Logický podklad matematických úsudků

Brána k vědění

Dr KAREL HRUŠA

Logický podklad matematických úsudků

Jč
m+f

SVAZEK 8

LOGICKÝ PODKLAD MATEMATICKÝCH ÚSUDKŮ

Dr KAREL HRUŠA

PRAHA 1950
PŘÍRODOVĚDECKÉ NAKLADATELSTVÍ

VYDALA

JEDNOTA ČESKOSLOVENSKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ

ÚVOD.

Při každé příležitosti se zdůrazňuje, že matematika vychovává k logicky přesnému myšlení, a přesto se často setkáváme i s dosti dobrými počtáři, kteří si nejsou jasně vědomi toho, v čem vlastně logická struktura matematických úsudků spočívá. Úkolem této knížky je podrobněji rozebrati několik typů úsudku, které se v elementární matematice nejčastěji vyskytují, a demonstrovati je na jednoduchých příkladech. Chceme-li provádět úsudky, které by byly bezvadné po stránce logické, musíme se důvěrně seznámit se zákony logiky a těchto zákonů musíme správně a důsledně užívat. Autor si je plně vědom toho, že ten, kdo se nikdy matematikou nezabýval, z tohoto svazečku se matematice nenaučí; přesto však se domnívá, že každému, kdo si chce podrobněji ujasnit logickou stránku matematických výroků, přijdou následující úvahy vhod. Omezený rozsah spisku si vynutil, že bylo přihlédnuto jen k několika nejjednodušším úvahám. Čtenář, který hledá bližší poučení o tom, jak matematika využívá logiky, najde je ve dvou přístupných a snadno pochopitelných knížkách, které vyšly ve sbírce Cesta k vědění, vydávané Jednotou československých matematiků a fysiků: *Miroslav Katětov*, Jaká je logická výstavba matematiky?, Cesta sv. 31, 1946, 2. vyd. 1950; *Otakar V. Zich*, Úvod do filosofie matematiky, Cesta sv. 34, 1947.

I. VÝROKY A JEJICH SKLÁDÁNÍ.

Matematika je věda deduktivní, která svoje poznatky odvozuje (dedukuje) z jiných poznatků, jejichž pravdivost předpokládá. Podobá se tedy jakési hře, ve které se ze základních prvků pomocí určitých pravidel sestavují útvary složitější. Tato pravidla podává nám logika a v této kapitole si odvodíme nejdůležitější z nich.

Výroky.

Základní prvky, jimiž se budeme v těchto úvahách zabývat, budeme nazývat výroky. Tímto názvem rozumíme každé sdělení, o němž má smysl říci, zda je pravdivé či nepravdivé.

Předmětem výroku může býti cokoliv. Jako příklady výroků uvedeme: „Vltava protéká Prahou“, „zítra nebude neděle“, „$2 \times 3 = 5$“ atd. První z těchto výroků je pravdivý, o druhém lze velmi snadno rozhodnout, je-li pravdivý, či nikoli, a třetí z uvedených výroků je zřejmě nepravdivý.

Je li nějaký výrok pravdivý, říkáme stručně, že platí; není-li pravdivý, říkáme, že neplatí. Přitom se nestaráme ani o gramatickou ani o myšlenkovou strukturu výroků; výroky na jednodušší prvky již rozkládati nebudeme, ale budeme z výroků skládati útvary složitější a studovati zákony tohoto skládání.

Úkolem této knížky je všimnouti si, jak se z daných výroků tvoří výroky nové a jaké vlastnosti mají tyto nově utvořené výroky. Půjde tu o věc všeobecně platnou, která se netýká jen matematiky, nýbrž která podržuje svou platnost ve všech oborech lidského myšlení. To, že budeme svoje vývody ilustrovat příklady, jež se většinou týkají matematiky, má svou příčinu jednak v tom, že matematika se snaží všecky své výroky formulovat vždy co nejpřesněji, jednak v tom, že příklady z matematiky jsou autorovi nejbližší.

Základní vlastnosti každého výroku jsou tyto:

1. Od každého výroku požadujeme, aby buď platil nebo neplatil — třetí možnosti není (zásada vyloučené třetí možnosti). Nepřipouštíme tedy možnost, aby výrok byl pravdivý jen částečně; sdělení, která jsou pravdivá jen částečně, nebo taková, o jejichž pravdivosti nemá vůbec smysl hovořit, názvem výrok označovati nebudeme a vyloučíme je ze svých úvah.

2. Dále budeme od každého výroku žádati, aby z obou uvedených možností byla splněna právě jedna; t. j. není možno, aby nějaký výrok současně platil i neplatil (zásada sporu). Je-li výrok pravdivý, není možné, aby byl současně nepravdivý, a je-li nepravdivý, není možné, aby byl současně pravdivý.

Negace.

Jestliže ze dvou výroků jeden tvrdí přesně to, co druhý výrok popírá, říkáme, že jeden z nich je **negací***) druhého. Je třeba výslovně

*) Nego (latinsky) znamená popírám.

upozorniti na to, že původní výrok i jeho negace dohromady musí vyčerpávati všecky možnosti, které mohou nastati. Negací (pravdivého) výroku „Vltava protéká Prahou" je (nepravdivý) výrok „Vltava neprotéká Prahou"; negací výroku „zítra nebude neděle" je výrok „zítra bude neděle", při čemž z těchto dvou výroků je jeden pravdivý a druhý nepravdivý; negací (nepravdivého) výroku „$2 \times 3 = 5$" je (pravdivý) výrok „$2 \times 3 \neq 5$" (čteme dvakrát tři není pět) atd.

Všimněme si posledního příkladu poněkud blíže. Negací výroku „$2 \times 3 = 5$" nemůže být výrok „$2 \times 3 = 6$", neboť tyto dva výroky dohromady nevyčerpávají všecky možnosti, které mohou nastati; na příklad možnost „$2 \times 3 = 7$" není obsažena v žádném z výroků „$2 \times 3 = 5$", „$2 \times 3 = 6$", ale ve výroku „$2 \times 3 \neq 5$" obsažena je. Proto negací výroku „$2 \times 3 = 5$" je výrok „$2 \times 3 \neq 5$" a žádný jiný.

Nejčastější chyba při tvoření negací tkví právě v tom, že se na některou možnost zapomíná. Uveďme ještě jeden příklad. Negací výroku „$a > b$" (a je větší než b) je výrok „$a \leqq b$" (a je menší než b nebo a je rovno b) a nikoli výrok „$a < b$" (a je menší než b). Kdybychom za negaci považovali výrok „$a < b$", zapomněli bychom na třetí možnost „$a = b$".

Podle toho, co bylo řečeno výše, je jasné, že ze dvou výroků, z nichž jeden je negací druhého, je pravdivý vždy právě jeden; platí-li původní výrok, neplatí jeho negace, a neplatí-li původní výrok, platí jeho negace.

Abychom si ušetřili dlouhé psaní, budeme v dalším výroky označovati velkými písmeny tištěnými nápadnými typy. Negaci výroku **A** budeme zapisovati znakem non**A**.*) Značí-li **A** třeba výrok „včera jsem byl v divadle", značí non**A** výrok „včera jsem nebyl v divadle", což je ovšem totéž, jako kdybychom řekli „není pravda, že jsem byl včera v divadle".

Pokud se týká pravdivosti, jsou možné tyto dva případy:

1. buď **A** platí a non**A** neplatí,
2. nebo **A** neplatí a non**A** platí.

Řekneme-li „**A** platí", znamená to totéž jako „non**A** neplatí"; řekneme-li „**A** neplatí", znamená to totéž jako „non**A** platí".

*) Non (latinsky) znamená ne.

Negací negovaného výroku dostaneme zřejmě opět výrok původní, neboť výroky **A** a non**A** vyčerpávají všecky možnosti. Zahrnuje tedy negace výroku non**A**, t. j. výrok nonnon**A**, všecky možnosti, které nejsou obsaženy ve výroku non**A**; ale to jsou právě ty možnosti, které v sobě zahrnuje výrok **A**. Je tedy výrok nonnon**A** totožný s výrokem **A**. Dvojnásobná negace nám tedy dává opět výrok původní.

Implikace.

Máme-li dva výroky **A**, **B**, můžeme jejich pravdivost kombinovat celkem čtverým různým způsobem. Jsou možné tyto případy:

$$\left.\begin{array}{rll} \text{I.} & \textbf{A} \text{ platí,} & \textbf{B} \text{ platí.} \\ \text{II.} & \textbf{A} \text{ platí,} & \textbf{B} \text{ neplatí.} \\ \text{III.} & \textbf{A} \text{ neplatí,} & \textbf{B} \text{ platí.} \\ \text{IV.} & \textbf{A} \text{ neplatí,} & \textbf{B} \text{ neplatí.} \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Z těchto možností za určitých okolností některé mohou nastat, jiné nikoli. Pro nás nejdůležitější je ten případ, že je vyloučena možnost II., kdežto ostatní tři možnosti jsou přípustné. Pak tyto přípustné tři možnosti znamenají toto: Když platí **A**, platí také **B** (možnost I.), ale když **A** neplatí, nemůžeme rozhodnouti, platí-li **B** čili nic (možnosti III. a IV.). V každém případě však platnost výroku **A** je doprovázena platností výroku **B**.

Ilustrujme si to na příkladě. Výrok **A** nechť třeba znamená „prší" a výrok **B** nechť znamená „je mokro". Řekneme-li, že **A** neplatí, znamená to podle předcházejícího totéž jako non**A** platí, t. j. „neprší". Podobně tvrzení, že výrok **B** neplatí, znamená totéž jako tvrzení, že non**B** platí, t. j. „je sucho". Uvedené čtyři možnosti jsou:

I. Prší a je mokro.
II. Prší a je sucho.
III. Neprší a je mokro.
IV. Neprší a je sucho.

Možnost II. však nenastane. To znamená: Když prší, je zcela určitě mokro, ale podle toho, že neprší, ještě nemůžeme rozhodnout, je-li mokro či sucho, neboť je-li mokro, může to nastati i jindy, než když právě prší.

Ukážeme si to ještě na jiném příkladě, tentokrát z matematiky. Mějme dvě čísla, z nichž jedno označíme a, druhé x, jejich součin ax. Výrok **A** nechť znamená „$x = 0$“ a výrok **B** nechť jest „$ax = 0$“. Pak non**A** jest „$x \neq 0$“ a non**B** je „$ax \neq 0$“. Jsou myslitelné čtyři možnosti:

$$
\begin{aligned}
&\text{I.}\ \ x = 0,\ ax = 0. \\
&\text{II.}\ \ x = 0,\ ax \neq 0. \\
&\text{III.}\ \ x \neq 0,\ ax = 0. \\
&\text{IV.}\ \ x \neq 0,\ ax \neq 0.
\end{aligned}
$$

Víme, že nenastane možnost II., neboť není možné, aby současně bylo $x = 0$ a $ax \neq 0$. To tedy znamená: když je $x = 0$, je také $ax = 0$, ale když $x \neq 0$, nemůžeme rozhodnout, je-li $ax = 0$ či $ax \neq 0$, neboť je možné, že $ax = 0$, i když $x \neq 0$ (to nastane tehdy, když je $a = 0$). Ale to, že $x = 0$, má vždy za následek, že také $ax = 0$.

