V. HLAVATÝ

~ SBÍRKA SPISŮ VYDÁVANÁ ~ JEDNOTOU ČESKOSLOVENSKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ

ÚVOD DO NEEUKLIDOVSKÉ GEOMETRIE

KRUH

sv. 3

KRUH

SBÍRKA SPISŮ VYDÁVANÁ

JEDNOTOU ČS. MATEMATIKŮ A FYSIKŮ

za redakce B. Bydžovského, V. Posejpala a M. Valoucha

Svazek 3

Dr. Václav Hlavatý

ÚVOD DO NEEUKLIDOVSKÉ GEOMETRIE

ÚVOD DO NEEUKLIDOVSKÉ GEOMETRIE

Napsal

Dr. VÁCLAV HLAVATÝ

s. docent Karlovy university a vys. učení technického v Praze.

NÁKLADEM

JEDNOTY ČSL. MATEMATIKŮ A FYSIKŮ

V PRAZE 1926

PŘEDMLUVA.

Je málo matematických teorií, které se vyrovnají neeuklidovské geometrii bohatstvím vztahů k jiným oborům lidského myšlení, vnitřním půvabem své stavby a zároveň jedinečností svého postavení uvnitř celkového organismu matematických věd, hlavně hledíme-li k jeho vývoji. Novodobá matematika má své kořeny v době ležící asi 300 let za námi a k správnému pochopení vývoje většiny moderních disciplin matematických není třeba jíti dále nazpět než nejvýše k této době. Avšak význam geometrie neeuklidovské, jež svou celou koncepcí náleží modernímu způsobu myšlení, nepochopíme zcela, neuvedeme-li ji ve spojení s velkou dobou alexandrinské matematiky, vzdálené více než 2000 let; most pak, který spojuje dobu slavného *Euklida* s počátky neeuklidovské geometrie, náleží mezi nejzajímavější stránky historické drobnokresby matematické. A jako historicky, tak i filosoficky má tato geometrie nevšední postavení. Vznikla v době kantovské víry v apriorismus prostorového nazírání jako vzpoura proti této víře, třeba snad bezděčná, ale přece plná noetických a psychologických důsledků. Po stránce logické znamenala myšlenkovou stavbu zcela nového druhu a neobvyklého rázu. Není překvapující, že teorie tak odlišná ode všeho, co dotud geometrie přinesla, nesetkala se ihned se všestranným pochopením — ale jakmile počala působiti novotou svých myšlenek, jala se určovati geometrii nové dráhy. Ona nejvíce přispěla k tomu, že byl přesně vymezen význam názoru pro geometrii a matematiku vůbec. S tím souvisí, že právě neeuklidovská geometrie zahájila badání o základech geometrie, jež je jedním z význačných znaků a slávou kritického století 19. Zároveň však objevení neeuklidovské geometrie dalo první popud k jinému směru moderní geometrie, jehož ovoce se dostavuje teprve v posledních desítiletích a znamená skoro převrat v geometrickém myšlení: k postupnému zobecňování matematického pojmu prostoru, jenž od úzké omezenosti tří rozměrů s euklidovskou metrikou se znenáhla rozšířil na pojem n-rozměrné variety s velmi obecnými formujícími principy.

Musím se omeziti na těchto několik hesel při pokusu o charakteristiku neeuklidovské geometrie. Připojil bych k tomu jen ještě, že působením teorie relativity dostává se tato disciplina ryze matematická v poslední době do ostrého vztahu ke skutečnosti, dík různým pokusům o nový výklad stavby světové, čímž šíří se zájem o ni i mimo úzký kruh odborníků.

Jestliže pan doc. *Hlavatý* se ujal obtížného, ale záslužného úkolu napsati první českou učebnici neeuklidovské geometrie, vyšel tím vstříc nejen potřebám odborníků, nýbrž i zájmu té části vzdělané veřejnosti, která je dychtiva poznati zblízka vědecké složky světového názoru. Při výkladu této geometrie lze postupovati rozmanitými způsoby; myslím, že způsob, který volil spisovatel této knihy, nejlépe odpovídá dnešnímu stavu vědy a dnešnímu postavení neeuklidovské geometrie v celkové stavbě geometrie. Přeji jeho knize, aby užitek z ní plynoucí byl úměrný důležitosti a kráse projednávaného předmětu a úsilí, které vynaložil na jasný a přístupný výklad obtížné látky.

V Praze v listopadu 1926. *B. Bydžovský.*

Děkuji srdečně všem, kteří mně jakýmkoli způsobem usnadnili uveřejnění této práce:

Panu univ. prof. Dr. *B. Bydžovskému* a panu s. docentu Dr. *V. Jarníkovi* za obětavé a pečlivé pročtení rukopisu a za rady, kterými přispěli k formální i věcné úpravě knihy, panu doc. *Jarníkovi* též za pomoc při čtení korektur, panu univ. prof. Dr. *L. Berwaldovi* za laskavé doplnění údajů literárních, panu as. tech. *M. Mikanovi* za pečlivé narýsování obrázků podle mých náčrtků, panu prof. *Fr. Baladovi* za pozorné sestavení věcného rejstříku;

Jednotě čsl. matematiků a fysiků za péči, věnovanou vydání této monografie a tiskárně *„Politika“* za vzorné provedení sazby.

V Praze v prosinci 1925. *V. H.*

Kapitola I.

ÚVOD.

§ 1. Všeobecné poznámky.

V této práci snažím se podati, pokud možno populárně, úvod do geometrie neeuklidovské. Při tom omezuji se jen na geometrické výzkumy, které dnes možno pokládati za klasické a nebéřu zřetel k výzkumům doby současné, které jsou méně vhodné k popularisaci. Vzhledem k tomu, že kniha je psána pro širší kruhy, i nematematické, omezuji se jen na studium v rovině. Proto může knížku čísti každý, kdo má matematickou průpravu, rovnající se průpravě ze střední školy.

V únoru tohoto roku (1926) bylo tomu sto let, kdy ruský matematik *Lobačevský* vystoupil na veřejnost se svými úvahami o neeuklidovské geometrii. Nebyl prvým ani posledním, který se těmito problémy zabýval. Dávno před ním a dlouho po něm byla neeuklidovská geometrie předmětem úvah, jež často zdánlivě spolu nesouvisely. Jednotící princip těmto a podobným úvahám dal německý matematik *F. Klein* svojí definicí geometrie. (Viz § 5, odst. 3 a kap. II.) Tím byla postavena kostra stavby geometrie a monografická pojednání ji měla vyplniti. Zároveň však se klasická neeuklidovská geometrie stala disciplinou uzavřenou a proto badání o ní více méně neplodným. Z toho důvodu nepodávám v této práci nových původních výsledků, nýbrž omezuji se na shrnutí nejzákladnějších poznatků formou pokud možno přístupnou. S tím též souvisí, že zásadně necituji pojednání nebo větší práce z tohoto oboru. Čtenář, který se o tyto problémy zajímá, najde si v literárních poznámkách na konci knihy některé prameny, které ho dovedou dále, než může učiniti tato knížka, která je jen úvodem.

Kapitola prvá a osmá jest určena jen pro laiky. V prvé kapitole snažil jsem se totiž cestou pokud možno názornou a bez matematiky ozřejmiti postup, kterým se budeme bráti. Nechtěje přerušovati plynulost výkladů v kapitole druhé až sedmé uváděním některých nutných poznatků, které sice přímo s látkou projednávanou nesouvisí, ale jsou potřebné k jejímu porozumění, shrnul jsem je zvláště do kapitoly osmé. Na příslušných místech je vždy citováno místo této kapitoly, kde se potřebný pojem nebo vzorec nalézá. Přes to doporučuji čtenáři-laikovi, aby po přečtení prvé kapitoly absolvoval kapitolu osmou a teprve potom četl kapitoly II—VII.

Odkazy vůbec uvádím v závorce. Tak na příklad (IV, 2, 8) značí čtvrtou kapitolu, druhý §, osmý vzorec. Pokud není výslovně jinak poznamenáno, vztahují se tato čísla v uvedeném pořádku vždy ke kapitole, paragrafu, rovnici.

§ 2. Euklidovy postuláty.

Geometrie vznikla z potřeb praktického měření. Časem přišlo se k poznání, že některá tato měření možno usnadniti užitím vzorců. To byl asi počátek geometrických pouček. Tak na příklad, jakmile se nalezla formule pro obsah trojúhelníka, stačilo změřiti základnu z a výšku v, načež $\frac{zv}{2}$ byl hledaný obsah. Ovšem, že všechny takové poučky spočívaly na požadavcích, jichž splnění bylo verifikováno jen praktickou zkušeností a nikoli teoreticky zdůvodněno. Takovým požadavkem bylo na příkl., že dvě přímky nemohou míti více než jeden bod společný. Požadavky tyto byly tak evidentní prvým geometrům, že nejen se nesnažili jejich bezespornost dokázati, nýbrž ani výslovně jich neuváděli. Postupem času teoretická záliba doplňovala obsah geometrie poučkami, které snad neměly přímého praktického významu. Důkazy těchto pouček spočívaly opět na poučkách, které již dříve byly dokázány. Rovněž důkazy těchto pouček musely spočívati na poučkách dříve dokázaných atd. Poslední článek tohoto řetězce důkazů a pouček tvořily zmíněné požadavky. Ty byly poznány jako nedokazatelné (ale nikoli hned a nikoli všechny) na rozdíl od pouček, které na jejich základě bylo lze vždy dokázati. Jakmile tedy exaktní teoretické badání nabývalo vrchu, bylo nutno z důvodů logických a didaktických ony nedokazatelné požadavky, jež tvořily základnu studia, výslovně uvésti. Tak učinil *Euklid.* Ten počíná prvou knihu svých „Elementů“ 23 definicemi (vysvětlivkami), 5 postuláty (požadavky) a 9 axiomy (základními větami).[1])

Jeho postuláty jsou:

I) Dva body lze vždy spojiti (jedinou) přímkou.

II) Přímou čáru omezenou lze vždy prodloužiti.

III) Z libovolného středu a poloměru lze vždy sestrojiti kružnici.

IV) Všechny pravé úhly jsou mezi sebou ekvivalentní.

V) Protíná-li příčka dvě přímky a tvoří-li s nimi na téže straně dva vnitřní úhly o součtu menším, než dva pravé (180°), tyto dvě přímky — v případě nutnosti prodlouženy — protínají se na téže straně příčky, kde je součet zmíněných úhlů vnitřních menší než dva pravé.

Těchto pět postulátů je základem geometrie, které se říká **geometrie euklidovská.** Je to též geometrie praktického měření a proto se zavedla do škol. (Uvedené postuláty netvoří ucelený základ. Dneska víme, že geometrie euklidovská spočívá na větším počtu postulátů, než kolik jich uvedl *Euklid.* Tento při důkazech některých pouček mlčky předpokládal více splněných požadavků. Neuváděl jich výslovně, ježto asi nevěděl, že lze sestrojiti geometrii [t. j. řadu pouček], kde splněny nejsou. Uvedeme v nejbližších řádcích jeden z takových mlčky předpokládaných postulátů.)

V. postulát se zřejmě liší od prvých čtyř svoji složitostí. Je pro naše studium nejdůležitější. Praví toto (obr. 1):

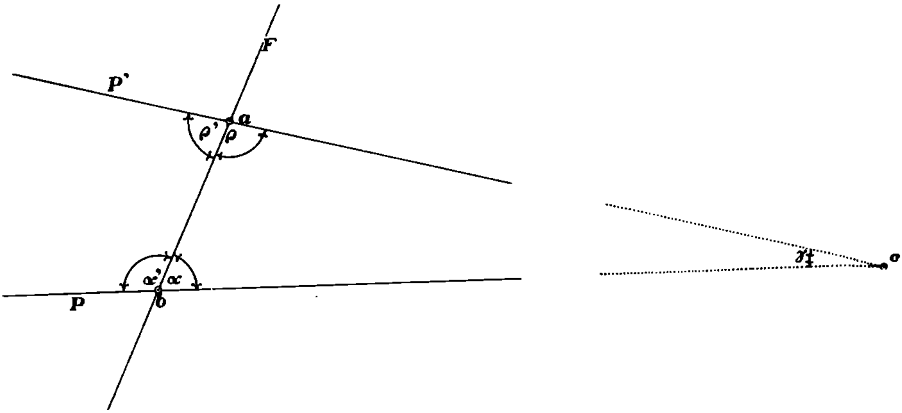
Je-li $\alpha + \beta < 180^0$, přímky P a P' se protínají (v bodě c). Důležitost jeho seznáme, pokusíme-li se zodpověděti otázku: Co nastane, je-li $\alpha + \beta = 180^0$? Tato otázka je ekvivalentní s otázkou: Co nastane, je-li $\alpha = \beta'$[2])? Na tuto otázku odpovídá *Euklid:* Je-li $\alpha = \beta'$, přímky P a P' — byť i prodlouženy — se neprotínají (prop. XXVII). Kdyby se protínaly, třeba v nějakém bodě c, byl by vnější úhel β'

---

[1]) Přidržuji se kritického vydání *Heibergova*, citovaného v literárních poznámkách. Ve starších vydáních bylo poněkud jiné uspořádání: 34 definicí, 3 postuláty a 14 axiomů. (Poslední dva z pěti zde uvedených postulátů byly počítány za axiomy.) Citovaná práce nepochází asi celá od *Euklida.* Pravděpodobně jest autorem páté „knihy“ *Eudoxus*, autorem čtrnácté *Hypsikles* a patnácté *Damaskios.*

[2]) Ježto vždy $\beta + \beta' = 180$ a dle předpokladu $\alpha = \beta'$, je i $\alpha + \beta = 180^0$.

trojúhelníka abc roven vnitřnímu úhlu α. Ale je dokázáno, (prop. XVI), že vnější úhel (β') v trojúhelníku je vždy větší, než libovolný z jeho úhlů protějších (α nebo γ). Přímky P a P' se tedy nemohou protínati v c. Zcela obdobně by se dokázalo, že takové dvě přímky se nemohou protínati ani v jiném bodě, který je na rameni úhlu α' na P. (Tento



Obr. 1.

důkaz spočívá více méně na prop. XVI. Ta má však smysl jen tenkráte, připustíme-li, že je splněn požadavek: „Přímka rozděluje rovinu na dvě části; libovolný bod — pokud neleží na oné přímce — náleží buď jedné, nebo druhé." Není-li tomu tak, může se státi, že úhel β' nebo β je současně vnitřním i vnějším úhlem v trojúhelníku. Poznáme geometrie, kde vytčený požadavek není splněn (VI). *Euklid* si asi nebyl vědom, že tento bezesporný požadavek je nutno výslovně formulovati, neboť neznal ještě geometrie, na kterou jsme právě poukázali.) Přímky v rovině, které prodlouženy jsouce nikdy se neprotínají, nazývá *Euklid* rovnoběžkami (přímkami rovnoběžnými, def. 23).

Je-li konečně $\alpha + \beta > 180^0$, musí $\alpha' + \beta' < 180^0$ a přímky P a P' se opět protínají dle V. postulátu. (Na straně, kde jsou úhly α', β'.) Máme tedy celkem jen tyto tři možnosti:

a) buď $\alpha + \beta < 180^0$; podle V. postulátu se přímky P a P' protínají, nebo *b)* $\alpha + \beta = 180^0$; podle dokázané věty jsou P a P' rovnoběžny, nebo

c) $\alpha + \beta > 180^0$; podle V. postulátu se přímky protínají.

Jiných možností není. Lze tedy bodem *(a)* mimo přímku *(P)* ležícím vésti k této jen jedinou rovnoběžku *(P')*, neboť jen v jediném případě je $\alpha + \beta = 180^0$. Kdyby kromě rovnoběžky zmíněné existovaly ještě jiné rovnoběžky (vedené bodem *a* k přímce *P*), muselo by nutně pro ně býti buď $\alpha + \beta < 180^0$, nebo $\alpha + \beta > 180^0$.[2a]) Ale v tomto případě V. postulát požaduje, aby se přímky protínaly (ale nedokazuje, že tomu tak jest!).

Význam pátého Euklidova postulátu spočívá v tom, že **bez důkazu** omezuje na **jednu** počet rovnoběžek, které lze daným bodem mimo přímku položeným k této vésti!

Tím je osvětlen význam V. postulátu, jehož si byl i *Euklid* vědom, neboť pokud možno neodvozoval z něho důsledků. Uvedeme-li nyní, že téměř po dvě tisíciletí se matematikové marně snažili dokázati tento postulát, pochopíme, co bylo hybnou silou, která je k tomu poháněla. Šlo v základě o to, ukázati, kolik rovnoběžek lze bodem mimo přímku položeným k této vésti! *Euklid* sám se asi o důkaz nepokusil. Alespoň nemáme takový pokus dochovaný.

Pokus o důkaz V. postulátu znamená v základě již skepsi o něm. Zdá se na prvý pohled, že tato skepse není oprávněná, neboť V. postulát je verifikován skutečností. Leč právě to je oprávněním skepse, jak uvedeme v § 4 této kapitoly názorným příkladem.

V následujícím paragrafu zmíníme se o některých větách euklidovské geometrie, jichž později budeme potřebovati k lepšímu porozumění geometrie neeuklidovské.

[2a]) Předpokládáme ovšem, ze je splněn t. zv. axiom Archimedův, neboť jinak by existovala možnost geometrie, ve které je nekonečně mnoho rovnoběžek daným bodem k dané přímce a přec v ní platí věty geometrie euklidovské. Zmíněný axiom Archimedův zní:

„Budiž b_1 libovolný bod na přímce mezi jejími dvěma libovolnými body b_0, b v konečnu a buďtež body b_i, ($i = 1, 2, \ldots$) takové, že platí $b_0 b_1 = b_1 b_2 = b_2 b_3 = \ldots$, při čemž pro každé i je bod b_i mezi body b_{i-1}, b_{i+1}. Je možno vždy nalézti takové číslo n, aby bod b byl mezi body b_{n-1}, b_{n+1}."

§ 3. Některé poučky.

1. Postuláty s V. *Euklidovým* rovnocenné. Na střední škole dokazuje se mnoho vět, které jsou správné jen tehdy, je-li splněn V. postulát. Některé z těchto vět jsou s ním přímo rovnocenné. To znamená, že kdybychom tento postulát nahradili jednou takovou větou, pak jej z ní můžeme dokázati. To se dělo téměř po dvě tisíciletí! Dnes víme, že to ovšem není důkazem! Víme to proto, ježto je nám známo, které věty jsou s tímto postulátem rovnocenné, jinými slovy, které věty můžeme místo V. postulátu za postulát prohlásiti. Tak tomu však nebylo dříve, a proto se stále opakovala historie nepodařeného důkazu. Uvedeme alespoň některé takové věty, které si různí badatelé učinili východiskem svých úvah, nevědouce, že vlastně chtějí dokázati to, co předpokládali. Historicky zajímavé jsou zvláště tyto věty:

V*a)* Existují trojúhelníky podobné, nebo přesněji

V*a')* Existují trojúhelníky o stejných úhlech, ale nestejných obsazích.

V*b)* Bodem p mimo přímku P možno k této vésti jen jednu rovnoběžku.

V*c)* Součet úhlů v trojúhelníku je 180^0.

Každá z těchto vět plyne z V. postulátu a obráceně z těchto vět se V. postulát za jistých předpokladů dá dokázati.

2. Úkol geometrie euklidovské. Úkolem geometrie, které jsme se učili na střední škole, je studium útvarů, resp. jejich vlastností. Máme-li nějaký útvar studovati, můžeme tak učiniti v zásadě dvojím způsobem. Buď studujeme onen útvar přímo, nebo odvozujeme jeho vlastnosti analyticky. Prvý způsob byl vlastně způsobem matematiky řecké, druhý způsob spočívá v tom, že daný útvar analyticky vyjádříme pomocí nějakých souřadnic a hledáme ty jeho vlastnosti, které nejsou závislé na volbě takových souřadnic. Objasníme to na příkladě: Předpokládejme, že máme změřiti délku rovné tyče ab, která svým koncem a stojí kolmo na zemi. Přímý způsob měření byl by zde zřejmě nejjednodušší. Spočívá v tom, že stanovíme určitou jednotku míry (v níž chceme délku tyče vyjádřiti) a obvyklým způsobem touto jednotkou tyč změříme. — Druhý způsob, nepřímý, je sice zdlouhavější, ale často jedině

možný. Spočívá na tomto základě: Změříme výšku φ slunce nad obzorem a stanovíme na zemi stín b' bodu b. Označíme-li vzdálenost $ab' = r$, je hledaná délka tyče rovna $r \operatorname{tg} \varphi$. Je tedy délka tyče vyjádřena dvěma údaji r, φ, kterým můžeme říkati souřadnice. Tyto souřadnice se každým okamžikem mění, ale výraz $r \operatorname{tg} \varphi$ pro délku tyče je vždy stejný, nechť hodnota těchto souřadnic je jakákoliv. Délka tyče je tedy nezávislá na volbě souřadnic.

Ve třetím odstavci zavedeme obvyklé souřadnice pravoúhlé a najdeme několik výrazů, které jsou nezávislé na jejich volbě. To se nám podaří tím způsobem, že si odvodíme vzorce, udávající přechod od jednoho systému pravoúhlých souřadnic k jinému systému pravoúhlých souřadnic.

3. Analytické vyjádření úkolu. Buďtež X, Y osy pravoúhlého systému souřadného, jejich průsečík, bod o, počátkem soustavy souřadné. Chceme-li vyznačiti, že nějaký bod b má v tomto systému souřadnice x, y, píšeme pro tento bod $b\,(x, y)$.

Od původního systému souřadného můžeme přejíti k jinému téhož druhu tímto pochodem (obr. 2):

Posuneme systém souřadný X, Y rovnoběžně do bodu $'o\,(\mathring{x}, \mathring{y})$. V tomto novém systému má každý bod $b\,(x, y)$ nové souřadnice $'x, 'y$, které jsou s původními vázány vztahem

$$1) \qquad 'x = x - \mathring{x}, \qquad 'y = y - \mathring{y}$$

Nyní otočíme systém souřadný $'X, 'Y$ o úhel φ, kol nového počátku $'o$ do polohy $''X, ''Y$. Bod $b\,('x, 'y)$ má v této nové soustavě souřadnice $''x, ''y$, které se souřadnicemi $'x, 'y$ jsou vázány vztahy

$$2) \qquad ''x = 'x \cos\varphi + 'y \sin\varphi, \qquad ''y = -\,'x \sin\varphi + 'y \cos\varphi$$

Vzhledem k předposlednímu systému rovnic 1) obdržíme

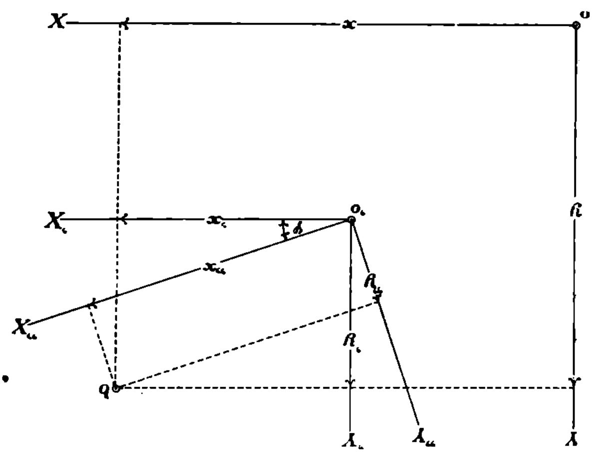
$$3a) \qquad \begin{aligned} ''x &= (x - \mathring{x}) \cos\varphi + (y - \mathring{y}) \sin\varphi \\ ''y &= -(x - \mathring{x}) \sin\varphi + (y - \mathring{y}) \cos\varphi \end{aligned}$$

Obráceně, souřadnice x, y jsou se souřadnicemi $''x, ''y$ vázány rovnicemi

$$3b) \qquad \begin{aligned} x &= ''x \cos\varphi - ''y \sin\varphi + \mathring{x} \\ y &= ''x \sin\varphi + ''y \cos\varphi + \mathring{y} \end{aligned}$$

Podle toho, co jsme uvedli v předcházejícím odstavci, je úkol geometrie v rovině též definován jako studium těch výrazů, které se transformací 3) nemění. Takové výrazy budou míti nějaký geometrický význam. Říkáme jim invarianty transformace 3) (nebo též invarianty vzhledem k 3)).

Uveďme příklad jednoho takového invariantu! Je to analytické vyjádření obsahu trojúhelníka, jehož vrcholy jsou $b_1(x_1, y_1)$, $b_2(x_2, y_2)$, $b_3(x_3, y_3)$.



Obr. 2.

Obsah tohoto trojúhelníka je dán determinantem

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + y_1(x_3 - x_2) + (x_2 y_3 - x_3 y_2)]$$

Čtenář se snadno přesvědčí sám dosazením z rovnic 3), že tento determinant je invariantem vzhledem k 3), neboť skutečně platí

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ''x_1 & ''y_1 & 1 \\ ''x_2 & ''y_2 & 1 \\ ''x_3 & ''y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Rovnice 3) mohli bychom interpretovati ještě jinak. Místo abychom pohybovali souřadným systémem z X, Y do $''X, ''Y$ a bod b nechali pevným, můžeme bodem b pohybovati v témž souřadném systému X, Y do polohy $''b\,(''x, ''y)$. Při tom souřadnice bodů b a $''b$ jsou vázány podmínkou 3). Pohyb ten se skládá z posunutí 1) a otáčení 2). (Není-li výslovně jinak podotčeno, rozumíme pohybem též každou změnu místa — vzhledem k nějaké pevné soustavě souřadné — bez ohledu na vykonanou dráhu.) Při této interpretaci mohli bychom říci, že obsah trojúhelníka jest invariantní vzhledem k pohybu, danému rovnicí 3). Takový obsah není však invariantním jen vzhledem k jednomu pohybu určenému třemi údaji (třeba $\varphi = 30^0$, $\mathring{x} = 3$, $\mathring{y} = 4$), nýbrž vzhledem ke všem pohybům tohoto druhu, nechť za φ, $\mathring{x}$, $\mathring{y}$ dosadíme jakékoliv reálné, konečné hodnoty. Všechny tyto pohyby sdružujeme v pojem grupy pohybu. (Přesnou definici grupy transformací viz v VIII, 5.) Proto říkáme, že obsah trojúhelníka jest invariantní vzhledem ke grupě pohybu, jinými slovy, analytické vyjádření obsahu trojúhelníka je invariantem pohybové grupy. Obecně pak úkol geometrie euklidovské v rovině je definován jako studium invariantů pohybové grupy. Při tom ovšem předpokládáme, že pohyb je dán transformacemi 3). — Takové invarianty mohou býti různé. Jeden jsme uvedli. V následujícím uvedeme jiný invariant, zásadní důležitosti pro geometrii euklidovskou v rovině.

4. Body isotropické. Vzdálenost dvou bodů $b_1(x_1, y_1)$, $b_2(x_2, y_2)$ je v euklidovské rovině dána výrazem, jehož čtverec jest

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

Tento výraz je pohybovým invariantem, neboť platí

$$({}''x_2 - {}''x_1)^2 + ({}''y_2 - {}''y_1)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Že se délka úsečky nemění pohybem, víme ze střední školy, kde se tomu učíme již na nižším stupni. Poslední rovnice je však toho analytickým důkazem. Z invariantu $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$ můžeme odvoditi jednu charakteristickou vlastnost pohybu. Nechť bod $b_2(x, y)$ je plynulým bodem. Ježto výraz $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2$ je pohybovým invariantem, nemění se transformacemi 3) ani rovnice

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = 0.$$

Tuto však můžeme psáti v tvaru

$$[(y - y_1) + i(x - x_1)][(y - y_1) - i(x - x_1)] = 0, \quad (i = \sqrt{-1}),$$

z kterého je zřejmo, že je to rovnice dvojice přímek

$$y - y_1 = -i(x - x_1), \qquad y - y_1 = i(x - x_1)$$

bodem b_1. Tato dvojice se tedy pohybem nemění. Říkáme, že se pohybem reprodukuje, nebo též, že ji grupa pohybová reprodukuje.

Každým bodem b_1 v rovině prochází taková dvojice přímek, které jsou imaginárné sdružené. Jak je zřejmo z rovnice těchto přímek, jejich směry nejsou závislé na volbě bodu b_1. Nechť jej zvolíme kdekoli v konečnu, vždy jedna přímka z oné dvojice má směrnici $+i$, druhá $-i$. — Ze střední školy je známo, že (reálné) přímky o stejných (reálných) směrnicích jsou rovnoběžny. O rovnoběžných přímkách říkáme, že se protínají v nějakém bodě přímky nevlastní.[3]) Řídíce se analogií o přímkách reálných, zavádíme obdobné definice pro přímky imaginárné. Říkáme, že dvě přímky imaginárné jsou rovnoběžny, mají-li stejnou (imaginární) směrnici. Bod nevlastní přímky, ve kterém se imaginárné rovnoběžky protínají, je také imaginárný. Jsou tedy všechny imaginárné přímky o směrnici $+i$ spolu rovnoběžny a protínají se v imaginárném bodě přímky nevlastní. To platí i o imaginárných přímkách, které mají směrnici $-i$. Dvojici přímek o směrnicích $+i$, $-i$ říkáme dvojice přímek **isotropických**, dvojici příslušných bodů na přímce nevlastní říkáme dvojice bodů **isotropických**. — Můžeme tedy říci, že pohybová grupa v rovině obecně reprodukuje dvojici bodů isotropických. To je jedním z charakteristických znaků pohybu, který nazýváme euklidovský. Reprodukuje-li se tato dvojice tak, že každý z obou bodů podrží své místo, příslušný pohyb je složen z posunutí a otáčení. Vymění-li však oba body svoji polohu, příslušný pohyb je složen ze zrcadlení, posunutí a otáčení.

Po této malé exkursi do geometrie euklidovské pokusím se na příkladě ukázati, jak asi se může dospěti k přesvědčení, že je dovolena skepse o V. postulátu Euklidově.

§ 4. Skepse o V. postulátu.

Předpokládejme, že nějaké nebeské těleso je koulí v přesně geometrickém významu slova. Na této kouli nechť žijí bytosti dvojrozměrné. (Čtenář může si představiti třeba oživené stíny lidí na této „Zemi".) O těchto bytostech učiníme následující předpoklady:

Jsou schopny chápati jen dvojrozměrně a nikoli trojrozměrně.

Přesnost jejich měření nepřesahuje přesnost našeho měření.

Jejich životní podmínky jsou tak utvářeny, že nemohou se libovolně vzdáliti z okolí nějakého bodu (který nazveme třeba pólem).[4])

---

[3]) Nevlastní přímka euklidovské roviny je jediná její přímka v nekonečnu.

[4]) Sleduji zde analogii s naším trojrozměrným životem. My se také nemůžeme přemístiti do libovolného bodu prostoru a chápeme jen úkazy trojrozměrné.

Je-li jejich „Země“ tak veliká vzhledem k nim a jejich možnosti měření, že se prakticky v okolí pólu nemohou přesvědčiti o jejím zakřivení, pak geometrie vzniklá z popudu praktického bude rovněž založena na postulátech Euklidových. Při tom ovšem pod slovem přímka budou rozuměti nejkratší spojnici dvou bodů, o níž my víme, že je to tak zvaná hlavní kružnice na kouli. (Její střed leží právě ve středu koule.) Tyto bytosti v prvním stadiu svého vývoje jistě tedy nebudou pochybovati o tom, že žijí v „prostoru“, kterému my říkáme rovina, a představa koule bude jim cizí, nemohou-li chápati trojrozměrně.

Na jistém stupni svého vývoje budou se snažiti dokázati V. postulát. Jejich pokusy ovšem budou marné. To my víme proto, ježto jsme si vědomi, že žijí na kouli, kde právě onen postulát neplatí. Oni to však věděti nemohou. Bude se tedy opakovati přibližně stejná historie jako u nás. Místo důkazu bude objevena spousta vět s oním postulátem rovnocenných. Konečně přijde nějaký matematik, který z úctyhodné řady nepodařených pokusů bude veden k domněnce, že onen postulát je vůbec nedokazatelný, jinými slovy, že je libovolně volený. Prvý důsledek této domněnky bude tedy snaha sestrojiti takovou geometrii, kde by onoho postulátu nebylo, po případě nahraditi jej jiným, stejně libovolným, který s ním není ekvivalentní. Pokusí se o to, ale dojde k výsledkům, které jsou tak rozdílné od běžného názoru, že svoje úvahy ani neuveřejní. Snad jim ani sám nevěří. Bude hleděti tedy nějakým způsobem se přesvědčiti, zdali přece praktickým měřením se nedá V. postulát verifikovati. K tomu cíli musí ovšem zvoliti větu, která je s ním rovnocenná, ale neoperuje s výrazy, které případně jsou mimo dosah jeho měření. (Což by mohlo nastati při prodlužování přímek, o nichž je v V. postulátu řeč.) Za takovou větu zvolí třeba tu, která vyjadřuje, že součet úhlů v trojúhelníku je roven 180°. Stanoví tedy praktickým, ale vědecky přesným způsobem součet úhlů v nějakém dostatečně velikém trojúhelníku. Po mnoha měřeních sezná, že součet úhlů není 180°. To je výsledek, který nás nepřekvapí. My víme dokonce, že při teoreticky přesném měření musel by shledati součet úhlů větší než 180°, neboť měřený trojúhelník je sférickým trojúhelníkem a v takovém je vždy součet úhlů větší než 180°. Pro něj to jest ovšem překvapující výsledek. Ve snaze vysvětliti jej dospěje k těmto alternativám:

1. Buď neplatí V. postulát Euklidův, nebo

2. odchylka od 180^0 je způsobena nepřesností praktického měření.

Alternativa prvá jest asi pro něj s teoretického stanoviska lákavější. Aby se jí mohl přidržeti, musí dokázati, že odchylka od 180^0, způsobená jen eventuelní nepřesností praktického měření, je menší než odchylka, kterou naměřil. (Jinými slovy: Musel by dokázati, že naměřená odchylka přesahuje dovolenou hranici pozorovacích chyb, vzniklých z nemožnosti měřiti s naprostou přesností.) Metodami aplikované matematiky dospěl by ke vzorcům, které mu udají dovolené hranice, v nichž se jeho pozorování může odchylovati od teoretických výsledků. Ježto předpokládáme jeho „Zemi" tak velikou, že je mu nemožno v okolí pólu se přesvědčiti o jejím zakřivení (t. j., že není prakticky možno se přesvědčiti, zda měřený trojúhelník je sférický, či rovinný), můžeme připustiti, že pozorovaná odchylka nepřesahuje ony hranice pozorovacích chyb. Praktický důsledek toho je, že onen dvojrozměrný matematik se nemůže s jistotou rozhodnouti, která z obou alternativ je správná. Proto asi řekne: „Pro praktické účely platí geometrie Euklidova. Není však vyloučeno, že při naprosté teoretické přesnosti platí geometrie jiná. My však prozatím nemáme možnosti rozhodnouti o tom, která geometrie vskutku platí."

Uvědomí-li si čtenář, že ona hypotetická, dvojrozměrná bytost žije na kouli, pozná teprve, jak krajně opatrně a zároveň přesně se vyjadřovala. — V uvedené větě je již obsažena skepse o V. postulátu. Leč nyní je nutno z ní činiti důsledky. Prvý důsledek by asi byl tento: „Platí-li jiná geometrie než euklidovská, pak musí to býti taková, která v dostatečně malých rozměrech vede opět jen ke geometrii euklidovské." Neboť měřením se zkonstatovalo, že odchylka součtu úhlů od 180^0 může býti v mezích pozorovacích chyb.

Tento důsledek konsekventně provedený by vedl asi ke stavbě geometrií, v nichž součet úhlů v trojúhelníku by byl buď větší nebo menší než 180^0 a takové geometrie by byly nazvány neeuklidovskými. Při tom by v obou geometriích vystupovala jistá konstanta (v geometrii, kde by byl součet větší než 180^0, byla by tato konstanta v souvislosti s poloměrem koule, na které ony bytosti žijí), která by byla prozatím teoreticky neurčitelná. Vhodnou její volbou by se dospělo ke geometrii euklidovské.

Existovaly by tedy vedle sebe tři rovnoprávné geometrie a obyvatelé by se pravoplatně nemohli rozhodnouti, která z nich je skutečná, a které mají jen teoretický význam. (My ovšem víme, že by to pro ně byla geometrie sférická, kde součet úhlů v trojúhelníku je větší než 180°. Víme to proto, že můžeme chápati trojrozměrně a můžeme tedy činiti rozdíl mezi rovinou a koulí, což pro ně není možno. Ovšem logicky by si asi onu představu získali. To má své matematické zdůvodnění, které zde nemůžeme prováděti.)

