# Pythagorova věta

Brána k vědění

STANISLAV HORÁK

# PYTHAGOROVA VĚTA

Jč
m+f

SVAZEK 5

STANISLAV HORÁK

# PYTHAGOROVA VĚTA

Jč
m+f

JEDNOTA ČESKOSLOVENSKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ

# ÚVOD

*Pythagorova věta*,*) která udává vztah mezi přeponou a oběma odvěsnami, byla známa ve speciálním tvaru již delší dobu před Pythagorem. Staří Indové používali k vytyčování pravých úhlů v přírodě trojúhelníku pravoúhlého, majícího délky stran 5, 12, 13 jednotek. V Egyptě se k témuž účelu používalo trojúhelníku o stranách 3, 4, 5 jednotek. Tento trojúhelník jako pravoúhlý byl známý dávno před Pythagorem i Číňanům. Vědělo se tedy, že trojúhelníky o těchto stranách jsou pravoúhlé a tu můžeme takřka s určitostí předpokládati, že již tenkrát si povšimli toho, že o číslech vyjadřujících délky stran těchto pravoúhlých trojúhelníků platí tyto rovnice: $5^2 = 3^2 + 4^2$ a $13^2 = 12^2 + 5^2$. Jakmile si však toto uvědomili, tím již vlastně znali speciální P. v. Přimyslíme-li si ještě, jak snadno se odvodí platnost této věty pro pravoúhlý trojúhelník rovnoramenný (viz obr. 11), vidíme, že tím vším byla již připravena půda pro důkaz věty platící o každém trojúhelníku pravoúhlém a bylo jen otázkou času, kdy bude důkaz proveden. Ten se podařilo provésti Pythagorovi nebo, a to se zdá býti pravděpodobnější, některému z jeho žáků.

Pythagoras pocházel z ostrova Samos a žil asi v létech 580—508 př. Kr. Za svého mládí podnikl pravděpodobně — jak bylo u tehdejších řeckých filosofů zvykem — cestu do Egypta a Mesopotamie. Později se přestěhoval do jižní Italie, kde měli Řekové své osady, a zde v Krotonu založil svou slavnou školu. Jeho žáci, jimž říkáme Pythagorejci, žili pohromadě a řídili se různými přísnými předpisy, které nám v mnohém připomínají pozdější život v klášteřích. Mimo jiné byli vegetariány, dodržovali celibát a všichni se stejným způsobem odívali. Tato škola se však dlouho neudržela. Všichni prý byli i se svým mistrem vyvražděni. Byla později opět vzkříšena a stoupencům jejím říkáme Novopythagorejci.

Pythagoras sám ničeho nenapsal a proto je nyní velmi těžké rozhodnouti, co z učení Pythagorejců máme přiřknouti Pythagorovi sa-

*) Pro stručnost budeme prostě psáti P. v. nebo v. P.

mému a co jeho žákům. Proto nevíme také, komu vděčíme za důkaz slavné P. v. Pythagoras byl však tak vynikající zjev, že si zaslouží opravdu, aby věta, k jejímuž důkazu přispěl aspoň nepřímo založením proslulé školy, nesla jeho jméno.

Svědčí o hloubavém duchu starých Řeků, že se nespokojili s provedením důkazu P. v., ale položili si hned další úlohu: Najíti všechny pravoúhlé trojúhelníky, jejichž délky stran jsou vyjádřeny čísly celými. (Takovýmto trojúhelníkům říkáme teď trojúhelníky pythagorské.) Nebylo to právě náhodné, že si tento problém položili, neboť dva takové trojúhelníky byly známé z doby před provedením důkazu P. v. a přímo se vnucovala otázka po existenci dalších takových trojúhelníků, a pak Pythagorejci se zabývali jen čísly celými a jejich poměry. To, jak uvedený problém rozluštili, musí v každém vzbuditi úctu i obdiv. Osvětleme si poněkud přesněji, oč v podstatě jde. Jestliže označíme odvěsny $x$, $y$ a přeponu $z$, pak tu máme vlastně řešiti čísly celými neurčitou rovnici $x^2 + y^2 = z^2$. Pythagorejci nalezli toto řešení: $x = 2a + 1$, $y = 2a^2 + 2a$, $z = 2a^2 + 2a + 1$, kde za $a$ můžeme dosaditi jakékoliv číslo celé, kladné. Přesto, že v těchto vzorcích nejsou obsažena všechna řešení neurčité rovnice (nemůžeme z nich na př. dostati řešení 8, 15, 17), musíme uznati, že tím podali výkon na tehdejší dobu pozoruhodný. Touto úlohou se později zabýval i známý řecký filosof Platon (žil 427—347 př. Kr.) a nalezl toto řešení: $x = a^2 - 1$, $y = 2a$, $z = a^2 + 1$. Tyto vzorce jsou proti dřívějším mnohem jednodušší a podobají se vzorcům uváděným v moderní theorii čísel: $x = a^2 - b^2$, $y = 2ab$, $z = a^2 + b^2$. Ale ani Platonovy vzorce nezachycují všechna řešení, neboť v nich není na př. obsaženo řešení 7, 24, 25.*)

V době soumraku celé starověké kultury se na matematickém nebi zaskvělo několik hvězd a jednou z nich byl Diofant. Ten si položil tuto úlohu: Mezi pythagorejskými trojúhelníky najíti dva, jež mají tutéž přeponu. Vyjádříme-li daný požadavek rovnicemi, vidíme, že tu běží o řešení této soustavy neurčitých rovnic: $x^2 + y^2 = z^2$, $u^2 + v^2 = z^2$. Diofant tuto soustavu velmi elegantně a elementárně rozřešil a na zá-

*) Bližší poučení o těchto i jiných neurčitých rovnicích najde čtenář v knížce Jan Vyšín, *Neurčité rovnice,* která vyšla rovněž v této sbírce.

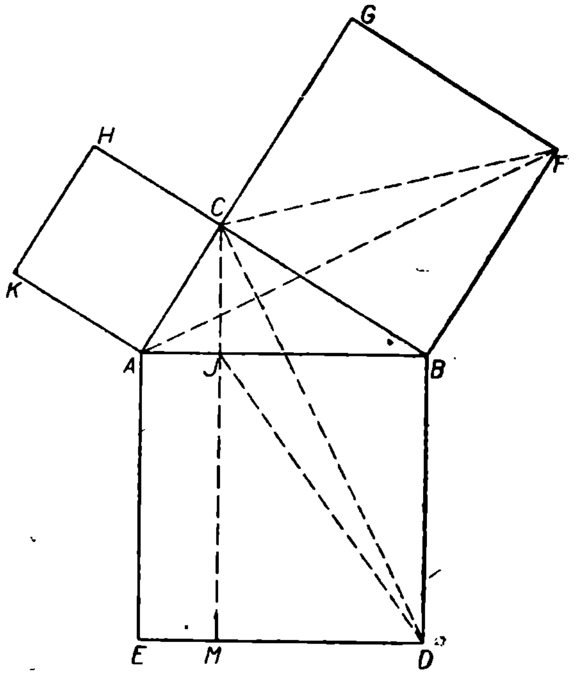
kladě řešení ukázal, že existuje nesčíslně mnoho dvojic takových trojúhelníků.

Tím vším však zájem o v. P. a o problémy s ní související nijak neutuchl a matematikové se znovu k ní vraceli, vymýšleli pro ni nové a nové důkazy a snažili se ji zobecnit. A tak máme již asi 50 důkazů P. v. a několikeré její zobecnění, a to vše svědčí o jejím velikém významu. Geometrie bez P. v. je vůbec nemyslitelná.