Jestliže ze čtyř možností uvedených v tabulce (1) nenastane případ II., pak platnost výroku **A** *má za následek* platnost výroku **B**; jinak říkáme také, že z platnosti výroku **A** *plyne* platnost výroku **B**, nebo ještě jinak, že platnost výroku **A** **implikuje***) platnost výroku **B**, a krátce to zapisujeme takto:

$$A \Rightarrow B.$$

Tento zápis čtěme také takto: „Když platí **A**, platí také **B**“ nebo „z toho, že platí **A**, následuje, že platí také **B**“ nebo také „**B** platí, platí-li **A**“ a pod. Popsaný vztah mezi oběma výroky označujeme názvem **implikace**.

A nyní přijde to nejzajímavější, co většina čtenářů jistě dobře ví, ale možná, že si to některý čtenář dosud jasně neuvědomil. Řekneme-li „**A** platí“, je to totéž, jako kdybychom řekli „non**A** neplatí“, a řekneme-li „**A** neplatí“, je to totéž, jako kdybychom řekli „non**A** platí“. Podobně „**B** platí“ znamená totéž jako „non**B** neplatí“ a „**B** neplatí“ znamená totéž jako „non**B** platí“. Přepišme podle toho tabulku (1) tak, že místo **A** napíšeme non**A**, místo **B** napíšeme non**B** a slova „platí“ a „neplatí“ navzájem vyměníme. Vznikne nová tabulka s předcházející co do smyslu přesně totožná:

*) Implico (latinsky) značí vplétám.

I. non$A$ neplatí, non$B$ neplatí.
II. non$A$ neplatí, non$B$ platí.
III. non$A$ platí, non$B$ neplatí.
IV. non$A$ platí, non$B$ platí.

V této tabulce nyní navzájem zaměníme oba sloupce a řádky napíšeme v pořadí IV., II., III., I. Dostaneme

$$\left.\begin{array}{rll} \text{I}'. & \text{non}\boldsymbol{B} \text{ platí,} & \text{non}\boldsymbol{A} \text{ platí.} \\ \text{II}'. & \text{non}\boldsymbol{B} \text{ platí,} & \text{non}\boldsymbol{A} \text{ neplatí.} \\ \text{III}'. & \text{non}\boldsymbol{B} \text{ neplatí,} & \text{non}\boldsymbol{A} \text{ platí.} \\ \text{IV}'. & \text{non}\boldsymbol{B} \text{ neplatí,} & \text{non}\boldsymbol{A} \text{ neplatí.} \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Rozdíl mezi původní tabulkou (1) a novou tabulkou (2) je čistě jen formální, obsahově jsou totožné. Nenastane-li v tabulce (1) případ II., nemůže ani v tabulce (2) nastati případ II'., který je s ním totožný. Avšak tabulka (2) má formálně týž tvar jako tabulka (1), toliko s tím rozdílem, že místo A v tabulce (1) je non$B$ v tabulce (2) a místo B v tabulce (1) je non$A$ v tabulce (2). Značí-li tedy tabulka (1), v níž nenastane případ II., implikaci

$$A \Rightarrow B,$$

značí tabulka (2), v níž rovněž nenastane případ II'., implikaci

$$\text{non}B \Rightarrow \text{non}A.$$

Obě implikace jsou tedy totožné. Proto můžeme implikaci $A \Rightarrow B$ vyslovit také ve tvaru non$B \Rightarrow$ non$A$.

Překontrolujme si to na našich dvou příkladech. První z nich vyslovil implikaci: „Když prší, je mokro". Negace výroku „je mokro" je „je sucho"; negace výroku „prší" je „neprší". Naše nová implikace tedy zní: „Když je sucho, neprší". Ta je totožná s implikací původní, neboť připouští tyto možnosti: a) je sucho a neprší, b) je mokro a neprší, c) je mokro a prší. Tyto možnosti jsou totožné s možnostmi, které připouštěla implikace původní.

Podobně je tomu i ve druhém příkladě: „Je-li $x = 0$, je $ax = 0$". Negace výroku „$ax = 0$" je „$ax \neq 0$"; negace výroku „$x = 0$" je „$x \neq 0$". Proto uvedenou implikaci můžeme vyslovit také ve tvaru: „Je-li $ax \neq 0$, je také $x \neq 0$". To opět značí, že nastane některá z možností: a) $ax \neq 0$, $x \neq 0$, b) $ax = 0$, $x \neq 0$, c) $ax = 0$, $x = 0$, které připouštěla implikace původní.

Uveďme ještě jeden příklad tohoto druhu, který si čtenář sám podrobně rozebere. Věta: „Je-li trojúhelník rovnostranný, má dva úhly stejné" říká přesně totéž jako věta: „Nemá-li trojúhelník dva úhly stejné, není rovnostranný".

Výroky, jejichž platnost je prokázána, označujeme zpravidla názvem **věta** čili **poučka** nebo také cizím slovem **theorém**. Velká většina vět, s nimiž se v matematice setkáváme, má právě formu implikace $A \Rightarrow B$ (z platnosti výroku A plyne platnost výroku B). Poslední dva příklady jsou příklady vět vyslovených formou implikace. Výroku A dáváme přitom zpravidla název **podmínka**, výroku B název **tvrzení**. Touž implikaci však podle předcházejícího dostaneme, jestliže za podmínku považujeme negaci tvrzení a za tvrzení negaci podmínky, t. j. implikace $A \Rightarrow B$ je totožná s implikací non$B \Rightarrow$ non$A$.

Výslovně však podotýkáme, že implikace $A \Rightarrow B$ znamená něco jiného než implikace $B \Rightarrow A$. Platí-li implikace $A \Rightarrow B$, nemusí ještě platit implikace $B \Rightarrow A$. Je-li na příklad správné, že z výroku „$x = 0$" plyne výrok „$ax = 0$", neznamená to ještě, že by naopak z výroku „$ax = 0$" museł plynouti výrok „$x = 0$", a to také neplyne, neboť víme, že může býti $ax = 0$ i když $x \neq 0$.

Ekvivalence.

Jestliže ze čtyř možností obsažených v tabulce (1) mohou nastati toliko možnosti I. a IV., kdežto možnosti II. a III. nastati nemohou, říkáme, že oba výroky A, B jsou navzájem **ekvivalentní**.*) Vztah obou takových výroků se nazývá **ekvivalence**. Ekvivalence výroků A, B tedy znamená, že mohou nastati tyto dvě možnosti:

a) A platí, B platí,
b) A neplatí, B neplatí.

Že výroky A, B jsou ve vztahu ekvivalence, zapisujeme takto:

$$A \Leftrightarrow B.$$

To lze čísti: „Když platí A, platí také B, a když A neplatí, neplatí ani B". Jinak říkáme také: „Výrok B platí tehdy a jen tehdy, když platí A". Slov „tehdy a jen tehdy" užíváme proto, aby nemohla nastati záměna s implikací, která byla popsána v předešlém odstavci.

*) Aequus latinsky znamená stejný, valeo platím.

Uvedeme si příklad dvou ekvivalentních výroků. Výrok **A** bude: „mrzne" a výrok **B** bude „na klidné vodě se tvoří led". Tyto dva výroky jsou ekvivalentní, neboť mohou nastati jen tyto dvě možnosti:

a) buď mrzne a pak se na vodě tvoří led,
b) nebo nemrzne a na vodě se led netvoří.

Každá jiná možnost je vyloučena. Naši ekvivalenci můžeme vyslovit třeba takto: „Na klidné vodě se tvoří led tehdy a jen tehdy, když mrzne".

Na prvý pohled je vidno, že ekvivalence

$$\boldsymbol{A} \Leftrightarrow \boldsymbol{B}$$

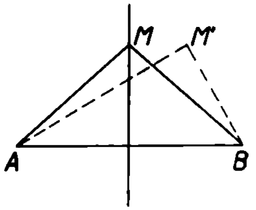
znamená přesně totéž jako ekvivalence

$$\boldsymbol{B} \Leftrightarrow \boldsymbol{A},$$

neboť obě značí, že může nastati některá z těchto dvou možností:

a) **A** platí, **B** platí,
b) **B** neplatí, **B** neplatí.

Není tedy třeba dávat pozor na to, v jakém pořádku po sobě následují oba výroky v ekvivalenci. Proto můžeme předcházející příklad vysloviti také ve tvaru: „Mrzne tehdy a jen tehdy, když se na klidné vodě tvoří led".



Obr. 1.

Víme, že v rovinné geometrii platí věta: „Bod M má od dvou (navzájem různých) bodů A, B stejné vzdálenosti tehdy a jen tehdy, leží-li na ose úsečky AB". Tu máme dva výroky: jeden je „bod M má od dvou bodů A, B stejné vzdálenosti" a druhý „bod M leží na ose úsečky AB" (viz obr. 1). Tyto dva výroky jsou navzájem ekvivalentní; to znamená dvě věci:

a) Každý bod M, který má od bodů A, B stejné vzdálenosti, leží na ose úsečky AB.

b) Každý bod M', který nemá od bodů A, B stejné vzdálenosti, leží mimo osu úsečky AB.

Můžeme tedy slova „libovolný bod, který má od bodů A, B stejné vzdálenosti", nahraditi slovy „libovolný bod na ose úsečky AB".

Ptejme se nyní, je-li možné, aby mezi dvěma výroky A, B platilo

$$A \Rightarrow B \text{ a současně } B \Rightarrow A.$$

Prvá implikace značí, že může nastati některá z možností

A platí, B platí,
A neplatí, B platí,
A neplatí, B neplatí,

kdežto možnost „A platí, B neplatí“ je vyloučena. Podobně druhá implikace značí, že může nastati některá z možností

B platí, A platí,
B neplatí, A platí,
B neplatí, A neplatí,

při čemž možnost „B platí, A neplatí“ je vyloučena. Mají-li platit obě uvedené implikace současně, nemůže nastat žádná z vyloučených možností. Může tedy nastati toliko některá z možností zbývajících, t. j.

a) A platí, B platí,
b) A neplatí, B neplatí.

To však znamená, že oba výroky jsou ve vztahu ekvivalence

$$A \Leftrightarrow B.$$

Je tedy ekvivalence $A \Leftrightarrow B$ totožná se dvěma současně platnými implikacemi $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow A$, které, jak víme z předchozího, můžeme též nahraditi současně platnými implikacemi $A \Rightarrow B$, non$A \Rightarrow$ non$B$. Věta $A \Leftrightarrow B$ tedy znamená totéž jako dvě věty současně platné $A \Rightarrow B$ a $B \Rightarrow A$, což je totéž jako $A \Rightarrow B$, non$A \Rightarrow$ non$B$. Větu $B \Rightarrow A$ (čili non$A \Rightarrow$ non$B$) nazýváme **větou obrácenou** k větě $A \Rightarrow B$.

