frac{x^2}{p} - 2z - \frac{d^2}{q} = 0, \tag{36,7}$$

jejímž vrcholem jest bod

$$W\left(0;\, d;\, -\frac{d^2}{2q}\right),$$

ležící na hlavní parabole (36,4).

Průsečná parabola (36,7) má týž parametr p jako hlavní parabola (36,3), je s ní tedy shodná, vznikajíc z ní rovnoběžným posunutím, po němž vrchol O hlavní paraboly (36,3) se ztotožní s bodem W hlavní paraboly (36,4). Platí tedy věta:

Hyperbolický paraboloid lze vytvořiti rovnoběžným posouváním kterékoliv z jeho hlavních parabol, při kterém její vrchol opisuje druhou jeho hlavní parabolu.

b) Tvořící přímky hyperbolického paraboloidu jsou uspořádány do dvou regulů, které — na rozdíl od regulů hyperboloidických — obsahují po jedné z nevlastních přímek t_1, t_2 paraboloidu. Jinak řečeno, přímky každého z těchto regulů, jež nazýváme paraboloidickými, jsou rovnoběžny s jistou rovinou, t. zv. řídicí rovinou regulu.

Podle (24,7) a (24,8) přímky jednoho z obou regulů jsou průsečnice rovin

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1\left(\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}}\right) - 2\lambda_2 = 0, \\ \lambda_2\left(\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}}\right) - \lambda_1 z = 0, \end{aligned}\right\} \tag{36,8}$$

a řídicí rovina σ_1 téhož regulu zřejmě má rovnici $x\sqrt{q} + y\sqrt{p} = 0$ a ztotožňuje se s jednou z rovin (36,6).

Přímky komplementárního regulu jsou podle (24,9) a (24,10) průsečnice rovin

$$\left.\begin{aligned} \mu_1\left(\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}}\right) - 2\mu_2 = 0, \\ \mu_2\left(\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}}\right) - \mu_1 z = 0, \end{aligned}\right\} \tag{36,9}$$

a jeho řídicí rovina σ_2 je druhá z rovin (36,6).

Nevlastní přímky řídicích rovin σ_1, σ_2 jsou nevlastní tvořící přímky t_1, t_2 hyperbolického paraboloidu. Průsečnice obou řídicích rovin, které jsou souměrně položeny podle kterékoliv roviny hlavní, je osa paraboloidu.

Rovnice polární roviny bodu $(x_0; y_0; z_0)$ zní (podle odst. 22)

$$\frac{xx_0}{p} - \frac{yy_0}{q} - z - z_0 = 0; \tag{36,10}$$

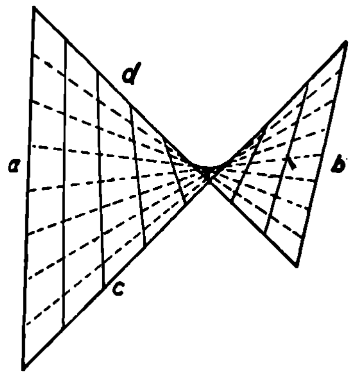
je-li to bod plochy, je (36,10) rovnice tečné roviny, obsahující obě tvořící přímky obou regulů, které procházejí jejím dotykovým bodem $(x_0; y_0; z_0)$.

Dvě různé přímky a, b jednoho regulu a dvě jiné různé přímky c, d komplementárního regulu tvoří t. zv. prostorový čtyřúhelník, jímž je hyperbolický paraboloid jednoznačně určen. Každá z dvojic jeho protějších stran určuje směr řídicí roviny jednoho z obou regulů, čímž i směr osy je určen.

Je-li na př. řídicí rovina σ_1 rovnoběžna s a i s b, pak každá rovina s ní rovnoběžná protíná přímky c, d v dvojici bodů, jejichž spojnice je tvořící přímkou onoho regulu, k němuž náležejí a a b.