# I. DŮKAZ VĚTY PYTHAGOROVY

A) *Euklidův důkaz P. v.* (*Důkaz proměnou ploch.*) Tento důkaz se opírá o větu:

Dva trojúhelníky si jsou rovny (t. j. mají tentýž obsah), jestliže se shodují v jedné straně a k ní příslušné výšce.




Obr. 1.

V obr. 1 je $ABC$ pravoúhlý trojúhelník a nad jeho stranami jsou sestrojeny čtverce $BFGC$, $ACHK$, $AEDB$. Vrchol $C$ spojme s bodem $D$ a vrchol $A$ s bodem $F$. Výška pravoúhlého trojúhelníka rozdělí čtverec nad přeponou na obdélníky $AEMJ$, $BJMD$. Ve čtverci $BFGC$ narýsujme posléze úhlopříčku $CF$. Nyní platí

$$ABF \cong DBC, \text{ neboť } \overline{AB} = \overline{DB},\ \overline{BF} = \overline{BC},$$
$$\sphericalangle ABF = 90^\circ + \beta = \sphericalangle DBC.$$

Všimněme si, že podle prve vyslovené věty o rovnosti dvou trojúhelníků je

$$DBC = DBJ \text{ a též } BFA \doteq BFC \text{ a tudíž } DBJ = BFC.$$

Ale $DBJ = \frac{1}{2}MDBJ$ a podobně $BFC = \frac{1}{2}BFGC$ a proto $MDBJ = BFGC$.

K tomuto výsledku můžeme připojiti jiný, který by se odvodil úplně stejným postupem: $EMJA = ACHK$. Sečtením obou těchto částečných výsledků obdržíme

$$AEDB = BFGC + ACHK.$$

Slovy vyjádřeno: *Čtverec nad přeponou pravoúhlého trojúhelníka rovná se součtu čtverců nad oběma odvěsnami.*

Rovnici vyjadřující P. v. můžeme dáti jednodušší a poněkud přehlednější tvar, jestliže zavedeme, jak je zvykem, toto označení: $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$. Pak dostaneme

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

což je obvyklý tvar P. v. psané rovnicí.

B) *Důkaz věty obrácené.* Nyní jsme si dokázali, že pro pravoúhlý trojúhelník platí P. v. Zbývá ještě dokázati, že tato věta platí jen a jen pro trojúhelník pravoúhlý (a žádný jiný).

Abychom si věc, o níž nám teď půjde, blíže vysvětlili, uvedu zde příklad. Zvláštní případ čtyrúhelníku je lichoběžník rovnoramenný, a tomu můžeme opsati kružnici. Nyní je otázka: Můžeme opsati kružnici jen lichoběžníku rovnoramennému a žádnému jinému čtyrúhelníku nebo existuje ještě nějaký, jistě že zvláštní čtyrúhelník, jemuž se dá taky kružnice opsat? V tomto případě je odpověď snadná, neboť víme, že kružnice se dá opsati každému čtyrúhelníku tětivovému. Máme-li tedy čtyrúhelník, jemuž lze kružnici opsati, nemůžeme tvrditi, že tento čtyrúhelník je rovnoramenný lichoběžník.

A tatáž otázka se naskýtá i zde. Platí P. v. jen pro trojúhelník pravoúhlý nebo existuje ještě nějaký, jistě, že zvláštní trojúhelník, pro nějž tato věta platí? Jinak řečeno, máme-li trojúhelník, o němž platí P. v., můžeme se odvážiti tvrzení, že to je trojúhelník pravoúhlý?

My si v dalším ukážeme, že P. v. platí vskutku jen pro trojúhelník pravoúhlý a žádný jiný.

Jestliže máme nějaký trojúhelník, pak úhel $\gamma$, ležící proti straně $c$, může býti buď ostrý nebo tupý a nebo pravý. V tomto posledním případě platí o stranách trojúhelníka P. v. Všimněme si nyní blíže prvních dvou případů.

1. $\gamma < 90°$. Zde musíme rozlišovati 2 různé případy: $\gamma$ není v daném trojúhelníku úhel největší a $\gamma$ je v daném trojúhelníku úhel největší.

a) $\gamma < 90°$ a není v trojúhelníku úhlem největším. Největším úhlem je pak jiný úhel třebas $\alpha$. Poněvadž $\gamma < \alpha$, musí platiti

$$c < a \quad \text{čili} \quad c^2 < a^2$$

a tím spíše platí

$$c^2 < a^2 + b^2.$$

b) $\gamma < 90°$ a je to zároveň největší úhel v daném trojúhelníku. Potom výška jdoucí vrcholem $B$ (obr. 2a) rozdělí trojúhelník na 2 trojúhelníky pravoúhlé, pro něž platí P. v. Označme tuto výšku $x$ a úsek na straně $b$ přilehlý straně $a$ označme $y$. I platí

$$x < a \quad \text{a též} \quad y < b$$

čili

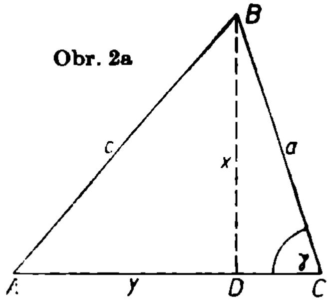
$$x^2 < a^2 \quad \text{a též} \quad y^2 < b^2.$$

Sečtením obou těchto nerovnin dostaneme $x^2 + y^2 < a^2 + b^2$ čili

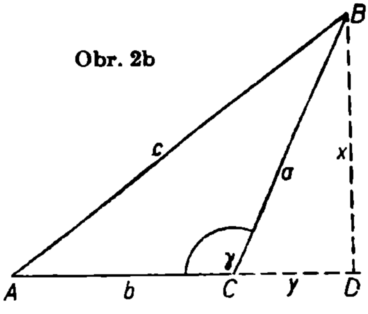
$$c^2 < a^2 + b^2,$$

neboť $x^2 + y^2 = c^2$. Vidíme, že o straně $c$ platí nerovnost $c^2 < a^2 + b^2$ vždy, jakmile úhel $\gamma < 90°$.

Obr. 2a




Obr. 2b



2. Předpokládejme nyní, že $\gamma > 90°$ (obr. 2b). Spusťme opět s vrcholu $B$ výšku, kterou označíme $x$ a vzdálenost její paty od vrcholu $C$ označme $y$. Tu platí

$$c^2 = x^2 + (b + y)^2.$$

Na pravé straně této rovnice po povýšení můžeme vynechati člen $2by$ a obdržíme pak tuto nerovnost

$$c^2 > x^2 + y^2 + b^2.$$

Ale to můžeme psáti v tvaru

$$c^2 > a^2 + b^2,$$

neboť $a^2 = x^2 + y^2$. Tím jsme vlastně dokázali, že pro stranu $c$, která je protilehlá tupému úhlu $\gamma$ platí $c^2 > a^2 + b^2$.