Větu vyslovenou v předcházejícím příkladě ve tvaru ekvivalence vyslovujeme často pouze ve tvaru implikace, a to takto: „Každý bod M, který má od dvou (navzájem různých) bodů A, B stejné vzdálenosti, leží na ose úsečky AB“. Věta obrácená k této větě pak zní takto: „Každý bod M, který leží na ose úsečky AB, má od obou krajních bodů této úsečky stejné vzdálenosti“, což je totéž jako věta „Každý bod M', který nemá o bodů A, B stejné vzdálenosti, leží mimo osu úsečky AB“.

Obě implikace $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow A$ platí současně tehdy a jen tehdy, když platí ekvivalence $A \Leftrightarrow B$. Již na str. 9 bylo upozorněno na to, že platí-li implikace $A \Rightarrow B$, nemusí ještě platit implikace obrácená $B \Rightarrow A$. Na to se často zapomíná. Jedním z nejčastějších zdrojů chyb při úvahách matematických bývá to, že z implikace $A \Rightarrow B$ nesprávně soudíme na platnost implikace $B \Rightarrow A$. Třeba si pamatovat, že z platné implikace $A \Rightarrow B$ vyplývá platná implikace non$B \Rightarrow$ non$A$, ale nikoli implikace $B \Rightarrow A$.

Každý čtenář jistě zná ze školy větu: „(Víceciferné) číslo je dělitelné čtyřmi, je-li jeho poslední dvojčíslí dělitelné čtyřmi". Na příklad číslo 5736 je dělitelné čtyřmi, poněvadž jeho poslední dvojčíslí, t. j. číslo 36, je dělitelné čtyřmi. Věta však platí také obráceně, t. j. platí: „Je-li číslo dělitelné čtyřmi, je jeho poslední dvojčíslí dělitelné čtyřmi", což lze říci také takto: „Číslo není dělitelné čtyřmi, není-li jeho poslední dvojčíslí dělitelné čtyřmi". Oba výroky: „číslo je dělitelné čtyřmi" a „poslední dvojčíslí čísla je dělitelné čtyřmi" jsou navzájem ekvivalentní. Všimněme si ještě toho, že také platí věta: „Je-li číslo dělitelné osmi, je jeho poslední dvojčíslí dělitelné čtyřmi." Na příklad číslo 5736 je dělitelné osmi, neboť $5736 : 8 = 717$ beze zbytku, a také jeho poslední dvojčíslí, t. j. 36, je dělitelné čtyřmi. Chyba by však byla, kdybychom odtud chtěli soudit na správnost věty obrácené: „Číslo je dělitelné osmi, je-li jeho poslední dvojčíslí dělitelné čtyřmi." Tato obrácená věta neplatí, jak je vidno třeba z čísla 5732, jehož poslední dvojčíslí 32 je sice dělitelné čtyřmi, ale číslo samo není dělitelné osmi, neboť $5732 : 8 \doteq 716$ se zbytkem 4. Je tedy třeba, abychom při obracení vět byli náležitě opatrní.

Chceme-li dokázat, že dva výroky A, B jsou ekvivalentní, provádíme to zpravidla tak, že dokážeme současnou platnost obou implikací $A \Rightarrow B$ a $B \Rightarrow A$; místo druhé z nich však můžeme také vzíti implikaci non$A \Rightarrow$ non$B$. Dokážeme tedy nejprve, že z výroku A plyne B, a potom dokážeme, že také naopak z výroku B plyne A. Můžeme však také dokazovat, že z výroku A plyne B a z výroku non$A$ plyne non$B$.

Konjunkce a disjunkce.

Jsou-li A, B dva výroky, u nichž ze všech možností uvedených v tabulce (1) může být splněna pouze možnost I., kdežto žádná z dalších splněna být nemůže, pak vztah mezi oběma výroky označujeme názvem **konjunkce***) výroků *A*, *B*. Konjunkce tedy znamená, že ze všech možností nastane tato jediná

A platí, *B* platí.

Nastane-li konjunkce výroků *A*, *B*, znamená to, že oba výroky platí; v dalším to budeme zapisovati

A a *B*.

Konjunkci vyslovujeme takto: „Platí *A* a platí *B*".

Příklad: Výrok *A* je třeba „večer padal sníh" a výrok *B* je „v noci byl mráz". Konjunkce obou výroků zní: „Večer padal sníh a v noci byl mráz". To znamená, že oba výroky, z nichž se konjunkce skládá, platí.

Jiný příklad: Výrok *A* buď „$x < 1$", výrok *B* buď „$x \geqq 0$" (x není menší než 0). Konjunkci obou výroků můžeme vysloviti takto: „Číslo x je menší než 1, ale není menší než 0", což se zapisuje krátce také takto: „$0 \leqq x < 1$". Spojka „ale" značí současnou platnost obou výroků, které jsou jí spojeny, stejně jako spojka „a"; rozdíl mezi oběma spojkami tkví pouze ve vzájemném vztahu obou výroků po stránce obsahové, které si logický rozbor nevšímá.

Jestliže z možností uvedených v tabulce (1) nemůže nastati možnost IV., kdežto ostatní možnosti nastati mohou, dostáváme vztah mezi výroky, který nazýváme **disjunkce**.**) Disjunkce výroků *A*, *B* tedy znamená, že nastane některá z možností

a) *A* platí, *B* platí,
b) *A* platí, *B* neplatí,
c) *A* neplatí, *B* platí,

t. j. že z obou výroků platí a s p o ň jeden. Disjunkci výroků *A*, *B* vyslovujeme zpravidla takto: „Platí *A* nebo (také) *B* (nebo obojí)" a budeme ji krátce zapisovat

A nebo *B*.

Opět si to ukážeme na příkladě. Disjunkce výroků „večer vám zatelefonuji" a „zítra vás navštívím" zní takto: „Večer vám zatele-

*) Coniungo (latinsky) značí spojuji.
**) Disiungo (latinsky) značí rozpojuji.

fonuji nebo vás zítra navštívím", při čemž se nevylučuje možnost, že učiním obojí.

Uvedeme ještě jeden příklad. Z výroků „trojúhelník *ABC* je rovnoramenný“ a „trojúhelník *ABC* je pravoúhlý“ dostaneme disjunkci: „Trojúhelník *ABC* je rovnoramenný nebo pravoúhlý“, při čemž opět nevylučujeme možnost, že je rovnoramenný i pravoúhlý současně.

Utvořme nyní negaci konjunkce

$$\mathbf{A} \text{ a } \mathbf{B}.$$

To znamená, že z možností uvedených v tabulce (1) může nastati kterákoliv kromě možnosti I., t. j. mohou nastati možnosti

II. **A** platí, **B** neplatí,
III. **A** neplatí, **B** platí,
IV. **A** neplatí, **B** neplatí.

Jestliže místo **A** píšeme non**A**, místo **B** píšeme non**B**, a navzájem vyměníme slova „platí“ a „neplatí“, jak jsme to již několikrát učinili, dostaneme tyto možnosti (psané v pořadí IV., III., II.):

a) non**A** platí, non**B** platí,
b) non**A** platí, non**B** neplatí,
c) non**A** neplatí, non**B** platí.

To však není nic jiného než disjunkce

$$\text{non}\mathbf{A} \text{ nebo non}\mathbf{B}.$$

Značí tedy negace konjunkce „**A** a **B**“ přesně totéž jako disjunkce „non**A** nebo non**B**“.

Vezměme si třeba konjunkci z prvního příkladu v tomto odstavci: „Večer padal sníh a v noci byl mráz“. Utvořme její negaci. Ta zní podle předcházejícího vzorce: „Večer nepadal sníh nebo v noci nebyl mráz“. Skutečně původní konjunkce připouští pouze prvou ze čtyř možností:

I. večer padal sníh a v noci byl mráz,
II. večer padal sníh a v noci nebyl mráz,
III. večer nepadal sníh a v noci byl mráz,
IV. večer nepadal sníh a v noci nebyl mráz,

takže její negace musí připouštěti zbývající tři, t. j. musí mít tvar disjunkce výroků: „večer nepadal sníh“ a „v noci nebyl mráz“.

Podobně konjunkce „$x < 1$ a $x \geqq 0$“ z druhého našeho příkladu má negaci „$x \geqq 1$ nebo $x < 0$“. Zase daná konjunkce připouští pouze prvou ze čtyř možností

$$\begin{array}{rl} \text{I.} & x < 1,\ x \geqq 0, \\ \text{II.} & x < 1,\ x < 0, \\ \text{III.} & x \geqq 1,\ x \geqq 0, \\ \text{IV.} & x \geqq 1,\ x < 0. \end{array}$$

Musí tedy její negace připouštěti zbývající tři a být disjunkcí výroků „$x \geqq 1$“ a „$x < 0$“. Že žádné takové číslo x, které by splňovalo možnost IV., neexistuje, je lhostejné.

Podobně podrobíme zkoumání negaci disjunkce

$$\boldsymbol{A} \text{ nebo } \boldsymbol{B}.$$

Tato disjunkce značí, že je splněna některá z možností

a) $\boldsymbol{A}$ platí, $\boldsymbol{B}$ platí,
b) $\boldsymbol{A}$ platí, $\boldsymbol{B}$ neplatí,
c) $\boldsymbol{A}$ neplatí, $\boldsymbol{B}$ platí,

t. j. z obou výroků platí aspoň jeden. Její negace tedy může připouštěti toliko možnost čtvrtou, která ještě zbývá, t. j. možnost

$$\boldsymbol{A} \text{ neplatí, } \boldsymbol{B} \text{ neplatí.}$$

Je to tedy konjunkce

$$\text{non}\boldsymbol{A} \text{ a non}\boldsymbol{B}.$$

Negace disjunkce „$\boldsymbol{A}$ nebo $\boldsymbol{B}$“ vyslovuje přesně totéž jako konjunkce „non$\boldsymbol{A}$ a non$\boldsymbol{B}$“.

Před chvílí jsme uvedli tento příklad disjunkce: „Večer vám zatelefonuji nebo vás zítra navštívím“. Její negaci vyslovíme ve tvaru konjunkce: „Nebudu vám večer telefonovat a také vás zítra nenavštívím“.

Podobně negace disjunkce: „Trojúhelník ABC je rovnoramenný nebo pravoúhlý“ se vyjádří jako konjunkce: „Trojúhelník ABC není rovnoramenný a není pravoúhlý“, což zpravidla vyslovujeme ve tvaru „Trojúhelník ABC není ani rovnoramenný ani pravoúhlý“.