Odtud je patrno, že trojice přímek jednoho regulu vytíná na všech přímkách druhého regulu bodové trojice stejných dělících poměrů.

Na tomto vztahu jsou založeny t. zv. **niťové modely** hyperbolického paraboloidu (obr. 21). Dvě protější strany prostorového čtyrúhelníka rozdělíme na stejný počet dílů; spojením dělících bodů nitěmi obdržíme model jednoho paraboloidického regulu.



Obr. 21. Reguly hyperbolického paraboloidu daného prostorovým čtyrúhelníkem.

Jsouli všechny strany prostorového čtyrúhelníka stejně dlouhé, je to t. zv. **prostorový kosočtverec**. Na každém hyperbolickém paraboloidu existuje množství prostorových kosočtverců. Kolmá příčka (osa) dvou protějších stran kosočtverce je patrně jedna z obou tvořících přímek paraboloidu, které leží v jeho tečné rovině vrcholové. Tak lze určiti vrchol paraboloidu, jakož i tečnou rovinu vrcholovou, osu a řídicí roviny. Roviny souměrnosti jejich úhlů jsou hlavní roviny paraboloidu.

37. O eliptickém paraboloidu.

Z rotačního paraboloidu (31,23) [viz též (18,8) a (18,9)] vzniká eliptický paraboloid

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} - 2z = 0 \qquad (37,1)$$

kolmou perspektivní afinitou ($p > 0$, $q > 0$)

$$X = x, \quad Y = \sqrt{\frac{p}{q}} \cdot y, \quad Z = z. \qquad (37,2)$$

Ať jsou x, y jakákoliv reálná čísla, přísluší k nim podle (37,1) souřadnice $z \geqq 0$. Leží tudíž všechny reálné body paraboloidu na téže (positivní) straně roviny $(\vec{x}\ \vec{y})$, t. j. tečné roviny vrcholové. Z jeho vytvoření afinitou z rotačního paraboloidu plyne, že tomu tak jest i pro kteroukoliv jinou tečnou rovinu plochy. Je zde $A = -\dfrac{1}{pq}$, takže na ploše není reálných přímek.

Nevlastní kuželosečka eliptického paraboloidu (37,1)

$$x_4 = 0, \quad f^*(x, x) \equiv \frac{x_1^2}{p} + \frac{x_2^2}{q} = 0 \tag{37,3}$$

je složena ze dvou sdruženě imaginárních nevlastních přímek

$$x_4 = 0, \quad \sqrt{q}\,x_1 \pm i\sqrt{p}\,x_2 = 0, \tag{37,4}$$

jejichž společný bod je reálný nevlastní bod osy paraboloidu.

Na eliptickém paraboloidu není proto jiných kuželoseček než elipsy, kružnice a paraboly, z nichž poslední leží v rovinách rovnoběžných s osou plochy.

Rovina rovnoběžná s tečnou rovinou vrcholovou ve vzdálenosti k protíná plochu (37,1) v elipse o rovnicích

$$z - k = 0, \quad \frac{x^2}{2pk} + \frac{y^2}{2qk} - 1 = 0, \tag{37,5}$$

odkud je patrno, že všechny elipsy soustavy (37,5) jsou podobné a že se do roviny $(\vec{x}\ \vec{y})$ kolmo promítají do soustavy homotetických elips o osách $\vec{x}$, $\vec{y}$.

Vrcholy všech elips soustavy (37,5) leží na obou hlavních parabolách v hlavních rovinách paraboloidu o rovnicích

$$y = 0, \quad x^2 - 2pz = 0, \tag{37,6}$$

a

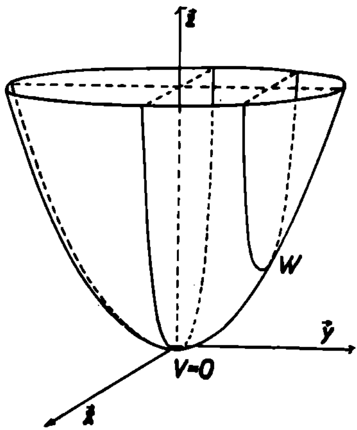
$$x = 0, \quad y^2 - 2qz = 0; \tag{37,7}$$

obě tyto paraboly jsou též obrysy kolmých průmětů paraboloidu do hlavních rovin. Z uvedených vztahů je možno si učiniti představu o tvaru plochy (obr. 22). Kromě toho v odst. 36 uvedená věta o vytvoření paraboloidu translací hlavní paraboly platí i pro eliptický paraboloid a dokazuje se stejným způsobem.