To, co jsme zde líčili, byla více méně přesná analogie s úvahami, které prováděli naši matematikové. V celém onom líčení by bylo nutno jen zaměniti slovo „koule“ se slovem „trojrozměrný prostor“. Takto však, jak jsme historii skepse o V. postulátu uvedli, je jistě přístupnější. Proto jsme právě tento postup volili.

Poznámka. Líčení, které jsme uvedli, vztahovalo se jen k pokusům provedeným v době minulé. Chtěli-li bychom je rozšířiti i na dobu přítomnou, museli bychom postupovati asi takto: Místo V. postulátu nastoupí definice rovnoběžnosti směrů (nikoliv přímek, t. j. hlavních kružnic, které rovnoběžny nejsou). Tato definice bude nejdříve zcela libovolná. Matematici, vedeni teoretickou zálibou, udají třeba několik definicí rovnoběžných směrů, z nichž každá povede k jinému pojmu rovnoběžnosti. (To není nikterak překvapující. Vždyť i my pod pojmem rovnoběžnosti na zemi shrnujeme bezděky zcela různé pojmy. Na příklad výrok, že směry kolejí dráhy v koncových bodech téhož pražce jsou rovnoběžné, znamená zcela jiný pojem rovnoběžnosti, než výrok: Směry stínů dvou (k zemi kolmých) tyčí jsou rovnoběžné! Teprve možnost představy trojrozměrného prostoru, v němž předpokládáme splněn V. Euklidův postulát, dovoluje nám s jistotou říci, že rovnoběžnost definovaná druhým výrokem není nikdy rovnoběžností v „obvyklém“ (euklidovském) slova smyslu. Takového korektivu však ony hypotetické, dvojrozměrné bytosti nemají!) Teprve později se sezná, že mezi všemi takovými možnými definicemi je jedna účelná a sice ta, která plyne ze zákonů fysikálních. Tím by se geometrie a fysika nerozlučně spialy a tak by byla získána možnost rozhodnouti jinou cestou o tvaru „Země“. (Einsteinova teorie!)

§ 5. Cesty k neeuklidovské geometrii.

1. Stanovisko axiomatické. V předcházejícím paragrafu jsem se snažil ukázati, jak se dospělo ke skepsi o V. postulátě. Jakmile se tato skepse objevila, bylo nasnadě očekávati, že matematici pokusí se sestrojiti geometrie bez tohoto postulátu. Tak se také stalo. Hned na počátku se však cesty badatelů rozdělily. Jedni nahradili V. postulát jiným a dospěli tak ke geometriím, kterým dnes říkame geometrie neeuklidovské. Druzí místo V. postulátu nezvolili žádný jiný a dospěli tak ke geometriím, o nichž dnes říkáme, že nejsou euklidovské. My se budeme zabývati

jen geometriemi neeuklidovskými. Cestou, kterou jsem právě naznačil k jejich dosažení, brala se většina matematiků a zvláště ti, kteří se dnes pokládají za objevitele neeuklidovské geometrie, t. j. *Lobačevský* a *Bolyai*. Tak na příklad *Lobačevský* vycházel z požadavku: „Bodem a mimo přímku P položeným možno vésti vždy dvě rovnoběžky." Touto cestou vybudoval úplně geometrii, ve které je součet úhlů v trojúhelníku menší než 180^0. Ale historie nešťastných důkazů V. postulátu ukazuje, jak tato cesta je obtížná i pro matematiky a tudíž téměř zcela neschůdná pro laiky. Proto jí nebudeme užívati.

2. Stanovisko diferenciální. Mnohem snazší je cesta, kterou se bral *Riemann*, když prvý dokázal možnost, že v prostoru může součet úhlů v trojúhelníku býti i větší než 180^0. Spočívá ve studiu prostoru v nekonečně malém (diferenciálním) okolí bodu. Tento postup je velmi instruktivní, ale je škoda používati ho jen k úvahám, kterými se budeme obírati, neboť zahrnuje v sobě i možnosti zcela jiných geometrií. To znamená, že jeho početní metody jsou jistě pro naše účely příliš složité. V určitých případech se však velmi zjednoduší; pak je na místě použíti ho i pro naše úvahy speciální.

3. Stanovisko *Kleinovo*. Naším východiskem bude t. zv. princip *Kleinův*, který jsme vlastně již aplikovali v I, 3, odst. 3, když jsme analyticky vyjadřovali úkol geometrie euklidovské v rovině. Tam jsme dovodili, že geometrie euklidovská zabývá se studiem invariantů vzhledem k transformacím (které teď píšeme v poněkud jiné formě)

$$3c)\qquad 'x = x\cos\varphi + y\sin\varphi + \mathring{x}, \qquad 'y = -x\sin\varphi + y\cos\varphi + \mathring{y}$$

Je nasnadě pojem geometrie v rovině zevšeobecniti tak, že místo těchto rovnic speciálních zavedeme rovnice obecnější

$$4)\qquad 'x = a_{11}x + a_{12}y + a_{13} \qquad 'y = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}$$

a řekneme, že úkolem geometrie neeuklidovské (resp. takové, která není euklidovská) je studium invariantů vzhledem k těmto transformacím. (Při tom předpokládáme, že konstantní koeficienty $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}$ jsou takové, že příslušné transformace tvoří grupu; VIII, 5.) Jak je volba podmínek pro koeficienty a důležitá pro různé druhy geometrií, poznáme na příkladě s obsahem trojúhelníka. Dejme tomu, že definujeme obsah trojúhelníka v těchto geometriích tak, jako v geometrii euklidovské (§ 3). Determinant, který jej vyjadřuje analyticky, transformuje se totiž dle rovnice

$$\begin{vmatrix} 'x_1 & 'y_1 & 1 \\ 'x_2 & 'y_2 & 1 \\ 'x_3 & 'y_3 & 1 \end{vmatrix} = (a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}) \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Z toho plyne, že obsah trojúhelníka je jen v takové geometrii neproměnný, jejímž základem jsou právě zmíněné transformace, při čemž koeficienty a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} jsou vázány podmínkou

$$a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21} = 1$$

Již z tohoto příkladu vidíme, jak různou volbou podmínek pro koeficienty a obdržíme zcela různé geometrie. Zvolíme-li speciálně

$$a_{11} = \cos\varphi, \quad a_{12} = \sin\varphi, \quad a_{21} = -\sin\varphi, \quad a_{22} = \cos\varphi,$$

obdržíme geometrii euklidovskou. Nyní čtenář porozumí již významu principu *Kleinova*, který (ve formě pro naše účely upravené) zní:

Je dána rovina a v ní grupa transformací. Úkolem geometrie je studovati vztahy, které se transformacemi této grupy nemění.

Při tom je samozřejmě jedním z prvých úkolů stanovení takových neměnících se výrazů souřadnic dvou bodů (resp. dvou přímek), které je možno nazvati analytickým vyjádřením „vzdálenosti" dvou bodů (resp. „úhlu" dvou přímek). To není sice možno v každé geometrii, ale v geometriích neeuklidovských (a euklidovské) se nám to podaří.

V této práci zvolíme grupu transformací tak, aby součet „úhlů" v trojúhelníku byl buď roven π, nebo menší než π, nebo větší než π.

V prvém případě budeme vedeni ke geometriím, jichž speciálním případem je geometrie euklidovská. Budeme je dle *Kleina* nazývati geometriemi parabolickými. V druhém případě obdržíme geometrii, kterou zkonstruovali *Lobačevský* a *Bolyai.* Tuto geometrii budeme nazývati s *Kleinem* hyperbolickou. V třetím případě dojdeme ke geometrii, která je spojena se jménem *Riemannovým. Klein* pro ni zavedl jméno eliptická, kterého i my budeme používati.

Klein, který tímto způsobem studoval tyto typy geometrií, poznal, že existuje jiný, výhodnější způsob jejich rozeznávání, než onen, který jsme uvedli. Přidržíme se tohoto způsobu, jak čtenář pozná v kap. II—VII.

Poznámka: Chceme-li se říditi principem *Kleinovým*, je výhodné často zavésti jiné souřadnice, než cartézské. Místo abychom bod stanovili dvěma čísly, x, y, stanovíme jej poměrem tří čísel, třeba $z_1 : z_2 : z_3$. Pak říkáme, že z_1, z_2, z_3 jsou homogenní souřadnice bodu. Je zřejmo, že nejen čísla z_1, z_2, z_3 svým poměrem určují bod, ale i čísla $\varrho z_1, \varrho z_2, \varrho z_3$ tentýž bod svým poměrem určují, jen když libovolný koeficient ϱ je od nuly různý. V těchto souřadnicích jsou transformační rovnice, které odpovídají rovnicím 4), celkem tři a obecně je můžeme psáti

$$
\begin{aligned}
\varrho' z_1 &= a_{11} z_1 + a_{12} z_2 + a_{13} z_3 \\
\varrho' z_2 &= a_{21} z_1 + a_{22} z_2 + a_{23} z_3 \\
\varrho' z_3 &= a_{31} z_1 + a_{32} z_2 + a_{33} z_3
\end{aligned}
$$

Jsou-li reálné koeficienty a takového druhu, že tyto transformace tvoří grupu, a je-li jich právě osm nezávislých, říkáme, že tato grupa je obecnou grupou projektivních transformací, nebo též obecnou grupou projektivní.

Kapitola II.

FORMULACE PROBLÉMU.

§ 1. Pohyb euklidovský.

V odstavcích předcházejících jsme zhruba naznačili cestu, jakou se budeme bráti, abychom dospěli ke geometrii neeuklidovské. Jest zřejmo, že si musíme nejdříve ujasniti pojem geometrie euklidovské. K tomu účelu odvodíme nejdříve definici pohybu euklidovského v rovině, poté budeme formulovati problém, co jest geometrie euklidovská. To jest obsahem prvých dvou paragrafů této kapitoly. Zevšeobecněním problému právě naznačeného dospějeme k definici geometrie neeuklidovské.

Nejdříve tedy k definici pohybu euklidovského! Ve shodě s vývody odstavců předcházejících dospějeme k němu tak, že najdeme podgrupu projektivní grupy transformací (VIII, 5), která reprodukuje dvojici bodů isotropických. Uvažujme tedy projektivní grupu transformací v rovině

$$1)\quad \begin{aligned} \varrho' x_1 &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 \\ \varrho' x_2 &= a_{21} x_2 + a_{22} x_1 + a_{23} x_3 \\ \varrho' x_3 &= a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &(a_{ij} \text{ konst. reálné, } i, j = 1, 2, 3) \\ &(\varrho \neq 0 \text{ koef. úměrnosti}) \end{aligned}$$

o determinantu D různém od nuly

$$2)\qquad D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Při tom čísla x_1, x_2, x_3 určují svým poměrem jeden bod. (Souřadnice projektivní, trimetrické. Viz VIII, 3 a VIII, 5, konec.) Nechť tato grupa reprodukuje dvojici bodů z a t o souřadnicích

$$z\,(1, i, 0) \text{ resp. } t\,(1, -i, 0) \qquad (i = \sqrt{-1})$$

Při vhodné volbě souřadného trojúhelníka a jednotkového bodu můžeme vždy dosáhnouti, že $\dfrac{z_1}{z_3}$, $\dfrac{z_2}{z_3}$ resp. $\dfrac{t_1}{t_3}$,

$\frac{t_2}{t_3}$ jsou pravoúhlými cartézskými souřadnicemi bodů z resp. t. Pak jsou tedy body z, t body isotropickými. Zmíněná reprodukce je zřejmě možná dvěma způsoby. Buď

bod z přejde v z a bod t v bod t, nebo
bod z přejde v t a bod t v bod z.

Dle toho musíme uvažovati buď rovnice

3a) $$'z_1 : 'z_2 : 'z_3 = z_1 : z_2 : z_3, \qquad 't_1 : 't_2 : 't_3 = t_1 : t_2 : t_3$$

nebo

3b) $$'z_1 : 'z_2 : 'z_3 = t_1 : t_2 : t_3, \qquad 't_1 : 't_2 : 't_3 = z_1 : z_2 : z_3$$

Ukážeme však, že o obou případech možno uvažovati současně. Dosaďme do rovnic 3) souřadnice bodů z a t a současně uvažme, že souřadnice bodů $'z$ a $'t$ musí vyhovovati rovnicím 1). Získáme tímto způsobem rovnice

4a) $$\frac{1}{i} = \frac{a_{11} + a_{12} i}{a_{21} + a_{22} i}, \qquad -\frac{1}{i} = \frac{a_{11} - a_{12} i}{a_{21} - a_{22} i}$$

4b) $$-\frac{1}{i} = \frac{a_{11} + a_{12} i}{a_{21} + a_{22} i}, \qquad \frac{1}{i} = \frac{a_{11} - a_{12} i}{a_{21} - a_{22} i}$$

4c) $$a_{31} = a_{32} = 0$$

Rovnice 4a), b) můžeme psáti

5a) $$(a_{22} - a_{11}) i + (a_{21} + a_{12}) = 0, \qquad (a_{22} - a_{11}) i - (a_{21} + a_{12}) = 0$$

5b) $$-(a_{22} + a_{11}) i + (a_{12} - a_{21}) = 0, \qquad -(a_{22} + a_{11}) i - (a_{12} - a_{21}) = 0$$

Skýtají nám řešení

6a) $$a_{22} = a_{11}, \qquad -a_{21} = +a_{12}$$

6b) $$-a_{22} = +a_{11}, \qquad a_{21} = a_{12},$$

jež můžeme spojiti zavedením symbolu $\varepsilon = \pm 1$.

7) $$a_{11} = \varepsilon a_{22}, \qquad a_{12} = -\varepsilon a_{21}$$ [1])

Můžeme tak současně studovati obě možnosti. — Rovnice přímky body z a t jest (VIII, 3, 17)

8) $$x_3 = 0.$$

Ježto přímka jest určena právě dvěma body, třeba z a t, a tato dvojice se reprodukuje, musí se i přímka $x_3 = 0$ reprodukovati při transformaci 1).

---

[1]) V obou rovnicích platí současně táž hodnota ε. Buď tedy současně $\varepsilon = +1$ nebo současně $\varepsilon = -1$.

V rovnicích 1) vystupuje sice devět koeficientů a. Ježto však bod jest určen poměrem svých souřadnic, jest v těchto rovnicích podstatný též jen poměr oněch devíti koeficientů (VIII, 4, konec). Můžeme tedy vždy vhodnou volbou jednoho z nich dosáhnouti toho, že determinant D, který dle naší suposice jest rozdílný od nuly, bude roven právě ε:

$$9)\qquad D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \varepsilon$$

Rovnice 4c), 7), 9), jichž je pět, určují pět podmínek pro devět koeficientů. To znamená, že se nám podaří vyjádřiti těchto devět koeficientů pomocí čtyř údajů. Výsledná grupa transformací, která jest podgrupou projektivních transformací (VIII, 5), bude tedy čtyřmocná G_4.[2]) Koeficienty a vyjádříme pomocí čtyř údajů takto:

Dosadíme hodnoty z rovnic 4c) a 7) do rovnice 9). Tak obdržíme

$$\varepsilon\,(a^2_{32} + a^2_{31})\,a_{33} = \varepsilon$$

Vzhledem k (VIII, 1, 3) můžeme tedy položiti

$$a_{11} = \varepsilon\, a_{22} = \frac{\varepsilon'}{c}\cos\varphi$$

$$a_{12} = -\varepsilon\, a_{21} = \frac{\varepsilon''}{c}\sin\varphi \qquad (\varepsilon,\ \varepsilon',\ \varepsilon'' = \pm 1)$$

$$a_{33} = c^2\,(>0)$$

Smluvíme se na tom, že φ může probíhati hodnoty $0 \ldots 2\pi$. Pak dosáhneme všech možných kombinací znamének v předcházejících rovnicích, i když položíme $\varepsilon' = \varepsilon'' = +1$. Za tohoto předpokladu můžeme tedy psáti

$$a_{11} = \varepsilon\, a_{22} = \frac{\cos\varphi}{c}$$

$$a_{12} = -\varepsilon\, a_{21} = \frac{\sin\varphi}{c}$$

$$a_{33} = c^2\,(>0)$$

Tak zavedli jsme dva nové údaje, jimiž jsme vyjádřili koeficienty $a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{21}, a_{33}$. Zbývající koeficienty a_{13}, a_{23}

---

2) Že tato grupa musí býti čtyřmocná, plyne z následující úvahy: Projektivních transformací jest celkem ∞^8 (VIII, 4). Bodů v rovině jest ∞^2 a tudíž párů bodů ∞^4. Musí tedy býti právě ∞^4 transformací projektivních, které reprodukují libovolný pár bodů. Tím máme zaručeno, že podmínka reprodukce bodů z, t neskýtá již jiných relací pro koeficienty a, než takové, jež by bylo lze z rovnic 4c), 7) odvoditi.

můžeme pokládati za poslední dva ze čtyř zmíněných údajů. Dosazením těchto hodnot do rovnic 1) získáme rovnice transformací ve tvaru

$$
10)\quad \boxed{\begin{aligned} \varrho\,'x_1 &= \frac{1}{c}(\cos\varphi\, x_1 + \sin\varphi\, x_2) + a_{13}\, x_3 \\ \varrho\,'x_2 &= \frac{\varepsilon}{c}(-\sin\varphi\, x_1 + \cos\varphi\, x_2) + a_{23}\, x_3 \\ \varrho\,'x_3 &= c^2 x_3 \end{aligned}}
$$

Projektivní grupa G_4 transformací 10) je čtyřmocná a reprodukuje dvojici bodů

$$z(1:i:0) \qquad t(1:-i:0)$$

Tato grupa je podgrupou projektivní grupy osmimocné G_8.

Z grupy G_4 odvodíme dvě důležité podgrupy požadavky

$$c = 1, \text{ resp. } \varphi = 0$$

Obdržíme tak

$$
11)\quad \begin{aligned} \varrho\,'x_1 &= \cos\varphi\, x_1 + \sin\varphi\, x_2 + a_{13}\, x_3 \\ \varrho\,'x_2 &= \varepsilon\,(-\sin\varphi\, x_1 + \cos\varphi\, x_2) + a_{23}\, x_3\,, \\ \varrho\,'x_3 &= x_3 \end{aligned} \quad \text{resp.} \quad 12)\quad \begin{aligned} \varrho\,'x_1 &= \frac{x_1}{c} + a_{13}\, x_3 \\ \varrho\,'x_2 &= \frac{\varepsilon\, x_2}{c} + a_{23}\, x_3 \\ \varrho\,'x_3 &= c^2\, x_3 \end{aligned}
$$

Víme, že nehomogenní souřadnice cartézské jsou zvláštním případem projektivních souřadnic (VIII, 5). Je-li přímka $x_3 = 0$ základního trojúhelníka souřadného v nekonečnu, můžeme přímo položiti při vhodné volbě jednotkového bodu

$$
13)\qquad x = \frac{x_1}{x_3} \qquad y = \frac{x_2}{x_3}
$$

kde x, y znamenají souřadnice cartézské. Dělením prvých dvou rovnic 11) resp. 12) třetí rovnicí z 11) resp. 12) získáme vzhledem k 13)

$$
14)\qquad \begin{aligned} 'x &= \cos\varphi\, x + \sin\varphi\, y + a_{13} \\ 'y &= \varepsilon\,(-\sin\varphi\, x + \cos\varphi\, y) + a_{23} \end{aligned}\,, \quad \text{resp.}
$$

$$
15)\qquad \begin{aligned} 'x &= \frac{x}{c^3} + a \\ 'y &= \frac{\varepsilon\, y}{c^3} + b \end{aligned} \qquad (a,\ b, \text{ konst. reálné})
$$

Jsou-li x, y pravoúhlé souřadnice, pak rovnice 14) představují obecně pohyb v rovině euklidovské, krátce pohyb euklidovský. (Pro $\varepsilon = +1$ otáčení a posunutí, pro $\varepsilon = -1$ otáčení, posunutí a zrcadlení.) Rovnice 15) vedou k podobnosti a posunutí pro $\varepsilon = +1$. Pro $\varepsilon = -1$ vedou k zrcadlové podobnosti a posunutí. Jsou-li cartézské souřadnice pravoúhlé, body z a t stanou se body isotropickými v nekonečnu.

Získané výsledky můžeme shrnouti ve věty:

Euklidovský pohyb vyjádřen je trojmocnou projektivní grupou, která reprodukuje dvojici bodů isotropických.

Každý pohyb euklidovský je takovou projektivní transformací, ale každá projektivní grupa transformací, která reprodukuje dvojici bodů isotropických, není nutně pohybem, neboť i transformace vedoucí k podobnosti tuto dvojici bodů reprodukuje.

V grupě G_4 projektivních transformací je tedy pohyb euklidovský charakterisován transformacemi, které zachovávají délky, obsahy a úhly transformovaných tvarů. Podobnost je charakterisována transformacemi grupy G_4, které zachovávají sice úhly útvarů transformovaných, ale délky, neb obsahy mění ve stálém poměru. (To znamená: Je-li na příklad poměr libovolných dvou si odpovídajících délek útvaru původního a transformovaného $2:3$, je poměr každých dvou si odpovídajících délek v těchto útvarech $2:3$, kdežto obsahy obou těchto rovinných útvarů jsou v poměru $2^2:3^2$.)

Možnost podobných obrazců je, jak později uvidíme, jedním charakteristickým znakem geometrie euklidovské, nebo, jak též říkáme, roviny euklidovské. Poznáme sice později i jiné geometrie (VII), které dovolují obrazce podobné, ale ty se liší zásadně od geometrie euklidovské jinými znaky. (Rovina *Minkowskiho.*)

Poznámka. Vhodnou volbou souřadného systému podařilo se nám interpretovati rovnice 11), 12) jako rovnice euklidovského pohybu, resp. podobnosti. Ponecháme-li obecný systém souřadný (t. j. nejsou-li $\frac{x_1}{x_3}$, $\frac{x_2}{x_3}$ pravoúhlé souřadnice cartézské), obdržíme obecně jinou interpretaci rovnic 11), 12). Body z, t nejsou více body isotropickými. Ale při jisté opatrnosti můžeme výsledky získané pro speciální souřadnice aplikovati na tento obecný případ, zaměníme-li slova „body isotropické“ slovy „imaginárně sdružené body z a t“ (VIII, 3).

§ 2. Úkol geometrie euklidovské.

Nyní jsme si vše připravili, abychom mohli formulovati úkol geometrie euklidovské. Již dříve jsme upozorňovali na úkoly elementární geometrie na střední škole. Tato elementární geometrie studuje vlastnosti obrazců, které se nemění pohybem, a vlastnosti útvarů podobných. Do první skupiny můžeme na příklad zařaditi obvody a obsahy trojúhelníků, čtverců, obdélníků, mnohoúhelníků, některých jednodušších křivek atp. Do skupiny druhé patří poučky o podobných trojúhelnících, kružnicích atd.

K tomu nyní nutno přičísti problémy diferenciální geometrie, která studuje křivosti křivek obecných, a dále některé úkoly algebraické geometrie (na příklad počet průsečíků libovolné přímky s danou křivkou, tvary křivek atd.). Rovněž sem patří některé úvahy počtu integrálního o obsahu křivek. Všechny zde naznačené problémy týkají se vlastností, které se nemění pohybem,[3]) případně vlastností, společných útvarům podobným. Pohyb a podobnost jsou však vyjádřeny rovnicemi 14), 15). Tudíž vlastnosti, které studuje geometrie euklidovská, nemění se při transformacích 14), 15). Takovým vlastnostem, které se nemění při určitých transformacích, říkáme vlastnosti i n v a r i a n t n í vzhledem k těmto transformacím, a matematickému vyjádření těchto invariantních vlastností říkáme i n v a r i a n t y příslušných transformací (VIII, 5). Invarianty rovnic 14) jsou tak zvané invarianty p o h y b o v é, invarianty transformací 15) nazýváme invarianty podobnosti. Vzhledem k tomu, co jsme právě uvedli o úkolech geometrie euklidovské, můžeme říci, že tato geometrie hledá invarianty pohybové a invarianty podobnosti daných útvarů. Teorie, která se zabývá hledáním invariantů, nazývá se teorie invariantů. Můžeme podle toho říci, že geometrie euklidovská je teorií invariantů pohybu a invariantů podobnosti.[4]) Tento důležitý poznatek budeme výslovně formulovati. Vzhledem k tomu, že transformace pohybové a podobnosti jsou obsaženy v rovnicích transformací 10) grupy G_4, můžeme říci:

---

[3]) Tím nemá býti řečeno, že tyto vlastnosti se nemění j e n pohybem! Může se státi, že některé z nich nemění se ani při transformaci projektivní.

[4]) Přeřazení geometrie do teorie invariantů n e n í pouze s l o v n í. Má svůj hluboký význam, neboť teorie invariantů a badání geometrická dála se dříve úplně nezávisle. Obě disciplíny se rozvíjely, aniž by byly uvedeny v soustavnou souvislost. Metody obou disciplin byly zcela odlišné.

Euklidovská geometrie v rovině zabývá se studiem invariantů vzhledem ke grupě transformací, která reprodukuje dvojici bodů isotropických.

Tato grupa G_4 jest podgrupou projektivní grupy G_8. Podle toho jest možno definici hořejší nahraditi následující:

Euklidovská geometrie v rovině je teorií invariantů takové čtyřmocné podgrupy projektivní grupy, která reprodukuje dvojici bodů isotropických.

Nyní jest poměrně již snadná cesta ke geometrii neeuklidovské zevšeobecněním definice předcházející. Dříve však, než se jí budeme obírati, je nutno odstraniti jednu důležitou zásadní námitku. To učiníme v paragrafu následujícím.

§ 3. **Projektivní škála.**

Poslední definicí euklidovské geometrie v paragrafu předcházejícím zařadili jsme tuto jako zvláštní odvětví do geometrie projektivní.[5]) V této geometrii není měření v obvyklém smyslu slova, t. j. měření euklidovského. Přes to však čísla x_1, x_2, x_3 musí svým poměrem určovati bod, mají-li míti geometrický význam. Námitka, o které byla řeč v § předcházejícím, dá se tedy formulovati takto:

Má-li poslední definice euklidovské geometrie v paragrafu předcházejícím míti smysl, musíme věděti, jakým způsobem trojici čísel $x_1 : x_2 : x_3$ přiřadíme bod v rovině bez měření euklidovského.

Že tato námitka není zbytečná, přesvědčí se čtenář sám. Zdánlivě jest totiž odpověď na ni velmi jednoduchá: Čísla x_1, x_2, x_3 jsou vlastně násobky vzdáleností bodu od stran (VIII, 3, odst. 2) základního trojúhelníka. Jsou-li tyto veličiny dány, můžeme tedy elementární konstrukcí sestrojiti bod $x_1 : x_2 : x_3$!

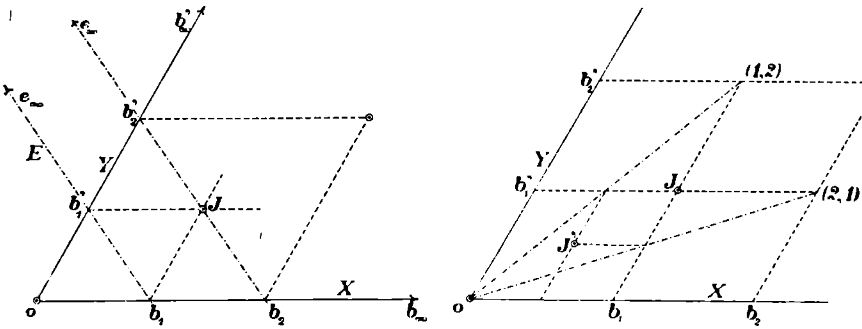
Chyba této odpovědi tkví v tom, že operuje s obvyklým pojmem *vzdálenosti*, která jest euklidovská.

---

[5]) Geometrie projektivní zabývá se studiem invariantů vzhledem ke grupě projektivní G_8 transformací 1). Ostatně viz § následující.

V následujících řádcích odstraníme svrchu uvedenou námitku tak, že ukážeme, jak je možno k poměru $x_1 : x_2 : x_3$ sestrojiti bod bez použití pojmů metrických. Konstrukce ta v podstatě pochází od Möbiusa a nazývá se konstrukce síťová. Při této konstrukci omezíme se na poměr $x_1 : x_2 : x_3$ racionální.[6])

Nejdříve ukážeme, jak v euklidovské rovině souřadnicím $\frac{x_1}{x_3} = x$, $\frac{x_2}{x_3} = y$ můžeme přiřaditi bod bez měření, jen když víme, kde jest bod jednotkový J.



Obr. 1a). Obr. 1b).

Buďtež na obraze 1a) přímky X a Y souřadné osy cartézské, bod J bodem jednotkovým. Spojením bodu J s úběžným[6a]) bodem b'_∞ přímky Y získáme přímku, která protne X v bodě b_1 o souřadnicích $\frac{x_1}{x_3} = 1$, $\frac{x_2}{x_3} = 0$. Podobně získáme bod b_1' o souřadnicích (0, 1). Spojíme-li úběžný bod e přímky E s bodem J, získáme přímku, která protne osy v bodech b_2 (2, 0), b_2' (0, 2). Pokračujeme-li tak dále, získáme na ose X body $b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots b_m, \ldots$ o souřadnicích (1, 0), (2, 0), (3, 0), (4, 0) ... (m, 0) ..., a na ose Y body $b'_1, b'_2, b'_3, b'_4, \ldots b'_n, \ldots$ o souřadnicích (0, 1), (0, 2), (0, 3), (0, 4) ... (0, n) ... Máme-li nyní sestrojiti bod o souřadnicích $\frac{x_1}{x_3} = m$,

[6]) Jest možno však dokázati, že uvedenou konstrukcí můžeme v našem případě i iracionálnímu poměru $x_1 : x_2 : x_3$ přiřaditi bod.

[6a]) Prozatím užíváme označení „úběžný“ bod pro bod na přímce „v nekonečnu“. Přesnou definici a název obvyklý v analytické geometrii („nevlastní bod“) viz v (III, 4).

$\frac{x_2}{x_3} = n$ (m, n celá čísla), stanovíme průsečík přímek $b'_\infty b_m$ a $b_\infty b'_n$. Ten má udané souřadnice. Takovým způsobem můžeme sestrojiti bod v rovině, jehož souřadnice $x = \frac{x_1}{x_3}$, $y = \frac{y_1}{y_3}$ jsou celá čísla. Tuto zcela elementární konstrukci nemusíme dále prováděti. Obrátíme se hned k zobrazení bodů, jichž souřadnice jsou čísla lomená, na příklad $\frac{x_1}{x_3} = \frac{m}{2}$, $\frac{x_2}{x_3} = \frac{n}{2}$, kde m a n jsou celá čísla. (Obr. 1*b*.) Sestrojíme nejdříve bod J' o souřadnicích $\frac{x_1}{x_3} = \frac{1}{2}$, $\frac{x_2}{x_3} = \frac{1}{2}$. Užitím tohoto pak můžeme sestrojiti bod $\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)$ zcela obdobně, jako v případě předcházejícím jsme užitím bodu J stanovili bod (m, n). Bod J' sestrojíme snadno podle obrázku 1*b*). Nyní snad již je zřejmo, jak ke třem celým číslům m, n, p sestrojíme bod, jehož cartézské souřadnice jsou $\frac{x_1}{x_3} = \frac{m}{p}$, $\frac{x_2}{x_3} = \frac{n}{p}$.

Všimněme si ještě jedné věci. Budiž a nějaký libovolný bod o cartézských souřadnicích $\frac{x_1}{x_3}$, $\frac{x_2}{x_3}$. Tyto souřadnice můžeme interpretovati užitím dvojpoměrů. Tak na příklad je

$$\frac{x_1}{x_3} = (ob_\infty xb_1), \qquad \text{(VIII, 5, pozn.)}$$

kde x značí bod na ose X o souřadnicích $\left(\frac{x_1}{x_3}, 0\right)$, a podobně

$$\frac{x_2}{x_3} = (ob'_\infty yb'_1),$$

při čemž y značí bod na ose Y o souřadnicích $\left(0, \frac{x_2}{x_3}\right)$. Tyto dvojpoměry můžeme též vyjádřiti užitím dvojpoměrů přímek. Tak na příklad jest

$$\left(\frac{x_1}{x_3} =\right) (ob_\infty xb_1) = b'_\infty \mid (ob_\infty aJ).$$

To znamená: dvojpoměr $(ob_\infty xb_1)$ je roven dvojpoměru přímek, které z bodu b'_∞ promítají body o, b_∞, a, J. Podobně jest

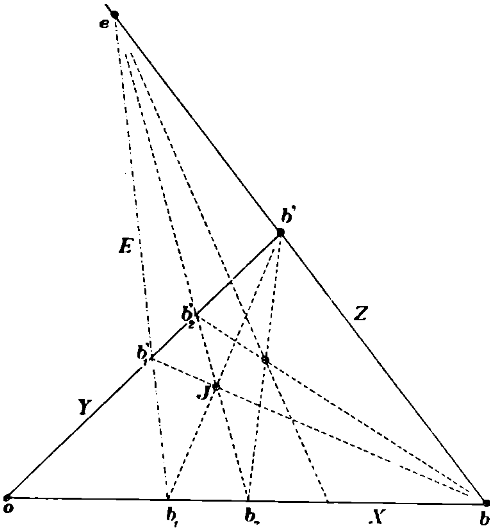
$$\left(\frac{x_2}{x_3}=\right)(ob'_\infty yb'_1)=b_\infty \mid (ob'_\infty aJ).$$

Analogickou konstrukci pro bod o racionálném poměru souřadnic $x_1 : x_2 : x_3$ provedeme nyní pro případ, že souřadný trojúhelník je XYZ (obr. 2a). Při tom předpokládáme, že jeho vrcholy mají souřadnice

$$\begin{aligned} o \ldots \; & x_1 : x_2 : x_3 = 0 : 0 : 1 \\ b \ldots \; & x_1 : x_2 : x_3 = 1 : 0 : 0 \\ b' \ldots \; & x_1 : x_2 : x_3 = 0 : 1 : 0 \end{aligned}$$

Užijeme k tomu těchto vět:

„Jsou-li dvě roviny Σ a Σ' projektivně příbuzné (VIII, 4), pak libovolnému bodu roviny Σ odpovídá jeden a jen jeden bod roviny Σ (a obráceně), libovolné přímce roviny Σ od-



Obr. 2a).

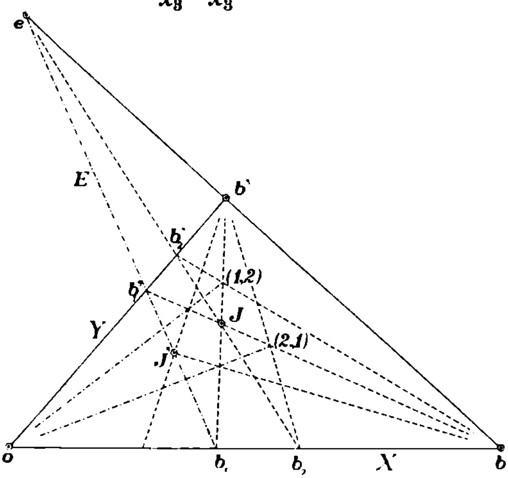
povídá jedna a jen jedna přímka roviny Σ' (a obráceně) a dvojpoměr libovolných čtyř bodů, neb přímek roviny Σ je roven dvojpoměru odpovídajících čtyř bodů, neb přímek roviny Σ'."

„Dvě roviny učiníme projektivně příbuzné, přiřadíme-li čtyřem libovolným bodům (z nichž žádné tři neleží na přímce) roviny Σ čtyři libovolné body (z nichž žádné tři neleží na přímce) roviny Σ'."

Pak totiž můžeme podle prvé věty sestrojiti vždy k libovolnému bodu roviny Σ odpovídající bod roviny Σ'. — K těmto dvěma větám připojíme ještě třetí.

„Projektivní souřadnice nějakého bodu můžeme vždy vyjádřiti užitím dvojpoměrů přímek, které jsou určeny bodem zkoumaným, vrcholy souřadného trojúhelníka a bodem jednotkovým“ (VIII, 5, konec).