Všimněme si disjunkce

$$A \text{ nebo } B$$

ještě s jiné strany. Tato disjunkce značí, že je splněna některá z možností

$$\left.\begin{array}{lll} \text{a)} & A \text{ platí,} & B \text{ platí,} \\ \text{b)} & A \text{ platí,} & B \text{ neplatí,} \\ \text{c)} & A \text{ neplatí,} & B \text{ platí,} \end{array}\right\} \qquad (3)$$

kdežto možnost „A neplatí, B neplatí" je vyloučena. Víme, že „A platí" značí totéž jako „non$A$ neplatí" a „A neplatí" značí totéž jako „non$A$ platí". Proto naše tři možnosti vyjádřené tabulkou (3) můžeme přepsat (v pořadí c, a, b) takto:

$$\begin{array}{ll} \text{non}A \text{ platí,} & B \text{ platí,} \\ \text{non}A \text{ neplatí,} & B \text{ platí,} \\ \text{non}A \text{ neplatí,} & B \text{ neplatí,} \end{array}$$

kdežto možnost „non$A$ platí, B neplatí" je podle předchozího vyloučena. To však značí, že výroky non$A$ a B jsou ve vztahu implikace, takže disjunkce „A nebo B" říká přesně totéž jako implikace

$$\text{non}A \Rightarrow B.$$

Tato implikace však také znamená totéž jako implikace

$$\text{non}B \Rightarrow A,$$

neboť, jak víme, nonnon$A$ je přesně totéž jako A. O tom se lze ostatně přesvědčit velmi snadno přímo, když v tabulce (3) píšeme „non$B$ neplatí" místo „B platí" a „non$B$ platí" místo „B neplatí" a oba sloupce navzájem zaměníme.

Vraťme se k disjunkci: „Večer vám zatelefonuji nebo vás zítra navštívím". To je přesně totéž jako implikace: „Když vám večer nebudu telefonovat, zítra vás navštívím" a také je to totéž jako implikace: „Když vás zítra nenavštívím, zatelefonuji vám večer". Všecky tři věty znamenají totéž, totiž to, že jsou myslitelné tyto tři možnosti:

a) večer vám zatelefonuji a zítra vás navštívím,
b) večer vám zatelefonuji a zítra vás nenavštívím,
c) večer vám nebudu telefonovat a zítra vás navštívím.

Podobně disjunkce: „Večer nepadal sníh nebo v noci nebyl mráz“ má přesně týž význam jako implikace: „Z toho, že v noci byl mráz, plyne, že večer sníh nepadal“ nebo jako implikace: „Z toho, že večer padal sníh, plyne, že v noci nebyl mráz“. Všecka tři sdělení vyjadřují touž myšlenku, totiž tu, že sníh nezůstal ležet.

Stejně tak disjunkci: „Trojúhelník ABC je rovnoramenný nebo pravoúhlý“ možno vyjádřit ve tvaru implikace: „Není-li trojúhelník ABC rovnoramenný, je pravoúhlý“ nebo také: „Není-li trojúhelník ABC pravoúhlý, je rovnoramenný“.

Konečně disjunkci: „$x \geqq 1$ nebo $x < 0$“ můžeme vysloviti také jako implikaci: „Když je x menší než 1, je také menší než 0“ (ve značkách: „Když je $x < 1$, je také $x < 0$“) nebo jako implikaci: „Když je $x \geqq 0$, je také $x \geqq 1$“. Čtenář si tyto příklady jistě sám podrobně promyslí.

Cvičení.

1. Zjistěte, jsou-li ekvivalentní výroky:

a) „Číslo je dělitelné čtyřmi“ a „číslo je sudé“;

b) „Dvě úsečky jsou rovnoběžné“ a „dvě úsečky nemají společný bod“;

c) „Dva body leží na přímce rovnoběžné s druhou přímkou“ a „dva body mají od dané přímky stejné vzdálenosti“.

2. Pomocí negace výroků, z nichž se implikace skládají, utvořte věty, které mají týž význam jako dané implikace:

a) „Je-li číslo dělitelné čtyřmi, je sudé“;

b) „Jsou-li dvě úsečky rovnoběžné, nemají společný bod“;

c) „Dva body, které leží na přímce rovnoběžné s jinou danou přímkou, mají od této přímky stejné vzdálenosti“.

3. Zjistěte, lze-li obrátit věty:

a) „Je-li přímka p tečnou kružnice v bodě A, je kolmá ke spojnici středu s bodem A“;

b) „Neleží-li dvě přímky v téže rovině, nemají společný bod“;

c) „Je-li $a = b$, je také $ax = bx$“.

4. Vyslovte (dvěma způsoby) větu obrácenou k větě:

a) „Má-li trojúhelník dvě strany stejné, má i dva úhly stejné“;

b) „Je-li bod roviny vnějším bodem kružnice, lze z něho vésti ke kružnici dvě tečny“;

c) „Je-li $a = b$, je také $a + x = b + x$“.

5. Ze dvou kružnic k_1, k_2, které leží v téže rovině a neprotínají se, leží k_1 vně kružnice k_2 nebo k_2 leží vně kružnice k_1. Vyslovte tuto větu ve tvaru implikace tak, aby neobsahovala slovo „nebo“.

6. Jsou-li A, B, C tři výroky, mezi nimiž platí implikace

$$A \text{ a } B \Rightarrow C,$$

je to totéž jako implikace

$$\text{non}C \Rightarrow \text{non}A \text{ nebo } \text{non}B.$$

Dokažte a upravte podle toho věty:

a) „Jestliže přímka prochází bodem na kružnici a současně je kolmá ke spojnici tohoto bodu se středem, je to tečna“;

b) „Je-li $a \neq b$ a současně $x \neq 0$, je $ax \neq bx$“;

c) „Jestliže čísla x, y vyhovují současně rovnicím $2x + 3y = 8$ a $5x - y = 3$, vyhovují také rovnici $7x + 2y = 11$“.

7. Jsou-li A, B, C tři výroky, mezi nimiž platí implikace

$$A \text{ nebo } B \Rightarrow C,$$

je to totéž jako implikace

$$\text{non}C \Rightarrow \text{non}A \text{ a } \text{non}B.$$

Dokažte a upravte podle toho věty:

a) „Je-li $a = 0$ nebo $b = 0$, je $ab = 0$“;

b) „Jsou-li dvě přímky rovnoběžné nebo protínají-li se, leží v téže rovině“;

c) „Dvěma stejným obvodovým úhlům nebo dvěma výplňkovým obvodovým úhlům příslušejí v téže kružnici stejně dlouhé tětivy“.

8. Větu obrácenou k větě

$$A \text{ nebo } B \Rightarrow C$$

můžeme vysloviti v některém z tvarů

$$C \text{ a } \text{non}A \Rightarrow B,$$
$$C \text{ a } \text{non}B \Rightarrow A.$$

Dokažte a obraťte podle toho věty ze cvič. 7.

9. Platí-li současně implikace

$$A \Rightarrow C \text{ a } B \Rightarrow C,$$

platí také implikace

$$A \text{ nebo } B \Rightarrow C.$$

Dokažte a demonstrujte to na větách ze cvič. 7.

10. Platí-li současně implikace

$$C \Rightarrow A \text{ a } C \Rightarrow B,$$

platí také implikace

$$C \Rightarrow A \text{ a } B.$$

Dokažte a demonstrujte to na výrocích: „je-li číslo dělitelné dvanácti, je dělitelné také šesti“ a „je-li číslo dělitelné dvanácti, je dělitelné také čtyřmi“.

II. METHODY DŮKAZŮ.

Slovem **důkaz** rozumíme logické odůvodnění nějakého výroku na základě jiných platných výroků. V provádění důkazů tkví podstata matematického uvažování; proto si o důkazech promluvíme na tomto místě podrobněji. V matematice (a v jiných vědních oborech také) provádíme nejčastěji dva typy důkazů. Jeden se označuje názvem **důkaz přímý** a druhý názvem **důkaz nepřímý**. Vedle toho pro matematiku typický je ještě třetí druh důkazu, t. zv. **důkaz úplnou indukcí**.

Důkaz přímý.

Podstatou přímého důkazu je toto: Jsou-li A, B, C tři výroky, mezi nimiž platí implikace $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow C$, platí také implikace $A \Rightarrow C$.

Abychom to nahlédli, stačí si uvědomit, že implikace $A \Rightarrow B$ značí, že je splněna některá z těchto tří možností:

$$\left.\begin{array}{rll} \text{I.} & A \text{ platí}, & B \text{ platí}, \\ \text{III.} & A \text{ neplatí}, & B \text{ platí}, \\ \text{IV.} & A \text{ neplatí}, & B \text{ neplatí}, \end{array}\right\} \tag{4}$$

kdežto možnost II. „A platí, B neplatí“ je vyloučena. Podobně implikace $B \Rightarrow C$ značí, že je splněna některá z možností:

$$\left.\begin{array}{rll} \text{I}'. & B \text{ platí}, & C \text{ platí}, \\ \text{III}'. & B \text{ neplatí}, & C \text{ platí}, \\ \text{IV}'. & B \text{ neplatí}, & C \text{ neplatí}, \end{array}\right\} \tag{4'}$$

kdežto možnost II′. „B platí, C neplatí“ je opět vyloučena. Platí-li tedy obě implikace $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow C$ současně, je vidno, že všecky možnosti, které mohou celkem nastati, jsou tyto

a) A platí, B platí, C platí (nastane-li současně I. a I′.),
b) A neplatí, B platí, C platí (nastane-li současně III. a I′.),
c) A neplatí, B neplatí, C platí (nastane-li současně IV. a III′.),
d) A neplatí, B neplatí, C neplatí (nastane-li současně IV. a IV′.).

Vypustíme-li v této tabulce výrok B, na kterém nám nezáleží, dostaneme celkem tyto možnosti:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{I}''.\ \boldsymbol{A} \text{ platí,} & \boldsymbol{C} \text{ platí,}\\ \text{III}''.\ \boldsymbol{A} \text{ neplatí,} & \boldsymbol{C} \text{ platí,}\\ \text{IV}''.\ \boldsymbol{A} \text{ neplatí,} & \boldsymbol{C} \text{ neplatí;}\end{array}\right\} \qquad (4'')$$

možnost II″. „**A** platí, **C** neplatí“ je opět vyloučena. Je tedy skutečně splněna implikace $\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{C}$ jako důsledek implikací $\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B} \Rightarrow \boldsymbol{C}$. Výrok **B** v tomto spojení se někdy jmenuje střední člen.

To tedy znamená: Chceme-li dokázat platnost věty vyjádřené implikací $\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{C}$, kde **A** je předpoklad, **C** tvrzení, stačí nalézti takový výrok **B**, aby $\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{B}$ a současně $\boldsymbol{B} \Rightarrow \boldsymbol{C}$.

Je zřejmé, že tento způsob usuzování je možno rozšířiti i na více implikací, z nichž každé dvě po sobě následující mají společný střední člen.

V předcházejících vývodech můžeme některou implikaci nahraditi ekvivalencí. Kdyby na příklad výroky **A**, **B** byly ekvivalentní, t. j. kdyby platilo $\boldsymbol{A} \Leftrightarrow \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B} \Rightarrow \boldsymbol{C}$, nebyla by v tabulce (4) přípustná možnost III. a také by nemohla nastati možnost uvedená v řádku označeném b); ostatní by však zůstalo beze změny. Implikace $\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{C}$ může tedy také být důsledkem vztahů $\boldsymbol{A} \Leftrightarrow \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B} \Rightarrow \boldsymbol{C}$. Podobně by tomu bylo, kdyby místo druhé implikace nastoupila ekvivalence.