Nyní si zopakujme výsledky, k nimž jsme až dosud dospěli. Dokázali jsme, jestliže

$$\begin{aligned} \gamma &= 90°, \text{ platí } c^2 = a^2 + b^2, \\ \gamma &< 90°, \text{ platí } c^2 < a^2 + b^2, \\ \gamma &> 90°, \text{ platí } c^2 > a^2 + b^2. \end{aligned}$$

Jiný případ již nastat nemůže a proto *P. v. platí vskutku jen a jen pro trojúhelník pravoúhlý.*

## 2. ROZŠÍŘENÍ PYTHAGOROVY VĚTY

a) V následujícím budeme potřebovati tuto větu:

*Pravidelný n-úhelník je jednoznačně určen jedním prvkem.*

Nejprve si ukážeme, že tato věta platí, je-li určovacím prvkem poloměr kružnice opsané. Spojíme-li totiž jednotlivé vrcholy pravidelného $n$-úhelníka se středem kružnice opsané, rozdělí se $n$-úhelník na $n$ shodných středových trojúhelníků. Jejich úhel při středu je $\frac{4R}{n}$. Je-li tedy pravidelný $n$-úhelník dán poloměrem kružnice opsané, rozdělíme plný úhel při středu jejím na $n$ stejných dílů. Ramena těchto úhlů nám vytnou na kružnici vrcholy žádaného $n$-úhelníku.

Je-li dán pravidelný $n$-úhelník jiným určovacím prvkem, sestrojíme nejprve podle předešlého libovolný pomocný pravidelný $n$-úhelník a pak pomocí podobnosti $n$-úhelník hledaný.

Pro nás má právě dokázaná věta ten význam, že z ní vyplývá, že pravidelný $n$-úhelník je jednoznačně určen svou stranou $a_n$. Potom však jeho obsah $P_n$ je přímo úměrný čtverci této strany, t. j.

$$P_n = k_n \cdot a_n^2,$$

kde $k_n$ je nějaké číslo závislé pouze na $n$ a nikoliv na délce strany $a_n$. Tak na příklad:

$$P_3 = a_3^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \qquad \text{tudíž } k_3 = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$P_4 = a_4^2 \qquad \text{tudíž } k_4 = 1,$$

$$P_6 = a_6^2 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} \qquad \text{tudíž } k_6 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ atd.}$$

b) Toho všeho použijeme nyní k rozšíření P. v. Rovnici

$$c^2 = a^2 + b^2$$

znásobme číslem $k_n$, čímž obdržíme

$$k_n c^2 = k_n a^2 + k_n b^2.$$

Ale výrazy $k_n c^2$, $k_n a^2$, $k_n b^2$ nám vlastně představují obsahy pravidelných $n$-úhelníků o stranách $c$, $a$, $b$, jež jsou mezi sebou podobné. Tím jsme dospěli k rozšířené větě Pythagorově:

*Pravidelný n-úhelník nad přeponou rovná se součtu pravidelných n-úhelníků nad odvěsnami.*

c) Jinou zajímavou větu dostaneme, jestliže rovnici

$$c^2 = a^2 + b^2$$

znásobíme $\frac{1}{4}$ Ludolfova čísla. Dostaneme

$$\frac{\pi}{4} c^2 = \frac{\pi}{4} a^2 + \frac{\pi}{4} b^2.$$

Avšak součiny $\frac{\pi}{4} c^2$, $\frac{\pi}{4} a^2$, $\frac{\pi}{4} b^2$ jsou vlastně obsahy kruhů o poloměrech $\frac{1}{2}c$, $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}b$. Podle toho můžeme vysloviti větu, jež je novým rozšířením P. v.:

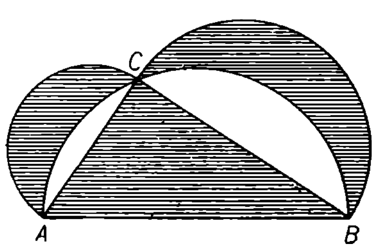
*Obsah kruhu opsaného nad přeponou jako nad průměrem je roven součtu obsahů obou kruhů podobně sestrojených nad oběma odvěsnami.*

d) Této věty použijeme v dalším. Staořečtí matematikové se po celá staletí snažili provésti kvadraturu kruhu. To je úloha sestrojiti čtverec (nebo jiný rovinný obrazec, který by se dal nějakým způsobem proměniti ve čtverec) téhož obsahu, jako má daný kruh. Teď již víme, že to je úloha neřešitelná. Označíme-li totiž poloměr kruhu $r$ a stranu hledaného čtverce $x$, musí platiti

$$x^2 = \pi r^2 \text{ čili } x = r\sqrt{\pi},$$

kde $\pi$ je Ludolfovo číslo. O tomto čísle však teď víme, že se nedá narýsovati úsečka, jejíž délka by byla $\pi$ cm. Můžeme narýsovati úsečku, jejíž délka je vyjádřena číslem velmi blízkým Ludolfovu číslu, ale naprosto přesně znázorniti toto číslo úsečkou nemůžeme. Neumíme-li sestrojiti tuto délku, tím více nám bude působiti obtíží sestrojení úsečky $\sqrt{\pi}$.

O této nesnázi však staořečtí matematikové neměli tušení a zabývali se kvadraturou kruhu velmi úsilovně. Při tom Hippokrates (pocházel z ostrova Chios a žil v 2. polovici V. st. př. Kr.) přišel na zajímavou věc, a tu si nyní vyložíme.



Obr. 3

Nad přeponou i nad odvěsnami pravoúhlého trojúhelníku sestrojme půlkružnice tak, jak je znázorněno v obr. 3. Tak vzniknou dva obrazce tvaru měsíčků (na obr. jsou vyšrafovány) a říká se jim měsíčky Hippokratovy. Součet jejich obsahů vypočteme tak, že k obsahu trojúhelníka přičteme obsahy obou polokruhů nad odvěsnami a vzniklý součet zmenšíme o obsah polokruhu nad přeponou. Početně:

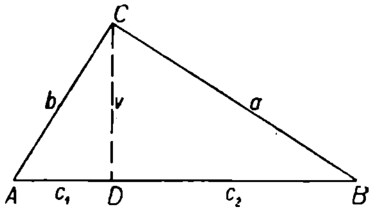
$$M = \frac{a \,.\, b}{2} + \frac{\pi a^2}{8} + \frac{\pi b^2}{8} - \frac{\pi c^2}{8}.$$

Poslední trojčlen v tomto výrazu je podle poslední věty roven nule a výsledek je $M = \frac{1}{2}a \,.\, b$. To je však obsah daného trojúhelníka. Hippokratovi se tudíž podařila kvadratura dvou měsíčků. Je zcela pochopitelné, že Hippokrates byl tímto objevem mile překvapen a že si od toho velmi sliboval pro hlavní problém, kvadraturu kruhu.

## 3. VĚTY EUKLIDOVY

a) V pravoúhlém trojúhelníku $ABC$ sestrojme výšku $v = \overline{CD}$. Ta nám náš trojúhelník rozdělí na dva trojúhelníky pravoúhlé. Pro trojúhelník $ACD$ platí věta Pythagorova (obr. 4):

$$c_1^2 = b^2 - v^2.$$



Obr. 4

Pro obsah pravoúhlého trojúhelníka platí dva vzorce

$$P = \frac{ab}{2} = \frac{cv}{2},$$

z čehož plyne $v = \dfrac{a\,.\,b}{c}$. Dosadíme-li tuto hodnotu do předchozí rovnice, dostaneme po úpravě $c_1^2 = \dfrac{b^4}{c^2}$. Zbavíme-li se zlomku a odmocníme, dospějeme k rovnici

$$c_1c = b^2.$$

(Rovnice $c_1c = -b^2$ nemá zde významu.) Toto je již Euklidova věta o odvěsně, které také říkáme 1. věta Euklidova. Vyjádříme ji slovy:

*Čtverec nad odvěsnou rovná se obdélníku sestrojenému z přepony a přilehlého úseku.*

b) Z obrázku snadno vyčteme, že platí tyto rovnice:

$$c_1^2 = b^2 - v^2,$$
$$c_2^2 = a^2 - v^2.$$

Jejich sečtením dojdeme k rovnici

$$c_1^2 + c_2^2 = a^2 + b^2 - 2v^2,$$

kterou můžeme takto upraviti

$$(c_1 + c_2)^2 - 2c_1c_2 = c^2 - 2v^2$$

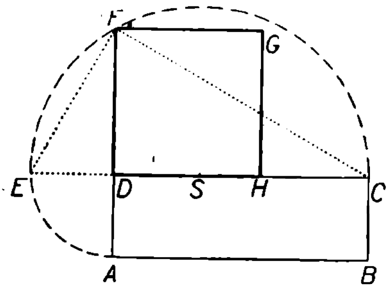
čili

$$c_1c_2 = v^2.$$

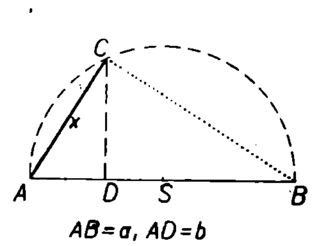
Tak jsme dospěli k Euklidově větě o výšce (t. zv. 2. E. v.), jež vyjádřena slovy zní:

*Čtverec nad výškou pravoúhlého trojúhelníka rovná se obdélníku sestrojenému z obou úseků přepony.*

c) Vět Euklidových se používá v 1. řadě k proměně obdélníka na čtverec. V obr. 5a je tato úloha provedena na základě 2. E. v. Obdélník $ABCD$ je dán, čtverec $DFGH$ je výsledek. Jakýsi „most“ mezi daným a výsledkem je pravoúhlý trojúhelník $ECF$, jenž je určen svými úseky na přeponě (jsou rovny stranám daného obdélníka). Tedy přepona $\overline{EC} = \overline{AD} + \overline{DC}$. K určení 3. vrcholu použijeme známé věty o obvodovém úhlu nad průměrem (věta Thaletova).




Obr. 5a




Obr. 5b

Jiné užití E. v. spočívá v grafickém určení 3. měřické úměrné. Mějme na př. sestrojiti úsečku $x = \sqrt{ab}$. V obr. 5b je řešení provedeno pomocí 1. E. v. Je tam sestrojen pravoúhlý trojúhelník, jehož přepona je rovna délce $a$ a jeden úsek na ní je roven $b$. Odvěsna $\overline{AC}$ pravoúhlého trojúhelníka, jehož 3. vrchol je sestrojen opět pomocí Thaletovy věty, přilehlá k danému úseku, je hledaná délka $x$.

d) Ukázali jsme si, že E. v. se dají odvoditi z P. v., ale dají se též odvoditi přímo. P. v., která se může odvoditi přímo (viz na př. cvič. 4 a 5) se dá vyvoditi z E. v. Tímto způsobem byla P. v. vlastně dokázána v textu, ale pro zopakování uvedu tentýž důkaz početně. Podle E. v. platí

$$a^2 = c \,.\, c_2,$$
$$b^2 = c \,.\, c_1.$$

Sečtením obou těchto rovnic obdržíme P. v.

Zopakujme si nyní, co víme o důkazech těchto vět. Na jedné straně máme větu Euklidovu a na druhé větu Pythagorovu. O nich víme toto:

1. E. v. se dají odvoditi přímo, t. j. bez znalosti P. v. a P. v. se dá též odvoditi přímo, t. j. bez znalosti E. v.

2. Když už známe E. v., můžeme z nich vyvoditi P. v. a obráceně ze znalosti P. v. plyne platnost E. v.

Tyto vlastnosti jsou stručně vyjádřeny větou:

P. v. je rovnocenná (ekvivalentní) větám E. a obráceně, každá E. v. je rovnocenná P. v.

Prakticky to znamená, že bychom v geometrii vystačili s jedinou z těchto tří vět, ale mnohé úlohy by pak vyžadovaly při řešení velmi umělých obratů a proto používáme vět všech.

## 4. POUŽITÍ PYTHAGOROVY VĚTY

1. Jsou dány 4 čtverce o stranách $a$, $b$, $c$, $d$. Sestrojte nový čtverec o straně $x$ tak, aby jeho obsah $x^2 = a^2 + b^2 + c^2 - d^2$.

Sestrojíme nejprve čtverec o straně $y$, která je dána rovnicí $y^2 = a^2 + b^2$. To je bezprostřední aplikace P. v. Sestrojíme totiž pravoúhlý trojúhelník o odvěsnách $a$, $b$ a přepona je $y$. Potom úplně stejným způsobem sestrojíme čtverec $z^2 = y^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2$. Nakonec sestrojíme $x^2 = z^2 - d^2 = a^2 + b^2 + c^2 - d^2$. Stane se tak pomocí pravoúhlého trojúhelníka daného přeponou $z$ a odvěsnou $d$. Druhá odvěsna je pak strana hledaného čtverce.

2. Délky stran trojúhelníka jsou a) 33, 56, 67; b) 28, 45, 51; c) 48, 55, 73. Rozhodněte, zda trojúhelník je ostroúhlý, pravoúhlý či tupoúhlý.

Jestliže trojúhelník má úhel pravý, pak musí ležeti proti nejdelší straně. (Proč?) Tuto nejdelší stranu označíme $c$, zbývající 2 strany budou $a$, $b$.

a) $c^2 = 67^2 = 4489$, $a^2 + b^2 = 4225$.

Tudíž $c^2 > a^2 + b^2$ a trojúhelník je tupoúhlý.

b) $c^2 = 2601$, $a^2 + b^2 = 2809$.

Poznáváme, že $c^2 < a^2 + b^2$ a trojúhelník je ostroúhlý.

c) $c^2 = 5329$, $a^2 + b^2 = 5329$ a trojúhelník je pravoúhlý, neboť $c^2 = a^2 + b^2$.

Nejčastěji se však používá P. v. k vypočítávání délek. Některé výsledky takto získané si pak musíme pamatovati jako vzorce. Pro zopakování si je souhrnně napíšeme:

úhlopříčka čtverce $e = a\sqrt{2}$,
výška rovnostranného trojúhelníku $v = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$,
tělesová úhlopříčka kvádru $u = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$,
tělesová úhlopříčka krychle $u = a\sqrt{3}$.

Na následujících příkladech si teď ukážeme, jak se dá P. v. použíti v případech jiných.

3. Je dán obsah $P$ a strana $a$ kosočtverce; vypočtěte jeho úhlopříčky $e, f$.

Poněvadž se úhlopříčky kolmo půlí, platí

$$a^2 = (\tfrac{1}{2}e)^2 + (\tfrac{1}{2}f)^2$$

a k tomu připíšeme vzorec pro obsah kosočtverce

$$P = \tfrac{1}{2}ef.$$

Rovnice přepíšeme na tvar

$$e^2 + f^2 = 4a^2,$$
$$2ef = 4P.$$

Sečtením obou rovnic a odmocněním:

$$e + f = 2\sqrt{a^2 + P}.$$

Poněvadž nám jde o délky úhlopříček, můžeme vzíti odmocninu kladně. Podobně odečtením a odmocněním

$$e - f = \pm\, 2\sqrt{a^2 - P}.$$

Z těchto dvou rovnic snadno dostaneme

$$e = \sqrt{a^2 + P} \pm \sqrt{a^2 - P},$$
$$f = \sqrt{a^2 + P} \mp \sqrt{a^2 - P}.$$

Vidíme, že úloha je možná, jen když $a^2 \geqq P$.