V těchto třech větách je již skryt postup, kterým se budeme bráti. Nejdříve si myslíme rovinu obrazu 1*a*) (kterou nazveme Σ) projektivně přiřazenou rovině obrazu 2*a*) (kterou nazveme Σ'). Projektivní příbuznost obou rovin získáme tak, že bodům $o, b_\infty, b'_\infty, J$ roviny Σ přiřadíme body o, b, b', J roviny Σ'. Souřadnice $\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}$ každého z těchto čtyř stejně



Obr. 2*b*).

označených bodů jsou v obou rovinách stejné. Máme-li nyní v rovině Σ' sestrojiti bod a o souřadnicích

$$x_1 : x_2 : x_3 = m : n : p \qquad (m, n, p \text{ celá čísla})$$

sestrojíme způsobem dříve naznačeným v rovině Σ bod a, jehož souřadnice jsou $\frac{x_1}{x_3} = \frac{m}{p}, \frac{x_2}{x_3} = \frac{n}{p}$. Tomuto bodu přiřadíme bod a v rovině Σ'. Jeho projektivní souřadnice musí býti právě $\frac{x_1}{x_3} = \frac{m}{p}, \frac{x_2}{x_3} = \frac{n}{p}$. To snadno nahlédneme, uvážíme-li, že *a)* souřadnice $\frac{x_1}{x_3}$, $\frac{x_2}{x_3}$ bodu v rovině Σ můžeme vyjádřiti dvojpoměry

$$\left(\frac{m}{p}=\right)\ \frac{x_1}{x_3}=b'_\infty \mid (ob_\infty aJ),\ \left(\frac{n}{p}=\right)\ \frac{x_2}{x_3}=b_\infty \mid (ob'_\infty aJ),$$

b) přímky $b_\infty o, b'_\infty o, b'_\infty b_\infty, b'_\infty a, b_\infty a, b_\infty J, b'_\infty J$ roviny Σ odpovídají v projektivní příbuznosti obou rovin přímkám $X, Y, Z, b'a \equiv P', ba \equiv P, bJ \equiv I, b'J \equiv I'$ v rovině Σ' a tudíž

c) dvojpoměry

$$b'_\infty \mid (ob_\infty aJ) = (YZP'I'),\quad b_\infty \mid (ob'_\infty aJ) = (XZPI)$$

Ale dvojpoměry $(YZP'I')$, $(XZPI)$ vyjadřují právě projektivní souřadnice bodu a v rovině Σ'. Skutečně tedy souřadnice bodu a jsou právě

$$x_1 : x_2 : x_3 = m : n : p$$

Sestrojíme tedy nejdříve v rovině Σ' body $b_1, b_2, \ldots$; $b'_1, b'_2 \ldots$ o souřadnicích projektivních $(\varrho : 0 : \varrho)$, $(2\varrho : 0 : \varrho), \ldots$; $(0 : \varrho : \varrho)$, $(0 : 2\varrho : \varrho), \ldots$ $(\varrho \neq 0)$. Body b'_1, b_1 obdržíme jako průsečíky přímek $bJ, b'J$ s osami Y, X.[7]) Body b'_2, b_2 obdržíme jako průsečíky přímky Je s osami Y, X. Při tom bod e je průsečíkem přímky $b_1 b'_1$ s osou Z a J bod jednotkový.

Sestrojivše tímto způsobem body $b_1, b_2 \ldots$; $b'_1, b'_2 \ldots$, můžeme jich užitím snadno sestrojiti body, které mají souřadnice

$$x_1 : x_2 : x_3 = m : n : 1 \qquad (m, n \text{ celá čísla})$$

Tak na příklad body o souřadnicích

$$x_1 : x_2 : x_3 = 2 : 1 : 1, \qquad x_1 : x_2 : x_3 = 2 : 2 : 1$$

jsou průsečíky přímek

$$bb'_1 \text{ a } b'b_2, \qquad bb'_2 \text{ a } b'b_2$$

Abychom sestrojili bod o souřadnicích $m : n : 2$, stanovíme nejdříve bod J', o souřadnicích $1 : 1 : 2$ (obr. 2*b*). Čtenář jistě z analogie obr. 1*b* pochopí jeho konstrukci v obr. 2*b*. Užitím tohoto bodu stanovíme bod o souřadnicích $m : n : 2$ analogicky tak, jako jsme užitím bodu J v obr. 2*a* stano-

---

[7]) Doporučuji čtenáři, aby alespoň v tomto případě se početně přesvědčil, že body b_1, b'_1 takto získané mají skutečně souřadnice

$$b_1 (1 : 0 : 1), \quad b'_1 (0 : 1 : 1)$$

vili bod o souřadnicích $m:n:1$. Pokračujíce tak dále, získáme konečně konstrukci bodu o souřadnicích

$$x_1:x_2:x_3=m:n:p \qquad (m, n, p \text{ celá čísla})$$

Takto jsme tedy racionálnímu poměru $m:n:p$ přiřadili jistý bod v rovině Σ' bez obvyklého (euklidovského) měření a bez užití pojmu rovnoběžek a tedy i bez užití V. postulátu *Euklidova.* Zbývalo by ještě dokázati, že i v případě irracionálního poměru $m:n:p$ můžeme v rovině Σ' najíti odpovídající bod. To však přesahuje meze této — více méně populární — knížky a proto se tímto důkazem nebudeme zabývati, a námitku, na počátku tohoto paragrafu učiněnou, budeme považovati za odstraněnou.[8])

Poznámka: Tuto námitku učinil prvý Cayley. Ježto nevěděl, jak ji odstraniti, zdráhal se interpretovati svoje úvahy „Sixth memoir upon quantics“ (1859) jako úvahy o neeuklidovské geometrii.

§ 4. Definice geometrie neeuklidovské.

Podobně, jako jsme ve druhém paragrafu definovali geometrii euklidovskou, můžeme nyní definovati geometrie, které jsou jiné než euklidovské.

Geometrie, která studuje invarianty vzhledem ke každé jiné grupě, než je grupa transformací, reprodukující dvojici bodů isotropických, je jiná než euklidovská (Toto jest v podstatě t. zv. princip *Kleinův.*) Z této definice je zřejmo, že existuje veliké množství geometrií podle toho, jaká grupa jest považována za základ pro příslušnou teorii invariantů. Zmíníme se zde alespoň jménem o některých nejdůležitějších. Tak v prvé řadě jest geometrie projektivní. Ta studuje vlastnosti útvarů, které se nemění při grupě G_8 projektivních transformací. Je tedy ekvivalentní s teorií projektivních invariantů (VIII, 5) a je to, s tohoto hlediska, geometrie nejobecnější. Méně obecná jest již geometrie affinní. Podkladem jejím jest grupa G_6 projektivních transformací, které reprodukují danou přímku (zpravidla to bývá přímka úběžná). Studium invariantů affinních jest jejím úkolem. Když předpokládáme, že body samodružné na této pevné přímce v nekonečnu jsou právě body isotropické, obdržíme grupu G_4, vedoucí

---

[8]) V tomto paragrafu jsme mlčky předpokládali splněnu větu *Desarguesovu,* která je při rovinných úvahách postulátem. Je možno ji dokázati jen užitím prostorových konstrukcí. Jako postulát pro rovinnou geometrii vyslovil ji *Klein.*

ke geometrii euklidovské.[9]) Jiná geometrie, která jest v podstatě geometrií *Laguerreovou*, studuje invarianty vzhledem ke grupě transformací 1) (při $\varrho = 1$), které reprodukují výraz $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$. (Zmiňujeme se zde o ní proto, že její výsledky možno bez obtíží aplikovati na prostor *Minkovskiho* (VII), který je tak důležitý ve speciální teorii relativity.)

Takovým způsobem mohli bychom do nekonečna voliti určité grupy a příslušnou jim teorii invariantů prohlásiti za geometrii. My si z těchto grup vybereme ty, které v jistém smyslu stojí nejblíže grupě geometrie euklidovské. K tomu cíli uvědomíme si, že body isotropické jsou vlastně složenou (VIII, 6, odst. 4) kuželosečkou. Grupa, která jest podkladem geometrie euklidovské, reprodukuje tedy složenou kuželosečku. Jest nasnadě zevšeobecniti euklidovskou geometrii tak, že zvolíme za základ grupu, která reprodukuje obecnou kuželosečku (jež ve zvláštním případě může býti i kuželosečkou složenou). Taková grupa bude podkladem našich úvah:

Budeme se zabývati geometrií, jejímž úkolem je studium invariantů vzhledem k projektivní grupě, která reprodukuje danou kuželosečku. Takovou geometrii nazveme neeuklidovskou.

Při tom pod slovem „kuželosečka“ budeme vždy rozuměti jen průsečnou křivku reálné roviny s reálnou plochou druhého stupně.

Na prvý pohled jest patrno, že jsou možné tři druhy takových geometrií podle toho, je-li příslušná kuželosečka

A) reálná jednoduchá,

B) imaginárná jednoduchá,

C) složená (reálná nebo imaginárná).

Geometrii sub *A)* nazýváme geometrií hyperbolickou, geometrii sub *B)* eliptickou a konečně geometrii sub *C)* parabolickou. V geometriích parabolických jest obsažena geometrie euklidovská jako zvláštní případ.

---

[9]) Projektivním invariantem jest na příklad rovnice, vyjadřující, že dva směry jsou sdruženy vzhledem k určité kuželosečce. Affinním invariantem je třeba rovnice, která vyjadřuje, že sdružené směry ke všem směrům libovolné paraboly jsou rovnoběžné. Euklidovský invariant jest rovnice, která určuje, kdy dva směry sdružené vzhledem k libovolné kuželosečce jsou kolmé. — Definice geometrií, udaných v textu, dají se ovšem rozšířiti bez obtíží na prostor (VII, 5).

Veškeré případy zde uvedené probereme. Při tom počneme geometrií v útvaru jednorozměrném (t. j. řada bodů na přímce nebo svazek přímek bodem). To má svoje důvody. Neboť v geometrii útvaru jednorozměrného budeme — ve shodě s hořejší definicí — žádati, aby dva jeho elementy (t. j. body na přímce, resp. paprsky ve svazku) se reprodukovaly. Totéž však žádali jsme při odvozování geometrie euklidovské v rovině. Jistě tedy budou některé výsledky těchto geometrií alespoň formálně upomínati na příslušné problémy geometrie euklidovské. Vzorec *Laguerreův* je toho nejlepším dokladem. Odvodíme jej v následující kapitole.

Kapitola III.

JEDNOROZMĚRNÝ ÚTVAR NEEUKLIDOVSKÝ.

§ 1. Vzorec Laguerreův a jeho interpretace.

V této kapitole budeme se zabývati geometrií neeuklidovskou na přímce, resp. ve svazku paprsků bodem. Bude jistě lepšímu porozumění na prospěch začíti s úvahami, které sice nejsou zcela obecné, ale mají tu výhodu, že je můžeme aplikovati jak na geometrii euklidovskou, tak na geometrii neeuklidovskou. Nejvíce příležitostí k takovým oboustranným úvahám skýtá vzorec *Laguerreův*, vyjadřující úhel dvou přímek.

Uvažujme svazek přímek P, procházejících nějakým pevným bodem p. Jednotlivé přímky v tomto svazku označíme ${}^1P$, ${}^2P$, ${}^3P\ldots$, obecně ${}^iP$, ${}^jP$. Libovolná přímka ${}^jP$ tohoto svazku budiž určena úhlem, který svírá s přímkou ${}^0P$, „přímkou základní". Úhel ten označíme φ_j. Můžeme tedy za souřadnice přímky P ve svazku vzíti poměr veličin

$$x_1 = \sigma \sin \varphi_j \qquad x_2 = \sigma \cos \varphi_j ,$$

kde σ jest libovolná, od nuly různá konstanta. Pak skutečně $\frac{x_1}{x_2}$ určuje přímku jednoznačně. V tomto svazku přímek můžeme každé přímce ${}^jP$ přiřaditi přímku ${}'{}^jP$, která z této vznikne otočením o nějaký — pro všechny přímky ${}^jP$ stejný — úhel. Již v předcházející kapitole jsme dovodili, že každý euklidovský pohyb je vyjádřen projektivní transformací, která reprodukuje dvojici bodů isotropických. Výsledky tam odvozené platily pro obor t e r n á r n í (t. j. pro obor tří homogenních souřadnic x_1, x_2, x_3 (VIII, 3)). Jsou však při vhodné interpretaci platny i pro obor b i n á r n í (t. j. pro obor dvou homogenních souřadnic x_1, x_2). Ježto v našem případě se jedná jen o **otáčení přímek kol pevného bodu**, je zřejmo, že při tomto pohybu reprodukují se přímky **isotropické**, které spojují pevný bod s body isotropickými. Je tedy otáčení projektivní transformací

$$1)\quad \begin{aligned} \varrho' x_1 &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \\ \varrho' x_2 &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \end{aligned} \qquad (D = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = 1, \quad \varrho \neq 0 \text{ koef. úměrn.}),$$

která reprodukuje přímky isotropické o rovnici

$$2)\qquad x^2_1 + x^2_2 = 0$$

(O transformacích, vedoucích k podobnosti, se v našem případě nemůže jednati.) Řešením rovnice 2) obdržíme přímky isotropické Z, T o souřadnicích

$$Z \ldots \varrho z_1 = 1,\ \varrho z_2 = i \qquad T \ldots \varrho t_1 = 1,\ \varrho t_2 = -i$$

Zvolme nyní dvě libovolné přímky ^1P, ^2P ve svazku o souřadnicích

$$^1P(x_1, x_2) \qquad ^2P(y_1, y_2)$$

a stanovme **dvojpoměr** $(^1P\,^2P\,Z\,T)$ (VIII, 5, 26). Víme, že jest dán rovnicí

$$(^1P\,^2P\,Z\,T) = \frac{[x_1 z_2]\,[y_1 t_2]}{[y_1 z_2]\,[x_1 t_2]} = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ t_1 & t_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ t_1 & t_2 \end{vmatrix}}$$

Dosazením souřadnic přímek ^1P, ^2P, Z, T do této rovnice získáme

$$3)\qquad (^1P\,^2P\,Z\,T) = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 - i(x_1 y_2 - x_2 y_1)}{x_1 y_1 + x_2 y_2 + i(x_1 y_2 - x_2 y_1)}$$

Označme ω_{12} úhel přímek ^1P, ^2P. Ježto můžeme položiti

$$\begin{aligned} x_1 &= \sigma \sin \varphi_1 \\ x_2 &= \sigma \cos \varphi_1 \end{aligned}, \quad \begin{aligned} y_1 &= \sigma' \sin \varphi_2 \\ y_2 &= \sigma' \cos \varphi_2 \end{aligned}, \quad \omega_{12} = \varphi_1 - \varphi_2,$$

obdržíme dosazením do 3)

$$(^1P\,^2P\,Z\,T) = \frac{\cos \omega_{12} - i \sin \omega_{12}}{\cos \omega_{12} + i \sin \omega_{12}}$$ [1]

Tato rovnice se zjednoduší na

$$(^1P\,^2P\,Z\,T) = \frac{e^{-i\omega_{12}}}{e^{i\omega_{12}}} = e^{-2i\omega_{12}}$$

(vzhledem k VIII, 1, 3).

---

[1]) Pro pohodlí čtenářovo uvádím vzorce, jichž při tomto dosazení nutno použíti:

$$\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \cos \omega_{12} = \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2$$
$$\sin(\varphi_1 - \varphi_2) = \sin \omega_{12} = \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \cos \varphi_1 \sin \varphi_2$$

Jejím logaritmováním obdržíme

$$\log ({}^1P\,{}^2P\,Z\,T) = -2i\omega_{12},$$

neboli

4) $$\boxed{\omega_{12} = \frac{i}{2}\log ({}^1P\,{}^2P\,Z\,T)}$$

To jest vzorec *Laguerreův*, vyjadřující úhel dvou přímek užitím dvojpoměru, který tvoří tyto dvě přímky a přímky isotropické. Dvojpoměr jest projektivním invariantem (VIII, 5) a tím spíše tedy invariantem vzhledem k otáčení, které jest speciální projektivní transformací.[2]) Z elementární geometrie jest známo, že horní mez hodnoty úhlu ve svazku přímek jest

5) $$\omega_{max} = \pi$$

Dále víme, že platí mezi úhly ω_{12}, ω_{23}, ω_{13} přímek ${}^1P, {}^2P, {}^3P$ vztahy

6) $$\omega_{12} + \omega_{23} = \omega_{13}; \qquad \omega_{11} = \omega_{22} = \omega_{33} = 0; \qquad \omega_{ij} = -\omega_{ji}$$

Rovnice 4), 5), 6) poskytnou nám zajímavý výsledek při jiné interpretaci vzorce *Laguerreova,* kterou ihned provedeme.

Až dosud souřadnice x_1, x_2 znamenaly nám údaje pro přímky ve svazku. Není však příčiny, pro kterou bychom je nemohli interpretovati jako souřadnice bodu na přímce! V počtu se tím nic nezmění, jen interpretace rovnic bude jiná. Tak v prvé řadě transformace 1) znamenají projektivní přiřazení bodů na téže přímce. Mohli bychom říci, že znamenají jakýsi „pohyb“ bodu na přímce. Jako „pohyb“ však budeme definovati transformace 1) jen tenkráte, když reprodukují body, vyhovující rovnici 2). (Tyto body ovšem nemají obecně naprosto ničeho společného s isotropickými body roviny euklidovské.) Pak ale takto definovaný pohyb na přímce zcela jistě není euklidovský, neboť euklidovský pohyb na přímce jest jen posunutí, které reprodukuje jediný bod na přímce a to t. zv. bod nevlastní (v. dále § 4). Můžeme si jej však snadno znázorniti takto: Svazek přímek protneme nějakou libovolnou přímkou, neprocházející vrcholem p svazku. Tak obdržíme na přímce řadu bodovou.

---

[2]) To znamená: Svírají-li dvě přímky úhel ω_{12} a otočím-li je současně, svírají po otočení opět úhel ω_{12}. — Vzorec 4) jest invariantem vzhledem k obecné transformaci 1). Přes to však přímky ${}^{\prime 1}P$, ${}^{\prime 2}P$, přímkám ${}^1P$, ${}^2P$ takovou transformací 1) přiřazené nesvírají úhel ω_{12}, vždyť o úhlu v našem smyslu slova nelze mluviti, nejsou-li paprsky Z, T pevné!

Otáčí-li se přímka svazku, pohybuje se její průsečík s onou přímkou „pohybem“ právě definovaným. Funkci ω_{12} prohlásíme za „vzdálenost“ dvou bodů. Můžeme tak učiniti, neboť tato funkce splňuje podmínky na vzdálenost kladené: Jest invariantní vzhledem k „pohybu“, vyhovuje základním rovnicím 6), které, jak víme, jsou splněny také pro „obyčejnou“ vzdálenost a není identicky rovna nule pro dva body. Zajímavé jest, že horní mez pro funkci „vzdálenosti“, t. j. pro funkci ω na zkoumané přímce je podle 5) rovna π a nemůže tudíž libovolně vzrůstati pro reálné body, jak jsme zvyklí u přímky „obyčejné“ (euklidovské).

Tyto interpretace vzorce 4) posloužily nám jako speciální ukázky postupu, kterým možno dospěti ke geometrii neeuklidovské. V dalších paragrafech tento postup zevšeobecníme.

§ 2. **Tři druhy neeuklidovské geometrie.**

1. Definice. V tomto paragrafu podáme přesnou formulaci problému neeuklidovské geometrie na přímce, resp. ve svazku přímek. Jest výhodné zavésti společné pojmenování pro oba útvary, abychom je mohli zkoumati společně. Bodům na přímce, resp. přímkám svazku, budeme říkati společným jménem elementy. Pro přímku, na níž se body nalézají, resp. pro svazek, v němž se přímky nalézají, zachováme společný název útvar lineární (nebo jen stručně „útvar“).

Chceme nyní obecně formulovati problém neeuklidovské geometrie jednorozměrného útvaru zevšeobecněním postupu předcházejícího paragrafu. Zrekapitulujme krátce tento postup! Nejdříve jsme stanovili pohyb elementů v útvaru jako projektivní transformaci, která reprodukuje určité elementy o souřadnicích $(i, 1)$ $(-i, 1)$, načež jsme našli invariant takové projektivní transformace. Zevšeobecnění této metody může spočívati v tom, že zvolíme zcela obecně ony elementy, které se mají transformací reprodukovati. Pak budeme hledati invarianty vzhledem k takové projektivní transformaci. — Buďtež, jako v paragrafech předcházejících, x_1, x_2 projektivní souřadnice elementu (VIII, 5, konec).

V tom případě kvadratická rovnice

$$g_{11} x_1^2 + 2 g_{12} x_1 x_2 + g_{22} x_2^2 = 0 \qquad (g_{ik} \text{ reálné}) \tag{7}$$

určuje dva elementy o souřadnicích

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{-g_{12} + \sqrt{g^2_{12} - g_{11} g_{22}}}{g_{11}} \qquad \frac{x'_1}{x'_2} = \frac{-g_{12} - \sqrt{g^2_{12} - g_{11} g_{22}}}{g_{11}}$$

Nechť právě dvojice těchto elementů se při transformaci 1) reprodukuje. Takovým elementům budeme říkati elementy a b s o l u t n í. Mezi všemi elementy daného útvaru mají zvláštní postavení.[3])

Souřadnice absolutních elementů budeme vždy psáti typy řeckými $\xi\,(\xi_1, \xi_2)$ a $\xi'\,(\xi'_1, \xi'_2)$. Rovnici 7) přepíšeme na tvar

$$g_{11} \xi^2_1 + 2\, g_{12} \xi_1 \xi_2 + g_{22} \xi^2_2 = 0$$

Předpokládáme, že jejím řešením obdržíme právě hodnoty $\frac{\xi_1}{\xi_2}$, $\frac{\xi'_1}{\xi'_2}$. Grupa transformací 1), které reprodukují tuto rovnici (až na konstantní faktor), jest j e d n o m o c n á. Důkaz ponechávám čtenáři.

Takto jsme si vše připravili pro konečnou definici problému neeuklidovské geometrie jednorozměrného útvaru:

N e e u k l i d o v s k á g e o m e t r i e j e d n o r o z m ě r n é h o ú t v a r u s t u d u j e i n v a r i a n t y p r o j e k t i v n í j e d n o m o c n é g r u p y t r a n s f o r m a c í

1) $$\begin{aligned} \varrho\, 'x_1 &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \\ \varrho\, 'x_2 &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \end{aligned} \qquad D = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \neq 0,$$

k t e r é r e p r o d u k u j í d v o j i c i a b s o l u t n í c h e l e m e n t ů, d a n o u r o v n i c í

8) $$f_{\xi\xi} \equiv g_{11} \xi^2_1 + 2 g_{12} \xi_1 \xi_2 + g_{22} \xi^2_2 = 0. \qquad (g_{ik} \text{ reálné})$$

2. T ř i d r u h y n e e u k l i d o v s k é g e o m e t r i e j e d n o r o z m ě r n é h o ú t v a r u. Řešením rovnice 8) obdržíme pro souřadnice absolutních elementů výrazy

$$\frac{\xi_1}{\xi_2} = \frac{-g_{12} + \sqrt{g^2_{12} - g_{11} g_{22}}}{g_{11}} \qquad \frac{\xi'_1}{\xi'_2} = \frac{-g_{12} - \sqrt{g^2_{12} - g_{11} g_{22}}}{g_{11}}$$

Jest ihned zřejmo, že tyto absolutní elementy mohou být trojího druhu. Buď jsou

a) reálné rozdílné, když $g^2_{12} - g_{11} g_{22} > 0$, nebo

b) imaginárné, sdružené, když $g^2_{12} - g_{11} g_{22} < 0$, nebo

c) reálné, splývající v jeden element, když $g^2_{12} - g_{11} g_{22} = 0$.

---

[3]) Viz na příklad (III, 4).

Dle těchto alternativ rozeznáváme tři druhy geometrií jednorozměrného útvaru: Geometrii hyperbolickou [sub *a)*], eliptickou [sub *b)*] a konečně parabolickou [sub *c)*]. Budeme mluviti kratčeji o jednorozměrném útvaru hyperbolickém, eliptickém, parabolickém. (Toto pojmenování pochází od *Kleina*.) — Jak uvidíme, bude nutno každý z těchto útvarů podrobiti úvaze zvláštní, což učiníme v paragrafech následujících. Existují však alespoň formální analogie mezi vzorci těchto tří geometrií. Proto odvodíme některé vzorce ihned, bez ohledu na jakost absolutních elementů, a teprve později při studiu jednotlivých útvarů je budeme interpretovati zvláště.

3. Míra dvou elementů. Základní vzorec, společný všem třem útvarům, jest vzorec pro míru dvou elementů. Při tom pod slovem míra rozumíme buď (neeuklidovskou) vzdálenost dvou bodů, když útvarem je přímka, a elementy body, nebo (neeuklidovský) úhel dvou přímek, když útvarem jest svazek a elementy přímky svazku. Míru dvou elementů budeme obecně důsledně značiti μ. Je-li tato míra vzdáleností dvou bodů, označíme ji m, pro míru, která jest úhlem, zavedeme označení M. Chtěli-li bychom zdůrazniti, že se jedná o míru (vzdálenost, úhel) dvou elementů ${}^ix$ $({}^ix_1, {}^ix_2)$, ${}^jx$ $({}^jx_1, {}^jx_2)$, užili bychom některých z těchto označení

$$\begin{array}{ll} \mu_{ij}\,, & \mu({}^ix, {}^jx) \\ m_{ij}\,, & m({}^ix, {}^jx) \\ M_{ij}\,, & M({}^ix, {}^jx) \end{array}$$

Má-li nějaká funkce býti měrou, žádáme (řídíce se analogií s „obyčejnou“ vzdáleností), aby vyhovovala těmto požadavkům:

A) Jest invariantem vzhledem ke grupě „pohybů“ 1).

B) Pro míry tří elementů musí vždy býti splněna rovnice

9) $$\mu_{12} + \mu_{23} = \mu_{13}$$

a z ní plynoucí

10) $$\mu_{jj} = 0 \qquad \mu_{ij} = -\mu_{ji}$$

C) Nesmí býti identicky rovna nule pro dva rozdílné elementy.

Najdeme funkci, která těmto požadavkům vyhovuje, načež ji prohlásíme za míru. Funkce, která splňuje podmínku *A)*, jest dvojpoměr čtyř elementů. Studujme jej tedy blíže! Buďtež dány dva elementy $x(x_1, x_2)$, $y(y_1, y_2)$.

Stanovme dvojpoměr $(x\, y\, \xi\, \xi')$! Mohli bychom postupovati tak, jako dříve: Do obecného vzorce pro dvojpoměr čtyř elementů dosadili bychom jejich souřadnice. Z důvodů, jichž oprávnění později vysvitne, vyjádříme nejprve souřadnice absolutních elementů souřadnicemi elementů x, y, a teprve tyto dosadíme do vzorce pro dvojpoměr.

Tři elementy v útvaru jsou vždy l i n e á r n ě z á v i s l é. To znamená: souřadnice třetího elementu můžeme vždy lineárně vyjádřiti souřadnicemi prvých dvou elementů. Vyjádříme souřadnice absolutního elementu lineárně souřadnicemi elementů x, y rovnicemi

11) $$\sigma \xi_1 = a_1 x_1 + a_2 y_1 \qquad \sigma \xi_2 = a_1 x_2 + a_2 y_2$$

Při tom σ jest libovolný faktor úměrnosti, od nuly různý, a $a = \frac{a_1}{a_2}$ prozatím neznámý parametr, který blíže určíme dosazením hodnot 11) do rovnice absolutních elementů 8). Získáme tak

12) $$a_1^2 f_{xx} + 2a_1 a_2 f_{xy} + a_2^2 f_{yy} = 0,$$

kde

13) $$\begin{aligned} a)\ f_{xx} &= g_{11} x_1^2 + 2g_{12} x_1 x_2 + g_{22} x_2^2 \\ b)\ f_{xy} &= g_{11} x_1 y_1 + g_{12}(x_1 y_2 + x_2 y_1) + g_{22} x_2 y_2 \\ c)\ f_{yy} &= g_{11} y_1^2 + 2g_{12} y_1 y_2 + g_{22} y_2^2 \end{aligned}$$ [1])

Rovnici 12) řešíme podle $\frac{a_1}{a_2} = a$ a získáme tak

14) $$\left\{ \begin{aligned} \nu_1 &= a = \frac{a_1}{a_2} = \frac{-f_{xy} + \sqrt{f_{xy}^2 - f_{xx} f_{yy}}}{f_{xx}}, \\ \nu_2 &= a' = \frac{a'_1}{a'_2} = \frac{-f_{xy} - \sqrt{f_{xy}^2 - f_{xx} f_{yy}}}{f_{xx}} \end{aligned} \right.$$

---

[1]) Rovnice $f_{xx} = 0$, $f_{xy} = 0$, $f_{yy} = 0$ mají tento geometrický význam: $\begin{matrix} f_{xx} = 0 \\ f_{yy} = 0 \end{matrix}$ značí, že element $\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}$ splývá s absolutním elementem ξ (nebo ξ'), $f_{xy} = 0$ je rovnicí elementů harmonicky sdružených k absolutním elementům. (Viz VIII, 5.) Tyto právě uvedené vlastnosti jsou invariantní vzhledem k projektivní grupě transformací. Z toho plyne, že rovnice je vyjadřující jsou invarianty vzhledem k této grupě. Musí se tedy transformovati podle

$$'f_{xx} = \delta f_{xx} \qquad 'f_{xy} = \beta f_{xy} \qquad 'f_{yy} = \gamma f_{yy}$$

Ale v teorii invariantů se dokazuje, že pak jest

$$\delta = \beta = \gamma$$

mocninou determinantu D transformace 1).

Každé hodnotě α resp. α' odpovídá jeden absolutní element, což jest ve shodě s počtem absolutních elementů, dříve předpokládaným. — Tím jsme si vše připravili ke stanovení dvojpoměru $(x\,y\,\xi\,\xi')$. Dosazením z 11) obdržíme

$$(x\,y\,\xi\,\xi') = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ \xi_1 & \xi_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ \xi'_1 & \xi'_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ \xi'_1 & \xi'_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ \xi_1 & \xi_2 \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ \alpha_1 x_1 + \alpha_2 y_1 & \alpha_1 x_2 + \alpha_2 y_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ \alpha'_1 x_1 + \alpha'_2 y_1 & \alpha'_1 x_2 + \alpha'_2 y_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ \alpha'_1 x_1 + \alpha'_2 y_1 & \alpha'_1 x_2 + \alpha'_2 y_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ \alpha_1 x_1 + \alpha_2 y_1 & \alpha_1 x_2 + \alpha_2 y_2 \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} \alpha_2 \alpha'_1}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} \alpha'_2 \alpha_1} = \frac{\nu_2}{\nu_1}$$

a tudíž dle 14)

15) $$(x\,y\,\xi\,\xi') = \frac{f_{xy} + \sqrt{f_{xy}^2 - f_{xx} f_{yy}}}{f_{xy} - \sqrt{f_{xy}^2 - f_{xx} f_{yy}}}.$$

Od nynějška budeme psáti místo symbolu $(x\,y\,\xi\,\xi')$ vždy λ. Získáme tak možnost připojenými indexy rozeznávati dvojpoměry, příslušné různým elementům (z nichž dva jsou vždy elementy absolutní). Tak označíme dvojpoměry, příslušné elementům ${}^1x \equiv x$, ${}^2x \equiv y$, ${}^3x \equiv z$ postupně

$$\lambda_{12} = \frac{\nu_2}{\nu_1}, \qquad \lambda_{23} = \frac{\nu_3}{\nu_2}, \qquad \lambda_{13} = \frac{\nu_3}{\nu_1}$$

Při tomto označení snadno nahlédneme, že λ není možno prohlásiti za míru, neboť nesplňuje podmínky 9), 10). Je totiž

$$\lambda_{12} + \lambda_{23} = \frac{\nu_2}{\nu_1} + \frac{\nu_3}{\nu_2},$$

což jest obecně rozdílné od $\lambda_{13} = \dfrac{\nu_3}{\nu_1}$

Platí však jiný vztah mezi těmito veličinami, kterého s výhodou použijeme, totiž

$$\lambda_{12}\lambda_{23} = \frac{\nu_2}{\nu_1}\frac{\nu_3}{\nu_2} = \frac{\nu_3}{\nu_1} = \lambda_{13} \quad \text{a} \quad \lambda_{jj} = \frac{\nu_j}{\nu_j} = 1, \quad \lambda_{ik} = \frac{\nu_k}{\nu_i} = \frac{1}{\lambda_{ki}}$$
$$(i, j, k, \ldots = 1, 2, 3, \ldots)$$

Logaritmováním těchto rovnic získáme

9') $\log \lambda_{12} + \log \lambda_{23} = \log \lambda_{13}$, 10') $\log \lambda_{jj} = 0$, $\log \lambda_{ik} = -\log \lambda_{ki}$

Vyhovuje tedy $\log \lambda$ podmínkám kladeným na míru dvou elementů a můžeme jej tudíž za takovou prohlásiti. Je však zřejmé, že těmže podmínkám vyhovuje i výraz $\frac{c}{2} \log \lambda$, kde c jest libovolná, od nuly různá konstanta. Z toho plyne obecná definice míry útvaru jednorozměrného:

Míra dvou elementů jednorozměrného útvaru neeuklidovského je dána vzorcem

$$16) \quad \boxed{\mu(x\,y) = \frac{c}{2} \log \lambda = \frac{c}{2} \log \frac{f_{xy} + \sqrt{f_{xy}^2 - f_{xx} f_{yy}}}{f_{xy} - \sqrt{f_{xy}^2 - f_{xx} f_{yy}}}}$$

Výraz pod odmocninou může míti trojí hodnotu. Buď

a) jest $f_{xy}^2 - f_{xx} f_{yy} > 0$. V tom případě je dvojpoměr $\lambda = (x\,y\,\xi\,\xi')$ podle 15) vždy reálný. Ježto i elementy x, y jsou reálné, musí nutně i elementy absolutní býti reálné. Jednorozměrný útvar jest hyperbolický. Nebo

b) jest $f_{xy}^2 - f_{xx} f_{yy} < 0$. V tom případě je dvojpoměr imaginární, obecně tvaru $A + Bi$ a elementy absolutní tudíž imaginárné. Jednorozměrný útvar jest eliptický. Nebo konečně

c) jest $f_{xy}^2 - f_{xx} f_{yy} = 0$. V tom případě dvojpoměr $\lambda = (x\,y\,\xi\,\xi')$ jest roven jedné pro každé dva elementy x, y, což není jinak možné, než když absolutní elementy splývají v jeden reálný. Pak jest jednorozměrný útvar parabolický. V tomto případě musíme vhodně vzorec 16) přetvořiti. — Hodnota výrazu $f_{xy}^2 - f_{xx} f_{yy}$ jest právě tak kriteriem pro druh útvaru, jako hodnota výrazu $g_{12}^2 - g_{11} g_{22}$.

V dalších odstavcích budeme probírati jednotlivé druhy neeuklidovských útvarů zvláště.

Hyperbolický útvar jednorozměrný.

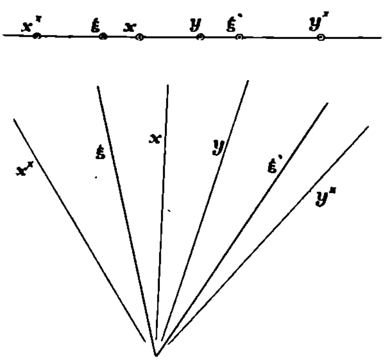
§ 3. Základní vzorce.

1. Volba konstanty c. Ve volbě konstanty c ve vzorci 16) nejsme prozatím ničím vázáni. Zvolíme ji takovým

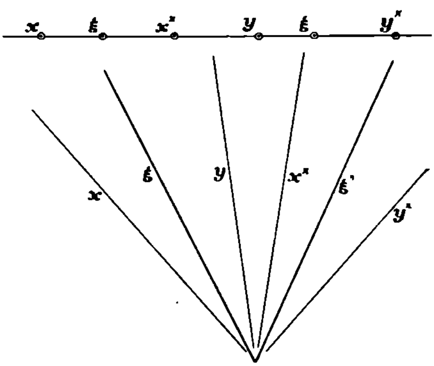
způsobem, aby získané výsledky byly pokud možno názorné. Prozatím ji můžeme předpokládati v tvaru

$$c = k + k'i, \qquad i = \sqrt{-1},$$

kde k, k' jsou libovolná čísla reálná, z nichž alespoň jedno je $\neq 0$. — Dvojpoměr λ jest v hyperbolickém útvaru vždy reálný, neboť absolutní elementy jsou reálné jak ostatně již víme z § 2, a elementy zkoumané vždy předpokládáme jako reálné. Z definice dvojpoměru (VIII, 5 konec) je ihned zřejmo, že λ jest kladné tenkráte a jen tenkráte, když elementy ξ, ξ' nejsou elementy x, y oddělovány. V případě opačném je λ vždy záporné. Jsou-li tedy elementy x, y (resp. x^*, y^*) umístěny tak, jak je na obraze 1*a)*, 1*b)* naznačeno, jest λ kladné. Mají-li elementy x, y, ξ, ξ', resp. x^*, y^*, ξ, ξ' polohu, naznačenou v obraze 2*a)*, 2*b)* jest λ záporné.



Obr. 1*a)*, 1*b)*.



Obr. 2*a)*, 2*b)*.