Je-li konečně $\boldsymbol{A} \Leftrightarrow \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B} \Leftrightarrow \boldsymbol{C}$, odpadne v tabulce (4) možnost III., v tabulce (4′) možnost III′. a nenastane žádný z případů b), c). Proto také v tabulce (4″) není možný případ III″. a výsledkem úvahy je opět ekvivalence $\boldsymbol{A} \Leftrightarrow \boldsymbol{C}$.

Jako příklad uvedeme důkaz věty: „Jsou-li a, b, c, d čtyři čísla té vlastnosti, že $a < b$ a $c < d$, je $a + c < b + d$.“ Předpoklad je: „Čísla a, b, c, d mají vlastnost $a < b$, $c < d$“ a z něho máme odvodit tvrzení „$a + c < b + d$“. Důkaz vedeme takto: Je-li $a < b$ a současně $c < d$, plyne odtud $a + c < b + c$ a současně $b + c < b + d$, neboť k oběma stranám nerovnosti $a < b$ můžeme přičíst číslo c a k oběma stranám nerovnosti $c < d$ můžeme přičíst číslo b. Tím dostaneme nerovnosti $a + c < b + c$, $b + c < b + d$, takže je splněna implikace

$$a < b \text{ a } c < d \Rightarrow a + c < b + c \text{ a } b + c < b + d.$$

Jde tu vlastně o ekvivalenci a nikoliv o implikaci, ale na tom celkem nezáleží. Nyní pokračujeme takto: Je-li $a + c < b + c$ a současně $b + c < b + d$, je také $a + c < b + d$, neboť mají-li tři čísla $a + c$,

$b + c$, $b + d$ tu vlastnost, že první z nich je menší než druhé a zároveň druhé je menší než třetí, je také první číslo menší než třetí, t. j. platí implikace

$$a + c < b + c \text{ a } b + c < b + d \Rightarrow a + c < b + d.$$

Poněvadž obě napsané implikace jsou platné, je platná i implikace, která vznikne jejich spojením podle obecné úvahy na počátku tohoto odstavce, t. j. platí

$$a < b \text{ a } c < d \Rightarrow a + c < b + d.$$

To však je věta, kterou jsme měli dokázat.

Za druhý příklad nám poslouží Eukleidův důkaz jedné z nejslavnějších vět geometrie, t. zv. věty Pythagorovy, která zní: „V pravoúhlém trojúhelníku je čtverec nad přeponou roven součtu čtverců nad oběma odvěsnami". Její důkaz je poněkud složitější, ale to nevadí. Nejprve si ovšem musíme rozmyslet, co je tu vlastně předpokladem a co je tvrzením. Předpokladem je (viz obr. 2): „Trojúhelník ABC je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu C" a z něho máme odvodit tvrzení: „Čtverec o straně AB je roven součtu dvou čtverců, jejichž strany jsou AC a BC".

K odvození věty Pythagorovy budeme předpokládat, že známe větu, kterou v dalším budeme krátce označovat **P**: „Je-li dán obdélník a trojúhelník, které mají stejnou jednu stranu a příslušnou výšku, pak obsah obdélníka je právě tak velký jako dvojnásobný obsah trojúhelníka".

Sestrojíme-li pravoúhlý trojúhelník ABC a čtverce $ABDE$, $ACFG$, $BCHK$ nad jeho stranami a vedeme-li bodem C kolmici MN ke straně AB, můžeme větu Pythagorovu odvodit tímto řetězem implikací: Z toho, že AC je kolmé k BC, vyplývá, že body B, C, F leží na jedné přímce, jež je rovnoběžná s přímkou AG, takže čtverec $ACFG$ a trojúhelník ABG mají společnou jednu stranu AG a výšku k ní příslušnou. Proto podle věty **P** platí, že obsah čtverce $ACFG$ je roven dvojnásobnému obsahu trojúhelníka ABG. Zapíšeme-li to způsobem obvyklým v geometrii, dostaneme tyto implikace

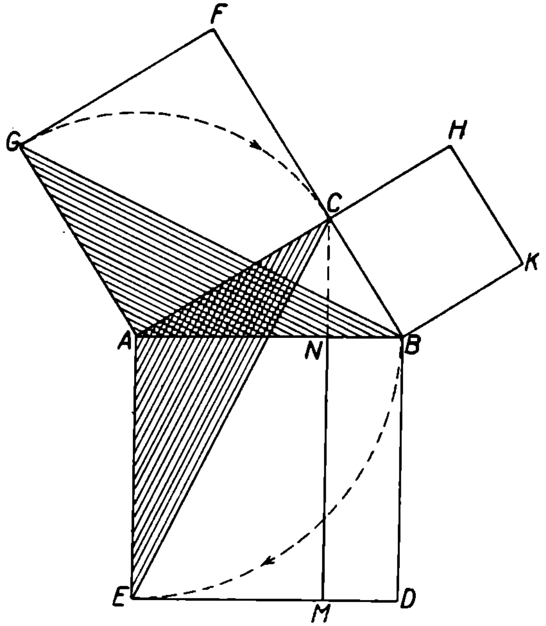
$$AC \perp BC \Rightarrow BF \parallel AG \Rightarrow ACFG = 2 \,.\, \triangle ABG.$$

Vedle toho je CM kolmé k AB (tak jsme to sestrojili), a proto je CM rovnoběžné s AE. Proto obdélník $AEMN$ a trojúhelník AEC

mají společnou stranu AE a výšku k ní příslušnou. To má podle věty **P** za následek, že obsah obdélníka $AEMN$ je roven dvojnásobnému obsahu trojúhelníka AEC. To všecko lze zapsati dalším řetězem implikací:

$$CM \perp AB \Rightarrow CM \parallel AE \Rightarrow AEMN = 2 \,.\, \triangle AEC,$$

který však platí v každém trojúhelníku, neboť k jeho odvození není třeba podmínky, že trojúhelník ABC je pravoúhlý.



Obr. 2.

Dále strana AB v trojúhelníku ABG je stejně dlouhá jako strana AE v trojúhelníku AEC (neboť $ABDE$ je čtverec); také strana AG je stejně dlouhá jako strana AC (neboť $ACFG$ je rovněž čtverec); konečně úhel BAG je roven úhlu EAC (neboť oba dostaneme, když k úhlu BAC přidáme pravý úhel buď na jednu nebo na druhou stranu). Proto jsou oba trojúhelníky ABG i AEC shodné a druhý dostaneme z prvého, otočíme-li jej okolo bodu A o pravý úhel, jak je to v obrázku šipkami naznačeno. To vede k třetímu řetězu implikací

$$\left.\begin{array}{r}\overline{AB} = \overline{AE} \\ \overline{AG} = \overline{AC} \\ \sphericalangle BAG = \sphericalangle EAC\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABG \cong \triangle AEC \Rightarrow \triangle ABG = \triangle AEC \Rightarrow \\ \Rightarrow 2\,.\,\triangle ABG = 2\,.\,\triangle AEC,$$

který rovněž platí v každém trojúhelníku ABC, nad jehož stranami AB, AC jsou sestrojeny čtverce $ABDE$, $ACFG$. Svorkou je naznačeno, že výroky jí sevřené platí současně.

V našem pravoúhlém trojúhelníku tedy platí tři výroky: $ACFG = 2\,.\,\triangle ABG$, $AEMN = 2\,.\,\triangle AEC$, $2\,.\,\triangle ABG = 2\,.\,\triangle AEC$, z nichž dále plyne $ACFG = AEMN$, t. j.

$$\left.\begin{array}{r}ACFG = 2\,.\,\triangle ABG \\ AEMN = 2\,.\,\triangle AEC \\ 2\,.\,\triangle ABG = 2\,.\,\triangle AEC\end{array}\right\} \Rightarrow ACFG = AEMN.$$

Zcela stejně odvodíme, že o čtverci $BCHK$ a obdélníku $BDMN$ platí

$$BCHK = BDMN.$$

Ježto dále $AEMN + BDMN = ABDE$, dostáváme poslední implikaci

$$\left.\begin{array}{r}ACFG = AEMN \\ BCHK = BDMN \\ AEMN + BDMN = ABDE\end{array}\right\} \Rightarrow ACFG + BCHK = ABDE,$$

čímž je dokázáno, že

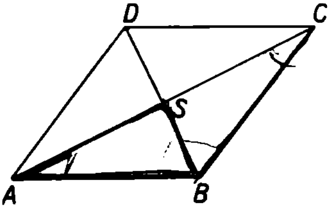
$$AC \perp BC \Rightarrow ACFG + BCHK = ABDE.$$

To však je Pythagorova věta, kterou jsme chtěli dokázat. V předpokladu jsme uvedli pouze podmínku $AC \perp BC$, která charakterisuje pravoúhlý trojúhelník; ostatní podmínky, jichž jsme použili, jsou splněny v každém trojúhelníku, a proto je můžeme vynechat.

Uveďme ještě jeden příklad přímého důkazu. Bude jím důkaz věty: „Rovnoběžník má všecky čtyři strany stejně dlouhé tehdy a jen tehdy, když má úhlopříčky navzájem kolmé.“ Tu jde o ekvivalenci výroků „rovnoběžník má všecky strany stejně dlouhé“ a „rovnoběžník má úhlopříčky navzájem kolmé“.

K důkazu budeme potřebovat tyto vlastnosti rovnoběžníka:

(1) Každé dvě protější strany každého rovnoběžníka jsou stejně dlouhé, t. j. (viz obr. 3) $\overline{AB} = \overline{DC}$, $\overline{CB} = \overline{DA}$, takže výrok „rovnoběžník má všecky strany stejně dlouhé“ říká totéž jako výrok „$\overline{AB} = \overline{CB}$“.



Obr. 3.

(2) Úhlopříčky rovnoběžníka se navzájem půlí, t. j. v každém rovnoběžníku je $\overline{AS} = \overline{CS}$, $\overline{BS} = \overline{DS}$, kde S je průsečík úhlopříček.

Máme tedy dokázat ekvivalenci výroků „$\overline{AB} = \overline{CB}$“ a „$AS \perp BS$“.

V trojúhelnících ABS, CBS tedy předpokládáme, že $\overline{AB} = \overline{CB}$; vedle toho je $\overline{AS} = \overline{CS}$ podle (2) a samozřejmě $\overline{BS} = \overline{BS}$, takže trojúhelníky ABS, CBS jsou shodné, neboť mají tři strany stejné. Ale také naopak ze shodnosti trojúhelníků ABS, CBS plyne rovnost stran $\overline{AB} = \overline{CB}$; platí tedy ekvivalence

$$\overline{AB} = \overline{CB} \Leftrightarrow \triangle ABS \cong \triangle CBS.$$

Dále ze shodnosti trojúhelníků ABS, CBS plyne rovnost odpovídajících si úhlů ASB, CSB, ale jejich součet činí právě 180°, je tedy $\sphericalangle ASB = \sphericalangle CSB = 90°$ čili $AS \perp BS$. Také však naopak je-li $AS \perp BS$, je úhel ASB roven úhlu CSB; vedle toho jest $\overline{AS} = \overline{CS}$ podle (2) a samozřejmě $\overline{BS} = \overline{BS}$, takže trojúhelníky ABS, CBS jsou shodné. Platí tedy další ekvivalence

$$\triangle ABS \cong \triangle CBS \Leftrightarrow AS \perp BS.$$

Spojením obou ekvivalencí dostáváme

$$\overline{AB} = \overline{CB} \Leftrightarrow AS \perp BS,$$

čímž je věta dokázána.