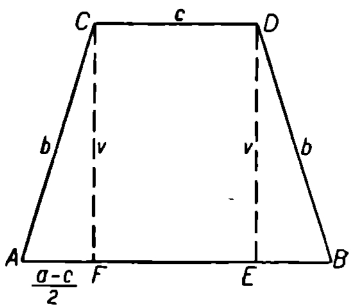
4. V lichoběžníku rovnoramenném jsou dány obě základny $a, c$ a rameno $b$. Vypočtěte jeho obsah.

Z vrcholů $C, D$ (obr. 6) spusťme kolmice na dolní základnu. Tím se celý lichoběžník rozdělí na obdélník $CDEF$ a 2 shodné trojúhelníky pravoúhlé $AFC$, $BED$. Platí pro ně tedy P. v., t. j.

$$b^2 = v^2 + \tfrac{1}{4}(a - c)^2.$$

Odtud se dá vypočísti výška a pak žádaný obsah.

Poznámka. Podobně se dá vypočítati výška i v lichoběžníku pravoúhlém.



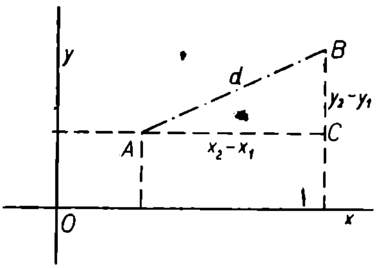
Obr. 6

5. V pravoúhlé soustavě sou-

řadnicové o osách $x, y$ jsou dány 2 body $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$. Vypočtěte jejich vzdálenost.

Danými body veďme rovnoběžky s osami, jak je narýsováno v obr. 7 a tím nám vznikne pravoúhlý trojúhelník $ABC$ o odvěsnách $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$; přepona je hledaná délka $d$. Podle P. v. máme hned

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$




Obr. 7

Jak se změní tento vzorec, jestliže bod $A$ leží v počátku souřadnic?

6. Vypočísti délku tětivy v elipse, která kolmo půlí vedlejší poloosu. (Poloosa hlavní je $a$, vedlejší $b$, lin. výstřednost $e$.)

Hledanou tětivu označme $\overline{MN} = 2x$ (obr. 8), průvodiče bodu $M$ označme $y = \overline{F_1M}$, $\overline{F_2M} = 2a - y$, délka kolmice spuštěné z bodu $M$ na hlavní osu $\overline{MP} = \frac{1}{2}b$, úsečka $\overline{SP} = x$. Z obrázku vidíme, že tam jsou 2 pravoúhlé trojúhelníky $F_1PM$ o stranách $y$, $x - e$, $\frac{1}{2}b$ a trojúhelník $F_2PM$ o stranách $2a - y$, $x + e$, $\frac{1}{2}b$. Pro ně platí P. v.:

$$y^2 = \tfrac{1}{4}b^2 + (x - e)^2,$$
$$(2a - y)^2 = \tfrac{1}{4}b^2 + (x + e)^2.$$

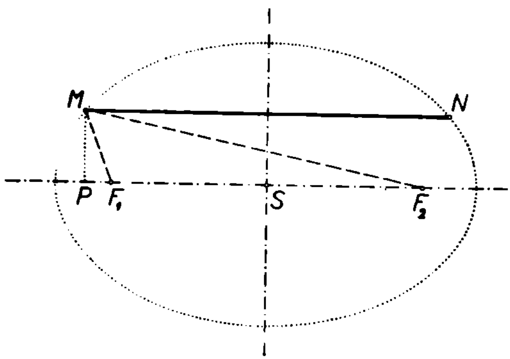
Odečtením obou rovnic přijdeme k rovnici

$$ex + ay = a^2.$$

Z ní vypočteme $y$ a dosadíme do některé z prvních dvou rovnic a obdržíme

$$x = \tfrac{1}{2}a\sqrt{3}.$$

Tětiva má pak délku dvojnásobnou.

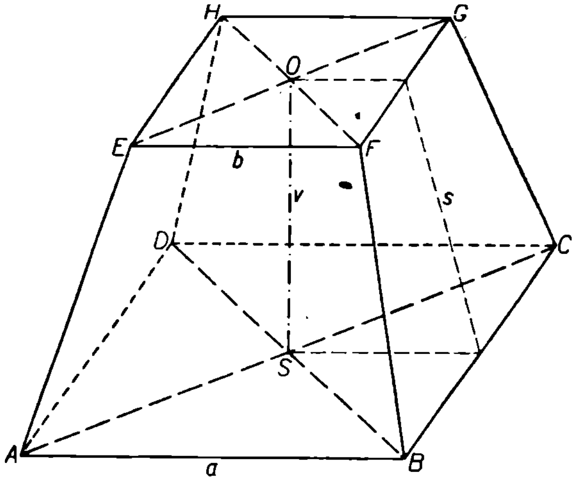



Obr. 8

7. Povrch pravidelného komolého jehlanu čtyrbokého je 8640 cm², výška je 21 cm a hrany podstavné jsou v poměru 3 : 1. Vypočtěte délky podstavných hran a objem tělesa.

Hranu dolní podstavy označme $a$, horní podstavy $b$, výšku tělesa $v$ a výšku stěnovou $s$. Pak platí (obr. 9)

$$a^2 + b^2 + 2s(a + b) = 8640,$$
$$s^2 = 21^2 + \tfrac{1}{4}(a - b)^2 \text{ (je to P. v.)},$$
$$a = 3k,\ b = k.$$




Obr. 9

Vyloučíme-li z těchto 4 rovnic neznámé $a$, $b$, $s$, dojdeme k rovnici

$$k^4 - 5584k^2 + 1440^2 = 0.$$

Z ní již snadno dostaneme

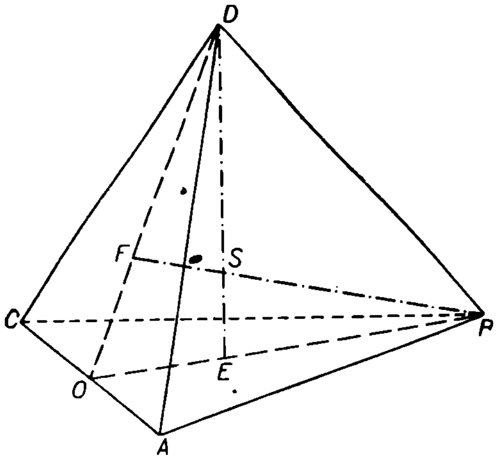
$$k_{1,2} = \sqrt{5184} = \pm\ 72,$$
$$k_{3,4} = \sqrt{400} = \pm\ 20.$$

Záporné kořeny nemají v našem případě význam a kořen $+72$ nevyhovuje, jak se můžeme přesvědčiti, vypočteme-li na základě této hodnoty povrch tělesa. I zbývá jedině kořen $k = +\ 20$. Potom $a = 60$ cm, $b = 20$ cm, a objem $V = 36\,400\ \text{cm}^3$.