Obě eventuality mohou v našem případě nastati a musíme o nich uvažovati. Pro rozepsání vzorce 16) použijeme rovnic (uvedených v VIII, 2, 13)

$$\log \lambda = \overline{\log}\, \lambda + 2\varkappa\pi i \ldots . \quad \lambda > 0$$
$$\log \lambda = \overline{\log}\, |\lambda| + (2\varkappa + 1)\pi i \ldots \quad \lambda < 0$$

Obdržíme tudíž vzhledem k 16) pro kladné λ

$$\mu = \tfrac{1}{2}\,(k + k'i)\,(\overline{\log}\,\lambda + 2\varkappa\pi i) = \tfrac{1}{2}\,[i\,(k'\,\overline{\log}\,\lambda + 2\varkappa k\pi) + (k\,\overline{\log}\,\lambda - 2k'\varkappa\pi)]$$

a pro λ záporné

$$\mu = \tfrac{1}{2}(k + k'i)\,[\overline{\log}\,|\lambda| + (2\varkappa + 1)\,\pi i] = \tfrac{1}{2}\{i\,[k'\,\overline{\log}\,|\lambda| + (2\varkappa + 1)\,k\pi] + + k\,\overline{\log}\,|\lambda| - (2\varkappa + 1)\,k'\pi\}$$

Hlavní hodnoty (VIII, 2) těchto výrazů jsou

$$\mu = \frac{ik'}{2}\overline{\log}\,\lambda + \frac{k}{2}\overline{\log}\,\lambda, \qquad (\lambda > 0)$$

$$\mu = \frac{i}{2}(k'\,\overline{\log}\,|\lambda| + k\pi) + \frac{1}{2}(k\,\overline{\log}\,|\lambda| - k'\pi), \qquad (\lambda < 0)$$

V dalším omezíme se jen na hlavní hodnoty funkce μ.[4a]) Zároveň budeme žádati, aby míra dvou reálných elementů byla vždy reálná. Pak jest ale nutno voliti

$$k' = 0, \quad \text{to jest} \quad c = k$$

a vyloučiti ze svých úvah dvojice elementů, které jsou absolutními elementy oddělovány. Pro ně je totiž vždy $\lambda < 0$ a tudíž

$$\mu = \frac{k}{2}\overline{\log}\,|\lambda| + \frac{ik}{2}\pi \qquad (\lambda < 0)$$

vždy imaginární.

Pro elementy, které nejsou absolutními elementy oddělovány, obdržíme vždy míru reálnou

17) $$\mu = \frac{k}{2}\overline{\log}\,\lambda, \qquad (\lambda > 0)$$

Tímto omezením jen na studium určitých elementů jsme si úlohu podstatně zjednodušili. Je záhodné upozorniti na to, v čem ono zjednodušení spočívá. K tomu cíli je nutno zmíniti se o tak zvané „volnosti pohybu“ v geometrii. Říkáme, že v útvaru neexistuje volnost pohybu, když libovolný jeho element (nikoliv absolutní) nemůžeme převésti do libovolné polohy.[5]) Kdybychom se neomezili v našem

---

[4a]) Libovůle tohoto omezení nezmění podstatně výsledků. Podobné omezení provádíme často. Nejznámější je případ úhlu dvou přímek, který podle vzorce 4) jest funkcí mnohoznačnou. Přes to uvažujeme jen o hlavní hodnotě této funkce.

[5]) Taková geometrie, kde neexistuje volnost pohybu, je nám snad logicky nejpřístupnější. Ukážeme to na úvaze prostorové: Jsou-li x_1, x_2, x_3 nehomogenní souřadnice v prostoru a x_4 značí čas, je zřejmo, že ve čtyřrozměrném prostoru o souřadnicích x_1, x_2, x_3, x_4 neexistuje volnost pohybu po čarách $x_1 = \text{const}$, $x_2 = \text{const}$, $x_3 = \text{const}$, neboť v čase nemůžeme postupovati nikdy směrem do minulosti, nejvýše do budoucnosti.

případě na elementy, které absolutními elementy nejsou oddělovány, existovaly by dvojice elementů, z nichž jeden nelze převésti v druhý. Na př. bychom nemohli element x dvojice x, y v obr. 2 převésti do polohy elementu x v obr. 1. Neboť v obr. 1 element x určuje s nějakým pevným elementem y téhož útvaru míru reálnou, ale v obr. 2 elementy stejně označené mají míru imaginárnou, což odporuje požadavku, který jsme na míru kladli. Existovaly by zde tedy dva druhy elementů, které bychom pohybem nikdy nemohli v sebe převésti. Jinými slovy, v takovém útvaru hyperbolickém by neexistovala volnost pohybu. Omezíme-li se však jen na elementy, které nejsou oddělovány absolutními elementy, pak ovšem volnost pohybu existuje. To je právě ono podstatné zjednodušení, o němž jsme mluvili. — Nadále budeme pod slovem elementy rozuměti jen elementy té části útvaru, která na znázorňujícím obraze 1 má svůj obraz buď uvnitř, nebo vně absolutních elementů.[6]) Toto omezení nám dovoluje vysloviti velmi důležité věty:

Míra dvou reálných elementů hyperbolického útvaru je vždy reálná. V hyperbolickém útvaru existuje volnost pohybu.

2. Základní vzorce. V tomto odstavci odvodíme některé základní vzorce po míru, jichž později často budeme používati. Při tom použijeme vzorců pro funkce goniometrické (sin, cos) a hyperbolické (Sin, Cos) (VIII, I). Z rovnice 17) (kde opět píšeme symbol log místo $\overline{\log}$ pro logaritmus v obvyklém smyslu aritmetickém) plyne

$$\sqrt{\lambda} = e^{\frac{\mu}{k}}, \qquad \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = e^{\frac{-\mu}{k}}$$

a tudíž (vzhledem k VIII, 1, 7 a VIII, 1, 10)

18)

$$a)\quad e^{\frac{\mu}{k}} + e^{\frac{-\mu}{k}} = \frac{\lambda +}{\sqrt{\lambda}} = 2\,\mathrm{Cos}\,\frac{\mu}{k} = 2\cos\frac{\mu i}{k} = 2\cos\frac{\mu}{k i}$$

$$b)\quad e^{\frac{\mu}{k}} - e^{\frac{-\mu}{k}} = \frac{\lambda - 1}{\sqrt{\lambda}} = 2\,\mathrm{Sin}\,\frac{\mu}{k} = -2i\sin\frac{\mu i}{k} = 2i\sin\frac{\mu}{ki}$$

---

[6]) Nikdy tedy nebudeme uvažovati současně o elementech x, y resp. x^*, y^* v poloze, jejíž znázornění je dáno obrazem 2. Toto omezení, zdánlivě libovolné je způsobeno nedokonalostí euklidovského obrazu hyperbolického útvaru. Uvidíme později, že na příklad pro „bytosti", nadané schopností měřiti hyperbolicky, toto omezení vůbec neexistuje, neboť takové „bytosti" nemohou překročiti absolutní elementy!

Zvratnou operací získáme z těchto rovnic vzhledem k 15)

$$18') \quad a) \quad \frac{\mu(xy)}{k} = \operatorname{arc\,Cos} \frac{\lambda + 1}{2\sqrt{\lambda}} = \operatorname{arc\,Cos} \frac{f_{xy}}{\sqrt{f_{xx} f_{yy}}} = i \arccos \frac{f_{xy}}{\sqrt{f_{xx} f_{yy}}}$$

$$b) \quad \frac{\mu(xy)}{k} = \operatorname{arc\,Sin} \frac{\lambda - 1}{2\sqrt{\lambda}} = \operatorname{arc\,Sin} \sqrt{\frac{f^2_{xy} - f_{xx} f_{yy}}{f_{xx} f_{yy}}} = i \arcsin \frac{\sqrt{f^2_{xy} - f_{xx} f_{yy}}}{i\sqrt{f_{xx} f_{yy}}}$$

Z této rovnice je zřejmo, že míra je definována jen pro elementy x, y, pro něž $f_{xx} \neq 0$ a $f_{yy} \neq 0$. V případě, že na př. $f_{xx} = 0$, budeme říkati, že míra elementů je nekonečně veliká.[6a]) Tím jsme definovali míru pro každé dva reálné elementy.

§ 4. Elementy nevlastní.

Uvažujme euklidovskou přímku, t. j. přímku v geometrii euklidovské. Označme písmenem $x = \frac{x_1}{x_2}$ vzdálenost bodu x na této přímce od bodu základního o souřadnicích $0:1$. Každý bod x na přímce jest určen poměrem souřadnic $\frac{x_1}{x_2}$. Vzdálenost m dvou bodů x, y je dána známým vzorcem

$$m = \frac{y_1}{y_2} - \frac{x_1}{x_2}$$

Mezi všemi body na přímce existuje jeden o souřadnicích v poměru $x_1 : x_2 = 1 : 0$. Jest charakterisován tím, že jeho vzdálenost od libovolného bodu y téže přímky jest nekonečně velká.

Tomuto bodu říkáme „bod nevlastní“ (abychom se vyhnuli pojmenování „bod v nekonečnu“). Na euklidovské přímce jest j e d i n ý r e á l n ý bod nevlastní. Prakticky, m ě ř e n í m e u k l i d o v s k ý m, h o n e m ů ž e m e n i k d y d o-

---

[6a]) Obecně, výraz $\frac{1}{a}$ je definován jen pro hodnoty $a \neq 0$. Je-li $a = 0$, říkáme, že $\frac{1}{a}$ je nekonečně velké, což značíme symbolickou rovnicí $\frac{1}{a} = \infty$.

sáhnouti. Říkáme, že „úhrnná délka“ euklidovské přímky, (t. j. horní hranice funkce m) je nekonečně veliká.[6b]) V euklidovském svazku přímek je tomu jinak. Již z názoru je vidno, že neexistuje (reálná) přímka svazku, která by s libovolnou přímkou téhož svazku svírala úhel nekonečně veliký. Ve svazku přímek neexistují tedy reálné přímky „nevlastní“.

Jest nasnadě zavésti pojem elementu nevlastního i do geometrie hyperbolického útvaru. Definujeme jej takto:

Nevlastní element v útvaru hyperbolickém určuje s libovolným jiným elementem téhož útvaru míru nekonečně velkou. — Podobně nazveme „úhrnnou délkou“ hyperbolického útvaru horní hranici funkce μ. Z definice nevlastních elementů je zřejmo, že bytost, která by byla nadána schopností měřiti hyperbolicky (jako my jsme nadáni schopností měřiti pouze euklidovsky), nedosáhla by nikdy tímto způsobem nevlastních elementů. (Byly by pro ni vždy v „nekonečnu“.)

V následujících řádcích dokážeme tyto dvě věty:

Absolutní elementy hyperbolického útvaru jsou jeho elementy nevlastní.

Jen absolutní elementy hyperbolického útvaru jsou jeho elementy nevlastní.

Abychom dokázali prvou větu, stanovíme míru elementu obecného x a absolutního ξ. Použijme k tomu vzorce 18*a)*. Hodnota dvojpoměru λ jest v daném případě buď rovna nule nebo nekonečně velká. V obou případech obdržíme podle 18*a)*

$$2 \operatorname{Cos} \frac{\mu(x\xi)}{k} = \infty, \quad (k \neq 0)$$

a tudíž (podle VIII, 1, 8) v obou případech

$$\frac{\mu(x\xi)}{k} = \infty, \quad (k \neq 0).$$

Tím je dokázána první věta. K důkazu druhé věty užijeme týchž vzorců. Je zřejmo, že $\left(\sqrt{\lambda} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) = \infty$ tenkrát a jen tenkráte, když $\lambda = 0$, nebo $\lambda = \infty$. Dvojpoměr λ může však nabýti této hodnoty, jen když jeden z elementů, jichž míru ustanovujeme, splývá s elementem absolutním.

[6b]) Přesněji: horní hranice funkce m neexistuje a my proto říkáme, že „úhrnná délka“ je nekonečně velká.

Má-li tudíž míra dvou elementů býti nekonečně velká, je nutno, aby alespoň jeden z těchto elementů byl elementem absolutním. Tím jsme dokázali i větu druhou.

Poznámka: Je zřejmo, že zde nikterak nerozhodovala volba určitého elementu absolutního. Výsledky získané platí jak pro element ξ, tak pro element ξ'.

Stejným počtem, který přenechávám čtenáři, dokázali bychom, že míra absolutních elementů ξ, ξ' jest nekonečně velká. Ostatně to plyne i z vývodů předcházejících. — Jaký je důsledek vět právě dokázaných? Pro bytost, nadanou schopností měřiti jen hyperbolicky, by absolutní elementy byly nedostupné. Nikdy praktickým měřením by jich nedosáhla. Nemohla by je tudíž ani překročiti. Omezení, o němž byla řeč v poznámce pod čarou [6]), bylo by jí proto nesrozumitelné. My jsme toto omezení učinili jen proto, že zobrazujeme hyperbolický útvar na modelu euklidovském. Proto je důležito vždy si uvědomiti, že nesmíme nějaké vlastnosti hyperbolického útvaru odvozovati z názoru na jeho model euklidovský.

Interpretujme nyní útvar zkoumaný jednou jako řadu bodovou na přímce, po druhé jako svazek přímek bodem. Výsledky získané v těchto odstavcích můžeme vysloviti větami:

Hyperbolická přímka má dva reálné body nevlastní.

Hyperbolická vzdálenost libovolného bodu od každého z bodů nevlastních je nekonečně velká.

Úhrnná délka hyperbolické přímky je také nekonečně velká.

Podobně pro svazek přímek:

Hyperbolický svazek přímek má dvě reálné přímky nevlastní.

Hyperbolický úhel libovolné přímky svazku s každou z těchto nevlastních přímek je nekonečně velký.

Úhel obou přímek nevlastních je rovněž nekonečně velký.

§ 5. Geometrický význam konstanty k.

Konstanta k má zajímavý geometrický význam. Stanovíme jej úvahami diferenciálními. Při tom omezíme se na studium hyperbolické přímky.

Zaveďme do odvozených vzorců místo souřadnic homogenních $x_1 : x_2$ bodu x souřadnici nehomogenní tak, že položíme $x_2 = 1$. Pišme pak kratčeji místo x_1 přímo x. Rovnici absolutních bodů předpokládejme v tvaru (VIII, 6, 29')

$$-k^2 + \xi^2 = 0$$

Rovnice 13) pro nehomogenní souřadnice jsou tvaru

$$13') \qquad \begin{aligned} &a)\ f_{xx} = x^2 - k^2 \\ &b)\ f_{xy} = xy - k^2 \\ &c)\ f_{yy} = y^2 - k^2 \end{aligned}$$

Dosadíme-li tyto výrazy do rovnice 17), získáme pro vzdálenost bodů x, y

$$m = \frac{k}{2} \log \frac{xy - k^2 + \sqrt{(xy - k^2)^2 - (x^2 - k^2)(y^2 - k^2)}}{xy - k^2 - \sqrt{(xy - k^2)^2 - (x^2 - k^2)(y^2 - k^2)}} =$$

$$= \frac{k}{2} \log \frac{xy - k^2 + k(x - y)}{xy - k^2 - k(x - y)},$$

nebo v jiném tvaru

$$19) \qquad m = \frac{k}{2} \log \frac{(x - k)(y + k)}{(x + k)(y - k)} = \frac{k}{2}\left[\log \frac{x - k}{x + k} - \log \frac{y - k}{y + k}\right]$$

Ale výraz na pravé straně této rovnice je možno psáti

$$\int_y^x \frac{k^2 dx}{x^2 - k^2} = k^2 \int_x^y \frac{dx}{k^2 - x^2} = \int_x^y \frac{dx}{1 - \frac{x^2}{k^2}},\ ^{7)}$$

kde považujeme x za proměnný bod, y za pevný bod. Je tedy hyperbolická vzdálenost bodu x od y dána vzorcem

$$19') \qquad \int_y^x dm = \int_x^y \frac{dx}{1 - \frac{x^2}{k^2}}$$

[7]) Skutečně platí

$$\int \frac{k^2 dx}{x^2 - k^2} = \frac{k^2}{2k} \log \frac{x - k}{x + k} + \text{const.}$$

a tudíž

$$\int_y^x \frac{k^2 dx}{x^2 - k^2} = \int_x^y \frac{dx}{1 - \frac{x^2}{k^2}} = \frac{k}{2}\left[\log \frac{x - k}{x + k} - \log \frac{y - k}{y + k}\right]$$

a pro bod x nekonečně blízký bodu y

19'') $$dm = \frac{-dx}{1 - \frac{x^2}{k^2}}$$

Změníme-li orientaci směrů na euklidovském modelu hyperbolické přímky (t. j. píšeme-li $-x$ místo x a obráceně) a ponecháme orientaci směrů přímky hyperbolické, obdržíme

20) $$\boxed{dm = \frac{dx}{1 - \frac{x^2}{k^2}}}$$

Tento vzorec určuje diferenciál vzdálenosti na hyperbolické přímce. Diferenciál vzdálenosti na přímce euklidovské je dx. Diferenciály dm a dx liší se od sebe faktorem $1 - \frac{x^2}{k^2}$. Čím je $\frac{x}{k}$ menší, tím méně se tento faktor liší od jednotky a tím méně se tedy oba diferenciály liší. Je-li $\frac{x}{k}$ hodně malé, můžeme hoření rovnici uvésti na tvar

$$dm = dx\,(1 + \eta)\,,$$

kde η je velmi malé číslo, které je tím menší, čím menší je $\frac{x}{k}$. Když $\frac{x}{k} \to 0$ (čti: když se $\frac{x}{k}$ blíží nule), pak i $\eta \to 0$, což vyjadřujeme tak, že píšeme

$$\lim_{\frac{x}{k} \to 0} dm = dx$$

(Čti: limita dm, při $\frac{x}{k} \to 0$ je rovna dx.) Diferenciály dm a dx se tedy liší v tomto případě jen o veličinu ηdx. V prvním přiblížení (t. j. při zanedbání této veličiny) jsou tedy oba diferenciály stejné. Ale $\frac{x}{k} \to 0$ jen v okolí bodu $x = 0$, které je velmi malé vzhledem ke konstantě k. Za takový bod však můžeme považovati každý bod na modelu hyperbolické přímky, volíme-li vhodně systém souřadný. Proto můžeme říci:

V okolí obecného bodu hyperbolické přímky, které je dostatečně malé vzhledem ke konstantě k, je hyperbolický diferenciál vzdálenosti v prvém přiblížení roven euklidovskému diferenciálu vzdálenosti.

Měříme-li na euklidovské přímce, činí to dojem, jako bychom měřili na hyperbolické přímce vzdálenosti velmi malé, pro něž $\frac{x}{k} \to 0$. Proto někdy říkáme, že euklidovská geometrie na přímce je diferenciální geometrií hyperbolické geometrie na přímce.[7a])

Než přistoupíme k dalšímu paragrafu, všimneme si ještě jedné věci. Označme ζ nevlastní bod euklidovského modelu hyperbolické přímky, jejíž absolutní body splňují rovnici

$$\xi^2 - k^2 = 0.$$

Z této rovnice je zřejmo, že pro hyperbolickou přímku H, jejíž euklidovské znázornění obsahuje bod ζ, je výraz $1 - \frac{x^2}{k^2} < 0$, kdežto pro hyperbolickou přímku H', jejíž euklidovské znázornění ζ neobsahuje, je $1 - \frac{x^2}{k^2} > 0$. Proto musí dle 20') pro $dx > 0$ býti na H $dm < 0$ a na H' $dm > 0$. Vidíme tedy, že kladný směr na euklidovském modelu může býti znázorněním kladného směru na H', pak ale nutně musí na H znázorňovati směr záporný. To je ostatně zřejmo i bez počtu. Neboť směr na H, určený sledem $\xi'\xi$ je znázorněn na euklidovském modelu směrem $\xi'\zeta\xi$, kdežto týž sled $\xi'\xi$ určuje na H' směr, který na euklidovském modelu je znázorněn sledem $\xi'\xi\zeta$.

O jiných úvahách diferenciálních pojednáme v kapitole V.

§ 6. **Základní konstrukce.**[8])

Hyperbolický útvar znázorňujeme útvarem euklidovským. Nemůžeme však konstruktivně řešiti metrické úlohy hyperbolické geometrie metodami euklidovskými. Je možno

---

[7a]) Činí to dojem, jakoby měření euklidovské dávalo nám výsledky (čísla) aktuálně „nekonečně“ malé vzhledem k měření hyperbolickému. Zajímavé je, že o zavedení aktuálně nekonečně malých čísel pokoušeli se — byť i na zcela jiném podkladě — i filosofové (*Natorp*).

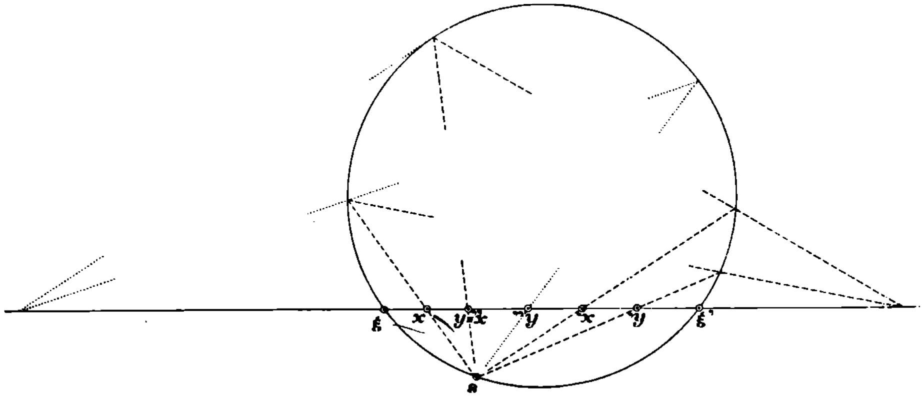
[8]) Znalost tohoto paragrafu není nutna pro pochopení výkladů v dalších odstavcích. Zde předpokládám znalost základních konstrukcí syntetické projektivní geometrie.

však používati jiných metod, jak v následujících řádcích ukážeme. Rozřešíme metodou projektivní tyto základní úlohy:

Danou délku přenésti do daného bodu.

Danou délku rozpůliti.

A) Buďtež na obraze 3 body ξ, ξ' znázorněním bodů absolutních.



Obr. 3.

Vzdálenost bodů x a y přeneseme z bodu x do bodu $'x$ následující úvahou: Můžeme vždy předpokládati, že bod $'x$ vznikl pohybem z bodu x, ovšem pohybem hyperbolickým, který jest jednomocnou transformací projektivní, jež reprodukuje body absolutní. Jsou-li hyperbolické vzdálenosti jednak bodů x, y, jednak bodů $'x$, $'y$ stejné co do směru i velikosti, lze úsečku xy převésti pohybem do úsečky $'x\,'y$. Ježto dle předpokladu $xy = 'x'y$, musí i příslušné dvojpoměry se rovnati:

$$(xy\xi\xi') = ('x'y\xi\xi')$$

Tato rovnice však definuje projektivnost bodových řad x, y, ξ, ξ'.... a $'x$, $'y$, ξ, ξ'...., kde ξ, ξ' jsou body samodružné. Tohoto poznatku použijeme při stanovení bodu $'y$, jsou-li body ξ, ξ', x, y, $'x$ dány. Na obraze 3 zvolena pomocná kružnice tak, aby přímka $\xi\xi'$ byla právě direkční přímkou projektivních svazků paprsků s (x, y, ξ, ξ'....) a s ($'x$, $'y$, ξ, ξ'....) Další konstrukce (čárkovaná) je zřejma z obrázku.

Zmínky zasluhuje případ, kdy $y \equiv {}'x$. (Na obraze konstrukce provedena tečkovaně pro bod $''x \doteq y$.) Pak ovšem $''x''y = xy$ co do směru i velikosti. Z toho plyne, že bod $''x$ je **půlícím** bodem úsečky $x''y$. Dle této konstrukce rozpůlíme tedy snadno úsečku $x''y$, jak je provedeno na obr. 3 (tečkovaně). Tím jsme zároveň rozřešili úlohy:

Daný úhel $\widehat{xsy}$ přenésti do polohy $\widehat{'xs'y}$.

Daný úhel rozpůliti.

Neboť je zřejmo, že můžeme svazek $s\,(x, y, \xi, \xi' \ldots)$ interpretovati jako euklidovský model hyperbolického svazku o absolutních přímkách $s\xi$, $s\xi'$. — Tím jsme skončili úvaby o hyperbolickém útvaru jednorozměrném a obrátíme se nyní k jednorozměrnému útvaru eliptickému.

Eliptický útvar jednorozměrný.

§ 7. Vzorce základní.

1. Volba konstanty.

Studium eliptického útvaru jednorozměrného jeví formální podobnost se studiem hyperbolického útvaru a některé známé výsledky budeme moci s malou změnou opsati. Proto se omezíme na stručnější zmínky. V eliptickém útvaru jsou absolutní elementy imaginární a $f_{xy}^2 - f_{xx} f_{yy} < 0$. (Viz § 2, konec.) V tom případě jest dvojpoměr $\lambda = (xy\xi\xi')$ imaginární, podle 15) obecně tvaru

$$\lambda = \frac{a+bi}{a-bi}$$

(a, b čísla reálná, nikoli současně obě rovna nule) a tudíž, píšeme-li jej

$$\lambda = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \quad (= A + Bi),$$

jest modul

$$r = \left|\sqrt{A^2 + B^2}\right| = 1.$$

(VIII, 2, 14.) Proto jest obecný tvar pro log λ dán výrazem (VIII, 2, 15)

$$\log\lambda = i(\varphi + 2\varkappa\pi).$$

Této rovnice použijeme, abychom rozhodli o volbě konstanty c ve vzorci 16) pro míru dvou elementů. Pro konstantu c jsme zavedli označení

$$c = k + k'i. \qquad (k^2 > 0,\ k'^2 > 0)$$

Podle posledních dvou rovnic a podle rovnice 16) získáme pro μ

$$\mu = -\frac{k'}{2}(\varphi + 2\varkappa\pi) + \frac{ki}{2}(\varphi + 2\varkappa\pi).$$

Z toho je zřejmo, že chceme-li, aby $\log \lambda$ dvou reálných elementů byl reálný, musíme voliti $k = 0$, t. j. $c = k'i$. Je tedy vzorec pro míru dvou elementů eliptického útvaru

$$\mu = \frac{k'i}{2} \log \lambda = -\frac{k'}{2}(\varphi + 2\varkappa\pi), \tag{21}$$

a míra μ veličinou mnohoznačnou. Známe-li jednu její hodnotu, obdržíme ostatní přičtením $k'\varkappa\pi$. Nazveme „měrou" jen hlavní hodnotu (pro $\varkappa = 0$)

$$\mu = -\frac{k'}{2}\varphi \qquad \text{(VIII, 2).} \tag{21'}$$

Kdy má μ ve vzorci 21') největší možnou hodnotu? Tu musí $\varphi = -2\pi$. Hlavní hodnota této funkce je tedy

$$\mu_{max} = k'\pi. \tag{22}$$

Tato hodnota představuje *úhrnnou míru eliptického útvaru*. Neboť ze vzorce 21') plyne, že nemůžeme zvoliti (reálné) elementy tak, aby jejich míra byla větší než $|k'\pi|$. Získané výsledky můžeme shrnouti v poučky:

Míra dvou reálných elementů v eliptickém útvaru je vždy reálná.

Eliptický útvar má úhrnnou míru konečnou, rovnou $k'\pi$.

Zvláštní zmínky zasluhují přímky v eliptickém svazku, pro něž je $\lambda = -1$ a které jsou tudíž *harmonicky sdružené* vzhledem k přímkám absolutním (VIII, 5). V tom případě musí býti $\varphi = \pm \pi$. Hlavní hodnota funkce M dvou takových přímek je tedy

$$M = \frac{\pm k'\pi}{2}.$$

Ježto pro $k' = 1$ je právě $M = \dfrac{\pm \pi}{2}$, jmenujeme takové dvě přímky, řídíce se analogií euklidovské geometrie, přímkami *kolmými* (kolmicemi).

2. *Základní vzorce.* Z rovnice

$$\mu(xy) = \frac{k'i}{2} \log \lambda = \frac{k'i}{2} \log \frac{f_{xy} + \sqrt{f_{xy}^2 - f_{xx} f_{yy}}}{f_{xy} - \sqrt{f_{xy}^2 - f_{xx} f_{yy}}} \tag{23}$$

plynou vztahy (VIII, 1)

$$
24)\quad
\begin{cases}
a)\ e^{\frac{\mu}{k'i}} = \sqrt{\lambda}, \\
b)\ e^{-\frac{\mu}{k'i}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}, \\
c)\ e^{-\frac{\mu i}{k'}} + e^{+\frac{\mu i}{k'}} = \frac{\lambda+1}{\sqrt{\lambda}} = 2\cos\frac{\mu}{k'}, \\
d)\ e^{-\frac{\mu i}{k'}} - e^{\frac{\mu i}{k'}} = \frac{\lambda-1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{2}{i}\sin\frac{\mu}{k'} = -2i\sin\frac{\mu}{k'}.
\end{cases}
$$

Zpětnou operací získáme

$$
25)\quad
\begin{cases}
a)\ \frac{\mu(xy)}{k'} = \operatorname{arc\,cos}\frac{\lambda+1}{2\sqrt{\lambda}} = \operatorname{arc\,cos}\frac{f_{xy}}{\sqrt{f_{xx}f_{yy}}}, \\
b)\ \frac{\mu(xy)}{k'} = \operatorname{arc\,sin}\frac{i}{2}\frac{\lambda-1}{\sqrt{\lambda}} = \operatorname{arc\,sin}\frac{\sqrt{f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2}}{\sqrt{f_{xx}f_{yy}}}.
\end{cases}
$$

Těchto vzorců budeme později hojně používati. Čeho však nyní si všimneme, jest jejich nápadná podobnost se vzorci pro úhel dvou přímek ve svazku euklidovském. Ukážeme, že není zásadního rozdílu mezi svazkem euklidovským a eliptickým. Euklidovský pohyb ve svazku byl definován jako projektivní transformace, která reprodukuje přímky isotropické o rovnici

$$2')\qquad \xi_1^2 + \xi_2^2 = 0$$

Úhel euklidovský, invariant vzhledem k této transformaci, byl definován vzorcem *Laguerreovým* (III, 1, 4). Naproti tomu eliptický pohyb ve svazku jest projektivní transformací, která reprodukuje dvě imaginární, sdružené přímky o rovnici

$$7')\qquad g_{11}\xi_1^2 + 2g_{12}\xi_1\xi_2 + g_{22}\xi_2^2 = 0$$

Úhel eliptický, invariant vzhledem k této transformaci, byl definován vzorcem 23). Definice u obou svazků jsou tedy zásadně stejné, rozdíl jest však v tom, že absolutní elementy jsou jinak dány. My však víme, že kvadratickou formu 7′) možno vždy převésti (vhodnou volbou systému souřadného) na kanonický tvar 2′) (VIII, 6, odst. 2). Můžeme tedy vždy předpokládati absolutní přímky eliptického útvaru dané rovnicí 2′). Pak vzorce obou geometrií liší se jen zavedením konstanty k'. V geometrii euklidovské je totiž

$k' = 1$, jak je vidno ze vzorce *Laguerreova*. Tento výsledek pro jeho důležitost vyslovíme větou:

Je-li v eliptickém svazku přímek $k' = 1$ a jsou-li absolutní přímky přímkami isotropickými, pak tento svazek je euklidovským svazkem.

Je tedy euklidovský svazek přímek zvláštním případem svazku eliptického. Jest otázka, zda i pro eliptickou přímku najdeme podobnou interpretaci pomocí nějakého útvaru euklidovského. Ihned jest zřejmo, že to euklidovská přímka nemůže býti, neboť na té pohyb reprodukuje jediný bod, kdežto na eliptické přímce se reprodukují dva body. Existuje však vztah mezi geometrií euklidovskou na kružnici a eliptickou přímkou. Ten odvodíme v odstavci následujícím.

§ 8. **Eliptická přímka.**

1. Souřadnice *Weierstrassovy*. Nechť souřadnice absolutních bodů na eliptické přímce vyhovují rovnici

26) $$f_{\xi\xi} \equiv \xi_1^2 + \xi_2^2 = 0$$

Řešením této rovnice obdržíme souřadnice dvou imaginárních (sdružených) bodů. Pro souřadnice x_1, x_2 každého jiného bodu eliptické přímky musí tedy býti součet čtverců $x_1^2 + x_2^2$ rozdílný od nuly. Omezíme-li se jen na body reálné, musí tento součet čtverců býti větší než nula. Pak můžeme vždy vhodnou volbou koeficientu úměrnosti dosáhnouti, aby

27) $$x_1^2 + x_2^2 = 1.$$

Souřadnice x_1, x_2, které vyhovují rovnici 27) nazývají se souřadnice *Weierstrassovy*. Jsou-li x_1, x_2 takové souřadnice, nemůžeme vůbec výrazy ϱx_1, ϱx_2 ($\varrho \neq \pm 1$) za *Weierstrassovy* souřadnice bodu považovati, neboť nevyhovují rovnici 27). Z toho plyne, že v souřadnicích *Weierstrassových* není bod určen poměrem souřadnic. Těchto souřadnic použijeme ke stanovení některých zajímavých vztahů mezi eliptickou přímkou a euklidovskou kružnicí (t. j. kružnicí v euklidovské rovině). Z rovnice 26) pro souřadnice absolutních bodů snadno odvodíme

$$f_{xx} = 1, \qquad f_{yy} = 1, \qquad f_{xy} = x_1 y_1 + x_2 y_2 .$$

Rovnice 24*c*) pro vzdálenost dvou bodů se zjednoduší, na

$$\boxed{\cos \frac{m(xy)}{k'} = x_1 y_1 + x_2 y_2} \tag{28}$$

V této rovnici jest výraz na levé straně invariantem vzhledem k eliptickému pohybu, jak jsme již dříve dovodili. Musí tedy i výraz na pravé straně býti vzhledem k tomuto pohybu invariantní. Můžeme proto vhodnou volbou bodů x, y získati snadno interpretaci souřadnic *Weierstrassových* z rovnice 28). Nechť počáteční bod na eliptické přímce jest $x \equiv {}^0x$ o souřadnicích ${}^0x_1 = 0$, ${}^0x_2 = 1$. Dosazením těchto hodnot do 28) získáme

$$\boxed{y_2 = \cos \frac{m({}^0xy)}{k'}} \tag{29}$$

a vzhledem ke 27) (a VIII, 1, 3)

$$\boxed{y_1 = \pm \sin \frac{m({}^0xy)}{k'}} \tag{30}$$

Tím jsme získali interpretaci souřadnic y_1, y_2 bodu y. V dalším odstavci použijeme těchto souřadnic k úvahám diferenciálním, které nám osvětlí souvislost euklidovské kružnice a eliptické přímky.

2. Diferenciál vzdálenosti. Uvažujme dva body nekonečně blízké x a y o souřadnicích

$$x_j, \qquad y_j = x_j + dx_j + \frac{1}{2} d^2x_j + \ldots, \qquad (j = 1, 2)$$

Vzdálenost těchto bodů dm získáme ze vzorce 28) dosazením souřadnic těchto bodů

$$\begin{aligned} \cos \frac{dm}{k'} = x_1 y_1 + x_2 y_2 = (x_1^2 + x_2^2) + (x_1 dx_1 + x_2 dx_2) + \\ + \frac{1}{2} (x_1 d^2x_1 + x_2 d_2 x_2) + \ldots \end{aligned} \tag{28'}$$

Výrazy na pravé straně této rovnice obdržíme též diferencováním rovnice 27)

$$x_1 dx_1 + x_2 dx_2 = 0 \qquad x_1 d^2x_1 + x_2 d^2x_2 = -(dx_1^2 + dx_2^2)$$

Nyní dosadíme tyto hodnoty do rovnice 28') a zároveň rozvineme cos v řadu (dle VIII, 1, 2):

$$\cos\frac{dm}{k'} = 1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{dm}{k'}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{dm}{k'}\right)^4 - \ldots = 1 - \frac{1}{2}(dx_1^2 + dx_2^2) + \ldots$$

Z této rovnice obdržíme v prvém přiblížení

$$\boxed{\left(\frac{dm}{k'}\right)^2 = dx_1^2 + dx_2^2} \tag{31}$$

Víme, že v euklidovské rovině, v pravoúhlých souřadnicích x_1, x_2 je čtverec diferenciálu vzdálenosti dán právě výrazem $dx_1^2 + dx_2^2$ a rovnice 27) je rovnicí kružnice o poloměru 1. Podle toho můžeme výraz $\frac{dm}{k'}$ interpretovati jako diferenciál vzdálenosti dvou bodů na kružnici o poloměru 1 a tudíž dm jako diferenciál vzdálenosti na kružnici o poloměru k'. Proto platí v okolí zkoumaného bodu věta:

Eliptickou geometrii na přímce můžeme interpretovati jako geometrii na euklidovské kružnici o poloměru k'.