Poněvadž vztahy mezi vyslovenými výroky jsou vesměs ekvivalencemi, můžeme je číst jako implikace buď zleva doprava nebo obráceně. Tak jsou obě části vyslovené věty (t. j. věta přímá i věta obrácená) dokázány najednou. Říkáváme krátce, že p o s t u p d ů k a z u l z e o b r á t i t i. Není-li však důkaz složen ze samých ekvivalencí, pak postup důkazu obrátit nemůžeme. Při důkazu věty Pythagorovy v předešlém příkladě jsme vedle ekvivalencí použili také několika pouhých implikací, proto uvedený důkaz není zároveň důkazem věty obrácené. Věta obrácená k větě Pythagorově sice platí, ale její důkaz třeba vésti jinak.

Důkaz nepřímý.

Víme, že implikace $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$ je totožná s implikací non$\mathbf{B} \Rightarrow$ non$\mathbf{A}$. Místo, abychom dokazovali platnost věty vyjádřené implikací $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$, můžeme dokázati platnost věty vyjádřené implikací non$\mathbf{B} \Rightarrow$ non$\mathbf{A}$. Tento způsob důkazu se nazývá **důkaz nepřímý**.

Při nepřímém důkazu tedy vyjdeme z negace tvrzení dokazované věty a řetězem implikací dokážeme, že z něho plyne negace předpokladu, t. j. výrok, který, jak říkáme, je ve sporu s předpokladem.

Demonstrujeme to opět na příkladě. Dokážeme třeba správnost věty: „Značí-li písmena a, x daná čísla a ax jejich součin a je-li $ax \neq 0$, je také $x \neq 0$“. Nepřímý důkaz vedeme tak, že předpokládáme, že naopak je $x = 0$. Podle definice násobení nulou dostáváme odtud, že také $ax = 0$, což je ve sporu s předpokladem věty, podle něhož má být $ax \neq 0$. Dokázali jsme tedy implikaci

$$x = 0 \Rightarrow ax = 0,$$

která je totožná s implikací

$$ax \neq 0 \Rightarrow x \neq 0,$$

kterou jsme měli dokázat.

Věc však zpravidla nebývá tak jednoduchá, neboť předpoklady dokazované věty bývají složitější. Často se stává, že tvrzení $\mathbf{B}$ dokazované věty neplyne jen z jediného předpokladu, nýbrž z několika. Dejme tomu, že předpokladem není platnost jediného výroku, nýbrž současná platnost dvou výroků, které označíme $\mathbf{A}$ a $\mathbf{C}$. Jde tedy o důkaz implikace

$$\mathbf{A} \text{ a } \mathbf{C} \Rightarrow \mathbf{B}.$$

Konjunkci „$\mathbf{A}$ a $\mathbf{C}$“, která je na levé straně dokazované implikace, označíme na chvilku jediným písmenem, třeba $\mathbf{D}$. Jde tedy o implikaci $\mathbf{D} \Rightarrow \mathbf{B}$, jež znamená, jak víme, že nastane některá z možností

$$\left.\begin{array}{rll} \text{I.} & \boldsymbol{D} \text{ platí,} & \boldsymbol{B} \text{ platí,} \\ \text{III.} & \boldsymbol{D} \text{ neplatí,} & \boldsymbol{B} \text{ platí,} \\ \text{IV.} & \boldsymbol{D} \text{ neplatí,} & \boldsymbol{B} \text{ neplatí,} \end{array}\right\} \qquad (5)$$

kdežto možnost II. „**D** platí, **B** neplatí" je vyloučena. Avšak výrok „**D** platí" značí, že platí oba výroky **A** a **C**, jejichž konjunkcí je výrok **D**, t. j. že je splněna jediná možnost

$$\boldsymbol{A} \text{ platí, } \boldsymbol{C} \text{ platí.} \qquad (5')$$

Negace tohoto výroku, t. j. výrok „**D** neplatí", je, jak také víme, disjunkcí výroků non**A** a non**C**, která říká, že je splněna některá ze tří zbývajících možností, které mohou nastati, totiž

$$\left.\begin{array}{rll} \text{a)} & \boldsymbol{A} \text{ platí,} & \boldsymbol{C} \text{ neplatí,} \\ \text{b)} & \boldsymbol{A} \text{ neplatí,} & \boldsymbol{C} \text{ platí,} \\ \text{c)} & \boldsymbol{A} \text{ neplatí,} & \boldsymbol{C} \text{ neplatí.} \end{array}\right\} \qquad (5'')$$

Abychom jasně přehlédli strukturu tabulky (5), napišme do ní místo výroku „**D** platí" výroky z tabulky (5') a místo výroku „**D** neplatí" výroky z tabulky (5"). Dostaneme celkem sedm možností, které vystihují implikaci „**A** a **C** $\Rightarrow$ **B**":

$$\left.\begin{array}{rlll} \text{I.} & \boldsymbol{A} \text{ platí,} & \boldsymbol{C} \text{ platí,} & \boldsymbol{B} \text{ platí,} \\ \text{IIIa)} & \boldsymbol{A} \text{ platí,} & \boldsymbol{C} \text{ neplatí,} & \boldsymbol{B} \text{ platí,} \\ \text{b)} & \boldsymbol{A} \text{ neplatí,} & \boldsymbol{C} \text{ platí,} & \boldsymbol{B} \text{ platí,} \\ \text{c)} & \boldsymbol{A} \text{ neplatí,} & \boldsymbol{C} \text{ neplatí,} & \boldsymbol{B} \text{ platí,} \\ \text{IVa)} & \boldsymbol{A} \text{ platí,} & \boldsymbol{C} \text{ neplatí,} & \boldsymbol{B} \text{ neplatí,} \\ \text{b)} & \boldsymbol{A} \text{ neplatí,} & \boldsymbol{C} \text{ platí,} & \boldsymbol{B} \text{ neplatí,} \\ \text{c)} & \boldsymbol{A} \text{ neplatí,} & \boldsymbol{C} \text{ neplatí,} & \boldsymbol{B} \text{ neplatí.} \end{array}\right\} \qquad (6)$$

Osmá možnost: II. „**A** platí, **C** platí, **B** neplatí" nemůže nastat, neboť odporuje významu uvažované implikace. Tuto tabulku upravíme stejně, jako jsme na str. 7 upravili tabulku (1), t. j. místo výroku **A** budeme psáti non**A**, místo **B** budeme psáti non**B** a slova „platí" a „neplatí" u výroků **A** a **B** navzájem vyměníme. Potom zaměníme sloupec prvý s třetím a jednotlivé řádky napíšeme v jiném pořádku. Dostaneme novou tabulku, u níž je v každém řádku v závorkách poznamenáno, z kterého řádku tabulky (6) tento řádek vznikl:

I′.	non$B$ platí,	C platí,	non$A$ platí,	(IVb)	
III′a)	non$B$ platí,	C neplatí,	non$A$ platí,	(IVc)	
b)	non$B$ neplatí,	C platí,	non$A$ platí,	(IIIb)	
c)	non$B$ neplatí,	C neplatí,	non$A$ platí,	(IIIc)	(7)
IV′a)	non$B$ platí,	C neplatí,	non$A$ neplatí,	(IVa)	
b)	non$B$ neplatí,	C platí,	non$A$ neplatí,	(I)	
c)	non$B$ neplatí,	C neplatí,	non$A$ neplatí.	(IIIa)	

Osmá možnost II′. „non$B$ platí, C platí, non$A$ neplatí“, která je totožná s dřívější možností II., je opět vyloučena.

Prohlédneme-li si pozorně tabulku (7), která je obsahově totožná s tabulkou (6), shledáme, že je i formálně stejná jako tabulka (6), pouze s tím rozdílem, že místo A je psáno non$B$ a místo B je psáno non$A$. Značí-li tedy tabulka (6) implikaci

$$A \text{ a } C \Rightarrow B,$$

značí tabulka (7) implikaci

$$\text{non}B \text{ a } C \Rightarrow \text{non}A,$$

která vyslovuje přesně totéž, co říká implikace předešlá.

Přitom písmena A i C značí nějaké platné výroky. To tedy znamená, že při nepřímém důkazu vyjdeme od negace tvrzení, které chceme dokázat, přibereme k němu vhodné další výroky, jejichž platnost je zaručena, a to činíme tak dlouho, až se řetězem implikací dostaneme k výroku, který je ve sporu s předpokladem nebo s nějakým jiným platným výrokem. Poněvadž z výroku non$B$ (a z jiných platných výroků, které jsme označili C) vyplývá non$A$, proto z výroku A (a současně z výroků C) vyplývá B.

Ukážeme si to na několika příkladech. Dokážeme třeba větu: „Je-li číslo dělitelné dvěma a třemi současně, je také dělitelné šesti“. Za A vezmeme výrok „číslo je dělitelné dvěma“, za C výrok „číslo je dělitelné třemi“ a za B vezmeme výrok „číslo je dělitelné šesti“. Máme dokázat implikaci

$$A \text{ a } C \Rightarrow B.$$

To je totéž, jako kdybychom řekli

$$\text{non}B \text{ a } C \Rightarrow \text{non}A,$$

čili v našem případě: „Není-li číslo dělitelné šesti, ale je-li dělitelné třemi, není dělitelné dvěma". A tuto implikaci nyní dokážeme.

Dříve si ji však vyjádříme matematicky. Je-li číslo a dělitelné dvěma, znamená to, že při dělení dvěma vyjde jako podíl jakési číslo x, které je celé, t. j. $a = 2x$. Není-li a dělitelné dvěma, vyjde vedle podílu x ještě zbytek, který však nemůže být jiný než 1, t. j. $a = 2x + 1$. Výrok **A** tedy značí „$a = 2x$" a výrok non**A** značí „$a = 2x + 1$". Podobně je-li číslo a dělitelné třemi, dá při dělení třemi jisté celé číslo y jako podíl, takže výrok **C** značí „$a = 3y$". Konečně je-li číslo a dělitelné šesti, dá při dělení šesti podíl u, což je opět číslo celé, a není-li a dělitelné šesti, vyjde při dělení šesti vedle podílu u ještě jakýsi zbytek, který označíme z, t. j. $a = 6u + z$, kde z je některé z čísel 1, 2, 3, 4, 5. Výrok non**B** tedy jest: „$a = 6u + z$, kde $z = 1, 2, 3, 4, 5$".