Charakteristická rovnice plochy (37,1)

$$\varrho\left(\varrho-\frac{1}{p}\right)\left(\varrho-\frac{1}{q}\right)=0 \tag{37,8}$$

má kořeny $0, \frac{1}{p}, \frac{1}{q}$. Je-li na př. $p < q$ je $\frac{1}{q}$ kořen střední



Obr. 22. Eliptický paraboloid s hlavními parabolami.

velikosti, takže jediná reálná singulární kuželosečka charakteristického svazku plochy (37,1) je

$$x_4 = 0, \quad \frac{x_1^2}{p}+\frac{x_2^2}{q}-\frac{1}{q}\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)=0,$$

t. j.

$$x_1^2\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)-\frac{1}{q}\,x_3^2=0. \tag{37,9}$$

Proto obě roviny

$$x\sqrt{q-p} \pm z\sqrt{p} = 0 \tag{37,10}$$

jsou cyklické a určují svými směry dvě osnovy cyklických rovin paraboloidu. Místem středů kružnic jsou dva průměry paraboloidu v rovině $(\vec{x}\,\vec{z})$

$$y = 0, \quad x \pm \sqrt{p(q-p)} = 0. \tag{37,11}$$

Kruhové body plochy jsou obecně dva. Každý z nich leží na jednom z průměrů (37,11), takže jejich souřadnice jsou

$$\left(\mp\sqrt{p(q-p)};\quad 0;\quad \frac{q-p}{2}\right).$$

Polární resp. tečná rovina bodu $(x_0; y_0; z_0)$ má rovnici

$$\frac{xx_0}{p} + \frac{yy_0}{q} - z - z_0 = 0, \tag{37,12}$$

proto rovnice obou tečných rovin v kruhových bodech jsou

$$\mp x\sqrt{\frac{q-p}{p}} - z - \frac{q-p}{2} = 0. \tag{37,13}$$

Jen ty cyklické roviny protínají plochu v reálných kružnicích, které leží na téže straně tečné roviny (37,13) jako paraboloid. S rostoucí vzdáleností cyklické roviny od této roviny tečné roste i poloměr průsečné kružnice bez omezení.

Příklady k cvičení.

141. Je-li v rovnici (36,1) $p = q$, jsou obě řídicí roviny hyperbolického paraboloidu, t. zv. rovnostranného, navzájem kolmé. Dokažte, že po otočení souřadnicové soustavy kolem osy $\vec{z}$ o úhel $-45°$ rovnice (36,1) se transformuje v rovnici $x'y' - pz' = 0$!

142. Napište normální tvar rovnice hyperbolického paraboloidu, jehož řídicí roviny svírají úhel $60°$ a jehož hlavní parabola v rovině $(\vec{x}\,\vec{z})$ má parametr $p = 1$! [$x^2 - 3y^2 - 2z = 0$.]

143. Je dán hyperbolický paraboloid $x^2 - 3y^2 - 2z = 0$. Jak zní rovnice jeho a) tečné roviny v bodě $(1;\ 1;\ -1)$, b) polární roviny bodu $(1;\ 1;\ 1)$? [a) $x - 3y - z + 1 = 0$, b) $x - 3y - z - 1 = 0$.]

144. Určete kruhové body eliptického paraboloidu $\frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{6}y^2 - 2z = 0$ [$\pm\sqrt{5};\ 0;\ \frac{1}{2}$].