Tímto způsobem ozřejmí se některé poznatky o eliptické přímce, které jsou na prvý pohled tak překvapující: Na příklad tvrzení, že eliptická přímka není nekonečná.

Mohla by se vyskytnouti námitka, proč zavádíme vůbec pojem eliptické přímky, když její geometrie dá se interpretovati geometrií na kružnici? Nepřispíváme tímto způsobem jen ke zbytečnému matení pojmů? Na tuto námitku musíme odpověděti záporně. Neboť z věty, kterou jsme shora uvedli, neplyne ještě, že obě geometrie jsou pro celý útvar identické.[8a]) Že tomu tak skutečně není, plyne z jednoduché úvahy o právě uvedeném příkladě: Úhrnná délka kružnice o poloměru k' jest $2\pi k'$, kdežto úhrnná délka přímky eliptické jest $\pi k'$! Jistě tedy nemůžeme v celém rozsahu identifikovati oba útvary! Proč tomu tak není a kde spočívá rozdíl, ukážeme v paragrafu následujícím.

§ 9. **Eliptická přímka.** (Pokračování.)

1. Centrální průmět kružnice. V tomto odstavci vyjdeme od kružnice a ukážeme, jak ještě jiným způsobem

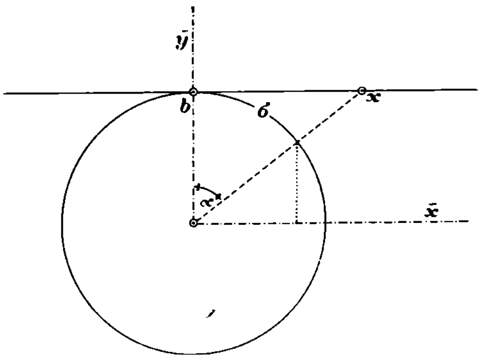
---

[8a]) To znamená, že dosud nevíme, zda všechny věty, vyjadřující vlastnosti celé euklidovské kružnice, můžeme interpretovati souhlasně v geometrii celé eliptické přímky.

můžeme dospěti k interpretaci eliptické geometrie. Nechť kružnice na obr. 4 je dána rovnicí v pravoúhlých souřadnicích $\bar{x}\,\bar{y}$

$$\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = k'^2.$$

Tečnu v bodě b považujme za model eliptické přímky. Promítněme body kružnice na tuto přímku ze středu kružnice. (Tomuto druhu projekce říkáme projekce centrální.)



Obr. 4.

Je-li běžná souřadnice bodu (měřená od bodu b) na přímce x, pak souvislost souřadnic $\bar{x}$, $\bar{y}$, x je dána úměrou

$$\bar{y} : \bar{x} = k' : x\,,$$

odkudž pomocí rovnice kružnice odvodíme

$$\bar{x} = \pm\, k' \frac{x}{\sqrt{k'^2 + x^2}}\,, \qquad \bar{y} = \pm\, k'^2 \frac{1}{\sqrt{k'^2 + x^2}}\,.$$

Diferenciací těchto rovnic získáme

$$d\bar{x} = \pm\, k'^3 \frac{dx}{(k'^2 + x^2)^{3/2}} \qquad d\bar{y} = \mp\, k'^2 \frac{x\,dx}{(k'^2 + x^2)^{3/2}}\,.$$

Oblouk kružnice má čtverec diferenciálu

$$d\sigma^2 = d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2 = k'^4 \frac{dx^2}{(k'^2 + x^2)^2}\,,$$

z čehož (zvolíme-li odmocninu zápornou)

32) $$d\sigma = \frac{-\,dx}{1 + \dfrac{x^2}{k'^2}}\,.$$

K výrazu na pravé straně bychom však dospěli postupem uvedeným v § 5 pro hyperbolický útvar, když bychom dosadili místo k všude ik'.[9]) Skutečně výsledný vzorec 19'') touto substitucí se změní na

$$dm = \frac{-dx}{1 + \frac{x^2}{k'^2}}. \tag{20'}$$

Porovnáním výsledků 32) a 20') získáme

$$d\sigma = dm. \tag{33}$$

Tento výsledek vyslovíme větou:

Interpretaci eliptické geometrie na přímce (o níž byla řeč v paragrafu předcházejícím) získáme centrální projekcí kružnice.

Poznámka: Integrací rovnice 33) získáme

$$m = \sigma + \text{const}.$$

Počítáme-li oblouk kružnice i vzdálenost na eliptické přímce od bodu dotyčného b, je const $= 0$. Úhel příslušný oblouku σ budiž α. Pak možno z poslední rovnice vyjádřiti eliptickou vzdálenost vztahem

$$m = k'\alpha = \sigma.$$

Pro $\alpha = \frac{\pi}{2}$ je oblouk kružnice, počítaný od bodu b, roven $\frac{k'\pi}{2}$ a délka eliptické přímky na eukl. modelu od bodu b „napravo" je $\frac{k'\pi}{2}$. Z toho plyne, že úhrnná délka eliptické přímky je $k'\pi$. To je ve shodě s rovnicí 22). Vzhledem k souvislosti geometrie eliptické přímky a kružnice byli bychom však očekávali $2k'\pi$, neboť i obvod kružnice zkoumané je $2k'\pi$. Vysvětlení tohoto rozporu podáme v příštím odstavci.

2. Eliptická přímka a svazek přímek. Geometrii řady bodové na kružnici o středu s můžeme interpretovati jako geometrii svazku paprsků (polopřímek opatřených směry), přiřadíme-li každému bodu b kružnice paprsek, kterým od s dospějeme do b. Přiřazení to jest jedno-

---

[9]) Opomíjíme zde tento postup, ježto formálně jest úplně stejný. Doporučuji však čtenáři, by jej provedl sám.

jednoznačné. Jednomu bodu kružnice odpovídá jeden a jen jeden paprsek svazku a obráceně. Horní mez úhlu ve svazku paprsků je 2π a příslušný oblouk kružnice je $2k'\pi$. Můžeme interpretovati v celém rozsahu geometrii na eliptické přímce jako geometrii svazku paprsků? Jistě že nikoliv. To plyne jednak z různosti vzorců pro horní meze úhlu ve svazku a vzdálenosti na eliptické přímce, jednak z toho, že jednomu bodu eliptické přímky odpovídají dva paprsky svazku (svírající úhel π). Tím je vysvětlen i rozpor, o kterém jsme se zmínili v odstavci předcházejícím, neboť ten byl vlastně způsoben tím, že jsme porovnávali eliptickou přímku a svazek paprsků.

Zbavíme-li každý paprsek svazku orientace, získáme svazek přímek. Jedné přímce svazku odpovídají na kružnici dva body, ale na eliptické přímce jen jeden bod. Obráceně jednomu bodu eliptické přímky odpovídá jedna přímka. Horní mez úhlu ve svazku přímek je π a příslušná délka eliptické přímky je $k'\pi$. Z toho plyne:

Geometrii na eliptické přímce můžeme v celém rozsahu interpretovati jako geometrii svazku přímek.

Uvedeme alespoň jeden důsledek této interpretace: Následují-li tři přímky svazku A, B, C v tomto pořádku, můžeme vždy od přímky A dospěti k přímce C, aniž přejdeme přes přímku B. (Ve svazku orientovaných přímek je to nemožné, jak se čtenář může přesvědčiti.) Aplikujeme-li tento poznatek na eliptickou přímku, můžeme říci:

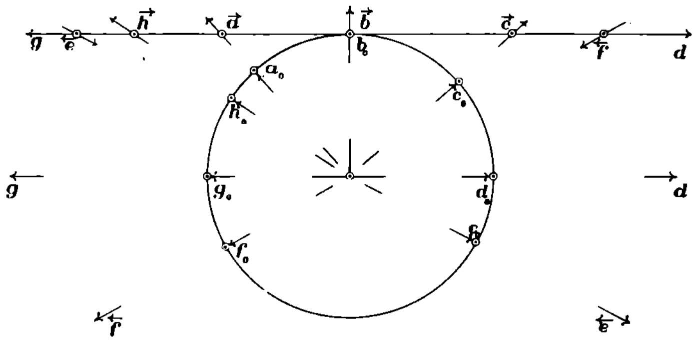
Jsou-li na eliptické přímce tři body a, b, c v tomto pořádku, můžeme vždy od bodu a dospěti do bodu c, aniž bychom přešli bod b.[9a]) (Čtenář může se snadno přesvědčiti, že u přímky hyperbolické tomu tak není.)

V následujícím odstavci odvodíme některé důsledky porovnání kružnice (resp. svazku paprsků) a eliptické přímky.

3. Eliptická přímka a svazek paprsků. Promítněme kružnici (obr. 5) svazkem paprsků na jednu její tečnu. Nějakému bodu a_0 na kružnici odpovídá tedy bod $\vec{a}$ na přímce, která je euklidovským modelem eliptické přímky.

9a) Přesnější, ale záporné znění této poučky jest: „Na eliptické přímce neplatí věta: ‚Jsou-li dány tři body (na přímce), je z nich jeden a jen jeden mezi oběma zbývajícími‘.“

Zaveďme nyní označení „orientovaný bod“ pro body na přímce, které jsou opatřeny směrem promítacího paprsku. Směr ten značme šipkou a příslušný bod rovněž ($\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$). Směřují-li šipky na obraze nahoru, říkáme, že bod jest orientován kladně, což vyznačíme polohou šipky u písmene tak, že tato směřuje napravo ($\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, ...). V opačném případě mluvíme o bodech záporně orientovaných, $\overleftarrow{e}$, $\overleftarrow{f}$, ...



Obr. 5.

Počněme promítati kružnici na přímku právě v libovolném bodě a_0. Bod $\vec{a}$ jest kladně orientován. Rovněž tak body $\vec{b}$ a $\vec{c}$. Dalším postupem v tomto směru obdržíme bod d, který na tomto modelu nemá orientace. Bod následující $\overleftarrow{e}$ jest však již orientován záporně. Dojdeme tedy k bodu a s opačnou orientací po jednom oběhnutí přímky. Další projekce v témže směru skýtá bod $\overleftarrow{f}$, rovněž záporně orientovaný. Poté přijdeme k bodu g, který na tomto modelu nemá orientace. Následující bod $\vec{h}$ jest však již opět kladně orientován. Konečně dospějeme do bodu $\vec{a}$ s původní kladnou orientací.

Z tohoto postupu jest zřejmo, že musíme oběhnouti eliptickou přímku dvakráte, abychom se dostali do téhož bodu s touž orientací. Při tom však jsme oběhli kružnici jen jednou. Tím je také vysvětleno, proč úhrnná délka přímky eliptické je právě poloviční obvodu příslušné kružnice. Když totiž oběhneme jednou přímku, na příslušné kružnici oběhneme jen půl obvodu. — Výsledek můžeme shrnouti ve věty:

Rozdíl mezi eliptickou přímkou a příslušnou kružnicí spočívá v tom, že přímku musíme oběhnouti dvakráte, abychom dospěli k bodu s touž orientací, kdežto kružnici oběhneme při tom jen jednou. V souvislosti s tím musí úhrnná délka eliptické přímky býti právě poloviční obvodu příslušné kružnice.

V posledních dvou paragrafech jsme ukázali, jak možno uvésti v souvislost eliptickou přímku a euklidovskou kružnici. Tato souvislost snad ozřejmí výsledky paragrafu následujícího o bodech nevlastních. Při tom opět budeme uvažovati svazek přímek i řadu bodů současně.

§ 10. Elementy nevlastní.

Podle vývodů předcházejících paragrafů možno očekávati, že eliptický útvar nemá reálných elementů nevlastních, to jest, že neexistují reálné elementy, které by s jiným libovolným elementem určovaly míru, jež je nekonečně velkou. Očekáváme tak proto, že úhrnná míra eliptického útvaru jest konečná. Tím však není řečeno, že neexistují ani imaginárné elementy nevlastní. V následujících řádcích dokážeme skutečně jejich jsoucnost. Odvodíme totiž tyto věty:

V eliptickém útvaru neexistují reálné elementy nevlastní.

Absolutní elementy eliptického útvaru jsou jeho elementy nevlastní.

Jen absolutní elementy eliptického útvaru jsou jeho elementy nevlastní.

K důkazu všech tří vět stačí aplikovati rovnici 25*a*)

$$\frac{\mu(xy)}{k'} = \arc\cos \frac{f_{xy}}{\sqrt{f_{xx} f_{yy}}}.$$

Podle předpokladu je v eliptickém útvaru pro každé dva reálné elementy $f_{xy}^2 - f_{xx} f_{yy} < 0$, z čehož plyne $\frac{f_{xy}^2}{f_{xx} f_{yy}} < 1$.

Nikdy tedy nemůže pro reálné elementy býti $\frac{f_{xy}}{\sqrt{f_{xx} f_{yy}}} > 1$.

Tím je dokázána věta prvá. Dokážeme nyní současně druhou a třetí větu.

Má-li býti jeden z elementů x, y nevlastním, musí podle této rovnice býti

$$f_{xx} f_{yy} = 0,$$

t. j.
$$f_{xx} = 0, \quad \text{nebo} \quad f_{yy} = 0.$$

V tom případě nemůže však býti pro $x \neq y$ současně $f_{xy} = 0$. (Zcela snadný důkaz přenechávám píli čtenářově.) To znamená, že případ $m = \infty$ může nastati, to jest, že existují body nevlastní a jejich souřadnice $\eta_1 : \eta_2$ splňují rovnici

$$f_{\eta\eta} = 0.$$

Této rovnici však vyhovují jen elementy absolutní. Tím jsou všechny tři věty dokázány.[10]) V případě svazku přímek jsme tento výsledek již znali, neboť euklidovský svazek jest v podstatě eliptickým svazkem a ve svazku euklidovském jsou nevlastní přímky přímkami isotropickými. Ale ani na přímce tento výsledek nepřekvapuje, známe-li její souvislost s euklidovskou kružnicí. Tato má totiž právě dva nevlastní body, isotropické body své roviny.

Nyní též můžeme doplniti větu předposledního odstavce minulého paragrafu o třech bodech eliptické přímky:

Jsou-li na eliptické přímce dány tři body *a*, *b*, *c* v tomto pořádku, můžeme vždy dospěti od bodu *a* k bodu *c*

I. bez přejití bodu *b* a

II. bez přejití nevlastních elementů.

Takto vyslovená věta zásadně odlišuje přímku eliptickou nejen od přímky hyperbolické, ale i od přímky euklidovské.

Tím jsme v hlavních rysech vyčerpali teorii eliptického útvaru a přejdeme ke studiu útvaru parabolického.

Poznámka: V útvaru hyperbolickém uváděli jsme některé konstrukce. Totéž bychom mohli učiniti i zde. Obě úvahy jsou však principielně stejné a čtenář je může tedy provésti sám, když si uvědomí, že zde samodružné elementy jsou imaginárně sdružené.

---

[10]) Téhož postupu mohli jsme ovšem použíti i při úvaze o nevlastních elementech hyperbolického útvaru.

Jednorozměrný útvar parabolický.

§ 11. Úprava základního vzorce.

1. Předběžný výpočet. Jednorozměrný útvar parabolický jest charakterisován tím, že jeho elementy absolutní splývají v jediný reálný element. V tom případě je však dvojpoměr $\lambda = (\xi\xi x y)$ roven jedné a tudíž vzorec 16) pro každé dva elementy x a y a pro každou od nuly různou konstantu c skýtá podle (VIII, 2, 13)

$$\mu = c\varkappa\pi i \qquad (\varkappa \text{ celé číslo})$$

$$\text{resp. pro } \varkappa = 0 \qquad \mu = 0$$

Tato definovaná míra nevyhovuje ovšem požadavkům, které klademe na úhel, resp. vzdálenost. Proto musíme buď jako míru definovati jinou funkci, nebo vzorec 16) tak přetvořiti, aby shora zmíněným požadavkům vyhovoval. Učiníme toto druhé.

Budeme pokládati útvar parabolický za mezný případ útvaru hyperbolického (když se absolutní elementy nekonečně málo liší). Odvodíme nejdříve rozvoj funkce log λ pro tento hyperbolický útvar a pak limitním pochodem dospějeme ke vzorci pro útvar parabolický.

Můžeme zvoliti soustavu souřadnou tak, že souřadnice absolutních elementů hyperbolického útvaru jsou dány rovnicemi

$$34) \qquad \frac{\xi_2}{\xi_1} = 0 \qquad\qquad \frac{\xi_2'}{\xi_1'} = \delta\,,$$

kde $\delta \neq 0$ jest libovolné číslo. Tím je jejich poloha v útvaru stanovena. Dvojpoměr λ, který určují tyto dva elementy s libovolnými elementy $x = x_1 : x_2$ a $y = y_1 : y_2$, je dán vzorcem (VIII, 5, 25)

$$\lambda = \frac{[x_1\xi_2]\,[y_1\xi_2']}{[y_1\xi_1]\,[x_1\xi_2']} = \frac{x_2}{y_2}\;\frac{y_2 - y_1\delta}{x_2 - x_1\delta} = \frac{1 - y\delta}{1 - x\delta}\,.$$

Omezíme přechodně obecnost svých úvah předpokladem, že souřadnice elementů, jichž míru hledáme, splňují podmínky

$$|y\delta| < 1, \qquad |x\delta| < 1, \qquad -1 < \delta(x-y)\,(1 + x\delta + x^2\delta^2 + \ldots) \lesseqgtr 1,$$

abychom mohli rozvinouti v řady výrazy $\dfrac{1}{1 - x\delta}$ resp. log λ. Podmínky ty jsou potud omezením obecnosti, pokud předpokládáme δ libovolné, rozdílné od nuly. Za předpokladu, (který později skutečně učiníme) že $\delta \to 0$, jsou zmíněné podmínky splněny pro **každé** dva **obecně** položené elementy x, y.

Poslední zlomek vpravo můžeme rozvésti v řadu. Tak obdržíme

$$\lambda = \frac{1 - y\delta}{1 - x\delta} = (1 - y\delta)(1 + x\delta + x^2\delta^2 + \ldots),$$

nebo po úpravě

$$\lambda = 1 + \delta(x - y)[1 + x\delta + x^2\delta^2 + \ldots].$$

Pro výraz $\log(1 + \psi)$ platí však rozvoj

$$\log(1 + \psi) = \psi - \frac{\psi^2}{2} + \frac{\psi^3}{3} - \ldots, \qquad (-1 < \psi \leqq 1)$$

a tudíž

$$\log \lambda = \delta(x - y)[1 + x\delta + x^2\delta^2 + \ldots] - \\ - \frac{1}{2}\delta^2(x - y)^2[1 + x\delta + x^2\delta^2 + \ldots]^2 - \ldots,$$

nebo po úpravě

35) $$\log \lambda = \delta(x - y)\left[1 + \frac{\delta}{2!}(x + y) + \frac{\delta^2}{3!}(\ldots) + \ldots\right]$$

Nevypisujeme koeficientů u vyšších mocnin δ, neboť jich nebudeme potřebovati.

Míra dvou elementů hyperbolického útvaru je dána vzorcem $\mu = \frac{k}{2}\log\lambda$. Zvolme $k = \frac{2l}{\delta}$, kde l je libovolná, od nuly různá konstanta. Získáme tak z rovnice 35)

35') $$\mu(xy) = l(x - y)\left[1 + \frac{\delta}{2!}(x + y) + \frac{\delta^2}{3!}(\ldots) + \ldots\right].$$

Čím je δ menší, tím méně se liší μ od $l(x - y)$ za předpokladu, že ani x, ani y nesplývá s některým z bodů absolutních. Je-li konečně δ tak malé, že $\delta \to 0$, můžeme pro míru hyperbolického útvaru psáti

36) $$\lim_{\delta \to 0} \mu(xy) = l(x - y) = l\frac{[x_1 y_2]}{x_2 y_2}.$$

Ale když $\delta \to 0$, přechází hyperbolický útvar v útvar parabolický, v němž elementy ξ ξ' splývají. Je tedy nasnadě otázka, nemůžeme-li výraz μ při $\delta \to 0$ považovati za nekonečně málo odlišný od hledané míry parabolického útvaru. Aby tomu tak bylo, musela by $\lim\limits_{\delta \to 0} \mu$

a) splňovati podmínky, kladené na míru, a

b) býti invariantem projektivních transformací, které reprodukují dva splývající body absolutní (a značí parabolický pohyb).

Ukážeme nejprve, že $\lim\limits_{\delta \to 0} \mu$ splňuje požadavek sub *a)*. Skutečně

$$\lim_{\delta \to 0} \mu(xy) + \lim_{\delta \to 0} \mu(yz) = l[(x-y)+(y-z)] = (x-z)\,l = \lim_{\delta \to 0} \mu(xz)$$

$$\lim_{\delta \to 0} \mu(xy) = l(x-y) = -\,l(y-x) = -\lim_{\delta \to 0} \mu(yx) \neq 0, \; (x \neq y)$$

$$\lim_{\delta \to 0} \mu(xx) = l(x-x) = 0$$

Dokážeme nyní, že $\lim\limits_{\delta \to 0} \mu$ splňuje i požadavek sub *b)*. K tomu cíli přetvoříme poněkud vzorec 36) tím, že vhodně určíme konstantu l.

2. Volba konstanty l. Konstantu l určíme tak, že zvolíme dva libovolné elementy $j = j_1 : j_2$, $p = p_1 : p_2$, jimž přisoudíme míru 1, t. j.

$$1 = l(j-p),$$

z čehož

36′) $$l = \frac{j_2 p_2}{[p_2 j_1]}.$$

Dosazením této hodnoty do rovnice 36) získáme

$$\lim_{\delta \to 0} \mu(xy) = \frac{[x_1 y_2]\, p_2 j_2}{[p_2 j_1]\, x_2 y_2}$$

nebo vzhledem k 34)

37) $$\lim_{\delta \to 0} \mu(xy) = \frac{[y_2 x_1]\,[j_2 \xi_1]\,[p_2 \xi_1]}{[p_2 j_1]\,[x_2 \xi_1]\,[y_2 \xi_1]}.$$

Tento výraz jest invariantem vzhledem k projektivní grupě a tím spíše tedy k její podgrupě, která určuje parabolický pohyb útvaru.[11]) Samozřejmě vyhovuje i podmínkám, odvozeným pro výraz 36).

---

[11]) Pro každý determinant tvaru $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$ platí transformace až na konst. faktor

$$\begin{vmatrix} 'x_1 & 'y_1 \\ 'x_2 & 'y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 a_{11} + x_2 a_{12} & y_1 a_{11} + y_2 a_{12} \\ x_1 a_{21} + x_2 a_{22} & y_1 a_{21} + y_2 a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Ve výraze 37) se determinanty $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$ právě krátí. Je tedy rovnice 37) skutečně vzhledem k projektivní grupě transformací invariantní.

Skutečně tedy $\lim\limits_{\delta \to 0} \mu$ hoví podmínkám, kladeným na míru parabolického útvaru. Proto definitoricky zavedeme pojem míry parabolického útvaru větou:

Limitu míry hyperbolického útvaru, který se nekonečně málo liší od útvaru parabolického, nazveme měrou útvaru parabolického.

Pro tuto míru zavedeme opět označení μ. Je tedy míra parabolického útvaru dána vzorcem

37′) $$\boxed{\mu\,(xy) = \frac{[y_2\, x_1]\, [j_2\, \xi_1]\, [p_2\, \xi_1]}{[p_2\; j_1]\, [x_2\, \xi_1]\, [y_2\, \xi_1]}}$$

Jest samozřejmé, že v tomto výraze vyskytuje se jen jeden absolutní element, neboť podle předpokladu splývají oba v jeden. — Vzorec 36) upomíná na vzorec pro vzdálenost dvou bodů na přímce euklidovské. Není to výsledek překvapující. Vždyť euklidovský pohyb na přímce je také definován pomocí projektivní grupy transformací, které reprodukují jediný bod (t. zv. bod úběžný, nevlastní) dané přímky. Je zde tedy úplná analogie s pohybem parabolickým. Osvětlíme tuto analogii ještě tak, že určitým způsobem přetvoříme vzorec 37′).

3. Jiný tvar vzorce 37′). Ku přetvoření vzorce použijeme identity

$$[x_1\, y_2]\, [p_1\, \xi_2] = [x_1\, p_2]\, [y_1\, \xi_2] - [x_1\, \xi_2]\, [y_1\, p_2].$$

Dosazením této identity do vzorce 37′) obdržíme

$$\mu\,(xy) = \frac{[x_1\, p_2]\, [\xi_1\, j_2]}{[x_1\, \xi_2]\, [p_1\, j_2]} - \frac{[y_1\, p_2]\, [\xi_1\, j_2]}{[y_1\, \xi_2]\, [p_1\, j_2]}.$$

Tvar sčítanců na pravé straně této rovnice je nám znám. Jsou to výrazy pro dvojpoměry bodů $(p\, \xi\, x\, j)$, resp. $(p\, \xi\, y\, j)$. Podle toho můžeme tedy psáti

38) $$\mu\,(xy) = (p\, \xi\, x\, j) - (p\, \xi\, y\, j).$$

Tím jsme míru dvou elementů vyjádřili rozdílem dvou dvojpoměrů. Vhodnou volbou elementů j, p převedeme jej na jednodušší tvar. Je-li totiž p elementem počátečním $(p_1 = 0, p_2)$, element j elementem jednotkovým $(j_1 : j_2 = 1)$ a element absolutní o souřadnicích ξ_1, $\xi_2 = 0$, je

$$(p\xi xj) = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & 0 \\ x_2 & p \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi_1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & \xi_1 \\ x_2 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ p_2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{+x_1 p_2 \xi_1}{+x_2 p_2 \xi_1} = \frac{x_1}{x_2}$$

a tudíž

$$\mu(xy) = +\frac{x_1}{x_2} - \frac{y_1}{y_2}.$$

Jde-li o přímku a je-li bod absolutní zobrazen na modelu euklidovském bodem nevlastním, můžeme $x = \frac{x_1}{x_2}$ a $y = \frac{y_1}{y_2}$ pokládati právě za euklidovské vzdálenosti od bodu počátečního. Pak je vzdálenost dvou bodů na euklidovském modelu i na parabolické přímce

$$\mu(xy) = +x - y.$$

Výslovně můžeme formulovati tento poznatek větou:

Zvolíme-li euklidovské zobrazení parabolické přímky tak, že absolutní bod parabolické přímky splývá s nevlastním bodem přímky euklidovské, pak parabolická přímka jest přímo přímkou euklidovskou.

K témuž výsledku museli bychom ovšem dospěti i jinou cestou. Mohli bychom totiž vyjíti od definice pohybu a ukázati, že v tomto zvláštním případě je pohyb parabolický shodný s euklidovským pohybem na přímce (s t. zv. translací). Doporučuji tento způsob píli čtenářově.[12]) — Z vývodů předcházejících jest zřejmo, že element absolutní parabolického útvaru je jeho elementem nevlastním. Dokážeme to však výslovně v odstavci následujícím.

4. Elementy nevlastní. Element nevlastní v parabolickém útvaru jest opět definován tím, že s libovolným jiným elementem téhož útvaru určuje míru nekonečně velkou. Dokážeme o něm věty:

Nevlastním elementem parabolického útvaru je jeho element absolutní.

Jen absolutní element parabolického útvaru je jeho elementem nevlastním.

---

[12]) Nejdříve se vyjádří, že bod absolutní ξ se reprodukuje transformací 1). Poté nutno bráti v úvahu, že vzdálenost bodů j, p je právě rovna jedné při každé transformaci.

Obě věty plynou ihned ze vzorce 37'). Dokážeme nejprve větu druhou. Má-li totiž míra dvou elementů býti větší než každé libovolné číslo, musí jmenovatel v 37') se rovnati nule. Ze tří determinantů tohoto jmenovatele může se anulovati buď $[\xi_1 x_2]$ nebo $[\xi_1 y_2]$. (Determinant $[p_1 j_2]$ se nemůže anulovati podle předpokladu, vyjádřeného rovnicí 36'). Anulováním jednoho z prvých dvou determinantů obdržíme

$$\text{buď} \qquad \xi = \frac{\xi_1}{\xi_2} = \frac{x_1}{x_2} = x, \qquad \text{nebo} \qquad \xi = \frac{\xi_1}{\xi_2} = \frac{y_1}{y_2} = y.$$

Z toho plyne, že buď element x nebo element y splývá s elementem ξ. Tím je dokázána druhá věta. — Důkaz prvé věty nečiní zvláštních potíží. Čitatel zlomku v 37') je vždy konečný, od nuly různý. Je tedy anulování jednoho z determinantů $[\xi_1\ x_2]$, $[\xi_1\ y_2]$ ve jmenovateli nejen nutnou, ale i postačující podmínkou, aby μ bylo nekonečně velké. Ale toto anulování nastane jen tenkráte, je-li $x = \xi$, neb $y = \xi$, jak jsme nahoře ukázali. Tak jsme dokázali i prvou větu.

Více se geometrií jednorozměrného útvaru zabývati nebudeme. Poznatků zde získaných upotřebíme v dalších kapitolách, kde budeme studovati útvary dvojrozměrné. Napřed však již upozorňuji, že se budeme zabývati pouze rovinou a nikoliv též (dvojmocným) svazkem rovin, daným bodem procházejících. Omezení to neděje se z důvodů teoretických, nýbrž jen z ohledu na čtenáře, kterému asi ve velké většině geometrie v rovině jest bližší než geometrie takového svazku. Ostatně je možno věty získané při jakési opatrnosti vždy přenésti na teorii tohoto svazku.

HYPERBOLICKÁ ROVINA.

Kapitola IV.

ÚVAHY ZÁKLADNÍ.

§ 1. Formulace problému.

V posledním paragrafu druhé kapitoly naznačili jsme obecně svůj úkol při studiu neeuklidovské geometrie v rovině. V třetí kapitole, v paragrafu druhém jsme přesně definovali úkol neeuklidovské geometrie jednorozměrného útvaru. Týmž způsobem definujeme úkol neeuklidovské geometrie v rovině. Při tom ovšem musíme obor působnosti rozšířiti na obor ternární, t. j. uvažovati zásadně výrazy ve třech proměnných, kdežto dříve jsme se omezovali jen na obor binární (pro dvě proměnné. Viz též VIII, 6). Místo projektivní transformace dvou proměnných budeme uvažovati projektivní transformace tří proměnných (VIII, 4). Taková transformace závisí na osmi koeficientech.

Podkladem našich úvah bude tedy projektivní osmimocná grupa (VIII, 5) transformací. — V této grupě obsažena je trojmocná projektivní grupa, která reprodukuje libovolnou kuželosečku (jednoduchou.[1]) VIII, 7).

Naším úkolem bude studovati invarianty vzhledem k této trojmocné grupě, která je podgrupou osmimocné grupy projektivní.

Podle toho, jakého druhu je kuželosečka, zda reálná, či imaginární, rozeznáváme geometrii hyperbolickou resp.

---

[1]) Je-li ona kuželosečka složená, pak grupa projektivních transformací ji reprodukujících jest obecně čtyřmocná, jak jsme viděli na příkladě pohybu euklidovského (II, 1). Tam totiž isotropické body představují právě takovou složenou kuželosečku. Přes to však pohyb je vyjádřen trojmocnou grupou (II, 1, konec).

eliptickou (II, 4, konec, kde uvažován též případ geometrie parabolické pro kuželosečku složenou).

Budeme se prozatím zabývati jen geometrií hyperbolickou, kdy tedy kuželosečka se reprodukující je reálná.

Úkol geometrie hyperbolické v rovině můžeme po této přípravě definovati přesně takto:

Hyperbolická geometrie v rovině zabývá se studiem invariantů vzhledem ke trojmocné grupě projektivních transformací

$$1)\qquad \begin{aligned} \varrho' x_1 &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 \\ \varrho' x_2 &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 \\ \varrho' x_3 &= a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &(a_{ij} \text{ const. reálné,} \\ &\quad i, j = 1, 2, 3), \end{aligned}$$

které reprodukují jednoduchou, reálnou kuželosečku

$$2)\qquad f_{\xi\xi} = g_{11}\xi_1^2 + g_{22}\xi_2^2 + g_{33}\xi_3^2 + 2\,(g_{12}\xi_1\xi_2 + g_{13}\xi_1\xi_3 + g_{23}\xi_2\xi_3) = 0.$$

Této kuželosečce budeme říkati absolutní kuželosečka. Někdy se též označuje jako kuželosečka Cayleyova, neboť Cayley prvý ji použil k úvahám podobným. Rovině, ve které budeme studovati geometrii hyperbolickou, krátce budeme říkati rovina hyperbolická.[1a])

V útvaru jednorozměrném šlo buď o body na přímce, neb o přímky svazku. V rovině nutno však uvažovati současně body *a* přímky. Ježto přímka jest určena dvěma body, jistě bychom ke studiu invariantních vlastností přímek vystačili s definicí problému, jak jsme ji právě uvedli. Často však je výhodné takové invarianty vyjádřiti přímo v souřadnicích t. zv. přímkových (VIII, 3, 18). Proto budeme definovati zvláště úkol geometrie hyperbolické vzhledem ke studiu přímek.

Na udaném místě kap. VIII dovodili jsme způsob transformace souřadnic přímkových rovnicemi 23) a nebudeme jej tedy znova odvozovati. Rovněž tak odvodili jsme v § 6 téže kapitoly přímkovou rovnici kuželosečky, je-li bodová její rovnice dána. Můžeme ihned těchto poznatků použíti k definici neeuklidovského studia přímek v rovině:

[1a]) Ve svých číselně teoretických úvahách zavádí *Minkovski* pojem tělesa, nikde konkávního. Průsekem tohoto tělesa s obecnou rovinou, určenou třemi body uvnitř tělesa, získáme ovál, nikde konkávní. *Hilbert* ukázal, že takový ovál může zastupovati *Cayleyovu* kuželosečku v geometrii, obdobné geometrii hyperbolické.

Hyperbolická geometrie v rovině zabývá se též studiem invariantů vzhledem ke trojmocné grupě projektivních transformací

$$1') \qquad \begin{aligned} \varrho' X_1 &= A_{11} X_1 + A_{12} X_2 + A_{13} X_3 \\ \varrho' X_2 &= A_{21} X_1 + A_{22} X_2 + A_{23} X_3, \\ \varrho' X_3 &= A_{31} X_1 + A_{32} X_2 + A_{33} X_3 \end{aligned}$$

které reprodukují kuželosečku 2), jejíž přímková rovnice jest

$$2') \quad F_{\Xi\Xi} \equiv \begin{vmatrix} g_{11} g_{12} g_{13} \Xi_1 \\ g_{21} g_{22} g_{23} \Xi_2 \\ g_{31} g_{32} g_{33} \Xi_3 \\ \Xi_1 \ \Xi_2 \ \Xi_3 \ 0 \end{vmatrix} \equiv G_{11} \Xi_1^2 + G_{22} \Xi_2^2 + G_{33} \Xi_3^2 + 2 (G_{12} \Xi_1 \Xi_2 + + G_{13} \Xi_1 \Xi_3 + G_{23} \Xi_2 \Xi_3) = 0.$$

Podle těchto definic budeme postupovati v následujících paragrafech.

Poznámka: Jsou-li z, y dva body v rovině, přímka je spojující má souřadnice (VIII, 3, 18)

$$3) \qquad \varrho X_1 = [y_2 z_3], \qquad \varrho X_2 = [y_3 z_1] \qquad \varrho X_3 = [y_1 z_2].$$

Ale přímkové souřadnice můžeme za určitých předpokladů definovat i jinak. Budiž

$$x^2_1 + x^2_2 + \varepsilon x^2_3 = 0 \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

rovnice nějaké jednoduché kuželosečky v rovině, která se grupou projektivních transformací reprodukuje. Rovnice poláry k bodu u $(u_1 : u_2 : u_3)$ vzhledem k této kuželosečce jest

$$x_1 u_1 + x_2 u_2 + \varepsilon x_3 u_3 = 0.$$

Ježto však rovnici obecné přímky je vždy možno psáti

$$x_1 a + x_2 b + \varepsilon x_3 c = 0 \qquad (a, b, c \text{ const}),$$

plyne z přirovnání obou rovnic

$$4) \qquad \varrho u_1 = a, \qquad \varrho u_2 = b, \qquad \varrho u_3 = c.$$

Ježto poměr $a : b : c$ určuje jednoznačně přímku, můžeme čísla a, b, c považovati za přímkové souřadnice přímky. Jsou to tedy zároveň bodové souřadnice jejího pólu.