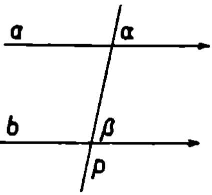
Z výroků „$a = 6u + z$" a „$a = 3y$" tedy máme odvoditi výrok „$a = 2x + 1$". Z našich dvou výroků plyne

$$6u + z = 3y, \text{ čili } z = 3y - 6u = 3(y - 2u).$$

Ježto z může být pouze některé z čísel 1, 2, 3, 4, 5 a ježto $y - 2u$ je celé, neboť y je celé a u je také celé, nelze tomu vyhověti jinak než tak, že bude $y - 2u = 1$ a pak $z = 3$. Je tedy

$$a = 6u + 3 = 6u + 2 + 1 = 2(3u + 1) + 1.$$

Toto číslo je opravdu tvaru $2x + 1$, kde $x = 3u + 1$ je číslo celé.



Obr. 4.

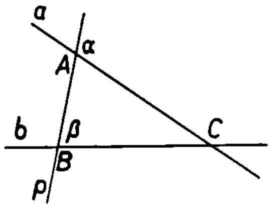
Jako druhý příklad dokážeme větu: „Jestliže dvě přímky v rovině svírají se svou příčkou dva souhlasné úhly, které jsou si rovny, jsou ty přímky rovnoběžné". Slovem souhlasné úhly rozumíme dva úhly, které jsou vzhledem k přímkám a, b a jejich příčce p tak položeny jako úhly α, β na obr. 4. Jde o to, abychom dokázali implikaci

$$\alpha = \beta \Rightarrow a \parallel b.$$

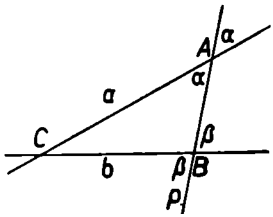
Dokážeme ji opět nepřímo. Budeme předpokládat, že přímky a, b nejsou rovnoběžné, a dokážeme, že pak musí $\alpha \neq \beta$, t. j. dokážeme implikaci

$$a \text{ není rovnoběžné s } b \Rightarrow \alpha \neq \beta.$$

K provedení důkazu přibereme některé jiné platné výroky; které to jsou, vyplyne z postupu důkazu. Předpokládejme tedy, že přímky a, b nejsou rovnoběžné; pak se protnou v některé polorovině určené přímkou p. Je-li tomu tak jako na obr. 5a, vznikne trojúhelník ABC, v němž je úhel α vnějším a úhel β vnitřním. Je však známo, že vnější úhel v trojúhelníku je vždy větší než kterýkoli protější vnitřní, t. j. $\alpha > \beta$. Je-li však průsečík C přímek a, b v opačné polorovině, nastane situace taková jako na obr. 5b, kde (vzhledem k rovnosti vrcholových



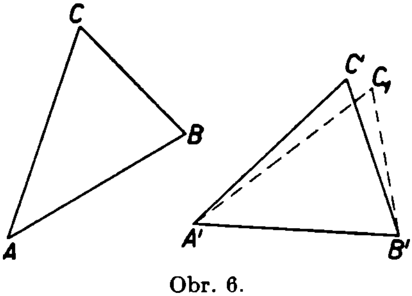
Obr. 5a.



Obr. 5b.

úhlů) α je vnitřním a β protějším vnějším úhlem trojúhelníka ABC. Pak je $\beta > \alpha$. V obou případech tedy je $\alpha \neq \beta$, takže opravdu z předpokladu, že přímky a, b nejsou rovnoběžné, plyne, že $\alpha \neq \beta$. Tím je naše věta dokázána.

Dalším příkladem bude důkaz věty: „Jestliže strany jednoho trojúhelníka jsou rovny odpovídajícím stranám druhého trojúhelníka, pak jsou ty trojúhelníky shodné". Tu jde o dva trojúhelníky ABC, $A'B'C'$, v nichž $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\overline{BC} = \overline{B'C'}$, $\overline{CA} = \overline{C'A'}$ (obr. 6), a máme dokázat implikaci



Obr. 6.

$$\left.\begin{array}{l} \overline{AB} = \overline{A'B'} \\ \overline{BC} = \overline{B'C'} \\ \overline{CA} = \overline{C'A'} \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'.$$

Dva trojúhelníky nazýváme shodnými, lze-li je položit na sebe tak, aby se kryly. Položíme tedy oba trojúhelníky na sebe tak, aby vrchol A padl do vrcholu A', vrchol B do vrcholu B' a aby vrchol C padl do bodu C_1, který leží v téže polorovině určené přímkou $A'B'$, v níž leží vrchol C'. Tak dostaneme nový trojúhelník $A'B'C_1$. Jsou-li oba trojúhelníky shodné, musí bod C_1 padnout právě do bodu C', t. j. platí implikace

$$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C' \Rightarrow C_1 \equiv C'.$$

Abychom dokázali správnost naší věty, předpokládejme, že body C_1, C' jsou různé, a ukážeme, že to vede ke sporu. Je-li tedy C_1 různé od C', vznikne rovnoramenný trojúhelník $A'C'C_1$, v němž je $\overline{A'C'} = \overline{A'C_1}$. To značí, že bod A' leží na ose úsečky $C'C_1$. Podobně trojúhelník $B'C'C_1$ je rovnoramenný a v něm je $\overline{B'C'} = \overline{B'C_1}$; proto také bod B' leží na ose úsečky $C'C_1$. Oba vrcholy A', B' tedy leží na ose úsečky $C'C_1$, t. j. osou úsečky $C'C_1$ je právě přímka $A'B'$. To však vede ke sporu s předpokladem, který jsme před chvílí učinili, že totiž body C' i C_1 leží v téže polorovině určené přímkou $A'B'$. Není tedy možaby body C', C_1 byly navzájem různé a tím je věta dokázána.

V závěru ještě dokážeme větu: „Číslo $\sqrt{2}$ nelze vyjádřiti zlomkem“. Číslo, o němž se hovoří v této větě, je to číslo, které násobeno samo sebou dává právě číslo 2.

Budeme předpokládati, že není pravda to, co věta tvrdí, a ukážeme, že to vede ke sporu. Předpokládejme tedy, že číslo $\sqrt{2}$ můžeme vyjádřiti jako zlomek, jehož čitatel i jmenovatel jsou čísla celá a kladná. Takových zlomků je ovšem více. Abychom to nahlédli, stačí si uvědomit, že třeba $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9}$ atd. Vybereme z nich ten, jehož jmenovatel je nejmenší možné celé kladné číslo, a označíme jej $\frac{p}{q}$, kde p, q jsou čísla celá kladná. Ježto $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$, je $\frac{p}{q} \cdot \frac{p}{q} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$, čili $\frac{p^2}{q^2} = 2$, t. j. $p^2 = 2q^2$. Náš předpoklad je totožný s výrokem, že existují dvě celá kladná čísla p, q taková, že $p^2 = 2q^2$, při čemž q je nejmenší číslo uvedené vlastnosti. Z podmínky $p^2 = 2q^2$ však plyne $p^2 - pq = 2q^2 - pq$, neboť od obou stran rovnice můžeme odečísti totéž číslo pq. Poslední rovnici přepíšeme v tvaru $p(p - q) = q(2q - p)$, čili

$$\frac{p}{q} = \frac{2q - p}{p - q}.$$

Máme tedy dokázánu implikaci

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \text{ a } q \text{ je nejmenší celé kladné} \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{2q - p}{p - q}.$$

Avšak zlomek $\frac{p}{q}$ je jistě větší než 1 a menší než 2, neboť $1 . 1 = 1$ a $2 . 2 = 4$, kdežto $\frac{p}{q} . \frac{p}{q} = 2$. Je tedy $1 < \frac{p}{q} < 2$, čili $q < p < 2q$. To však znamená, že také $0 < p - q < q$, neboť nerovnost zůstane zachována, odečteme-li od obou jejích stran stejné číslo (v našem případě to bylo číslo q). Naše nerovnosti však říkají, že číslo $p - q$, které je celé, je kladné a menší než q. Pak se ale zlomek $\frac{p}{q}$ dá psát ve tvaru $\frac{2q - p}{p - q}$ se jmenovatelem menším než q. Ale to je ve sporu s předpokladem, podle něhož q bylo nejmenší celé kladné číslo, přípustné ve jmenovateli. Proto není pravda, že se číslo $\sqrt{2}$ dá vyjádřiti jako zlomek. Je ovšem pravda, že v tabulkách odmocnin nalezneme pro číslo $\sqrt{2}$ hodnotu 1,414, ale to je vyjádření pouze přibližné; naše věta však mluvila o vyjádření přesném.

Důkaz úplnou indukcí.

Logický podklad předcházejících dvou typů důkazu nemá nic společného s matematikou. Důkazu přímého i nepřímého používáme při jakýchkoli logických dedukcích. Vedle těchto dvou typů se často v matematice užívá ještě třetího typu důkazu, který se nazývá **důkaz úplnou indukcí** a dokazují se jím některé věty, v nichž se vyskytují čísla celá a kladná. Takovým číslům říkáme krátce čísla *přirozená* a mají tuto základní vlastnost:

je-li n přirozené číslo, je $n + 1$ také přirozené číslo.

Na příklad 50 je přirozené číslo, proto 51 je také přirozené číslo. Skupina čísel, která má tyto vlastnosti: (1) obsahuje číslo 50 a (2) s každým n obsahuje také $n + 1$, obsahuje také všecka přirozená čísla, která jsou větší než 50, t. j. obsahuje všecka přirozená čísla $n \geq 50$. Této vlastnosti přirozených čísel se užívá při důkazu úplnou indukcí.

Označme $V(n)$ výrok, v němž se vyskytuje přirozené číslo n. Víme-li, že (1) výrok $V(n)$ platí, když n je rovno některému přirozenému číslo a, t. j. víme-li, že platí výrok $V(a)$, a dokážeme-li, že (2) z platnosti výroku $V(n)$ plyne platnost výroku $V(n + 1)$, dokázali jsme tím, že výrok $V(n)$ platí pro všecka přirozená čísla $n \geqq a$. To snadno nahlédneme. Výrok $V(n)$ platí podle (1) pro $n = a$. Protože $V(n)$ platí pro $n = a$, platí podle (2) i pro $n = a + 1$. Protože $V(n)$ platí podle právě dokázaného pro $n = a + 1$, platí podle (2) i pro $n = a + 2$. Protože $V(n)$ platí pro $n = a + 2$, platí i pro $n = a + 3$ a tak můžeme postupovati libovolně daleko. Výrok $V(n)$ tedy platí pro všecka přirozená čísla $n \geqq a$.

Důkaz úplnou indukcí tedy má dva kroky. Třeba dokázat

(1) $V(a)$ platí pro přirozené číslo a.
(2) $V(n) \Rightarrow V(n + 1)$.