145. Jak zní rovnice a) hyperbolického paraboloidu (36,1), b) eliptického paraboloidu (37,1) v souřadnicích rovinových? [Podle (23,3) $\frac{1}{q}\,\xi_1^2 \mp \frac{1}{p}\,\xi_2^2 - \frac{2}{pq}\,\xi_3\xi_4 = 0$.]

VIII.

DODATEK.

38. O anuloidu. Definice a rovnice anuloidu byly podány v odst. 18. Jeho rovnici (18,12)

$$(x^2 + y^2 + z^2 - a^2 + m)^2 - 4m^2 (x^2 + y^2) = 0, \quad (38,1)$$
$$(m > a > 0),$$

upravme na tvar homogenní

$$[x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + (m^2 - a^2)\, x_4^2]^2 - 4m^2 (x_1^2 + x_2^2)\, x_4^2 = 0. \quad (38,2)$$

Z něho je zřejmo, že průsečná křivka anuloidu s rovinou nevlastní (nevlastní křivka plochy) má rovnice

$$x_4 = 0, \quad (x_1^2 + x_3^2 + x_4^2)^2 = 0,$$

a je to dvakrát počítaná absolutní kružnice kulová (proto anuloid patří mezi t. zv. cyklidy, t. j. plochy čtvrtého stupně s dvojnou kuželosečkou v absolutní kružnici).

Nejjednodušší rovinné řezy anuloidu leží jednak v rovinách procházejících jeho rotační osou, jednak v rovinách k ní kolmých (obr. 23).

V prvém případě rovinný řez je složen ze dvou shodných vytvořujících kružnic (jež tvoří t. zv. úplný meridián plochy); jejich poloměr jest a, vzdálenost středu — který leží v rovině $(\vec{x}\ \vec{y})$ — od počátku O je m.

V druhém případě roviny kolmé na rotační osu, o rovnici $z = k$, protínají plochu (38,1) v dvojicích kružnic, neboť levá strana rovnice

$$(x^2 + y^2 + m^2 + k^2 - a^2)^2 - 4m^2 (x^2 + y^2) = 0$$

je rozložitelna, takže jí lze dáti tvar

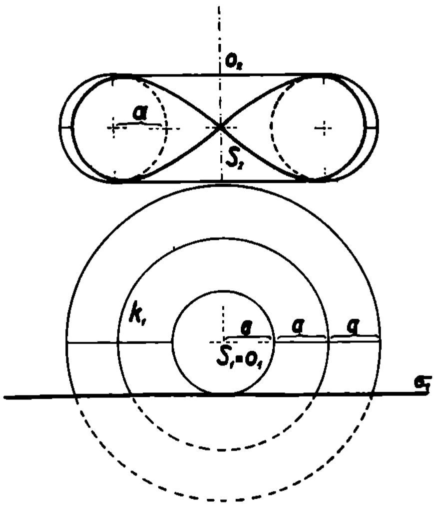
$$(x^2 + y^2 - m^2 - a^2 + k^2 + 2m\sqrt{a^2 - k^2}) \,.$$
$$. \,(x^2 + y^2 - m^2 - a^2 + k^2 - 2m\sqrt{a^2 - k^2}) = 0.$$

Z něho je zřejmo, že obě kružnice se ztotožňují v téže kružnici k_1 resp. k_2 jen v tom případě, když jest $k = +a$ resp. $k = -a$. Roviny $z = \pm a$ se dotýkají anuloidu podél těchto kružnic, které jsou shodné a jejichž poloměr je m, t. j. rovný poloměru kružnice opsané středem kružnice vytvořující.