Vyjádříme-li rovnici přímky pomocí souřadnic, definovaných rovnicí 3), získáme (VIII, 3, 16)

$$x_1 X_1 + x_2 X_2 + x_3 X_3 = 0.$$

Jsou tedy oba druhy souřadnic vázány rovnicemi

$$a : b : c = X_1 : X_2 : \varepsilon X_3.$$

Pokud se týče užívání jednotlivých druhů těchto souřadnic, smluvíme se na tom, že není-li výslovně jinak podotčeno, budeme užívati souřadnic definovaných rovnicemi 3).

§ 2. Základní metrické vztahy.

1. Vzdálenost dvou bodů. Vzdálenost dvou bodů v rovině hyperbolické definujeme podobným způsobem, jako jsme definovali míru dvou elementů v hyperbolickém útvaru. Spojíme dva body dané x, y přímkou, která protne absolutní kuželosečku v bodech ξ, ξ'. Stanovíme poté dvojpoměr $(\xi \xi' x y)$ a jeho logaritmus, násobený nějakou vhodně volenou konstantou, prohlásíme za vzdálenost bodů x a y. Nazveme-li body ξ, ξ' absolutními body dané přímky, je tím i formálně tento postup identifikován s postupem, kterým jsme v (III, 2, odst. 3) odvodili míru dvou elementů. Proto již nebudeme znova dokazovati, že takto definovaná míra vyhovuje podmínkám, které předepisujeme vzdálenosti. (Týž odstavec.)

Postup nahoře vylíčený provedeme analyticky takto:

Souřadnice každého bodu z na přímce možno vyjádřiti lineárně souřadnicemi dvou jejích bodů:

5) $$\sigma z_1 = a_1 x_1 + a_2 y_1, \quad \sigma z_2 = a_1 x_2 + a_2 y_2, \quad \sigma z_3 = a_1 x_3 + a_2 y_3.$$

Totéž platí ovšem i o bodech absolutních (průsečících spojnice $x\,y$ s absolutní kuželosečkou):

$$\sigma \xi_1 = a_1 x_1 + a_2 y_1, \quad \sigma \xi_2 = a_1 x_2 + a_2 y_2, \quad \sigma \xi_3 = a_1 x_3 + a_2 y_3.$$

Koeficienty a_1, a_2 určíme opět z podmínky, že bod ξ leží na absolutní kuželosečce. Obdržíme tak

6) $$a_1^2 f_{xx} + 2 a_1 a_2 f_{xy} + a_2^2 f_{yy} = 0,$$

kde

$$f_{xx} = g_{11} x_1^2 + g_{22} x_2^2 + g_{33} x_3^2 + 2 (g_{12} x_1 x_2 + g_{13} x_1 x_3 + g_{23} x_2 x_3)\ ^{2)}$$

$$f_{yy} = g_{11} y_1^2 + g_{22} y_2^2 + g_{33} y_3^2 + 2 (g_{12} y_1 y_2 + g_{13} y_1 y_3 + g_{23} y_2 y_3)$$

$$f_{xy} = g_{11} x_1 y_1 + g_{22} x_2 y_2 + g_{33} x_3 y_3 + g_{12} (x_1 y_2 + x_2 y_1) +$$
$$+ g_{13} (x_1 y_3 + x_3 y_1) + g_{23} (x_2 y_3 + x_3 y_2).$$

Každému poměru $\frac{a_1}{a_2}$ odpovídá nějaký bod na přímce $x\,y$.

---

[2]) $f_{xx} = 0$ značí, že bod x leží na absolutní kuželosečce, podobně $f_{yy} = 0$ značí bod y na této kuželosečce, $f_{xy} = 0$ jest rovnicí polárně sdružených bodů vzhledem ke kuželosečce absolutní. (Bodem x musí procházeti polára bodu y vzhledem k této kuželosečce a naopak.)

Specielně pro bod

x obdržíme z rovnic 5)

$$\alpha_1 : \alpha_2 = 1 : 0,$$ pro bod

y obdržíme z rovnic 5)

$$\alpha_1 : \alpha_2 = 0 : 1,$$ pro bod

ξ obdržíme z rovnice 6)

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \nu_1 = \frac{-f_{xy} + \sqrt{f_{xy}^2 - f_{xx} f_{yy}}}{f_{xx}},$$ pro bod

ξ' obdržíme z rovnice 6)

$$\frac{\alpha'_1}{\alpha'_2} = \nu_2 = \frac{-f_{xy} - \sqrt{f_{xy}^2 - f_{xx} f_{yy}}}{f_{xx}}.$$

Takovým způsobem jsou tyto čtyři body na přímce $x\,y$ určeny právě poměrem dvou údajů a můžeme tudíž výpočet pro logaritmus dvojpoměru $(\xi\,\xi'\,x\,y)$ (který opět budeme značiti λ) uspořádati tak, jako v (III, 2, odst. 3).

Získáme pro $\log \lambda$ rovnici

$$\log \lambda = \log \frac{f_{xy} + \sqrt{f_{xy}^2 - f_{xx} f_{yy}}}{f_{xy} - \sqrt{f_{xy}^2 - f_{xx} f_{yy}}}.$$

Vzdálenost dvou bodů x a y definujeme pak obdobně jako ve zmíněné kapitole vzorcem

$$7) \qquad m(xy) = \frac{c}{2} \log \lambda = \frac{c}{2} \log \frac{f_{xy} + \sqrt{f_{xy}^2 - f_{xx} f_{yy}}}{f_{xy} - \sqrt{f_{xy}^2 - f_{xx} f_{yy}}}, \quad (c \neq 0)$$

kde obecně $c = k + k'i$ (k, k' reálné).

Při volbě konstanty c nutno však postupovati s opatrností. Body absolutní mohou totiž v hyperbolické rovině na reálné přímce býti buď

a) reálné různé, protíná-li přímka absolutní kuželosečku $(f_{xy}^2 - f_{xx} f_{yy} > 0)$,

b) imaginární různé, neprotíná-li[3]) přímka absolutní kuželosečku $(f_{xy}^2 - f_{xx} f_{yy} < 0)$,

[3]) Přesněji říkáme, že každá reálná přímka protíná kuželosečku a to buď ve dvou různých bodech reálných, nebo ve dvou bodech imaginárních sdružených, nebo konečně ve dvou splývajících reálných bodech. Jako příklad imaginárně sdružených bodů na reálné kuželosečce stůjtež zde průsečíky přímky $x_3 = 0$ s reálnou kuželosečkou

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0.$$

Jejich souřadnice jsou $1 : i : 0$ resp. $1 : -i : 0$.

c) reálné splývající, je-li přímka tečnou kuželosečky absolutní ($f_{xy}^2 - f_{xx} f_{yy} = 0$).

Podle toho rozeznáváme v rovině hyperbolické tři druhy přímek: *a)* hyperbolické, *b)* eliptické, *c)* parabolické.

V předcházející kapitole jsme ukázali, že pro každý z těchto případů je nutno voliti konstantu c jinak, má-li býti splněn samozřejmý požadavek, že vzdálenost dvou reálných bodů je vždy reálná. Již z toho je zřejmo, že volba konstanty c vyžaduje hlubšího rozboru. Odvodíme ji z požadavků, které sice nejsou logickou nutností, ale pro názor jsou téměř samozřejmé. Tyto požadavky jsou:

1. Vzdálenost různých reálných bodů je vždy reálná, od nuly různá.

2. Na přímce možno volně pohybovati bodem.

Rozepíšeme poslední vzorec pro $m(xy)$, při čemž se omezíme jen na hlavní hodnoty. Obdržíme tak pro přímku hyperbolickou (VIII, 2)

$$m = \frac{k + k'i}{2} \overline{\log} \lambda, \qquad \lambda > 0$$

$$m = \frac{k}{2} \overline{\log} |\lambda| - \frac{k'}{2} \pi + \frac{i}{2} (k' \log |\lambda| + k\pi), \qquad \lambda < 0,$$

pro přímku eliptickou

$$m = \frac{ki - k'}{2} \varphi$$

a konečně pro přímku parabolickou

$$m = 0.$$

Z těchto vzorců jest ihned zřejmo, že nemůžeme voliti současně $k \neq 0$, $k' \neq 0$, neboť pak by pro přímku hyperbolickou a eliptickou nebyla splněna první podmínka a to i v tom případě, omezili-li bychom se na obor jen uvnitř, nebo jen vně obrazu absolutní kuželosečky. Zkusme tedy zvoliti jedno z čísel k, k' rovno nule.

Pro přímku eliptickou jsou oba požadavky splněny, jen když volíme $k = 0$, t. j. $c = k'i$. Při této volbě konstanty není však jistě splněna první podmínka pro přímku hyperbolickou. Nesmíme tedy voliti $c = k'i$. Volíme-li však $c = k$, jsou pro hyperbolickou přímku podmínky 1., 2. splněny jen tenkráte, omezíme-li se na studium dvojic bodů, jichž obrazy nejsou oddělovány obrazy bodů absolutních. To znamená, že hořejší podmínky jsou splněny pro každou přímku hyperbolickou, omezíme-li se na studium té části roviny, jejíž obraz je buď vně, nebo uvnitř obrazu absolutní kuželosečky. Avšak v té části roviny, jejíž obraz je vně obrazu absolutní kuželosečky, nalézají se přímky eliptické a parabolické, pro něž hořejší podmínky za předpokladu $c = k$ nejsou splněny. Nesmíme tudíž tuto část uvažovati. V té části roviny, jejíž obraz jest uvnitř obrazu absolutní kuželosečky, neexistují eliptické a parabolické přímky a tudíž za předpokladu $c = k$ jsou pro vzdálenost hořejší podmínky vždy splněny. Tento důležitý výsledek formulujeme takto: Podmínkám 1. a 2. je vždy vyhověno, omezíme-li se na tu část roviny, jejíž obraz jest uvnitř obrazu absolutní kuželosečky a předpokládáme-li $c = k$.

Dosazením této hodnoty k do vzorce pro $m(xy)$ obdržíme definitivní rovnici pro vzdálenost dvou bodů:

$$\boxed{m(xy) = \frac{k}{2} \log \lambda = \frac{k}{2} \log \frac{f_{xy} + \sqrt{f_{xy}^2 - f_{xx}f_{yy}}}{f_{xy} - \sqrt{f_{xy}^2 - f_{xx}f_{yy}}}} \tag{7'}$$

Interpretaci a přetvoření tohoto vzorce provedeme později. Nyní však se obrátíme ke studiu vzorce pro úhel dvou přímek v rovině.

2. Úhel dvou přímek. Nechť v hyperbolické rovině jsou dány dvě přímky X, Y o souřadnicích X_1, X_2, X_3; Y_1, Y_2, Y_3. Jejich úhel stanovíme obdobným způsobem, jakým jsme v předcházejícím odstavci stanovili vzdálenost dvou bodů. Tam jsme na spojnici xy stanovili průsečné body s absolutní kuželosečkou, zde průsečíkem obou přímek vedeme tečny k absolutní kuželosečce. Nazveme je Ξ a Ξ'. Tím jsme ve svazku přímek, který prochází bodem (XY), stanovili přímky, které jsme dříve nazvali přímky absolutní. Odvození úhlu dvou přímek děje se právě týmž způsobem jako v kapitole předcházející. Při tom ovšem předpokládáme kuželosečku absolutní danou ve tvaru přímkovém 2'. (Komu by přece toto stanovení úhlu zdálo se obtížným, ten může aplikovati krok za krokem postup odstavce předcházejícího.) Získáme tak vzorec pro úhel $M(XY)$

$$M(XY) = \frac{C}{2} \log \Lambda = \frac{C}{2} \log \frac{F_{XY} + \sqrt{F_{XY}^2 - F_{XX}F_{YY}}}{F_{XY} - \sqrt{F_{XY}^2 - F_{XX}F_{YY}}}. \tag{8}$$

Zde je C libovolná, od nuly různá konstanta, obecně tvaru

$$C = K + K'i,$$

při čemž K a K' jsou čísla reálná a Λ dvojpoměr přímek Ξ, Ξ', X, Y, t. j. $\Lambda = (\Xi\Xi'XY)$. Bližší stanovení konstanty C neskýtá obtíží. Víme totiž již z předcházejícího odstavce, že se musíme omeziti na studium bodů, jichž znázornění jest uvnitř obrazu absolutní kuželosečky. Z takového bodu můžeme však vésti jen tečny imaginárně sdružené. Jsme tedy vedeni v hyperbolické rovině jen ke svazkům eliptickým. Při takových svazcích je však nutno voliti konstantu C ryze imaginární $C = K'i$ $(K = 0)$. V prvním odstavci sedmého paragrafu kapitoly III jsme dokázali, že horní hranice pro M jest (až na násobky $- k'\pi$) právě

$$M_{max} = K'\pi.$$ [4])

Učiníme ještě jeden předpoklad, který omezí volbu konstanty K'. Budeme totiž požadovati, aby úhrnná hodnota úhlu dvou přímek byla právě, jako v geometrii euklidovské, rovna π.

Z posledního vzorce je zřejmo, že musíme voliti $K' = 1$, má-li tomuto požadavku býti vyhověno. Tím jsme vedeni k definitivnímu tvaru vzorce pro úhel dvou přímek

$$8') \qquad \boxed{M(XY) = \frac{i}{2} \log \frac{F_{XY} + \sqrt{F_{XY}^2 - F_{XX} F_{YY}}}{F_{XY} - \sqrt{F_{XY}^2 - F_{XX} F_{YY}}}}$$

3. Jiný tvar vzorců základních. Právě tak, jako jsme odvozovali vzorce 18), 24), 25) v předcházející kapitole, můžeme obdobné vzorce stanoviti i zde. Nebudeme již prováděti výpočet podrobně a podáme jen výsledky. Základní vzorec pro vzdálenost dvou bodů možno též psáti

$$9) \quad \begin{aligned} a) \quad & m(xy) = k \operatorname{arc\,Cos} \frac{f_{xy}}{\sqrt{f_{xx} f_{yy}}} = ik \operatorname{arc\,cos} \frac{f_{xy}}{\sqrt{f_{xx} f_{yy}}}, \\ b) \quad & m(xy) = k \operatorname{arc\,Sin} \sqrt{\frac{f_{xy}^2 - f_{xx} f_{yy}}{f_{xx} f_{yy}}} = ki \operatorname{arc\,sin} \sqrt{\frac{f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2}{f_{xx} f_{yy}}}. \end{aligned}$$

---

[4]) Na uvedeném místě jsme užívali poněkud jiného označení pro konstantu, což snad čtenáře nebude mýliti.

Pro úhel dvou přímek obdržíme ze vzorce 8')

$$
10)\quad
\begin{aligned}
&a)\quad M(XY) = \arccos \frac{F_{XY}}{\sqrt{F_{XX}F_{YY}}},\\
&b)\quad M(XY) = \arcsin \sqrt{\frac{F_{XX}F_{YY} - F_{XY}^2}{F_{XX}F_{YY}}}.
\end{aligned}
$$

Tyto vzorce nám velice prospějí v pozdějším počtu a proto je zde výslovně uvádíme.

§ 3. Interpretace základních vzorců.

Interpretace základních vzorců je nám vlastně již známa z kapitoly předcházející. Nebudeme ji proto znova odvozovati, nýbrž omezíme se na stručné poznámky. Tak v prvé řadě vidíme, že v hyperbolické rovině podle naší úmluvy přicházejí v úvahu jen přímky hyperbolické a svazky jen eliptické. To znamená:

V hyperbolické rovině měříme vzdálenosti hyperbolicky, ale úhly elipticky.

Tento výsledek ovšem není nový, ale je dobře uvésti jej právě tímto způsobem, neboť takto je zřejma jedna z nejcharakterističtějších vlastností hyperbolické roviny: její metrická neduálnost.[5])

Vzdálenosti dvou bodů neodpovídá totiž duálně úhel dvou přímek, které jsou projektivně duálné k oněm bodům.[6])

Z prvé části věty nahoře vyslovené můžeme odvoditi mnoho význačných vlastností hyperbolické roviny, uvědomíme-li si výsledky získané v předcházející kapitole při studiu hyperbolické přímky. V prvé řadě je to zavedení bodů nevlastních. Na každé hyperbolické přímce existují dva reálné body nevlastní. Dokázali jsme, že jsou to právě absolutní body dané přímky. Vzdálenost dvou bodů, z nichž

---

[5]) Euklidovská rovina je také metricky neduální. Vzdálenosti měříme parabolicky, úhly elipticky.

[6]) To bylo jedním z důvodů, pro který někteří matematikové zavrhovali možnost domněnky, že roviny v našem prostoru jsou hyperbolické, neb euklidovské (t. j. že náš prostor je hyperbolický, neb euklidovský). Poukazovali na to, že v přírodě jeden úkaz plyne z druhého a tudíž je málo pravděpodobno, že by takové roviny se dvěma různými metrikami (pro body a přímky) se v přírodě vyskytovaly.

alespoň jeden je nevlastní, je nekonečně velká. Při odvozování vzorce pro vzdálenost dvou bodů v rovině hyperbolické jsme za body absolutní pokládali průsečíky přímky s absolutní kuželosečkou. To platilo o každé přímce a proto můžeme říci:

Body kuželosečky absolutní, a jen tyto, jsou nevlastními body hyperbolické roviny. Jsou vždy reálné. Vzdálenost libovolného bodu, který není nevlastní, od nějakého bodu absolutní kuželosečky je nekonečně velká.

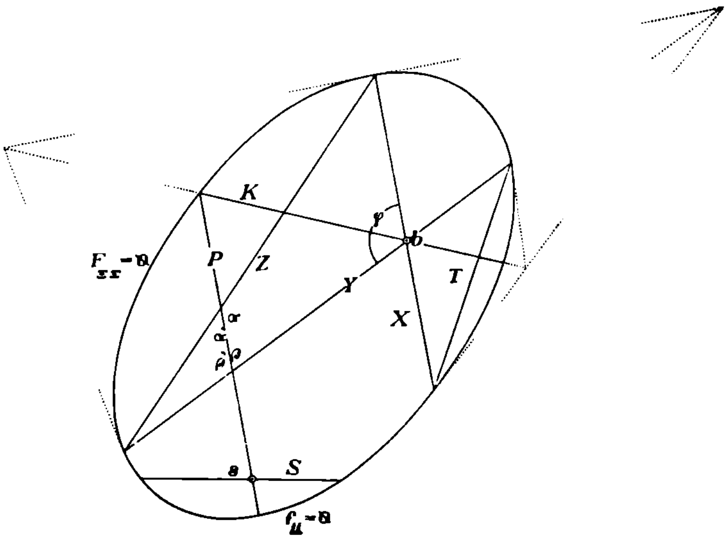
Z toho plyne, že dvojrozměrná bytost, nadaná schopností měřiti vzdálenosti jen hyperbolicky, nikdy by bodů absolutních nedosáhla a tudíž ani nemohla přestoupiti. Tím naše omezení na obor na téže straně absolutní kuželosečky jest i logicky a poeticky sankcionováno, neboť se stanoviska takové bytosti existuje jen jeden obor roviny vzhledem k absolutní kuželosečce. Omezili jsme se však na obor uvnitř absolutní kuželosečky. Je tudíž jen logickou konsekvencí, když slovem „bod" označíme jen takový, jehož obraz jest uvnitř obrazu absolutní kuželosečky. Podobně slovem „přímka" budeme rozuměti jen tu její část, která se znázorňuje uvnitř obrazu absolutní kuželosečky. Budeme-li přes to nuceni mluviti o bodech, jichž zobrazení je vně obrazu absolutní kuželosečky, budeme užívati označení „bod ideální".

Podobně budeme mluviti o částech přímky, jichž zobrazení je vně obrazu absolutní kuželosečky, jako o „ideální části přímky". Dle toho přímky eliptické budou pro nás „ideální". Rovněž tak přímky parabolické, s výjimkou jednoho (vlastně dvou splývajících) bodu tečného.

Učiníme ještě jednu úmluvu rázu více formálního. Mohli jsme ji učiniti sice již dříve, ale přistoupíme k ní teprve nyní, když je možno předpokládati, že čtenář již dokonale rozeznává mezi neeuklidovským útvarem a jeho euklidovským modelem. Při výkladu nebudeme názvy nahoře zavedené dávati do uvozovek. To jsme učinili jen proto, aby více vynikly. Uvozovky si reservujeme pro útvary na modelu. Tak obrazem bodu je „bod". podobně obrazem přímky je „přímka". Uvozovkami tedy zdůrazňujeme, že mluvíme o obraze útvaru, nikoliv přímo o něm. To, jak později poznáme, velice zjednoduší prostředky výrazové. — Obraťme se nyní ke studiu přímek v rovině.

§ 4. Dvě přímky.

Výsledky předcházejících odstavců neposkytovaly vlastně více, než jsme znali již z kapitoly předchozí. V tomto paragrafu odvodíme některé poznatky, jež budou pro nás zcela nové. K tomu cíli všimněme si obrazu 1, kde jsou vyznačeny různé polohy dvou přímek. Přímky X, Y[7]) se protínají ve skutečném bodě mimo kuželosečku absolutní, přímky X, Z (nebo Y, Z) se protínají na absolutní kuželosečce, konečně přímky Z, T se neprotínají. Je třeba všimnouti si zvláště každé z těchto tří poloh dvou přímek, což učiníme v následujících řádcích.



Obr. 1.

Přímky X, Y, které se protínají ve skutečném bodě mimo absolutní kuželosečku, nazýváme různoběžky. Jejich úhel[8]) měříme podle 8'. Je vždy reálný, jak jsme dovodili na příslušných místech při studiu eliptického svazku (III, 7, odst. 1). Největší úhel dvou takových přímek je

[7]) Podle úmluvy v předcházejícím § míníme tím přímky, které jsou znázorněny „přímkami“ X, Y.

[8]) Úhlem dvou přímek nazýváme opět hlavní hodnotu logaritmu ve vzorci 8'.

roven π (IV, 2, odst. 2). Zvláštní zmínky zasluhují přímky, které svírají úhel $\frac{\pm\pi}{2}$, t. zv. přímky kolmé. Tu musí podle 8') býti

$$M(XY) = \frac{i}{2} \log \frac{F_{XY} + \sqrt{F_{XY}^2 - F_{XX} F_{YY}}}{F_{XY} - \sqrt{F_{XY}^2 - F_{XX} F_{YY}}} = \pm \frac{\pi}{2}.$$

Z této rovnice plyne (podle VIII, 1, 3)

$$\frac{F_{XY} + \sqrt{F_{XY}^2 - F_{XX} F_{YY}}}{F_{XY} - \sqrt{F_{XY}^2 - F_{XX} F_{YY}}} = e^{\pm \pi i} = \cos\pi \pm i \sin\pi = -1,$$

to jest

$$F_{XY} = 0.$$

S podobnou rovnicí (pro souřadnice bodové) jsme se již setkali (III, 2, odst. 3, poznámka 4) a dovodili (podle VIII, 6, odst. 1), že značí elementy harmonicky sdružené k elementům absolutním. Podle poznámky 2 v této kapitole víme, že $f_{xy} = 0$ je rovnicí bodů polárně sdružených vzhledem k absolutní kuželosečce. Přímkám, které vyhovují rovnici $F_{XY} = 0$, říkáme také přímky polárně sdružené. Jejich obrazy mají tu vlastnost, že „přímka" X prochází „pólem" „přímky" Y a obráceně. Můžeme tedy říci:

Dvě kolmé různoběžky (kolmice) jsou polárně sdruženy vzhledem k absolutní kuželosečce.[9])

Někdy se takovým přímkám říká též harmonicky sdružené (III, 7, odst. 1). Na obraze 1 jsou to právě „přímky" X, Y.

Známe-li již definici kolmých přímek, můžeme snadno odvoditi větu: Dvě různoběžky nemají společné kolmice. Taková kolmice by musela procházeti póly obou přímek. Tyto póly jsou však ideální, vždy tak položeny, že i jejich spojnice je ideální a tudíž pro nás neexistuje. („Průsečík" různoběžek je totiž uvnitř „absolutní kuželosečky". Společná „kolmice" obou různoběžek je jeho polárou a ta tedy protíná „absolutní kuželosečku" v bodech imaginárních a tudíž je vně „abs. kuželosečky".)

Obraťme se nyní ke studiu přímek, které se protínají na absolutní kuželosečce. (Na př. X, Z, nebo Y, Z.) V tomto

---

[9]) Připomeňme si obdobnou větu z euklidovské geometrie: „Dvě přímky kolmé jsou polárně (harmonicky) sdruženy k přímkám isotropickým". Čtenář si tuto větu snadno odvodí ze vzorce *Laguerreova*. (III, 1, 4.)

případě absolutní přímky se ztotožňují v jedinou, totiž tečnu k absolutní kuželosečce. V kapitole III, 2, odst. 3 ad *c)* jsme však dovodili, že rovnice (nyní v souřadnicích přímkových) $F_{XZ}^2 - F_{XX} F_{ZZ} = 0$ má za následek splývání elementů absolutních. Totéž však platí i obráceně, takže v tomto případě je podle 8′)

$$M(XZ) = \frac{i}{2} \log \frac{F_{XZ}}{F_{XZ}} = \frac{i}{2} \log 1 = 0.$$

Úhel přímek, které se protínají na absolutní kuželosečce, je roven 0. Přímky, jež se protínají na absolutní kuželosečce, nazýváme rovnoběžné (rovnoběžky) zcela podle analogie rovnoběžek euklidovských. Z obrázku přímo plyne důležitá věta o rovnoběžkách:

Z libovolného bodu možno k dané přímce vésti **dvě** a **jen dvě** rovnoběžky.

Tak možno na př. z bodu *b* vésti dvě rovnoběžky *X* a *Y* k přímce *Z*. (Obr. 1.) To znamená, že ke každému z obou možných směrů na přímce *Z* náleží jen jedna přímka (buď *X*, nebo *Y*). (V literatuře se mluví též o polopřímkách (*X*, *Y*), k dané přímce (*Z*) rovnoběžných.) Tato možnost do jisté míry sama charakterisuje geometrii hyperbolickou. *Lobačevský,* tvůrce hyperbolické geometrie, učinil ji jedním ze základních požadavků své geometrie, nahradiv jí V. postulát *Euklidův.* O dvou rovnoběžkách je možno dokázati, že nemají společné kolmice. Taková kolmice by musila procházeti póly obou rovnoběžek a je tudíž ideální. (Je to ovšem „tečna“ absolutní kuželosečky.) Nejvýše bychom snad mohli říci, že mají společný směr kolmý (znázorněný směrem „tečny“ k „absolutní kuželosečce“ v jejich společném „průsečíku“). Ale čtenář se sám snadno přesvědčí, že tento směr svírá s příslušnými rovnoběžkami úhly neurčité. Kdybychom přes to chtěli pojem společného kolmého směru dvou rovnoběžek zachovati, musili bychom definitoricky zavésti hodnotu úhlu přímky a směru tečného k absolutní kuželosečce v jejím bodě absolutním. To by však mělo právě tak málo geometrického oprávnění, jako kdybychom zaváděli v euklidovské geometrii pojem úhlu přímky vlastní a nevlastní a tudíž tak neučiníme.

Třetí případ, kdy dvě přímky se neprotínají, není méně zajímavý než případ předcházející. Přímky, které se neprotínají, budeme nazývati mimoběžné (mimoběžky).[9a])

[9a]) Poincaré je nazývá rovnoběžky.

Jsou to na příklad Z a T. Zodpovězme nejdříve otázku, jaký úhel svírají mimoběžky? Opakujme krok za krokem postup, jakým získáme úhel! „Přímky“ Z a T prodloužíme až do společného „průsečíku“, z něhož vedeme „tečny“ k „absolutní kuželosečce“. Tyto „tečny“ jsou vždy reálné, příslušný dvojpoměr tedy také, a to vždy kladný, a tudíž jeho logaritmus je taktéž reálný. Podle vzorce 8') obdržíme hodnotu úhlu násobením tohoto logaritmu $\frac{i}{2}$, což v našem případě dává výsledek imaginární:

Úhel dvou mimoběžek je vždy imaginární.

O takových mimoběžkách Z, T můžeme dokázati, že mají společnou kolmici. „Kolmice“ K musí totiž procházeti „póly“ „přímek“ Z, T, t. j. býti polárou „průsečíku“ „přímek“ Z, T vzhledem k „absolutní kuželosečce“. Ježto tento „průsečík“ je vně „absolutní kuželosečky“, je tím zaručeno, že „kolmice“ protíná „absolutní kuželosečku“ v reálných „bodech“. My ovšem neuvažujeme její ideální část.

(Existence společné kolmice dvou mimoběžek vysvětluje také jejich jiný, poněkud nezvyklý název nadrovnoběžky.)

Seznámivše se takto s různými polohami dvou přímek, můžeme výslovně formulovati větu (obr. 1):

Bodem s uvnitř nějakého úhlu dvou různoběžek (X, Y) nebo rovnoběžek (Z, X) můžeme vždy vésti mimoběžku alespoň k jednomu z ramen úhlu.

Později uvidíme, že tato zdánlivě jednoduchá věta byla příčinou nezdarů při ‚důkazech‘ V. postulátu *Euklidova*. V následujícím paragrafu některé tyto pokusy uvedeme a vytkneme jejich chyby.

§ 5. Některé pokusy o důkaz V. postulátu Euklidova.

Pokusy, o nichž se v tomto paragrafu zmíníme, spočívají většinou na předpokladech, které buď nejsou logicky nutné, nebo jsou přímo rovnocenné s V. postulátem. Můžeme zhruba říci, že jejich autoři dokázali to, co předpokládali, když z těchto předpokladů chtěli dokázati onen postulát. Většinou a priori popírali (byť i nevědomky) možnost hyperbolické geometrie.

Posidonius (v prvém století před Kristem) upotřebil k důkazu této definice rovnoběžek[10]): Dvě přímky jsou rovnoběžné, mají-li stejné vzdálenosti. Při tom předpokládal, že vzdálenosti se měří na společných kolmicích. My jsme však o přímkách rovnoběžných dokázali, že v hyperbolické rovině vůbec společné kolmice nemají. Ostatně později (V, 1, odst. 3) dokážeme, že geometrickým místem bodů, stejně od dané přímky vzdálených, není přímka. Tento autor tedy jistě ze svých úvah vylučoval — nevědomky — hyperbolickou geometrii.

Ptolemaios (v druhém století po Kr.) chtěl dokázati V. postulát následujícím pochodem (obr. 1): Předpokládáme-li, že úhly α, β, tvořené rovnoběžkami Z, Y a příčkou P, jsou dohromady větší než úhel 180°, $\alpha + \beta > 2R$, musí býti též $\alpha' + \beta' > 2R$. Z toho plyne $\alpha + \beta + \alpha' + \beta' > 4R$. Předpokladem $\alpha + \beta < R$ dospějeme týmž pochodem k nerovnině $\alpha + \beta + \alpha' + \beta' < 4R$. Ježto však platí rovnice

$$4R = (\alpha + \alpha') + (\beta + \beta') = \alpha + \beta + \alpha' + \beta',$$

je nutno předpokládati $\alpha + \beta = 2R$. Z této rovnice snadno plyne důkaz V. postulátu. Chyba spočívala v tom, že předpokládal $\alpha = \beta'$, $\alpha' = \beta$, což není logicky nutné. Skutečně v rovině hyperbolické je $\alpha \neq \beta'$, $\alpha' \neq \beta$.[11])

Proclus (v pátém stol. po Kr.) dokázal V. postulát větou: Protíná-li přímka P jednu ze dvou rovnoběžek Z a X, musí nutně protínati i druhou. Jistě tedy i tento matematik vylučoval — nevědomky — možnost hyperbolické geometrie, jak nás poučí pohled na obrazec.

Saccheri (1667—1733) postupoval asi tímto způsobem: Předpokládal čtyřúhelník s třemi pravými úhly a chtěl dokázati, že čtvrtý úhel jest rovněž pravý. (Z existence čtvrtého úhlu pravého plyne V. postulát.) Dokázal, že tento úhel

---

[10]) *D'Alembert* v „Encyclopédie Méthodique Mathématique", sv. II, str. 519, ve článku „Parallèles" píše: „La définition et les propriétés de la ligne droite, ainsi que des lignes parallèles sont l'écueil et pour ainsi dire le scandale des éléments de Géométrie." „Definice a vlastnosti přímky, jakož i rovnoběžek jsou úskalím a takřka ostudou základů geometrie." Citováno podle *Bonola-Liebmann:* „Die nichteuklidische Geometrie", str. 54. (V tomto paragrafu je této knihy hojně použito.)

[11]) Ovšem, že i na modelu euklidovském jsou tyto nerovnice obecně splněny, měříme-li je euklidovsky. Z euklidovské velikosti úhlů, které nemají společný vrchol a jedno rameno, nesmíme však usuzovati na poměr jejich hyperbolických velikostí!

nemůže býti větší než 90°.[12]) Chtěl rovněž dokázati, že nemůže býti menší než 90°. To se mu však matematicky nepodařilo. Naopak sestrojil prvé základy hyperbolické geometrie. Ježto však chtěl dokázati V. postulát, zavrhl z důvodů logických hypotésu o ostrém úhlu. Při odvozování důsledků z této hypotésy dospěl totiž k výsledkům, které odporují podle jeho názoru přirozenosti přímky. Tento italský mnich byl snad prvý, který logicky vybudoval základy geometrie hyperbolické. Tragické je, že vlivem tradice a názoru je sám zavrhl.

Legendre (1752—1833) podal důkaz V. postulátu, opíraje se o větu: Bodem *s* uvnitř úhlu přímek *Y* a *X* možno vždy vésti různoběžku k oběma ramenům. Na jiném místě se mu podařilo dokázati, že v případě geometrie hyperbolické (podle naší terminologie) musel by úhel býti závislý na délce ramen. Tato závislost (v hyperbolické geometrii zcela správná, jak později dovodíme) zdála se *Legendreovi* býti protismyslná a proto zavrhl možnost geometrie hyperbolické.

Saccheri byl prvý, který si byl vědom, že se mu nepodařilo matematicky dokázati, že geometrie hyperbolická je nemožná. Zmínili jsme se o důvodech, které ho přiměly k tomu, aby neuznal její logické oprávnění. Nebyly to důvody matematické a tudíž zaujetí kladného stanoviska k této geometrii bylo jen otázkou času. Skutečně později mnozí, kteří počali pracovati s úmyslem dokázati V. postulát, musili složiti zbraně a často přiznati možnost geometrie hyperbolické.[13])

Mohlo by se říci, že v době *Gaussově* (1777—1855) vše bylo připraveno k objevu a zdůvodnění hyperbolické geometrie. Dosud však nebyly přesně definovány rovnoběžky. To učinil *Gauss* takto (obr. 1): Neprotínají-li se dvě přímky *Y*, *Z* (v konečnu), ale každá přímka bodem *b* na *Y* mezi *K*, (která je různoběžná se *Z*, ale nikoliv nutně kolmá k *Z*) a *Y* protíná *Z*, pak tyto přímky jsou rovnoběžné. (*Gauss* měl zřejmě na mysli

[12]) Dnes víme, že se mu to podařilo proto, že předpokládal přímku nekonečnou, čímž předem byla vyloučena geometrie eliptická. Formulace, kterou podáváme, není přesně *Saccheriho*, ale věcně je stejná.

[13]) O geometrii eliptickou se před *Riemannem* nikdy nejednalo. Z kritiků důkazů V. postulátu uvedu zde alespoň jedno jméno, *Kluegelovo* (1739—1812), který po důkladné kritice stávajících důkazů dovodil jejich nesprávné založení a přišel k domněnce, že dvě mimoběžky mohou divergovati.

rovnoběžnost jen v jednom směru.) Tato definice je platna pro geometrii euklidovskou a hyperbolickou. Nutno však napřed dokázati, že není závislá na poloze bodu b, což *Gauss* skutečně učinil. Na této definici konstruoval pak základy hyperbolické geometrie. Nepokračoval však v této práci, neboť 1832 seznámil se s prací *J. Bolyaie* o „absolutní geometrii". (*Bolyai* nazývá tak souhrn pouček geometrických, které platí pro geometrii hyperbolickou i euklidovskou.[14])

V novější době *Hilbert* formuloval postulát o rovnoběžkách pro hyperbolickou geometrii a nahradil tak V. postulát geometrie euklidovské. Tento postulát zní (obr. 1):

Je-li Z libovolná přímka a b libovolný bod mimo Z, pak možno jím vždy vésti dvě (polo)přímky (souměrné podle kolmice K), které nespadají v jednu a Z (v konečnu) neprotínají, kdežto každá (polo)přímka v úhlu φ bodem b vedená ji protíná.

Tak jsme se dostali stručnými poznámkami až do doby historické. Příležitostně se znovu vrátíme k těmto úvahám. Nyní však budeme pokračovati ve studiu hyperbolické roviny.

§ 6. Úhel rovnoběžnosti.