8. Vypočtěte poloměr koule a) vepsané, b) opsané pravidelnému čtyrstěnu o hraně $a$.

Tělesná výška $\overline{ED} = v$ čtyrstěnu se skládá ze dvou částí (obr. 10): z poloměru koule vepsané $\varrho = \overline{ES}$ a z poloměru koule opsané $r = \overline{SD}$. Tedy

$$v = r + \varrho. \tag{1}$$




Obr. 10

Ale $v$ můžeme vypočítati pomocí P. v. z pravoúhlého trojúhelníku $BED$, v němž $\overline{BD} = a$, $\overline{BE} = \frac{2}{3}\overline{BO} = \frac{1}{3}a\sqrt{3}$. Tudíž

$$v^2 = \tfrac{2}{3}a^2.$$

Nyní můžeme na pravoúhlý trojúhelník $BES$ použíti P. v. ($\overline{BS} = r$, $\overline{SE} = \varrho$, $\overline{BE} = \frac{1}{3}a\sqrt{3}$):

$$r^2 = \varrho^2 + (\tfrac{1}{3}a\sqrt{3})^2.$$

Použijeme-li dále rovnice (1), pak po kratším výpočtu dojdeme k výsledku

$$\varrho = \tfrac{1}{12}a\sqrt{6},\quad r = v - \varrho = \tfrac{1}{4}a\sqrt{6} = 3\varrho.$$

## 5. DOSLOV

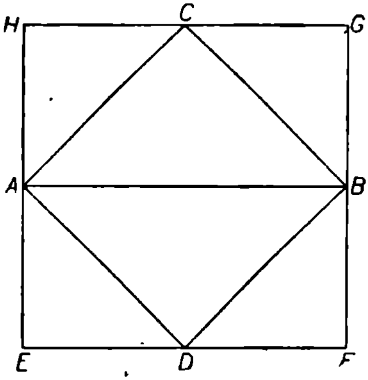
Na několika příkladech jsme si ukázali, jak lze použíti P. v. a v následujícím odstavci máte příležitost sami si ověřit její použitelnost a tím dokázat její důležitost. Tím však zdaleka nejsou vyčerpány všechny možnosti jejího použití. V goniometrii se ukazuje, že i zde P. v. nalézá své uplatnění. Tomu, kdo již něco z této části geometrie zná, chci připomenouti, že na př. vztahy $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$ jsou v podstatě P. větou. A ten, kdo zná aspoň základy diferenciálního počtu, ví, že diferenciál $\mathrm{d}s$ oblouku každé křivky je dán rovnicí $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2$, což je opět P. v.

Ale nejen to. Měli jsme, že vzdálenost $d$ dvou bodů v rovině je dána vzorcem $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, kde $x_1, y_1, x_2, y_2$ jsou souřadnice krajních bodů úsečky $d$. Když obráceně předpokládáme, že vzdálenost dvou bodů, jež jsou dány svými souřadnicemi $x_1, y_1; x_2, y_2$, je vyjádřena prve napsaným vzorcem, pak je to charakteristická známka té geometrie, kterou se zabýváme na našich školách i v běžné praxi (vyměřování pozemků a pod.). Této geometrii říkáme g. euklidovská. (Podrobnější rozbor by přesahoval rámec této knížky.) Tím ovšem se nám pak P. v. jeví jako jeden ze základních sloupů celé naší (euklidovské) geometrie.

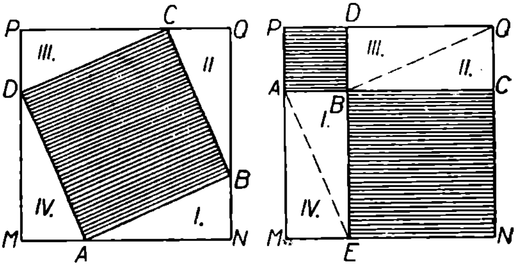
## 6. CVIČENÍ

**1.** Dokažte, že trojúhelníky o stranách a) $n$, $\frac{1}{2}n^2 - 1$, $\frac{1}{2}n^2 + 1$; b) $n$, $\frac{1}{2}(n^2 - 1)$, $\frac{1}{2}(n^2 + 1)$; c) $\sqrt{uv}$, $\frac{1}{2}(u - v)$, $\frac{1}{2}(u + v)$ jsou pravoúhlé. Jak musíte v případě c) voliti čísla $u$, $v$, aby trojúhelník byl pythagorejský?

**2.** Dokažte správnost těchto dvou tvrzení: a) 3 čísla pythagorejská obdržíme tak, že si jedno, liché, zvolíme a jeho čtverec vyjádříme jako součet 2 sčítanců lišících se o 1. Tyto 2 sčítance spolu se zvoleným číslem jsou pythagorejská čísla. b) 3 čísla pythagorejská obdržíme též tak, že si zvolíme číslo sudé a pak čtverec jeho poloviny zmenšený a zvětšený o 1 dávají spolu se zvoleným číslem čísla pythagorejská.



Obr. 11



Obr. 12

**3.** V obr. 11 je trojúhelník $ABC$ pravoúhlý a rovnoramenný. Nad jeho přeponou i nad odvěsnami jsou sestrojeny čtverce $EFGH$, $ADBC$. Rozkladem těchto na shodné trojúhelníky pravoúhlé, rovnoramenné dokažte platnost P. v. (Takřka samozřejmá platnost P. v. v tomto případě vedla kromě jiných důvodů Platona k tvrzení, že i otrok bez vzdělání může P. v. pochopiti.)

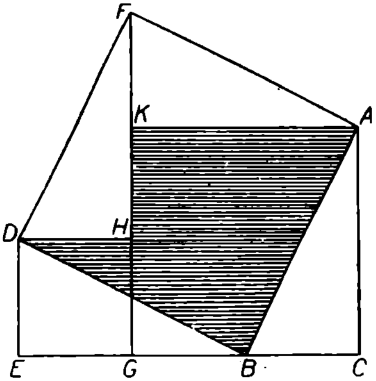
**4.** Od daného čtverce $MNQP$ oddělme dvěma různými způsoby 4 shodné pravoúhlé trojúhelníky tak, jak je naznačeno v obr. 12. Jednou nám zbude čtverec $ABCD$ nad přeponou, po druhé čtverce $ENCB$, $ABDP$ nad odvěsnami. Tak lze provésti důkaz P. v. Proveďte podrobně.

**5.** V obr. 13 jsou sestrojeny 2 shodné pravoúhlé trojúhelníky $ABC$, $BDE$ tak, že vrcholy $C$, $B$, $E$ leží v jedné přímce. Nad přeponami je sestrojen čtverec

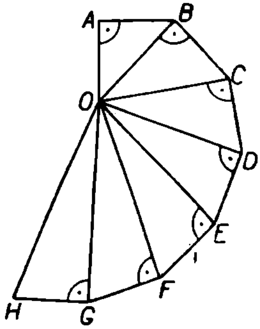
$ABDF$, nad odvěsnou $\overline{AC}$ prvního trojúhelníka je sestrojen čtverec $ACGK$ a nad odvěsnou $\overline{DE}$ druhého trojúhelníka je sestrojen čtverec $DEGH$. Dokažte, že a) přímka $GHK$ prochází vždy bodem $F$; b) $DHF \cong FKA \cong BCA$; c) posléze P. v., t. j. $ABDF = ACGK + DEGH$.

**6.** Zvolte si 4 libovolně dlouhé úsečky $a > b > c > d$ a sestrojte a) $x = \sqrt{a^2 + bc}$; b) $y = \sqrt{ab + bc + cd}$; c) $z = \sqrt{a^2 - bc + d^2}$. (Pomocí E. v. nahradíme součiny tvaru $bc$ čtvercem $u^2$.)

**7.** V obr. 14 jsou úsečky $\overline{OA}, \overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}, \ldots$ stejně dlouhé a úhly vyznačené při vrcholech $A, B, C, D, \ldots$ jsou pravé. Jestliže $\overline{OA} = \overline{AB} = \overline{BC} =$




Obr. 13




Obr. 14

$= \overline{CD} = \ldots = 1$, pak $\overline{OB} = \sqrt{2}$, $\overline{OC} = \sqrt{3}$, $\overline{OD} = \sqrt{4}, \ldots$ Obecně přepona v $n$-tém pravoúhlém trojúhelníku má délku $\sqrt{n + 1}$. Dokažte!