Je-li $|k| > a$, je $\sqrt{a^2 - k^2}$ imaginární stejně jako obě průsečné kružnice roviny $z - k = 0$ s anuloidem. Jen pro $|k| < a$ obě kružnice v této rovině jsou reálné a různé a jejich poloměry jsou dány výrazy

$$r_{1,2} = m \pm \sqrt{a^2 - k^2}.$$

Pro $k = 0$ obdržíme proto dvojici kružnic, složenou z kruž-



Obr. 23. Kolmé průměty anuloidu s lemniskatou Bernoulliovou.

nice největší (rovník) a nejmenší (hrdlová kružnice), jejichž poloměry jsou $m \pm a$. Rovník a hrdlová kružnice tvoří též obrys kolmého průmětu plochy do roviny $(\vec{x}\ \vec{y})$; tečné roviny plochy v jejich bodech jsou rovnoběžny s rotační osou $\vec{z}$.

Rovina v obecné poloze protíná anuloid v křivce čtvrtého stupně, která má v kruhových bodech roviny body dvojnásobné (křivky bicirkulární). Průsečná křivka nemusí míti ani jeden bod reálný.

Protože plocha je rotační, postačí při studiu jejích rovinných řezů se omeziti na roviny kolmé k rovině $(\vec{x}\,\vec{z})$, neboť do takové polohy lze přemístiti každou rovinu otočením okolo osy plochy o vhodný úhel.

Pro přehlednost nazývejme body vnější části anuloidu ony, jejichž vzdálenost od osy $\vec{z}$ je větší než m. Je-li tato vzdálenost menší než m, pravíme, že bod náleží vnitřní části anuloidu. Obě části jsou navzájem odděleny kružnicemi k_1 a k_2, na vnější části leží rovník, na vnitřní hrdlové kružnice anuloidu.

Je-li dána rovina σ, nikoliv kolmá na osu anuloidu, pak existují čtyři tečné roviny s ní rovnoběžné. Dvě z nich se jej dotýkají v bodech vnější, dvě další v bodech vnitřní jeho části, proto je nazýváme vnější resp. vnitřní tečné roviny anuloidu. Obě vnitřní tečné roviny jsou středově souměrně položeny podle počátku, t. j. středu anuloidu, stejně jsou položeny i obě rovnoběžné vnější tečné roviny anuloidu. Řez plochy rovinou σ je jen tehdy reálný, když rovina σ leží mezi oběma vnějšími tečnými rovinami, které s ní jsou rovnoběžny.

Ukažme, že kromě soustavy kružnic v rovinách kolmých k ose a soustavy vytvořujících kružnic, existuje na anuloidu ještě třetí soustava kružnic. Platí totiž věta:

Rovina σ dotýkající se anuloidu ve dvou různých bodech jeho vnitřní části jej protíná ve dvou shodných kružnicích o poloměru m.

Při této zvláštní poloze s rovinou σ se ztotožňují obě vnitřní tečné roviny s ní rovnoběžné. Při důkazu věty stačí se omeziti na případ, kdy dvojnásob tečná rovina σ je kolma na rovinu $(\vec{x}\ \vec{z})$, takže její rovnice je

$$ax - z\sqrt{m^2 - a^2} = 0, \qquad (38,3)$$

a její kolmý průmět do téže souřadnicové roviny jest jedna ze společných vnitřních tečen obou vytvořujících kružnic, které tvoří úplný meridián plochy v rovině $(\vec{x}\ \vec{z})$.

Vyloučíme-li z rovnic (38,3) a (38,1) souřadnici z, vychází rovnice

$$\begin{aligned}(m^2x^2 + m^2y^2 - a^2y^2 - m^4 + a^4)^2 - \\ - 4m^2 (x^2 + y^2) (m^2 - a^2)^2 = 0.\end{aligned} \qquad (38,4)$$

Snadno lze ověřiti, že levá strana této rovnice je rozložitelna a že jí lze dáti tvar

$$\begin{aligned}[m^2x^2 + (m^2 - a^2) (y - a)^2 - m^2 (m^2 - a^2)] \,. \\ . \, [m^2x^2 + (m^2 - a^2) (y + a)^2 - m^2 (m^2 - a^2)] = 0.\end{aligned}$$

Je tedy kolmý průmět průsečné křivky anuloidu s rovinou σ do roviny $(\vec{x}\ \vec{y})$ složen ze dvou shodných elips

$$\left.\begin{aligned} E_1 &\equiv \frac{x^2}{m^2 - a^2} + \frac{(y - a)^2}{m^2} - 1 = 0 \\ \text{a} \quad E_2 &\equiv \frac{x^2}{m^2 - a^2} + \frac{(y + a)^2}{m^2} - 1 = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (38,5)$$

jejichž poloosy a poloha jsou zřejmy z rovnic (38,5).