V předcházejícím paragrafu jsme ukázali, že dvě rovnoběžky nemají společné kolmice. To znamená, že přímka K (obr. 1), která je kolmá na přímku Z, není jistě kolmá na přímku $X \parallel Z$. Úhel přímek K a X nazýváme úhlem rovnoběžnosti rovnoběžek ZX. Jeho hodnotu můžeme snadno vypočítati z obecného vzorce 8'). Výpočet se však velmi zjednoduší, volíme-li „přímky" zkoumané ve zvláštní poloze vzhledem k „absolutní kuželosečce". Tím úvaha nestane se méně obecnou, ale její výsledky obdržíme s menší námahou. Tak na obraze 2 zvolena za jednu z rovnoběžek „přímka" základního trojúhelníka $X \equiv o''o'''$, za druhou rovnoběžku „přímka" P. Kolmice k X budiž taktéž „přímka" základního trojúhelníka $Y \equiv o'o'''$. — Máme vypočítati úhel γ. K tomu použijeme vzorce 10b).

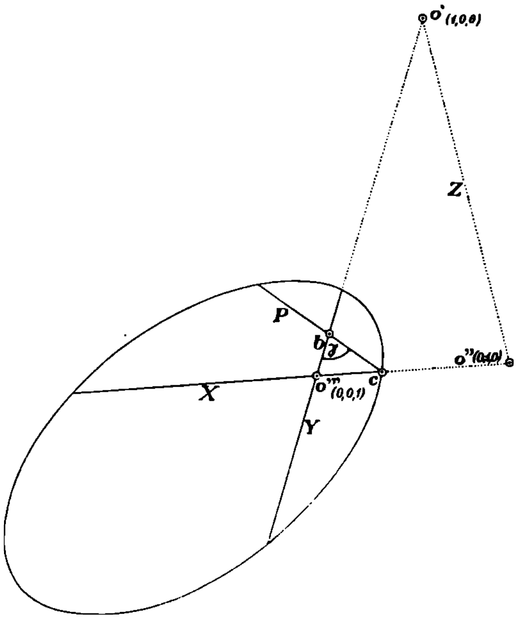
Můžeme předpokládati, že „absolutní kuželosečka" jest dána rovnicí v kanonickém tvaru (VIII, 6, odst. 3)

$$f_{\xi\xi} = \xi_1^2 + \xi_2^2 - \xi_3^2 = 0.$$

[14]) Za zmínku stojí, že göttingský kolega *Gaussův*, *Thibaut*, přednášel důkaz V. postulátu, který ještě ve XX. století byl jako takový reprodukován!

Z této rovnice je zřejmo, že „bod" c má souřadnice buď $0:1:1$, nebo $0:1:-1$. Budeme předpokládati, že jeho souřadnice jsou právě $0:1:1$. Tečnovou rovnici „absolutní kuželosečky" odvodíme podle rovnice 2') (viz též VIII, 6, 28'):

$$-F_{\Xi\Xi} \equiv -\Xi_1^2 - \Xi_2^2 + \Xi_3^2 = 0.$$



Obr. 2.

Abychom mohli vypočítati úhel γ podle 10*b*), potřebujeme znáti přímkové souřadnice přímek P a Y. Přímka P prochází body b (b_1, 0, b_3) a c (0, 1, 1) a tudíž její rovnice je (podle VIII, 3, 17)

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ b_1 & 0 & b_3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \equiv -b_3x_1 - b_1x_2 + b_1x_3 = 0.$$

Z toho odvozujeme, že její přímkové souřadnice jsou v poměru $P_1 : P_2 : P_3 = -b_3 : -b_1 : b_1$. Podobně odvodíme přímkové souřadnice přímky Y, $Y_1 : Y_2 : Y_3 = 0:1:0$. Dosazením těchto souřadnic do výrazů F_{PP}, F_{YY}, F_{PY} obdržíme

$$F_{PP} = b_3^2, \quad F_{PY} = -b_1, \quad F_{YY} = 1.$$

Ze vzorce 10*b*), aplikovaného na náš případ, plyne

$$\sin\gamma = \sqrt{\frac{F_{PP}F_{YY} - F_{PY}^2}{F_{PP}F_{YY}}} = \mp \frac{\sqrt{b_3^2 - b_1^2}}{b_3}.$$

Tak jsme vypočítali úhel γ. Vzorec ten však dá se snadno upraviti, zavedeme-li do počtu vzdálenost bodů $x \equiv o'''$ a b. Použijeme k tomu vzorce 9*a*). Dosadíme-li souřadnice těchto dvou bodů do výrazů f_{xb}, f_{xx}, f_{bb}, získáme

$$f_{xx} = -1, \quad f_{xb} = -b_3, \quad f_{bb} = b_1^2 - b_3^2.$$

Ze vzorce 9*a*), aplikovaného pro náš případ, plyne

$$\operatorname{Cos}\frac{m(xb)}{k} = \frac{f_{xb}}{\sqrt{f_{xx}f_{bb}}} = \frac{-b_3}{\sqrt{b_3^2 - b_1^2}}.$$

Porovnáním této rovnice s rovnicí pro *sin* γ obdržíme důležitou formuli

11) $$\boxed{\sin\gamma = \pm\frac{1}{\operatorname{Cos}\dfrac{m(xb)}{k}}}$$ [15])

Z této relace odvodíme některé důsledky. Tak jest ihned zřejmo, že

úhel rovnoběžnosti závisí na délce ramene, t. j. na výrazu $m(x, b)$, a to tak, že

při klesající délce ramene stoupá velikost úhlu.

Tímto způsobem můžeme

každé úsečce přiřaditi úhel a obráceně každému úhlu přiřaditi jistou úsečku.

Z toho důvodu se někdy (podle *Lobačevského*) užívá pro úhel, příslušný délce m, označení $\Pi(m)$. V tomto označení je vzorec 11) ve tvaru

11′) $$\boxed{\sin\Pi(m) = \frac{1}{\operatorname{Cos}\dfrac{m}{k}}}$$

[15]) V dalším budeme uvažovati jen znamení horní, t. j. jen úhel γ a nikoliv $2R + \gamma$.

Rozvineme-li $\operatorname{Cos}\frac{m}{k}$ v řadu (VIII, 1, 6), získáme z rovnice 11')

$$\sin \Pi(m) = \frac{1}{1 + \frac{(m:k)^2}{2!} + \frac{(m:k)^4}{4!} + \ldots}$$

Když $\frac{m}{k} \to 0$, jest $\lim\limits_{\frac{m}{k} \to 0} \left(1 + \frac{(m:k)^2}{2!} + \frac{(m:k)^4}{4!} + \ldots\right) = 1$

a tudíž

$$\lim_{\frac{m}{k} \to 0} \sin \Pi(m) = 1\,.$$

Z toho soudíme, že $\lim\limits_{\frac{m}{k} \to 0} \Pi(m) = \frac{\pi}{2}$ a proto:

Pro každou úsečku m, která je dostatečně malá vzhledem ke k, je v prvém přiblížení úhel $\Pi(m)$ roven konstantnímu úhlu $\frac{\pi}{2}$.

V euklidovské rovině je pro každou úsečku m úhel rovnoběžnosti $\frac{\pi}{2}$. Vzbuzuje to dojem, jako bychom v případě euklidovské roviny uvažovali hyperbolickou rovinu, jejíž konstanta k je dostatečně velká vzhledem ke každé úsečce m této roviny. Proto někdy říkáme, že euklidovská geometrie jest vlastně diferenciální geometrií geometrie hyperbolické. (Srovnej III, 5, konec.)

Závislost úhlu na délce ramene byla již známa před *Lobačevským*. Tak na příklad *Legendre* k tomu výsledku přišel a právě proto neuznával možnost hyperbolické geometrie. (Viz předcházející paragraf.) *Lambert* (1728—1777) na základě tohoto faktu, který mu byl znám, dospěl až k přesvědčení, že existuje absolutní jednotka délky a tedy i absolutní měření. To zdálo se mu však protismyslným a proto tak jako *Legendre* zastával názor, že hyperbolická geometrie jest nemožná.

Poznámka. *Lobačevský* nejen že věřil v možnost hyperbolické geometrie (v prostoru), ale chtěl i praktickým pokusem stanoviti konstantu k. Byl si vědom toho, že, existuje-li skutečně prostor jako hyperbolický, musí nutně jeho konstanta k býti tak velká vzhledem k zemským rozměrům, že při zemských měřeních můžeme užívati euklidovské geometrie, aniž bychom se dopustili znatelné chyby. Proto chtěl konstantu tu zjistiti měřením astronomickým. K tomu cíli uvažoval pravoúhlý trojúhelník, jehož odvěsny byly tvořeny poloměrem dráhy zemské r a vzdáleností Siria od Země. Aplikací vzorce 11') na tento trojúhelník dospěl k nerovnině

$$\frac{r}{k} < 0{\cdot}000006012.$$

Tato nerovnina vedla ho k přesvědčení, že konstanta k jest i pro takováto astronomická měření příliš veliká, neboť dle uvedeného vzorce jest alespoň 166.320 průměrů zemské dráhy. Z toho usuzoval, že pro praktické účely možno považovati k vzhledem k měřeným délkám za nekonečně veliké, neboli, že pro praktická měření platí geometrie euklidovská.

§ 7. Tři a více přímek.

1. Trojúhelník. Z vývodů předcházejících paragrafů možno odvoditi některé zajímavé věty. Všimněme si na př. trojúhelníku v hyperbolické rovině. Můžeme sestrojiti trojúhelník, jehož úhly (vnitřní) jsou vesměs rozdílné od nuly. To není nic zvláštního a proto se u takových trojúhelníků nebudeme zdržovati. Můžeme však sestrojiti trojúhelník, jehož jeden, dva, nebo všechny úhly jsou rovny nule. Takovým trojúhelníkům říkáme jednou, dvakrát, třikrát asymptotické. Na obraze 3 jest *abc* jednou, *abc'* dvakrát, *ab'c'* dokonce třikrát asymptotický. Již z toho je zřejmo, že v hyperbolické geometrii neplatí obecně známá věta o součtu úhlů v trojúhelníku.[16]) Dokážeme později, že neplatí vůbec.

Podobně možno ukázati, že neexistují trojúhelníky, jichž dva úhly jsou pravé. Mají-li totiž dvě „strany" býti na třetí kolmé, jsou nutně mimoběžné (svírají úhel imaginární, viz IV, 4). Takovým „trojúhelníkem" jest na obr. 3 trojúhelník *edf*.

2. Čtyřúhelník. S historického hlediska jest zajímavý čtyřúhelník, jehož tři vnitřní úhly jsou pravé. Takový čtyřúhelník sloužil při důkazech V. postulátu *Euklidova*. (Vlastně již u *Saccheriho*. *Lambert, Legendre* a jiní užívají přímo tohoto čtyřúhelníka.) Postup takových důkazů byl asi následující: Zbývající úhel je buď menší než pravý (t. zv. hypotésa úhlu ostrého), nebo jest pravý (hypotésa úhlu pravého), nebo konečně je větší než pravý (hypot. tupého úhlu). Je-li platna hypotésa pravého úhlu, je možno z ní dokázati V. postulát. Snahou dokazovatelů bylo tudíž dokázati, že obě zbývající hypotésy nejsou přípustné. O hypo-

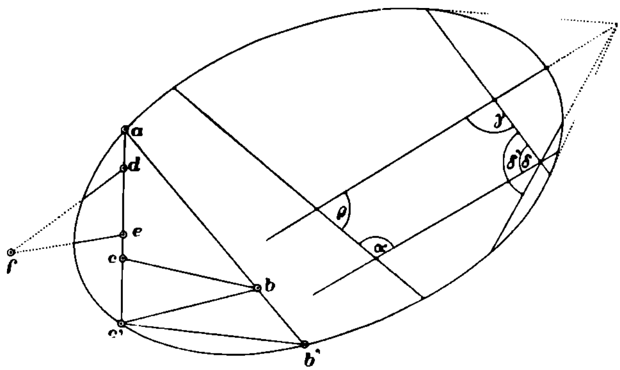
---

[16]) „Součet vnitřních úhlů v trojúhelníku jest 180."

tése úhlu tupého to skutečně dokázali.[17]) O hypotése úhlu ostrého se jim to většinou nepodařilo matematicky. Spíše objevili nějakou poučku z hyperbolické geometrie, která se jim zdála **logicky** nemožná a proto hypotésu ostrého úhlu neuznávali. Zbývala jim ovšem nyní hypotésa úhlu pravého, z níž plyne V. postulát.

Pouhý pohled na obr. 3 nás poučí, že úhel δ v čtyřúhelníku, jehož tři úhly α, β, γ jsou pravé, je **menší než pravý**. Je totiž jednak $\delta' > \delta$, jednak $\delta' = 90^0$ a tudíž

$$\delta < 90^0.$$ [17a])



Obr. 3.

Čtyřúhelník ten je v poloze zcela obecné. Z tohoto poznatku plyne, že

hypotésa ostrého úhlu vede ke geometrii hyperbolické.[18])

Zdálo by se na prvý pohled, že z hypotésy ostrého úhlu plyne ihned věta: „Součet úhlů v trojúhelníku je menší než 180°.“ Úhlopříčna, spojující vrcholy úhlů β, δ, rozděluje čtyřúhelník na dva trojúhelníky, v nichž součet úhlů je menší než 360°. To je sice správné, ale není možno z toho usuzovati, že v **každém** z těchto trojúhelníků je součet menší než 180°. Dokážeme tuto větu až v kapitole následující prostředky jednoduššími (V, 5, resp. V, 6).

---

[17]) Ježto předpokládali, že přímka je nekonečná.

[17a]) Přesný důkaz tohoto tvrzení, který je velmi snadný, přenechávám píli čtenářově.

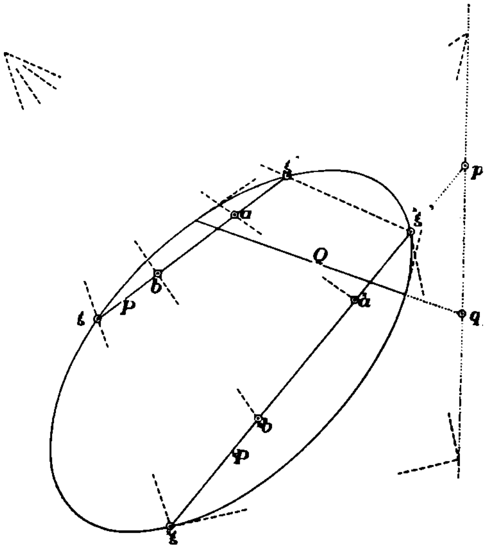
[18]) Tím není ovšem řečeno, že tato hypotésa vede **jen** ke geometrii hyperbolické! Takové tvrzení by bylo krajně neopatrné.

§ 8. Základní konstrukce.

1. Přenášení délek. Jak se přenášejí délky na téže přímce hyperbolické, ukázali jsme již v kapitole III, § 6, a nebudeme tedy tuto konstrukci znovu opakovati. Zato rozřešíme úlohu (obr. 4.):

Úsečku ab přenésti s přímky P na přímku $*P$. Tato úloha je velmi jednoduchá. Víme, že úsečky ab, $*a*b$ jsou jen tenkráte stejné, když dvojpoměry $(\xi\xi' ab)$, $(*\xi*\xi'*a*b)$ jsou stejné

$$(\xi\xi' ab) = (*\xi*\xi'*a*b).$$

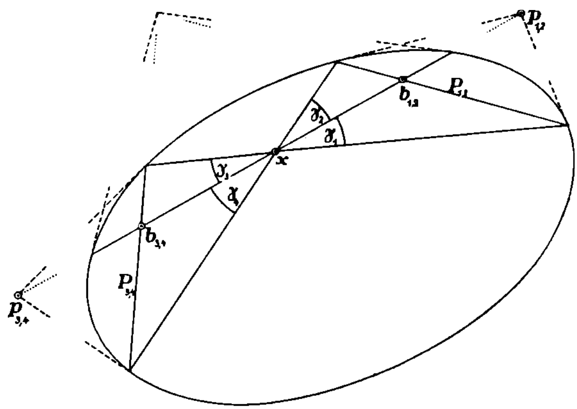


Obr. 4.

Tato rovnice však právě charakterisuje projektivní příbuznost dvou řad bodových $P(\xi, \xi', a, b, ..)$, $*P(*\xi, *\xi', *a, *b, ..)$. Abychom si úlohu usnadnili, předpokládejme nejdříve, že „bod“ a je tak položen na P, že „paprsky“ $\xi*\xi$, $\xi'*\xi'$, $a*a$ se protínají v jednom „bodě“. Pak zmíněné řady jsou perspektivně projektivní a spojnice každých dvou si odpovídajících bodů prochází „průsečíkem“ paprsků $\xi*\xi$, $\xi'*\xi'$. Odpovídající „bod“ $*b$ na $*P$ k „bodu“ b na P podle toho snadno najdeme. Pak jest skutečně $ab = *a*b$. — Je-li bod a na P libovolně položen, posuneme úsečku ab podle

(III, 6) do polohy, o níž jsme právě mluvili a provedeme naznačenou konstrukci. Tak jsme rozřešili úlohu: Úsečku *ab* přenésti s přímky *P* do libovolné polohy na přímce **P*.

2. Otáčení a přenášení úhlů. Úhel „přímek“ *P* a *Q* můžeme otáčeti takovým způsobem, že na „přímce“ *pq*, která je „polárou“ vrcholu úhlu, provádíme pohyb eliptický. Konstrukce ta je v základě stejná s konstrukcí uvedenou pro přímku hyperbolickou (III, 6), má však tu nevýhodu, že operuje s elementy imaginárními. Proto v následujících odstavcích podáme konstrukci jinou. Již zde však můžeme upozorniti, že rozřešením předložené úlohy získáme též snadno řešení úlohy obecnější, totiž přenášení úhlu.



Obr. 5.

Ježto však i tato konstrukce má nevýhodu stejnou, jako konstrukce dříve uvedená, rozřešíme tuto úlohu jinak.

3. Konstrukce úhlu rovnoběžnosti $\Pi(m) = \gamma$ k dané úsečce $m = xb'$ a obráceně. Rozřešme nejdříve úlohu: K danému úhlu rovnoběžnosti γ_1 nalézti příslušnou úsečku $xb_{1,2}$ (obr. 5). Považujeme-li „přímku“ $xb_{1,2}$ za „kolmici“ k „rovnoběžce“ s druhým „ramenem“ daného úhlu, je zřejmo, že ona „rovnoběžka“ $P_{1,2}$ musí procházeti „pólem“ přímky $xb_{1,2}$. „Přímky“ $P_{1,2}$ a $xp_{1,2}$ se protínají v „bodě“ $b_{1,2}$, který s „bodem“ x určuje hledanou úsečku.

Je zřejmo, že jsme mohli tutéž konstrukci prováděti s úhlem γ_8. Dospěli bychom tak do bodu $b_{3,4}$. Platí obecně

$$\overline{b_{3,4}x} = \overline{xb_{1,2}}.$$

Rozřešili jsme tím tedy zároveň úlohu: Danou „úsečku“ $\overline{b_{1,2}b_{3,4}}$ rozpůliti. Neboť stačí „body“ $b_{1,2}$, $b_{3,4}$ spojiti s „pólem“ „přímky“ $\overline{b_{1,2}b_{3,4}}$ a poté k „přímkám“ $P_{1,2}$, $P_{3,4}$ vésti „rovnoběžky“, které se protínají. (Skutečná konstrukce je tato: Body $b_{1,2}$, $b_{3,4}$ vedeme kolmice k přímce $\overline{b_{1,2}b_{3,4}}$, načež přímky, protínající se v konečnu a rovnoběžné s $P_{1,2}$ a $P_{3,4}$, určují svým průsečíkem x půlící bod.)

Nyní snadno rozřešíme úlohu: K dané úsečce $xb_{1,2}$ stanoviti úhel rovnoběžnosti γ_1. Spojíme „pól“ „úsečky“ $xb_{1,2}$ s „bodem“ $b_{1,2}$ „přímkou“ $P_{1,2}$. Druhé „rameno“ hledaného „úhlu“ je rovnoběžno s $P_{1,2}$. Získáme však dvě „rovnoběžky“ s touto přímkou, takže pro absolutní hodnoty úhlů γ_1, γ_2 platí

$$\gamma_1 = \gamma_2.$$

Tím jsme tedy rozřešili úlohu: Daný úhel $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ rozpůliti. „Ramena“ tohoto úhlu protínají totiž „absolutní kuželosečku“ v bodech, jichž spojením získáme $P_{1,2}$, $P_{3,4}$. „Průsečík“ těchto „přímek“ je „pólem“ hledané „osy“ úhlu $xb_{1,2}$. (Kdybychom průsečné „body“ „přímek“ $P_{1,2}$, $P_{3,4}$ spojili druhým způsobem — zde neznačeným — dospěli bychom k „ose“ úhlu vedlejšího ke γ.)

Známe-li konstruktivní souvislost úsečky a úhlu, snadno přeneseme úhel na dané rameno. Stačí sestrojiti k danému úhlu příslušnou úsečku, tuto přenésti na dané rameno podle prvého odstavce tohoto paragrafu, načež k této úsečce přenesené sestrojíme úhel podle metody právě naznačené. Tento úhel jest úhlem hledaným. Pozorný čtenář najde podle tohoto návodu sám konstrukci, kterou může otáčeti daný úhel. — Skutečně při těchto konstrukcích nepoužíváme elementů imaginárních.

Poznámka: „Absolutní kuželosečku“ jsme znázorňovali stále elipsou. Není to však nutné. Jejím obrazem by mohla býti i hyperbola, resp. parabola. Zvolili jsme tento způsob znázornění, ježto je nejpřístupnější.

V kapitole následující navážeme na výsledky základní, získané v této kapitole a budeme studovati pohyb v hyperbolické rovině. Poté provedeme některé úvahy z analytické geometrie a trigonometrie.

Kapitola V.

POHYB, TRIGONOMETRIE, ÚVAHY DIFERENCIÁLNÍ.

§ 1. Kružnice.

1. Definice kružnice. Velmi vděčným oborem studia v geometrii hyperbolické je kružnice. Definujeme ji prozatím takto:

Kružnice je geometrické místo bodů, které mají od pevného bodu s konstantní vzdálenost.

Definice tato jest úplně stejná jako v geometrii euklidovské. Je tedy nasnadě zavésti i další pojmy, kružnice se týkající, analogicky s geometrií euklidovskou. Tak bod s budeme také nazývati středem kružnice. Kružnice, které mají společný střed, jsou soustředné (koncentrické). Souhrn soustředných kružnic budeme nazývati svazkem kružnic. Úsečku, spojující střed kružnice s libovolným bodem jejího obvodu, budeme nazývati poloměr. S těmito pojmy v dalších odstavcích úplně vystačíme. Nesmíme však očekávati, že veličiny, stejně pojmenované v obou geometriích, budou míti všechny vlastnosti stejné. Že tomu tak není, ukážeme v následujících řádcích.

Odvoďme si nejdříve rovnici „kružnice“! K tomu použijeme vzorce (IV, 2, 9) pro vzdálenost dvou bodů. Tento vzorec, upravený pro naši potřebu, zní

$$m(xs) = k \text{ arc Cos } \frac{f_{xs}}{\sqrt{f_{xx} f_{ss}}}.$$

Ježto body x „kružnice“ mají býti od středu vzdáleny o stejnou délku, musí výraz na levé straně této rovnice býti konstantní. Nazveme-li jej třeba r, obdržíme řešením

$$f_{xs} = \sqrt{f_{xx} f_{ss}} \text{ Cos } \frac{r}{k}$$

a odstraněním odmocniny

$$1) \qquad \boxed{f_{xs}^2 = f_{xx} f_{ss} \operatorname{Cos}^2 \frac{r}{k}}$$

Tato rovnice jest rovnicí „kružnice“ o poloměru r. Měníme-li r, obdržíme kružnice o stejném středu, t. j. kružnice soustředné, ale různých poloměrů r, tedy svazek kružnic. V euklidovské rovině soustředné kružnice protínají nevlastní přímku v bodech isotropických.[1]) V těchto bodech se všechny soustředné kružnice dotýkají a mají společné tečny. Tyto společné tečny jsou isotropické přímky, protínající se ve společném středu všech soustředných kružnic. Jak je tomu v rovině hyperbolické? Zde nevlastní body kružnice jsou její průsečíky s absolutní kuželosečkou. Je-li ξ jeden z nich, musí rovnice 1) vyhovovati jeho souřadnicím, t. j. musí býti

$$1') \qquad f_{\xi s}^2 = f_{\xi\xi} f_{ss} \operatorname{Cos}^2 \frac{r}{k}.$$

Jeden z faktorů na pravé straně této rovnice jest $f_{\xi\xi}$. Tento faktor je roven nule, $f_{\xi\xi} = 0$, neboť bod ξ leží podle předpokladu na absolutní kuželosečce. Rovnice 1') se tedy zjednoduší na

$$f_{\xi s}^2 \equiv f_{\xi s} \cdot f_{\xi s} = 0.$$

To je však rovnice „poláry“ „bodu“ s (dvojnásob počítané). Na této „přímce“ a jen na ní leží společné body „kružnice“ a „absolutní kuželosečky“. „Kružnice“ je však kuželosečkou, jak je zřejmo z rovnice 1). Může míti s „absolutní kuželosečkou“ jen čtyři „body“ společné. Tyto „body“ po dvou splývají v průsečících „poláry“ s „kuželosečkou absolutní“. Z toho plyne, že „kružnice“ a „absolutní kuželosečka“ se v těchto bodech dotýkají. Celkem můžeme dosavadní poznatky shrnouti ve věty (obr. 1*a*):

Obrazem kružnice je kuželosečka K, která se dvojnásob dotýká „absolutní kuželosečky“.

„Střed“ „kružnice“ je „pólem přímky“ P, která tyto dotyčné „body“ spojuje. (Na obr. 1*a* jsou dotyčné „body“ imaginárné.)

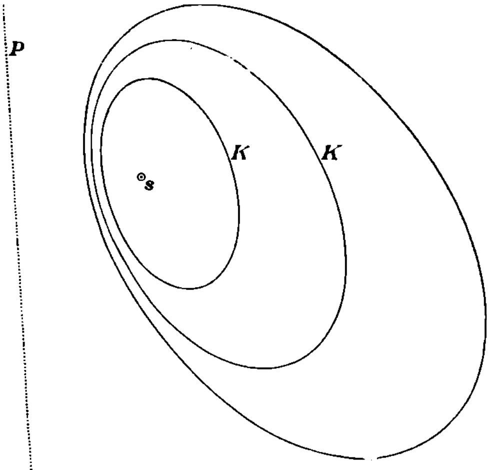
„Polára“ je nezávislá na poloměru r, neboť se v její rovnici vůbec r nevyskytuje. Tato „polára“ je tedy pevná

---

[1]) V euklidovské rovině všechny kružnice mají tuto vlastnost Omezujeme se na kružnice soustředné jen z důvodů didaktických.

pro všechny koncetrické „kružnice". Tento poznatek vyslovíme takto:

Soustředné „kružnice" dotýkají se dvojnásob „absolutní kuželosečky" v průsečných „bodech" „poláry" „středu" *s* vzhledem k „absolutní kuželosečce".



Obr. 1*a*).

Z hořejších vět snadno určíme počet údajů, nutných pro určení kružnice. Bodem *s* jsou určeny všechny kružnice svazku. Je jich právě ∞^1. Neboť kuželosečky je zobrazující musí procházeti čtyřmi (po dvou splývajícími) body („průsečíky" „poláry" „bodu" *s* s „absolutní kuželosečkou"). Kuželosečka je však určena pěti body. Je tedy nutno znáti ještě jeden „bod" k určení jedné z „kružnic" svazku. — Ale středů kružnic je v rovině celkem ∞^2 (neboť je ∞^2 bodů v rovině hyperbolické a každý z nich může býti středem kružnice). Celkem je tedy v hyperbolické rovině ∞^3 kružnic, jinými slovy: kružnice v hyperbolické rovině jest určena obecně třemi údaji.[2])

---

[2]) Kdybychom chtěli býti zcela přesnými, musili bychom říci, že kružnice jest určena pěti údaji, z nichž dva jsou pro každou kružnici splněny. Tyto dva údaje dají se vyjádřiti požadavkem, že „kružnice" se dvojnásob dotýká „absolutní kuželosečky". Něco podobného jest ostatně i v rovině euklidovské. Tam je každá kružnice určena také pěti údaji, z nichž dva jsou pro každou kružnici splněny. (Každá kružnice prochází isotropickými body své roviny.)

2. Jiná definice kružnice. Kružnici můžeme ještě jinak definovati:

Kružnice jest orthogonální trajektorie svazku přímek bodem s.[3])

Shledáme, že bod s je střed kružnice, jak byl definován v odst. 1.

K důkazu této věty potřebujeme následující poučky z projektivní geometrie: „Dotýkají-li se dvě kuželosečky dvojnásob, pak průsečík společných tečen s, libovolný bod y jedné kuželosečky a pól tečny v y k této kuželosečce vzhledem ke kuželosečce druhé leží na jedné přímce.“ Tuto pomocnou větu snadno dokážeme:

Budiž $f_{xx} = 0$ nějaká (jednoduchá) kuželosečka, bod s libovolný bod mimo ni. Druhá kuželosečka se dotýká prvé v průsečných bodech poláry $f_{xs} = 0$ s kuželosečkou $f_{xx} = 0$. Všechny takové kuželosečky jsou určeny rovnicí

$$f_{xx} + \varrho f_{xs}^2 = 0. \tag{2}$$

Každé hodnotě parametru ϱ odpovídá jedna z těchto (druhých) kuželoseček. Tečna k ní v bodě y má rovnici

$$f_{xy} + \varrho f_{ys} f_{xs} = 0. \tag{3}$$

Každý bod z na přímce ys vyhovuje rovnicím

$$z_1 = a_1 y_1 + a_2 s_1, \quad z_2 = a_1 y_2 + a_2 s_2, \quad z_3 = a_1 y_3 + a_2 s_3,$$

kde poměru $\frac{a_1}{a_2}$ odpovídá vždy jeden bod z. Polára bodu z vzhledem ke kuželosečce prvé má rovnici

$$f_{xz} \equiv f_{x\, a_1 y + a_2 s} \equiv a_1 f_{xy} + a_2 f_{xs} = 0.$$

Zvolíme-li tedy $\frac{a_1}{a_2}$ tak, že

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{\varrho f_{ys}},$$

je tato polára právě tečnou 3). Tím je věta dokázána a z ní můžeme odvoditi větu, uvedenou na počátku tohoto odstavce. Je-li totiž $f_{xx} = 0$ „absolutní kuželosečka“, pak rovnice 2) je rovnicí „kružnice“ o „středu“ s. Rovnice 3) je rovnicí „tečny“ v „bodě“ y ke „kružnici“ 2). „Kolmice“

---

[3]) To znamená, že tečna kružnice je kolmá na příslušný poloměr, dotyčným bodem procházející.

na tuto „tečnu“ „bodem“ y musí procházeti jejím „pólem“ vzhledem k „absolutní kuželosečce“. Podle věty právě dokázané je na této kolmici i „bod“ s a tudíž tato „kolmice“ jde „středem“ „kružnice“. — Naše nová definice kružnice je tím zdůvodněna. Z rovnice „kružnice“ 2) plyne zároveň důležitý poznatek. Pro $\varrho = 0$ obdržíme totiž „absolutní kuželosečku“ a pro $\frac{1}{\varrho} = 0$ „poláru“ bodu s:

Ve svazku koncentrických kružnic nalézá se vždy absolutní kuželosečka a spojnice nevlastních bodů tohoto svazku.

3. Tři druhy kružnic. Věty, které jsme odvodili v předcházejícím odstavci, platí pro každou kružnici. Nesmíme z toho však usuzovati, že všechny kružnice v hyperbolické rovině jsou si co do vlastností rovny. Ukážeme, jak velice se kružnice od sebe liší podle polohy „středu“. Může totiž

a) „střed“ s býti uvnitř „absolutní kuželosečky“, nebo může

b) „střed“ s býti na „absolutní kuželosečce“, nebo konečně může

c) „střed“ s býti vně „absolutní kuželosečky“.

Definice kružnice, podaná v odst. 2, zahrnuje všechny tyto případy. Neboť svazek „přímek“ „bodem“ s existuje vždy, nechť je s kdekoliv položen. (Viz dále.) Existuje vždy též svazek orthogonálních trajektorií tohoto svazku. Naproti tomu definice odst. 1 zahrnuje vlastně jen případ sub *a)*, neboť v případě sub *b)* vzrostl poloměr nade všechny meze a tudíž nemůžeme o vzdálenosti bodu kružnice od jejího středu mluviti a v případě sub *c)* je dokonce stanovení poloměru z našich úvah vyloučeno (IV, 2, odst. 1, konec).

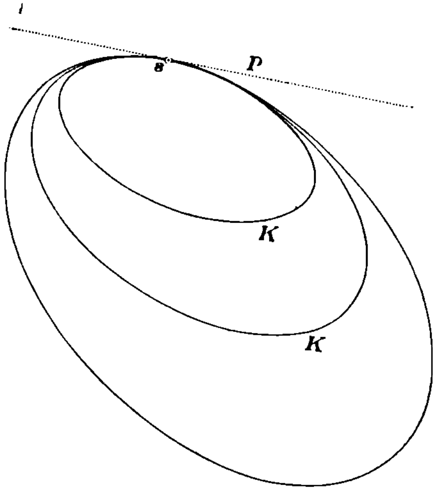
V následujících řádcích probereme důkladněji tyto jednotlivé případy. V případě *a)* (obr. 1*a*) je „polára“ P obrazem ideální přímky, neboť neprotíná „absolutní kuželosečku“ v reálných „bodech“. Tyto kružnice mají nevlastní body imaginární. Nemají tedy reálných bodů nevlastních. Charakteristické pro ně je, že bod v konečnu na jejich obvodu se může vrátiti po oběhnutí celé kružnice do původní polohy. Podle definice v druhém odstavci tohoto paragrafu můžeme říci, že tyto kružnice, jsou-li koncentrické, jsou orthogonální trajektorie svazku různoběžek. Budeme je vždy označovati jménem cykly.

Již z definice kružnice v odst. prvém plyne důležitá věta pro cykly:

Dva soustředné cykly vytínají na poloměrech stejné úsečky konstantní délky.

Důkaz této věty přenechávám čtenáři.

V případě *b)* (obraz 1*b*), kdy střed s je nevlastní, musí „polára“ P „bodu“ s býti tečnou „absolutní kuželosečky“ právě v „bodě“ s. Takové kružnice mají tedy dva



Obr. 1*b)*.

splývající reálné body nevlastní, právě v bodě s. Libovolný bod v konečnu nikdy po téže kružnici se nevrátí do polohy původní. Soustředné kružnice tohoto druhu jsou orth. trajektoriemi svazku rovnoběžek. Budeme jim říkati horocykly.[4])

Je důležité stanoviti délku, vyťatou dvěma soustřednými horocykly na poloměru. K tomu cíli použijeme rovnice „horocyklu“ ve tvaru 2). Pak dva soustředné horocykly mají rovnice

2′) $\quad a)\ f_{xx} + \varrho_1 f_{xs}^2 = 0, \quad b)\ f_{xx} + \varrho_2 f_{xs}^2 = 0 \quad (f_{ss} = 0).$

[4]) V odborné literatuře jsou známy pod jmény: Grenzlinie, Grenzkreis, Oricicli, Linea L.

Na prvém horocyklu (ϱ_1) zvolím bod y. Každý jiný bod přímky ys vyhovuje rovnicím

$$z_1 = a_1 y_1 + a_2 s_1, \quad z_2 = a_1 y_2 + a_2 s_2, \quad z_3 = a_1 y_3 + a_2 s_3. \tag{4}$$

Má-li tento bod z býti na druhém horocyklu (ϱ_2), musí jeho souřadnice splňovati rovnici 2'*b)*, t. j.

$$a_1 f_{ys} [a_1 f_{ys} (-\varrho_1 + \varrho_2) + 2a_2] = 0.$$

Jedno řešení $\frac{a_1}{a_2} = 0$ odpovídá bodu s, druhé

$$2 \frac{a_2}{a_1} = f_{ys} (\varrho_1 - \varrho_2) \tag{4'}$$

bodu z.