**8.** Pro přibližnou hodnotu Ludolfova čísla se někdy udává vzorec $\pi \doteq \sqrt{2} + \sqrt{3}$. Sestrojte podle cvičení 7 úsečku dlouhou $\pi$ cm.

**9.** Kolik trojúhelníků lze sestrojiti z úseček dlouhých 3, 4, 5, 8, 15, 17 cm? Kolik z nich je ostroúhlých, pravoúhlých a tupoúhlých?

**10.** 2 strany trojúhelníku jsou dlouhé 6,7 cm a 7,2 cm; jak dlouhá musí být 3. strana, aby proti ní ležel úhel pravý? Mezi kterými hodnotami musí být délka 3. strany, aby proti ní ležel úhel ostrý (tupý)?

**11.** Dovedli byste na trávníku ohraničiti wolley-balové hřiště tvaru obdélníku, když byste měli po ruce jen metrové měřítko a dostatečně dlouhý motouz? Popište přesně, jak byste si počínali.

**12.** Dokažte tyto věty o rovnostranném trojúhelníku: a) Čtverec sestrojený nad výškou je roven trojnásobnému čtverci nad poloviční stranou. b) Obdélník sestrojený z celé výšky a poloměru kružnice vepsané je roven čtverci nad poloviční stranou.

**13.** Heronův trojúhelník je takový, jehož strany i obsah jsou vyjádřeny čísly celými. Takový trojúhelník se dá prostě sestrojiti tak, že se složí ze dvou trojúhelníků pythagorejských o společné odvěsně, která se pak stane výškou tohoto trojúhelníka. Na př. pythagorejské trojúhelníky o stranách 9, 12, 15; 5, 12, 13 dají, přiložíme-li je k sobě stejně dlouhými odvěsnami, Heronův trojúhelník o stranách 13, 14, 15. Určete si sami několik takových trojúhelníků.

**14.** Čtverci můžeme vepsati pravidelný osmiúhelník takto: na každou stranu čtverce naneseme od vrcholu polovinu jeho úhlopříčky a tím obdržíme na stranách všech 8 vrcholů žádaného osmiúhelníka. Dokažte správnost této konstrukce výpočtem! (Z konstrukce plyne, že všechny úhly osmiúhelníka jsou stejně velké. Dále vzdálenost 2 sousedních vrcholů na téže straně čtverce je $a \cdot (\sqrt{2} - 1)$; vzdálenost 2 sousedních vrcholů na různých stranách čtverce je $a \cdot \sqrt{3 - 2 \cdot \sqrt{2}}$. Oba tyto výrazy jsou si rovny.)

**15.** V pravoúhlém trojúhelníku o stranách $a$, $b$, $c$ sestrojte výšku a obvody vzniklých 2 trojúhelníků vyjádřete pomocí $a$, $b$, $c$. Ukažte, že obvody obou těchto trojúhelníků a obvod původního tvoří strany nového trojúhelníka pravoúhlého.

**16.** Prof. dr K. Čupr ve své knížce „Aritmetické hry a zábavy" uvádí, že Číňané již půl třetího tisíciletí před Kristem řešili tuto úlohu: Přesně uprostřed čtvercové nádržky o straně 10 stop trčí rákosový prut jednu stopu nad vodou. Skloní-li se prut přesně k půlícímu bodu kterékoliv strany, ponoří se právě pod vodu; jak jest nádržka hluboká?

**17.** V téže knížce nalezneme též jinou čínskou úlohu asi z XI. stol. př. Kr.: Obvod města je kružnice; přesně na sever i jih vedou brány. Jdu-li směrem severním, dorazím ve vzdálenosti 300 stop ode zdi ke stromu, jenž se mi počíná právě ukazovati za zdí, jdu-li jižní bránou 900 stop k západu. Jaký jest průměr kružnice vyznačené ohradní zdí?

**18.** Dvě silnice se protínají v pravém úhlu. O kolik m byla kratší cesta polní pěšinou, která začínala 55 m a končila 65 m od křižovatky?

**19.** Vypočtěte obsah trojúhelníka, jestliže jsou dány 2 strany a výška příslušná ke straně třetí. (Spec. $a = 10$, $b = 17$, $v_c = 8$.)

**20.** Vypočtěte odvěsny pravoúhlého trojúhelníka, [illegible] dána přepona a obsah $P$. Spec. $c = 6{,}5$ cm, $P = 7{,}5$ cm$^2$.

**21.** Jak nutno zvoliti $a \neq 0$, aby trojúhelník o stranách $a - 1$, $a - 2$, $a - 3$ byl a) ostroúhlý, b) pravoúhlý, c) tupoúhlý.

**22.** Na mapě o měřítku 1 : 1 000 000 tvoří města Turnov, Jičín a Bakov nad Jizerou pravoúhlý trojúhelník s pravým úhlem v Turnově. Vzdálenost Turnov—Jičín je na této mapě 2,3 cm a vzdálenost Jičín—Bakov 3,15 cm. Jaká je vzdálenost Turnov—Bakov na mapě i ve skutečnosti, nehledíme-li k zakřivení země?

**23.** Před budovou stojí telegrafní tyč ve vzdálenosti 1,6 m; hoření konec tyče je ve stejné výši s okenní římsou. Když se tyč naklonila tak, že se opírala o budovu, byl její konec 40 cm pod římsou. Jak je tyč vysoká?

**24.** Jak dlouhé strany má trojúhelník, jehož vrcholy jsou a) $A(6; 6)$, $B(-5; 5)$, $C(1; 0)$; b) $M(3; 3)$, $N(-1; 0)$, $P(1; 1,5)$?

**25.** Ukažte, že čtyrúhelník $ABCD$, $A(2; 8)$, $B(7; 9)$, $C(6; 3)$, $D(-\frac{3}{41}; \frac{137}{41})$, je deltoid.

**26.** Nad přeponou i nad oběma jejími úseky jsou sestrojeny půlkružnice, všechny na tutéž stranu. Ukažte, že obsah plochy jimi omezené je roven obsahu kruhu, který je sestrojen nad výškou jako nad průměrem.

**27.** Každá strana pravoúhlého trojúhelníka je rozdělena na $n$ dílů a nad každým dílem je sestrojena půlkružnice jako nad průměrem. Dokažte, že součet obsahů všech půlkružnic nad oběma odvěsnami rovná se součtu obsahů všech půlkružnic nad přeponou.

**28.** Půlkružnice v předešlém příkladě nahraďte pravidelnými $n$-úhelníky; platí pak věta podobná větě předešlé?

**29.** Vypočísti délku tětivy, která jde ohniskem a) elipsy, b) hyperboly kolmo k hlavní ose.

**30.** Vypočísti délku tětivy, která kolmo půlí hlavní poloosu elipsy.

**31.** Kolem středu a) elipsy, b) hyperboly je opsána kružnice jdoucí ohnisky. Jak dlouhé jsou průvodiče průsečíků této kružnice s křivkou?