Avšak na př. k prvé z rovnic (38,5) dospějeme též vyloučením z z rovnice (38,3) roviny σ a z rovnice kulové plochy

$$x^2 + (y - a)^2 + z^2 - m^2 = 0.$$

Protože rovina σ prochází středem $(0; a; 0)$ této kulové plochy, je tím dokázáno, že E_1 je kolmý průmět kružnice anuloidu o poloměru m v rovině σ. Stejným způsobem to lze dokázati o elipse E_2.

Oba dotykové body roviny σ se ztotožňují s průsečíky obou kružnic, které v ní leží. Souřadnice těchto bodů, jak řešením soustavy rovnic (38,3) a (38,5) vychází, jsou

$$\left(\pm\frac{m^2-a^2}{m};\ 0;\ \pm\frac{a\sqrt{m^2-a^2}}{m}\right). \tag{38,6}$$

Vnitřní dvojnásob tečné roviny anuloidu (38,1) obalují rotační kužel, jehož osa resp. vrchol se ztotožňují s osou resp. středem anuloidu. Jeho rovnice je podle (38,3)

$$a^2(x^2+y^2)-(m^2-a^2)z^2=0, \tag{38,7}$$

a jeho tvořící přímky jsou středné dvojic kružnic, ve kterých jeho tečné roviny protínají anuloid.

Z ostatních rovinných řezů povšimněme si ještě některých, jejichž roviny jsou rovnoběžny s osou anuloidu. Buď $y=c$, kde c je reálná konstanta, rovnice takové roviny. Její průsečná křivka s anuloidem (38,1) má rovnice

$$y-c=0,\ (x^2+z^2+m^2+c^2-a^2)^2-4m^2(x^2+c^2)=0; \tag{38,8}$$

je to t. zv. **spirická křivka Perseova**, kterou po prvé uvažoval Perseus již v 2. století před Kristem. Pro $c=a$ se druhá z rovnic (38,8) specialisuje na rovnici

$$(x^2+z^2+m^2)^2-4m^2(x^2+a^2)=0. \tag{38,9}$$

Lze ji psáti též ve tvaru

$$[(x-m)^2+z^2]\,.\,[(x+m)^2+z^2]=4a^2m^2,$$

který vyjadřuje, že každý bod na křivce (38,9) v rovině $y-a=0$ má od bodů $(m; a; 0)$ a $(-m; a; 0)$ vzdálenosti d_1, d_2, o nichž platí,

$$d_1d_2=2am. \tag{38,10}$$

Promítá se tudíž průsečná křivka roviny $y-a=0$ s anuloidem (38,1) kolmo do roviny $(\vec{x}\,\vec{z})$ do křivky, jejíž body mají od středů obou vytvořujících kružnic v rovině $(\vec{x}\,\vec{z})$ vzdálenosti o konstantním součinu. Takové křivky jsou **křivky Cassiniovy**, a oba zmíněné středy vytvořujících kružnic jsou jejich **ohniska**. Jsou tedy Cassiniovy křivky zvláštním případem spirik Perseových.

Ukažme, že při zvláštních anuloidech se uvažovaná křivka Cassiniova dále specialisuje na lemniskatu; je to v tom případě, kdy $m = 2a$. Rovnice průsečné křivky roviny $y = a$ s takovým anuloidem pak jsou

$$y - a = 0, \ (x^2 + z^2)^2 + 8a^2 (z^2 - x^2) = 0. \quad (38,11)$$

a hodnota stálého součinu je

$$d_1 d_2 = 4a^2,$$

jak plyne z (38,9) a z (38,10).