Poznamenejme ještě, že úplná indukce (také se někdy říká matematická indukce) nemá nic společného s indukcí, jíž se užívá v přírodních vědách a kterou bychom mohli nazvati neúplná indukce. Tato (neúplná) indukce vyslovuje totiž na základě jednotlivých zkušeností pouze domněnku ve tvaru obecně platné věty, která však není logickým důsledkem vyvozeným ze zkušenosti, nýbrž vyslovuje jenom určitou (zpravidla sice velmi značnou) pravděpodobnost, že v podobných případech nastane podobný výsledek. Naproti tomu matematická indukce je skutečně logické odvození výroku $V(n)$ platného pro každé přirozené číslo n, které vyhovuje nerovnosti $n \geqq a$.

Provedeme si několik důkazů úplnou indukcí. Nejprve dokážeme větu: „Číslo $n^3 - n$ je pro každé přirozené číslo n dělitelné třemi.“ Důkaz má, jak víme, dva body:

(1) Pro $n = 1$ dostáváme $1^3 - 1 = 0$, což je dělitelné třemi; věta tedy platí pro $n = 1$.

(2) Předpokládejme, že číslo $n^3 - n$ je pro nějaké přirozené číslo n dělitelné třemi, t. j. že $n^3 - n = 3x$, kde x je celé kladné. Odtud odvodíme, že také $(n + 1)^3 - (n + 1)$ je dělitelné třemi. Platí

$$(n + 1)^3 - (n + 1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 = n^3 - n + \\ + 3n^2 + 3n = 3x + 3n^2 + 3n = 3(x + n^2 + n),$$

což je dělitelné třemi, neboť $x + n^2 + n$ je číslo celé. Tím je důkaz naší věty dokončen. Věta platí pro každé přirozené n.

Jako druhý příklad dokážeme, že součet vnitřních úhlů v n-úhelníku, měřený ve stupních, je

$$s_n = (n - 2) \,.\, 180.$$

(1) Věta je správná pro $n = 3$, neboť pro $n = 3$ ze vzorce vychází $180°$ a součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je skutečně $180°$.

(2) Předpokládejme, že věta platí pro n-úhelník. Třeba z ní odvodit, že $(n + 1)$ úhelník má součet vnitřních úhlů $s_{n+1} = [(n + 1) - 2] \,.\, 180 = (n - 1) \,.\, 180$ stupňů. To je také pravda, neboť $(n + 1)$-úhelník dostaneme, když nad některou stranou n-úhelníka sestrojíme další trojúhelník; tím se součet úhlů zvětší o $180°$. Je tedy

$$s_{n+1} = s_n + 180 = (n - 2) \,.\, 180 + 180 = (n - 2 + 1) \,.\, 180 = (n - 1) \,.\, 180.$$

Platnost uvedené věty je dokázána pro přirozená čísla $n \geqq 3$, tedy pro všecky mnohoúhelníky.

Nakonec ještě stanovíme hodnotu součtu

$$s_n = \frac{1}{1 \,.\, 2} + \frac{1}{2 \,.\, 3} + \frac{1}{3 \,.\, 4} + \dots + \frac{1}{n(n + 1)}.$$

Označme znakem s_1 prvý člen tohoto výrazu, znakem s_2 součet jeho prvních dvou členů, s_3 součet prvých tří členů atd. Je vidno, že

$$s_1 = \frac{1}{1 \,.\, 2} = \tfrac{1}{2},$$

$$s_2 = s_1 + \frac{1}{2 \,.\, 3} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{6} = \tfrac{4}{6} = \tfrac{2}{3},$$

$$s_3 = s_2 + \frac{1}{3 \,.\, 4} = \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{12} = \tfrac{9}{12} = \tfrac{3}{4},$$

atd. Zdá se pravděpodobné, že

$$s_n = \frac{n}{n + 1}.$$

To však není žádný důkaz, neboť platnost našeho vzorce byla dokázána jen pro $n = 1, 2, 3$, ale my jej musíme dokázat pro každé přirozené n. Třeba ještě provésti druhý krok důkazu, t. j. dokázati, že

$$s_n = \frac{n}{n+1} \Rightarrow s_{n+1} = \frac{n+1}{n+2},$$

kde výraz pro s_{n+1} vznikl z výrazu pro s_n tak, že jsme místo n psali $n + 1$. Platí

$$s_{n+1} = s_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} =$$

$$= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}.$$

Teprve teď je naše formule plně dokázána pro všecka přirozená n.

Druhý krok důkazu nelze vynechávat; teprve jím se věta dokazuje. Kdybychom tento druhý krok neprovedli, mohli bychom být snadno svedeni ke klamným závěrům. Dosadíme-li na příklad do výrazu

$$x = n^2 + n + 17$$

za číslo n postupně čísla $1, 2, 3, \ldots, 15$, dostaneme tyto výsledky:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
x	19	23	29	37	47	59	73	89	107	127	149	173	199	227	257

což jsou vesměs prvočísla (t. j. čísla, která jsou dělitelná pouze sama sebou a číslem 1). Mohli bychom být lehce svedeni k domněnce, že číslo x je prvočíslem pro každé n. To však není pravda, neboť na př. pro $n = 16$ dostaneme $x = 289 = 17 \,.\, 17$, což prvočíslem není.

Cvičení.

11. Vyšetřte, lze-li obrátit postup důkazů:

a) Je dána rovnice

$$3x - 5 = 3 - x.$$

K oběma jejím stranám přičteme číslo $5 + x$; tím dostaneme rovnici

$$4x = 8$$

a po krácení číslem 4 vyjde

$$x = 2.$$

b) Jsou dány rovnice

$$2x - 3y = 4,$$
$$x + 2y = 9.$$

Obě strany první rovnice znásobíme dvěma, obě strany druhé rovnice násobíme třemi. Vzniklé rovnice sečteme, čímž dostaneme

$$7x = 35$$

a po krácení číslem 7 máme

$$x = 5.$$

12. Nalezněte chybu v tomto „důkaze“: Písmena a, b značí dvě čísla, která vyhovují rovnici

$$2a = 3b.$$

K oběma jejím stranám přičteme číslo $2a - 6b$; tím dostaneme rovnici

$$4a - 6b = 2a - 3b$$

čili

$$2(2a - 3b) = 2a - 3b$$

a po krácení číslem $2a - 3b$ vyjde

$$2 = 1.$$

13. Vyšetřte, lze-li obrátit postup důkazu věty: „Jestliže celá čísla a, b dávají při dělení devíti zbytky z_1, z_2 a byla-li správně vypočtena čísla $a + b$, $a - b$, ab, pak tato čísla dávají při dělení devíti tytéž zbytky, které dávají čísla $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 z_2$“ (devítková zkouška). Příklad: čísla 123 a 76 dávají při dělení devíti zbytky 6 a 4, čísla $123 + 76 = 199$, $123 - 76 = 47$, $123 . 76 = 9348$ dávají při dělení devíti zbytky 1, 2, 6 a čísla $6 + 4 = 10$, $6 - 4 = 2$, $6 . 4 = 24$ dávají tytéž zbytky 1, 2, 6. — Důkaz vyslovené věty je tento: Dávají-li čísla a, b při dělení devíti zbytky z_1, z_2, platí $a = 9x + z_1$, $b = 9y + z_2$, kde x a y jsou čísla celá. Dává-li číslo $a + b$ zbytek z, je $a + b = 9u + z$, kde u je rovněž celé. Dosadíme-li sem za a, b, máme $9x + z_1 + 9y + z_2 = 9u + z$ a odtud vypočteme $z_1 + z_2 = 9(u - x - y) + z$. Podobně pro rozdíl $a - b$ a součin ab.

14. Dokažte větu: „Je-li trojúhelník rovnoramenný, má dvě výšky stejně dlouhé“. Lze důkaz (a tedy i větu) obrátit? — Daný trojúhelník ABC měj strany $\overline{AC} = \overline{BC}$; paty kolmic spuštěných z bodů A, B na protější strany označme A_1, B_1. Všimněte si trojúhelníků AA_1C, BB_1C.

15. Číslo (celé a kladné), které se dá psát jako součin jiných dvou (celých a kladných) čísel, z nichž žádné není rovno jedné, se jmenuje číslo **složené**. Číslo, které se takto psáti nedá, jmenuje se **prvočíslo**. Na příklad číslo $12 = 4 . 3$ je složené, číslo 13 je prvočíslo. Číslo 4 se jmenuje **dělitelem** čísla 12. Proveďte nepřímý důkaz věty: „Nejmenší dělitel každého složeného čísla, který je větší než 1, je prvočíslem“.

16. Proveďte nepřímý důkaz věty: „Rovnici $ax = b$ při $a \neq 0$ vyhovuje jediné číslo x“. Jak by tomu bylo, kdyby $a = 0$?

17. Proveďte nepřímý důkaz věty: „Leží-li body A, B v téže polorovině vyťaté přímkou p a sestrojíme-li bod A' souměrný k bodu A podle přímky p, pak ze všech bodů přímky p má její průsečík M s přímkou $A'B$ nejmenší součet vzdáleností od bodů A, B.“

18. A_1, A_2, A_3 jsou tři výroky, které se navzájem vylučují (t. j. platí-li kterýkoli z nich, nemůže platit žádný z ostatních) a vyčerpávají všecky možnosti. Podobně B_1, B_2, B_3 jsou tři jiné výroky týchž vlastností. Platí-li současně implikace

$$A_1 \Rightarrow B_1, \quad A_2 \Rightarrow B_2, \quad A_3 \Rightarrow B_3,$$

platí také implikace

$$B_1 \Rightarrow A_1, \quad B_2 \Rightarrow A_2, \quad B_3 \Rightarrow A_3.$$

Dokažte a demonstrujte to na příkladě: „Má-li přímka od středu kružnice vzdálenost menší než poloměr, protíná ji ve dvou bodech; má-li od středu kružnice vzdálenost rovnou poloměru, protíná ji v jediném bodě; má-li od středu kružnice vzdálenost větší než poloměr, neprotíná ji“.

19. Úplnou indukcí dokažte, že

a) součin dvou po sobě jdoucích čísel celých je vždy dělitelný dvěma;

b) součin tří po sobě jdoucích čísel celých je vždy dělitelný šesti;

c) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$.

20. Úplnou indukcí dokažte věty:

a) n přímek v rovině, z nichž žádné dvě nejsou rovnoběžné a žádné tři neprocházejí týmž bodem, má $\frac{1}{2}n(n + 1)$ průsečíků;

b) n bodů v rovině, z nichž žádné tři neleží na téže přímce, lze spojiti $\frac{1}{2}n(n + 1)$ přímkami;

c) každá strana n-úhelníka je menší než součet ostatních.

OBSAH

Spisovatel *Dr Karel Hruša*

Název díla *Logický podklad matematických úsudků*

Kružnice *Brána k vědění, sv. 9.*

Redaktor sbírky *Vítězslav Jozífek.*

Šéfredaktor *Miroslav Střída.*

Stran 40 a 6 obrazců. Náklad 5 500 výtisků. Vydání 1.

46 912/50/III. Sazba 7. VII. 1950. Tisk 23. X. 1950.

Vytiskly *Středočeské tiskárny, n. p., závod 07, Prometheus, Praha 8.*

Vysazeno písmem Extended. Všeobecná daň 1%. Cena brož. 11 Kčs.