**32.** Vypočtěte obsah pravidelného šestiúhelníka, jestliže je dán poloměr $r$ kružnice opsané.

**33.** Je-li dán poloměr kružnice pravidelnému osmiúhelníku opsané, vypočtěte jeho obsah.

**34.** Vypočtěte podobně obsah pravidelného dvanáctiúhelníka.

**35.** V pravoúhlém lichoběžníku ($a \perp d$) vypočtěte zbývající stranu a obsah, jestliže je dáno: a) $a = 10,3$; $b = 8,5$; $c = 6,7$; b) $a = 8,2$; $b = 9,7$; $d = 6,5$. c) $a = 5,6$; $c = 2,8$; $d = 4,5$. d) $b = 20,5$; $c = 8,4$; $d = 15,6$.

**36.** Podobně vypočítejte zbývající stranu a obsah lichoběžníka rovnoramenného (obr. 6), je-li dáno: a) $a = 320$, $b = 305$, $c = 48$; b) $a = 300$, $b = 229$, $v = 221$; c) $a = 542$, $c = 220$, $v = 240$; d) $v = 420$, $b = 421$, $c = 100$.

**37.** Vypočtěte délky základen rovnoramenného lichoběžníka, v němž obsah $P = 17{,}20\ \text{cm}^2$, $v = 4\ \text{cm}$, $b = 4{,}1\ \text{cm}$.

**38.** V deltoidu je dána úhlopříčka $f = 24$ a strany $a = 37$, $b = 15$. Vypočtěte jeho obsah.

**39.** Určiti obsah čtyrúhelníka tětivového, je-li dáno: $a = 13$, $b = 84$, $c = 36$, $\beta = 90°$.

**40.** Úhlopříčky různoběžníku se kolmo protínají. Ukažte, že součet čtverců nad dvěma protilehlými stranami rovná se součtu čtverců nad druhými dvěma protějšími stranami.

**41.** Vypočtěte vzdálenost tělesných úhlopříček kvádru od jednotlivých hran.

**42.** Do krychle je vepsán pravidelný čtyrstěn tak, že jeho hrany jsou stěnové úhlopříčky krychle. Určete jeho objem, jestliže hrana krychle je $a$.

**43.** V pravidelném čtyrstěnu o hraně $a$ vypočtěte vzdálenost mimoběžných hran.

**44.** V pravidelném osmistěnu o hraně $a$ vypočtěte vzdálenost dvou rovnoběžných stěn.

**45.** Vypočtěte povrch koulí pravidelnému osmistěnu opsané, vepsané a dotýkající se hran.

**46.** V komolém jehlanu $n$-bokém je dáno ($a$, $b$ hrany podstavné, $v$ výška, $s$ výška stěnová, $S$ povrch, $V$ objem): a) $n = 4$, $a = 14$, $b = 8$, $S = 480$; b) $n = 6$, $a = 8$, $b = 4$, $V = 168\sqrt{3}$; vypočtěte zbývající prvky.

**47.** V rotačním kuželi komolém je dáno (poloměry podstav $r_1$, $r_2$, výška $v$, strana $s$, povrch $S$, objem $V$, plášť $P$): a) $r_1 = 6$, $s = 13$, $S = 128\pi$; b) $s = 5$, $P = 60\pi$, $S = 140\pi$.

**48.** Koule je protata dvěma rovnoběžnými rovinami v kružnicích o poloměrech $\varrho_1 = 8$, $\varrho_2 = 7$; vzdálenost obou řezů je 3. Vypočtěte povrch příslušné kulové vrstvy.

**49.** Nad každou stěnou krychle o hraně $a$ je vztyčen pravidelný jehlan o výšce $\frac{a}{n}$. Vypočítejte povrch vzniklého tělesa.

# VÝSLEDKY CVIČENÍ

**1.** c) $u = \alpha^2\beta$, $v = \beta\gamma^2$, kde $\alpha, \beta, \gamma$ jsou libovolná čísla celá. **2.** a) První číslo je $2a + 1$, další $2a^2 + 2a$, $2a^2 + 2a + 1$. Porovnej se vzorci Pythagorejců. b) První je $2a$, další $a^2 - 1$, $a^2 + 1$. Porovnej se vzorci Platonovými. **9.** 6 trojúhelníků, z nichž 2 pravoúhlé, 4 tupoúhlé. **10.** Přepona $\sqrt{96,73}$. Leží-li proti straně $c$ úhel ostrý, platí $0,5 < c < \sqrt{96,73}$; leží-li proti ní úhel tupý, platí $13,9 > c > \sqrt{96,73}$. **11.** Užitím motouzu, na němž bychom si vyznačili délky 3 m, 4 m, 5 m bychom vytyčili pravý úhel. **15.** Obvod $2s$; obvody trojúhelníků $\frac{a}{c}\,2s$; $\frac{b}{c}\,2s$; $2s$. **16.** 12 stop. **17.** 900 stop. **18.** O 35 m. **19.** $c = \sqrt{a^2 - v_c^2} \pm \sqrt{b^2 - v_c^2}$; $P = \frac{1}{2}cv_c$; $c_1 = 21$; $P_1 = 84$; $c_2 = 9$; $P_2 = 36$. **20.** $a, b = \frac{1}{2}(\sqrt{c^2 + 4l} \pm \sqrt{c^2 - 4l})$; $a, b = 6$ cm, 2,5 cm. **21.** a) $a > 6$; b) $a = 6$; c) $a < 6$. **22.** 2,24 cm, ve skut. 22,4 km. **23.** 3,4 m. **24.** a) $11\sqrt{2}$; $\sqrt{61}$; $\sqrt{61}$; b) 5; 2,5; 2,5. **25.** $\overline{AB} = \overline{AD} = \sqrt{26}$; $\overline{BC} = \overline{CD} = \sqrt{37}$. **28.** Ano. **29.** a) $\frac{2b^2}{a}$, b) $\frac{2b^2}{a}$. **30.** $6\sqrt{3}$. **31.** a) $a \pm \sqrt{e^2 - b^2}$; b) $-a \pm \sqrt{e^2 + b^2}$. **32.** $\frac{3}{2}r^2\sqrt{3}$. **33.** $2r^2\sqrt{2}$. **34.** $3r^2$. **35.** a) 7,7; 65,45; b) 1; 29,9; c) 5,3; 18,9; d) 21,7; 234,78. **36.** a) 273; 50 232; b) 180; 5304; c) 289; 91 440; d) 158; 54 180. **37.** $a = 9,5$ cm; $c = 7,7$ cm. **38.** $P = 528$. **39.** 1932. **41.** $\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$; $\frac{ac}{\sqrt{a^2 + c^2}}$; $\frac{bc}{\sqrt{b^2 + c^2}}$. **42.** $\frac{1}{3}a^3$. **43.** $\frac{1}{2}\sqrt{2}$. **44.** $\frac{1}{3}\sqrt{6}$. **45.** $\frac{1}{2}a\sqrt{2}$; $\frac{1}{6}a\sqrt{6}$; $\frac{1}{2}a$. **46.** a) $V = 496$; b) $60(2\sqrt{3} + 3)$. **47.** a) $V = 172\pi$; b) $V = 112\pi$. **48.** $(113 + 6\sqrt{65})\,\pi$. **49.** $\frac{6a^2}{n}\sqrt{n^2 + 4}$.

# OBSAH

| | |
|---|---|
| Spisovatel | *Stanislav Horák* |
| Název díla | *Pythagorova věta* |
| Vydala | *Jednota československých matematiků a fysiků* |
| roku | *1949* |
| V edici | *Brána k vědění, svazek 5* |
| Za redakce | *V. Jozífka* |
| Stran | *32* |
| Obrazců | *14* |
| Vytiskla | *Knihtiskárna Prometheus v nár. správě, Praha VIII* |
| Vydání | *první* |
| Náklad | *5500 výtisků* |
| Cena | *Kčs 12,—* |