Z Cassiniových křivek pouze lemniskata má reálný singulární bod a to v počátku. Křivka má v něm dvě reálné tečny, jejichž rovnice podle (38,11) jsou

$$z \pm x = 0.$$

Singulární bod se proto nazývá dvojný bod uzlový.

Průsečná lemniskata v rovině σ určuje svým uzlovým bodem dotykový bod roviny σ na hrdlové kružnici plochy.

Platí tedy věta:

Je-li průměr vytvořující kružnice anuloidu roven průměru jeho kružnice hrdlové, pak tečné roviny v bodech hrdlové kružnice jej protínají v lemniskatách Bernoulliových.

39. O studiu a učebnicích analytické geometrie. Existuje mnoho učebnic analytické geometrie, lišících se jak obšírností, tak způsobem výkladu.

Jak i z tohoto spisku je patrno, k studiu geometrie metodou analytickou, čili souřadnicovou je nutno ovládati alespoň některé části algebry, zejména nauku o determinantech. Proto je doporučení hodno před studiem větších děl o analytické geometrii prostudovati nauku o determinantech a osvojiti si jejich praktické užívání. K tomu cíli znamenitě se hodí kniha B. Bydžovský, Základy teorie determinantů z r. 1929, nebo alespoň stručný spisek (litografie) Zahradník, O determinantech, 1903—1904.

K soustavnějšímu studiu analytické geometrie v českém jazyku nutno především doporučiti knihu dr. Boh. Bydžovský, Úvod do analytické geometrie, str. 404, z r. 1932. Větší její část (226 str.) je věnována analytické geometrii rovinné, zbytek analytické geometrii prostorové v pravoúhlých kartézských souřadnicích se stručnými doplňky o kosoúhlých souřadnicích v prostoru a historickém přehledu.

O kuželosečkách, algebraických křivkách vyšších stupňů, rovinných i prostorových, o algebraických plochách druhého i vyšších stupňů, o přímkových komplexech a jiných útvarech, lze se poučiti z velkého díla Jan Vojtěch, Geometrie projektivní (880 str.) z r. 1932.

K úvodnímu studiu se hodí též tyto zcela elementární učebnice:

Studnička, Úvod do analytické geometrie v prostoru, 1876.

Zahradník, Analytická geometrie, 1902.

Zahradník, O plochách druhého stupně, 1911.

Stručné poučení o analytické geometrii v prostoru, včetně ploch druhého stupně, nalezneme též ve všech přednáškách o matematice na vysokých školách technických, pokud byly vydány tiskem. Z nich nejlépe vyhovuje kniha Jan Vojtěch, Základy matematiky (díl I. z r. 1939, díl II. z r. 1940), v níž nalezneme i četné příklady s výsledky.

Na konec uveďme, že analytická geometrie útvarů lineárních, kuželoseček a ploch druhého stupně je již do nejmenších podrobností propracována. Existují veliká díla, v nichž je sneseno takřka vše, co lze o těchto útvarech říci. Takové je na př. třísvazkové dílo Staude, Analytische Geometrie des Punktes atd., 1905 a Analytische Geometrie des Punktepaares atd., díl I. a II. z r. 1910. Stejně podrobná je i příslušná stať v Enzyklopädie der math. Wissenschaften. K rychlé informaci často dobře poslouží známé dílo Pascal, Repertorium der Mathematik.

OBSAH.

CESTA K VĚDĚNÍ SV. 23

Prof. Dr. Jiří Klapka

Jak se studují útvary v prostoru? - II. část

Vyšlo roku 1942 nákladem Jednoty českých matematiků a fysiků v Praze

Tiskem knihtiskárny Prometheus v Praze

I. vydání - Cena brož. výtisku K 23,40