Vzdálenost bodů z a y stanovíme pomocí (IV, 2, 7'). Ježto podle 4) jest

$$\frac{f_{xy} + \sqrt{f_{xy}^2 - f_{xx} f_{yy}}}{f_{xy} - \sqrt{f_{xy}^2 - f_{xx} f_{yy}}} = \frac{-a_1 \varrho_1 f_{ys} + 2a_2}{-a_1 \varrho_1 f_{ys}} = 1 - 2 \frac{a_2}{a_1} \frac{1}{\varrho_1 f_{ys}},$$

získáme dosazením z rovnice 4')

$$\frac{f_{xy} + \sqrt{f_{xy}^2 - f_{xx} f_{yy}}}{f_{xy} - \sqrt{f_{xy}^2 - f_{xx} f_{yy}}} = 1 - \frac{\varrho_1 - \varrho_2}{\varrho_1} = \frac{\varrho_2}{\varrho_1}$$

a tudíž

$$m\,(zy) = \frac{k}{2} \log \frac{\varrho_2}{\varrho_1}.$$

Je tedy vzdálenost bodů z a y na témž poloměru závislá jen na horocyklech a nikoli na poloze poloměru:

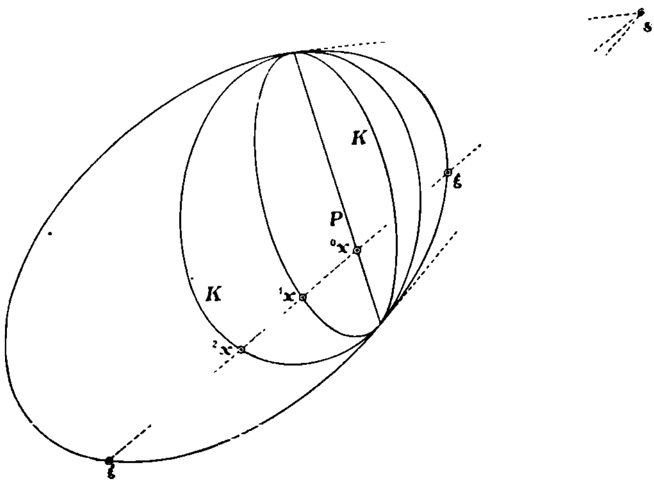
Soustředné horocykly vytínají na poloměrech úsečky konstantní délky.

Poznámka: Horocyklů je právě ∞^2. Každý horocykl je totiž určen středem s a libovolným bodem. Ale bod s musí býti na absolutní kuželosečce. Proto jen ∞^1 bodů s může býti zvoleno za střed horocyklu.

V případě *c)* (obr. 1*c*) je „střed“ s vně „kuželosečky absolutní“. Tyto kružnice nemají středu. (Chceme-li, můžeme říci, že mají střed ideální.) „Polára“ P „bodu“ s protíná reálně „absolutní kuželosečku“. Tyto kružnice mají tedy dva různé reálné body nevlastní. Bod v konečnu se nikdy nedostane po nich do původní polohy. Takové kružnice, pokud mají společné body nevlastní, jsou orthogonalné trajektorie svazku mimoběžek (o ideálním průsečíku). Ježto i přímka P jest orthogonální trajektorií tohoto svazku, je nutno ji počítati mezi tyto koncentrické kružnice. Tím máme znovu potvrzenu poslední větu druhého odstavce, pokud tato mluví o přímce P.

Stanovme délku úsečky, vyťaté na jednom z poloměrů dvěma koncentrickými kružnicemi (obr. 1c). Dvojpoměr čtyř „bodů“ ξ, ξ', ${}^1x$, s

$$\lambda_1 = (\xi\, \xi'\, {}^1x\, s)$$



Obr. 1c).

je vždy záporný, nechť se bod ${}^1x$ nalézá na kterékoli kružnici zkoumaného svazku. Hlavní hodnota logaritmu tohoto dvojpoměru je vždy imaginární (VIII, 2, 13), tvaru

$$\log |\lambda_1| + \pi i.$$

Pro hyperbolického (dvojrozměrného) pozorovatele neexistuje pojem vzdálenosti bodů ${}^1x$ a s, neboť pro něj neexistuje ani bod s (IV, 2, odst. 1). Může však definitoricky zavésti výraz

$$,m' ({}^1x\, s) = \frac{k}{2} (\log |\lambda_1| + \pi i)$$

jako ‚vzdálenost' bodů ${}^1x$, s. Při tom ovšem rozumí pod tímto slovem jen určitou funkci polohy bodu ${}^1x$, která je dána hoření rovnicí a která je stejná pro všechny body téže kružnice, na níž se bod ^1x nalézá.[4a]) (Srovnej definici kružnice v odstavci 1 této kapitoly.) Jiného geometrického významu toto slovo pro něj nemůže míti.

Pro jiný bod ^2x na stejném poloměru, ale jiné kružnici je ‚vzdálenost' bodů $^2x s$ podobně

$$,m'(^2x\,s) = \frac{k}{2}(\log|\lambda_2| + \pi i).$$

Je tedy rozdíl ‚vzdáleností'

$$,m'(^1x\,s) - ,m'(^2x\,s) = \frac{k}{2}\log\frac{|\lambda_1|}{|\lambda_2|} = \frac{k}{2}\log\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = m(^1x\,^2x)$$

skutečnou vzdáleností bodů ^1x a ^2x, která je vždy reálná a nezávislá na poloze poloměru, na kterém se body ^1x a ^2x nalézají.

Speciálně pro každý bod ^0x přímky P je $\lambda_0 = -1$ a tudíž

$$m(^1x\,^0x) = \frac{k}{2}\log|\lambda_1| = \frac{k}{2}\log(-\lambda_1), \quad (\lambda_1 < 0).$$

Úseky, které vymezuje na poloměrech libovolná kružnice tohoto druhu a přímka P, jsou tedy reálné a pro touž kružnici konstantní.[5])

Z toho důvodu jmenujeme tyto kružnice aequidistantami[6]) (při čemž si domyslíme: k přímce). Poloměry, na nichž jsme právě uvedené úsečky měřili, jsou kolmé i k aequidistantě i k přímce P. Tyto úsečky měří tedy vzdálenost bodů aequidistanty a přímky P. Proto můžeme říci:

Geometrickým místem bodů, které jsou od přímky stejně vzdáleny, jest aequidistanta. (Viz IV, 5, *Posidonius*.)

[4a]) Přesněji řečeno: Absolutní hodnota reálné části výrazu ‚m' je pro všechny body téže zkoumané kružnice stejná. — Užitím poslední rovnice v tomto paragrafu a právě vyslovené věty může si snadno sám čtenář dokázati, že přímka P je zároveň osou symetrie svazku zkoumaných kružnic.

[5]) V případě *a)* jsou úseky podobným způsobem získané taktéž konstantní, ale imaginární a pro hyperbolického pozorovatele bez přímé geometrické interpretace.

[6]) V literatuře německé a italské bývá užito názvů: Abstandslinie, Überkreis, Iperciclo.

§ 2. Pohyb v hyperbolické geometrii.

1. *Definice pohybu.* Pohybem nějakého útvaru $\mathfrak{U}$ do útvaru $'\mathfrak{U}$ nazýváme takový jejich vztah, který splňuje následující podmínky:

I. *Každému bodu x útvaru $\mathfrak{U}$ odpovídá jeden a jen jeden bod $'x$ útvaru $'\mathfrak{U}$ a obráceně.*

II. *Každé přímce X útvaru $\mathfrak{U}$ odpovídá jedna a jen jedna přímka $'X$ útvaru $'\mathfrak{U}$ a obráceně.*

III. *Metrické vztahy elementů útvaru $\mathfrak{U}$ a odpovídajících elementů útvaru $'\mathfrak{U}$ jsou stejné.*

Tím je definován pohyb útvaru v rovině. Pohyb celé roviny hyperbolické je definován podmínkou IV. *Prvé tři podmínky platí pro každé dva sobě přiřazené útvary $\mathfrak{U}$ a $'\mathfrak{U}$ v rovině.*

(Při tom v souhlasu s názorem na geometrii, který jsme dosud uplatňovali, mlčky předpokládáme, že vztah popsaný těmito podmínkami je vyjádřen transformacemi, tvořícími *grupu* a to nějakou speciální grupu projektivní.)
První dvě podmínky splňuje projektivní osmimocná grupa transformací. Třetí a čtvrtou podmínku můžeme nahraditi požadavkem: pohybem se reprodukuje absolutní kuželosečka. Neboť metrické vztahy ustanovujeme *vždy* pomocí téže kuželosečky (absolutní) a ta tudíž nesmí pohybem přejíti v jinou.

Tím jsme z projektivní grupy vybrali podgrupu, uvedenou v kap. IV, § 1. Proto můžeme říci:

Obecný pohyb v hyperbolické rovině je vyjádřen trojmocnou grupou projektivních transformací (IV, 1, 1), *které reprodukují absolutní kuželosečku.*

Ovšem také každá podgrupa této grupy vede k pohybu, takže taková transformace nemusí nutně býti trojmocná. Stačí nějakým dovoleným způsobem omeziti podmínky pohybu a dostaneme transformaci méně než trojmocnou. Proto jsme v hořejší definici užili slova „obecný“. Z uvedené definice plyne, že *každý* pohyb je vyjádřen projektivní transformací. Tím však není ještě řečeno, že *každá* projektivní transformace naznačeného druhu musí býti nutně pohybem. (Takový případ jsme již měli při pohybu v euklidovské rovině. Tam každý pohyb byl vyjádřen určitou projektivní transformací, ale každá projektivní transformace grupy G_4 nevyjadřovala pohyb. V těchto transformacích byly totiž i transformace vedoucí k podobnosti. To bylo způsobeno tím, že příslušná grupa transformací byla čtyřmocná, kdežto grupa transformací, vedoucích k pohybu, byla jen trojmocná.) Je snadné ukázati, že v hyperbolické rovině vskutku každá z uvedených projektivních transformací vyjadřuje pohyb. Neboť každá projektivní transformace nechá dvojpoměr invariantním. Metrické vztahy v hyperbolické geometrii měří se však logaritmem dvojpoměru a tudíž každá projektivní transformace (která vždy vyhovuje prvým dvěma podmínkám) nechá metrické vztahy neměněné. Když nad to měříme tyto vztahy pomocí pevné kuželosečky, pak příslušné transformace vyhovují i podmínce o reprodukci absolutní kuželosečky a patří tedy do grupy, která vyjadřuje pohyb. Důležité je však upozornění, že žádná z takových transformací nevede k podobnosti. Neboť naše lineární transformace ponechává dvojpoměr a tedy i metrické vztahy hyperbolické roviny konstantní, kdežto při transformacích, vedoucích k podobnosti, metrické veličiny jsou úměrné (s koeficientem úměrnosti rozdílným od ± 1). Souhrnem můžeme říci:

Každá projektivní transformace, která reprodukuje absolutní kuželosečku, představuje pohyb v hyperbolické rovině. Transformace, vedoucí k podobnosti, neexistují.

V rovině hyperbolické není tedy možno sestrojiti obrazce podobné. V rovině euklidovské ovšem takové obrazce existují. Často se stávalo, že pokusy o důkaz V. postulátu vycházely z předpokladu možnosti podobných obrazců (*Wallis* [1616—1703], ostatně viz i poznámku o *Gaussově* dopise, § 5, pozn. [12])). Dneska víme, že tento předpoklad, spojený s předpokladem nekonečné přímky, vede k euklidovské geometrii.

2. Pohyb a kružnice. Uvažujme o dvou soumístných svazcích „přímek“ se „středem“ *s*.[7]) Tyto dva svazky můžeme projektivně k sobě přiřaditi. Je-li toto přiřazení takového druhu, že reprodukuje absolutní kuželosečku, je příslušná projektivní transformace jednou ze zmíněných v předcházejícím odstavci. Podle poslední věty onoho odstavce je tedy

---

[7]) Svazek přímek je tvořen všemi přímkami, které procházejí jedním bodem (VIII, 3). Dva soumístné svazky tvořeny jsou rovněž přímkami, které procházejí jedním bodem.

toto přiřazení pohybem, a to pohybem takovým, který kromě kuželosečky absolutní reprodukuje i bod *s*. Transformace, vedoucí k tomuto pohybu, je méně než trojmocná. Z požadavku reprodukce bodu *s* získáme totiž dvě nezávislé rovnice pro tři nezávislé koeficienty. Je tedy tato transformace jednomocná.

Na „kružnici" o středu *s* můžeme sestrojiti dvě křivé řady bodové, projektivně příbuzné, když přiřadíme k sobě „průsečíky" příbuzných „přímek" svazků s touto „kružnicí".[8]) Tato projektivní příbuznost reprodukuje absolutní kuželosečku a je tedy pohybem. Podobným způsobem můžeme sestrojiti projektivní řady na všech „kružnicích" o „středu" *s*. Získáme tak pohyb celé roviny po kružnicích soustředných. Tento pohyb je podle předcházejícího vyznačen projektivními transformacemi o jednom nezávislém koeficientu. Podle konstrukce je zřejmo, že tyto transformace, tvořící jednomocnou grupu, reprodukují všechny koncentrické „kružnice" a tedy i „absolutní kuželosečku":

Jednomocná projektivní grupa, která reprodukuje svazek koncentrických kružnic (a tudíž i absolutní kuželosečku), představuje pohyb hyperbolické roviny po těchto kružnicích.

Při tomto pohybu reprodukuje se též „bod" *s*. Z toho plyne, že různou volbou „bodu" *s* získáme různé pohyby. Bodů v rovině je však ∞^2 a tedy příslušných pohybů ∞^3.

3. Tři druhy pohybu. Věty odvozené v předcházejícím odstavci platily pro každou kružnici. Jsou však tři druhy kružnic a je tedy nasnadě očekávati, že budou i tři druhy pohybu. Je tomu skutečně tak. V dalších řádcích si všimneme každého z těchto tří druhů pohybů zvláště.

Jsou-li koncentrické kružnice cykly, pak pohyb po nich je pohybem periodickým. To znamená, že každý bod v konečnu po uběhnutí určité dráhy po kružnici vrátí se do polohy původní. Při tom je stále stejně vzdálen od pevného bodu *s*. Takový pohyb jevil by se bytosti, nadané schopností vnímati jen hyperbolickou metriku, jako otáčení. Toto pojmenování zachováme i my.

Jsou-li příslušné koncentrické kružnice horocykly, pohyb po nich není periodický. Neboť bod v konečnu se

---

[8]) Na horocyklech je možno jen jedním způsobem takto sobě přiřaditi body. Na aequidistantách je to možno čtverým způsobem, neboť poloměr protíná kružnici ve dvou bodech, z nichž žádný není bodem *s*.

nikdy nemůže vrátiti do původní polohy (samozřejmě při zachování téhož směru pohybu). Podle toho, co jsme dokázali o horocyklech, zůstává však bod při pohybu po jednom horocyklu stále stejně vzdálen od horocyklů ostatních. Tento druh pohybu budeme nazývati pohybem h o r o c y k l i c k ý m.

Jsou-li koncentrické kružnice a e q u i d i s t a n t a m i, pak pohyb po nich opět není periodický. Vyznačuje se však tím, že pohybovaný bod j e s t á l e s t e j n ě v z d á l e n o d d a n é p ř í m k y. Zmíněné bytosti se tento pohyb bude jeviti jako p o s u v. Ježto každá přímka může býti považována za aequidistantu, je do pojmu posuvu zahrnut i pohyb po přímce, ale obráceně pojem posuvu není vyčerpán j e n pojmem pohybu po přímce.

Právě poslední věta byla příčinou mnohých nedopatření při důkazech V. postulátu. Mnozí z těch, kteří se o důkaz pokoušeli, předpokládali, že posuv je možný jen po přímce. Toto své stanovisko často různě formulovali. Zmínili jsme se již o *Posidoniovi*, který definoval rovnoběžky jako přímky stejné vzdálenosti. V této definici je skryta myšlenka posuvu. Zřejmě této myšlenky užil *Borelli*, který definoval takto rovnoběžky: „Je-li úsečka po přímce P tak posunována v rovině, že jedním koncem je stále na P a během celého pohybu na ni kolmá, pak popíše její druhý koncový bod přímku.“ *D'Alembert* (1717—1783), který se tak nelichotivě vyjádřil o geometrii, navrhuje sám definici rovnoběžek, která podle našich poznatků nemusí býti vždy účelná: „Rovnoběžka s přímkou P spojuje dva body na téže straně přímky P od P stejně vzdálené.“

Tato definice předpokládá, že geometrickým místem bodů stejně od P vzdálených je přímka, jak vysvitne z této úvahy: Mysleme si na přímce P řadu bodů $a, b, c, d \ldots$ Vztyčme v nich kolmice $A, B, C, D \ldots$ na přímku P. Stanovme na těchto kolmicích — na téže straně přímky P — body $a', b', c', d' \ldots$ tak, aby $aa' = bb' = cc' = dd' = \ldots$

Podle definice *d'Alembertovy* jsou přímky $a'b', a'c', a'd' \ldots$ rovnoběžny s přímkou P. Všechny tyto přímky splývají v jedinou, je-li geometrické místo bodů $a', b', c', d' \ldots$, od přímky P stejně vzdálených, přímka. V opačném případě bylo by lze vésti nekonečně mnoho rovnoběžek $a'b' \parallel P$, $a'c' \parallel P$, $a'd' \parallel P \ldots$ ku přímce P. To *d'Alembert* jistě nemyslel. V hyperbolické rovině je geometrickým místem bodů od P stejně vzdálených aequidistanta a tudíž *d'Alembertova* definice pro tuto není platná. Je však platná pro euklidovskou rovinu, k d e p l a t í V. p o s t u l á t. *D'Alembertovou* definicí tedy nebylo geometrii pomoženo v tom smyslu, jak to asi mínil její autor.

Otec jednoho z objevitelů hyperbolické geometrie, *W. Bolyai* (1775—1856) dokonce dokazuje, že geometrickým místem bodů od přímky stejně vzdálených je přímka. Prozíravý *Gauss* však popřel správnost jeho důkazu.

V následujícím paragrafu odvodíme rovnice všech druhů pohybů.

§ 3. Rovnice pohybu.

1. Všeobecné poznámky. V tomto paragrafu odvodíme rovnice pohybu v rovině po koncentrických kružnicích. Podle výsledků předcházejícího paragrafu je pohyb vyjádřen trojmocnou projektivní grupou transformací (IV, 1, 1). Tyto transformace určeny jsou koeficienty a_{ij}, z nichž jenom tři jsou nezávislé. Určiti rovnice pohybu znamená tedy určiti tyto tři nezávislé koeficienty. Učiníme tak nejdříve zcela obecně a pak teprve budeme specialisovati pohyb po kružnici a pro určité druhy kružnic, po nichž se má pohyb vykonávati. V prvé řadě musíme tedy stanoviti podmínky pro koeficienty rovnic (IV, 1, 1). Tyto transformace mají reprodukovati absolutní kuželosečku, jejíž rovnici předpokládáme dánu ve tvaru kanonickém polárním (VIII, 6, odst. 3)

$$\xi_3^2 - \xi_2^2 - \xi_1^2 = 0\,.$$

To znamená, že musí býti splněna rovnice

$$\varrho^{-2}(x_3^2 - x_2^2 - x_1^2) = \left(\sum_1^3 {}_j\, a_{3j}\, x_j\right)^2 - \left(\sum_1^3 {}_j\, a_{2j}\, x_j\right)^2 - \left(\sum_1^3 {}_j\, a_{1j}\, x_j\right)^2.$$

Musí tedy koeficienty a_{ij} splňovati rovnice

$$5)\quad \begin{aligned} &a)\quad a_{11}^2 + a_{21}^2 - a_{31}^2 = a_{12}^2 + a_{22}^2 - a_{32}^2 = a_{33}^2 - a_{23}^2 - a_{13}^2 \\ &b)\quad a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} - a_{31}a_{32} = 0 \\ &c)\quad a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23} - a_{31}a_{33} = 0 \\ &d)\quad a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} - a_{32}a_{33} = 0\,. \end{aligned}$$

Tento systém představuje pět nezávislých rovnic pro osm nezávislých koeficientů. Můžeme tedy 5 z nich vyjádřiti ostatními 3 a získáme tak nejobecnější rovnice pohybu. Jedná-li se však jen o pohyb po koncentrických kružnicích o „středu“ s, musí se i tento „bod“ reprodukovati, čili musí býti splněny rovnice

$$6)\quad s_1 : s_2 : s_3 = a_{11}s_1 + a_{12}s_2 + a_{13}s_3 : a_{21}s_1 + a_{22}s_2 + a_{23}s_3 : a_{31}s_1 + a_{32}s_2 + a_{33}s_3\,.$$

To jsou dvě nezávislé rovnice pro tři koeficienty a můžeme z nich vyjádřiti dva zbývajícím jedním. Skutečně pak grupa vyjadřující pohyb je **jednomocná**. — Rovnice 5), 6) budeme specialisovati pro všechny tři druhy kružnic.

2. **Otáčení.** Je-li pohyb otáčením, musí střed otáčení s býti skutečný. Zvolme tento střed právě v tom „vrcholu“ souřadného trojúhelníka polárného, jehož souřadnice jsou

$$s_1 : s_2 : s_3 = 0 : 0 : 1 .$$

Rovnice 6) se tedy zjednoduší na

$$0 : 0 : 1 = a_{13} : a_{23} : a_{33} .$$

Z nich plyne

6') $$a_{13} = a_{23} = 0.$$

Determinant transformace D je vždy rozdílný od nuly. Vhodnou volbou faktoru úměrnosti můžeme vždy dosáhnouti toho, že je právě $D = 1$.

Dosazením hodnot 6') do této rovnice obdržíme

7) $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 1 .$$

Z rovnice 5*c*) plyne vzhledem k 6') a 7)

5'*c*) $$a_{31} = 0$$

a obdobně z rovnice 5*d*)

5'*d*) $$a_{32} = 0 .$$

Zbývající rovnice 5*b*) se zjednoduší na

5'*b*) $$a_{11} a_{12} + a_{21} a_{22} = 0 .$$

Je tedy obecně

8) $$a_{11} = \sigma a_{22} , \quad a_{12} = -\frac{1}{\sigma} a_{21} \quad (\sigma \neq 0 \text{ koef. úměrnosti}).$$

Dosazením těchto hodnot do 5*a*) získáme

5'*a*) $$(a_{11}^2 + a_{21}^2) = \frac{1}{\sigma^2} (a_{21}^2 + a_{11}^2) = a_{33}^2,$$

z čehož

9) $$\frac{1}{\sigma^2} = 1 , \qquad \frac{1}{\sigma} = \pm 1 = \varepsilon .$$

Dosazením této hodnoty a hodnot z 8) do 7) obdržíme

$$a_{33} (a_{11}^2 + a_{12}^2) = \varepsilon$$

nebo vzhledem k 9) a 5'*a*)

$$a_{33} = \varepsilon .$$

Je tedy

$$a^2_{11} + a^2_{12} = 1$$

a proto můžeme položiti

$$\begin{aligned} a_{11} &= \varepsilon a_{22} = \varepsilon' \cos \varphi \\ a_{12} &= -\varepsilon a_{21} = \varepsilon'' \sin \varphi \end{aligned} \qquad (\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'' = \pm 1).$$

Připustíme-li, aby úhel φ probíhal hodnotami od 0 do 2π, můžeme položiti $\varepsilon' = \varepsilon'' = +1$ a získáme i tak všechny možné kombinace znamének. — Dosazením těchto hodnot do rovnic transformačních získáme rovnice otáčení po soustředných cyklech o středu s (0, 0, 1)

$$\text{10)} \quad \boxed{\begin{aligned} \varrho' x_1 &= \cos\varphi\, x_1 + \sin\varphi\, x_2 \\ \varrho' x_2 &= \varepsilon(-\sin\varphi\, x_1 + \cos\varphi\, x_2) \\ \varrho' x_3 &= \varepsilon x_3 \end{aligned}}$$

Je-li $x_3 = 0$ rovnice úběžné přímky znázorňující roviny, můžeme při vhodné volbě jednotkového bodu dosáhnouti, že poměry $\frac{x_1}{x_3}$, $\frac{x_2}{x_3}$ jsou cartézské souřadnice $x = \frac{x_1}{x_3}$, $y = \frac{x_2}{x_3}$. Smluvíme-li se na tom, že „absolutní kuželosečka“ je kružnicí, jsou tyto souřadnice x, y pravoúhlé. Hořejší rovnice v těchto souřadnicích se zjednoduší na tvar

$$\text{11)} \quad \boxed{\begin{aligned} x &= \varepsilon(\cos\varphi\, x + \sin\varphi\, y) \\ y &= -\sin\varphi\, x + \cos\varphi\, y \end{aligned}}$$

Tyto rovnice představují otáčení a zrcadlení v euklidovské znázorňující rovině. (Pro $\varepsilon = +1$ otáčení, pro $\varepsilon = -1$ otáčení, spojené se zrcadlením.)

3. Posuv. Je-li pohyb posuvem po soustředných aequidistantách, musí jejich „střed“ býti vně „absolutní kuželosečky“. Zvolíme opět speciální případ, kdy střed s je vrcholem základního trojúhelníku souřadného o souřadnicích (1, 0, 0). Za tohoto předpokladu rovnice 6) nám skýtá

$$1 : 0 : 0 = a_{11} : a_{21} : a_{31},$$

z čehož plyne

$$\text{6'')} \qquad a_{21} = a_{31} = 0.$$

Dosazením těchto hodnot do rovnice pro determinant soustavy obdržíme

$$\text{7')} \qquad D = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 1.$$

Z rovnic 5*b*), 5*c*) obdržíme

5″*b*)*c*) $$a_{12} = a_{13} = 0$$

a rovnice 5*d*) se zjednoduší na

5″*d*) $$a_{22}\, a_{23} - a_{32}\, a_{33} = 0\,.$$

Právě tak, jako v odstavci minulém, dokážeme i nyní použitím rovnic 5*a*) a 5″*d*), že jest

$$a_{22} = \varepsilon\, a_{33}\,, \qquad a_{23} = \varepsilon\, a_{32}$$

a podobně

$$a_{11} = \varepsilon\,,$$

takže z rovnice 7′) obdržíme

$$a^2_{22} - a^2_{23} = 1\,.$$

Můžeme tedy (vzhledem k VIII, 1, 7) položiti

$$\begin{aligned} a_{22} &= \varepsilon\, a_{33} = \varepsilon' \operatorname{Cos} \psi \\ a_{23} &= \varepsilon\, a_{32} = \varepsilon'' \operatorname{Sin} \psi\,. \end{aligned}$$

Připustíme-li, že ψ může probíhati i hodnotami zápornými, můžeme položiti $\varepsilon'' = +1$ a získáme i tak všechny možné kombinace znamének. — Dosazením vypočtených koeficientů do rovnic transformačních získáme rovnice p o s u v u p o k o n c e n t r i c k ý c h a e q u i d i s t a n t á c h s „p ř í m k o u“ $x_1 = 0$

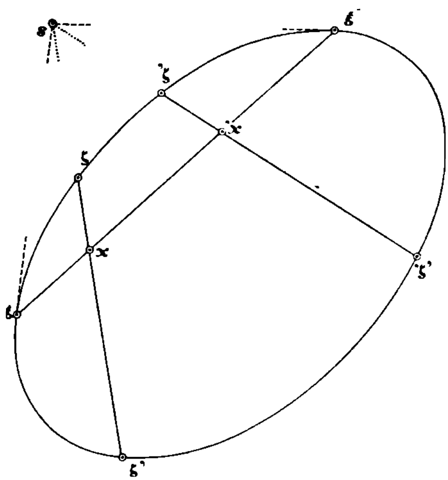
12) $$\boxed{\begin{aligned} \varrho\, 'x_1 &= \varepsilon\, x_1 \\ \varrho\, 'x_2 &= \varepsilon' \operatorname{Cos}\psi\, x_2 + \operatorname{Sin}\psi\, x_3 \\ \varrho\, 'x_3 &= \varepsilon\, (\operatorname{Sin}\psi\, x_2 + \varepsilon' \operatorname{Cos}\psi\, x_3) \end{aligned}}$$

Zde můžeme opět dosáhnouti toho, že $x = \dfrac{x_2}{x_1}$, $y = \dfrac{x_3}{x_1}$ jsou souřadnice cartézské. Je-li „absolutní kuželosečka“ rovnoosou hyperbolou, jsou tyto souřadnice pravoúhlé. Hořejší rovnice se zjednoduší na tvar

13) $$\boxed{\begin{aligned} 'x &= \varepsilon\, (\varepsilon' \operatorname{Cos}\psi\, x + \operatorname{Sin}\psi\, y) \\ 'y &= \operatorname{Sin}\psi\, x + \varepsilon' \operatorname{Cos}\psi\, y \end{aligned}}$$

Posuv je tedy v rovině euklidovské znázorněn pohybem po hyperbolách rovnoosých, které mají s „absolutní kuželosečkou“ stejné asymptoty. Rovnice rovnoosé hyperboly je totiž v pravoúhlých cartézských souřadnicích $x^2 - y^2 =$ konst. Ale právě výraz $x^2 - y^2$ je invariantem vzhledem k 13) a tudíž skutečně „body“ posouvají se po hyperbolách, které mají stejné asymptoty s hyperbolou o rovnici $x^2 - y^2 = 1$ („abs. kuž."). Z hořejších rovnic vidíme, že jsou celkem možné čtyři druhy posuvu, podle toho, jak zvolíme ε, ε'.

Geometrické odůvodnění těchto čtyř možností posuvu je velmi snadné. — Na obr. 2 je znázorněn posuv bodu x pro jednoduchost pouze po přímce. Předpokládejme však,



Obr. 2.

že současně s tímto bodem pohybuje se celá rovina po příslušných aequidistantách. Tyto se reprodukují a poněvadž k nim patří i absolutní kuželosečka, reprodukuje se i tato. Při reprodukci absolutní kuželosečky jsou si její body tak projektivně navzájem přiřazeny, že body ξ, ξ' buď jsou samodružné, nebo vymění vzájemně svá místa. Projektivní přiřazení dvou křivých řad bodových je dáno, určíme-li k libovolné trojici bodů jedné řady libovolnou trojici bodů druhé řady. (Při tom ty trojice volíme tak, aby v každé z nich žádné dva body nesplývaly.) Toto přiřazení je možno právě čtverým způsobem, určíme-li totiž, že bodům

$$\xi, \zeta, \xi'$$

jedné řady na kuželosečce odpovídají body

ξ, $'\zeta$, ξ', nebo
ξ, $'\zeta'$, ξ', nebo
ξ', $'\zeta$, ξ, nebo
ξ', $'\zeta'$, ξ

druhé řady na téže kuželosečce. Každé takové přiřazení znázorňuje pohyb po absolutní kuželosečce a s ním i spojený posuv po aequidistantách. Je tedy skutečně možno vykonati posuv čtverým způsobem.

4. Pohyb horocyklický. Postupem, kterým jsme došli k rovnicím posuvu a otáčení, mohli bychom odvoditi i rovnice pohybu horocyklického. Takový postup však není v tomto případě nejkratší. Zvolíme způsob, který nás kratší cestou povede k cíli. Předpokládejme rovnici „absolutní kuželosečky“ v tvaru kanonickém tečnovém

$$\xi_1^2 - \xi_2 \xi_3 = 0.$$

(VIII, 6, odst. 3). V tomto případě jsou vrcholy (0, 1, 0), (0, 0, 1) souřadného trojúhelníka na kuželosečce a strany trojúhelníka, které tyto body spojují s třetím bodem základním (1, 0, 0), jsou tečnami kuželosečky právě v oněch bodech. V celé rovině, v níž znázorňujeme hyperbolickou rovinu, jsou obecně tři „body“, které při pohybu (jakémkoliv ze tří možných) buď jsou samodružné, nebo zamění svá místa. Jedním z nich (vždy pevným) je „bod“ s, druhé dva jsou dotyčné „body“ „tečen“, z bodu s k „absolutní kuželosečce“ vedených.[8a]) Při znázornění pohybu horocyklického je „bod“ s na „absolutní kuželosečce“, ony tři samodružné body splývají v jediný a reprodukuje se tedy jeden a jen jeden „bod“, totiž s, a jen jedna „tečna“, totiž „tečna“ v bodě s. Vrchol (0, 0, 1) souřadného trojúhelníka zvolíme za „bod“ s. Pak rovnice 6) se zjednoduší na

$$0 : 0 : 1 = a_{13} : a_{23} : a_{33}$$

nebo

$$a_{13} = a_{33} = 0.$$

Další koeficient získáme z podmínky, že se reprodukuje „tečna“ v „bodě“ s, t. j. přímka o rovnici $x_2 = 0$.

Musí tedy býti

$$a_{21} = 0.$$

Rovnice vedoucí k samodružným bodům (VIII, 4, 24) je v tomto případě jednoduchá

8a) Kromě toho ve třetím z uvedených případů posuvu reprodukuje se každý bod určité (skutečné) přímky, jejíž obraz prochází „bodem“ s a jeden bod ideální. („Pól“ právě zmíněné „přímky“.) Ve čtvrtém případě reprodukuje se jeden (skutečný) bod a každý bod jeho (ideální) poláry (vzhledem k absolutní kuželosečce), která prochází ideálním bodem s. V obou případech je ∞^1 dvojic bodových na absolutní kuželosečce, které se reprodukují stejným způsobem jako dvojice $\xi\ \xi'$.

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\varrho & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\varrho & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\varrho \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}-\varrho & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22}-\varrho & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\varrho \end{vmatrix} =$$

$$= (a_{11}-\rho)(a_{22}-\varrho)(a_{33}-\varrho) = 0.$$

Mají-li všechny tři body se ztotožňovati, musí kořeny této rovnice býti stejné a tudíž musí

$$a_{11} = a_{22} = a_{33}.$$

Při tom determinant transformace $D = a_{11}\, a_{22}\, a_{33}$ jest opět od nuly různý. Můžeme tedy opět dosáhnouti, že D je roven $+1$.[9]) Z této podmínky vzhledem k předcházejícím rovnicím získáme

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = 1.$$

Nyní teprve upotřebíme podmínky, že se reprodukuje „absolutní kuželosečka“. Dosadíme-li do rovnice

$$14)\qquad \sigma(x_1^2 - x_2 x_3) = \left(\sum_1^3{}_j\, a_{1j}\, x_j\right)^2 - \sum_1^3{}_{j,k}\, a_{2j} a_{3k}\, x_j\, x_k \qquad \begin{matrix}(\sigma \text{ koef.} \\ \text{úměrnosti})\end{matrix}$$

hodnoty vypočtených koeficientů, získáme

$$a_{32} = a^2_{12}, \qquad a_{31} = 2\,a_{12}.$$

Rovnice **pohybu horocyklického** jsou tedy v našem případě

$$15)\qquad \boxed{\begin{aligned} \varrho\, 'x_1 &= x_1 + a_{12}\, x_2 \\ \varrho\, 'x_2 &= +x_2 \\ \varrho\, 'x_3 &= 2a_{12}\, x_1 + a^2_{12}\, x_2 + x_3 \end{aligned}}$$

Je-li „přímka“ $x_2 = 0$ nevlastní přímkou znázorňující roviny, pak při vhodné volbě jednotkového bodu můžeme $\frac{x_1}{x_2}$, $\frac{x_3}{x_2}$ pokládati za souřadnice cartézské. V těchto souřadnicích x, y je pohyb po horocyklech znázorněn rovnicemi

$$16)\qquad \boxed{\begin{aligned} 'x &= x + a_{12} \\ 'y &= 2\,a_{12}\, x + y + a^2_{12} \end{aligned}}$$

„Absolutní kuželosečka“ je parabolou a „horocykly“ jsou rovněž parabolami. Jsou-li souřadnice x, y pravoúhlé

---

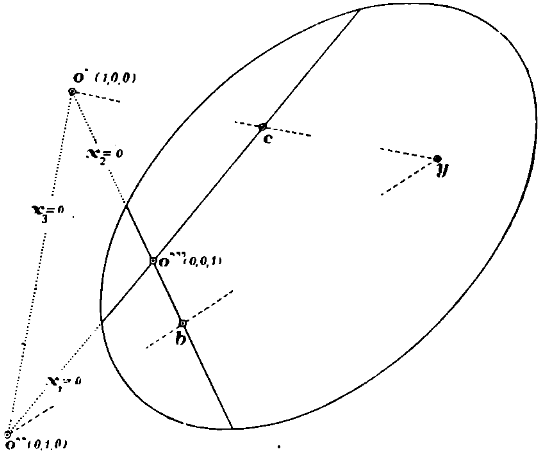
[9]) Při horocyklickém pohybu můžeme jen jedním způsobem přiřaditi k sobě body kuželosečky absolutní. Proto můžeme očekávati, že v rovnicích horocyklického pohybu nebudou se vyskytovati ε, ε'.

cartézské, pak tyto paraboly mají s „absolutní kuželosečkou“ společnou osu a týž parametr. Ani rovnice 15), ani rovnice 16) neobsahují $\varepsilon, \varepsilon'$, jak jsme upozornili v poznámce[9]).

§ 4. Weierstrassovy souřadnice.

1. Souřadnice bodové. Nechť jest „absolutní kuželosečka“ dána rovnicí

$$\xi_3^2 - \xi_2^2 - \xi_1^2 = 0.$$



Obr. 3.

Pak „bod“ základní o''' jest uvnitř kuželosečky (obr. 3). Tak jako pro tento, tak i pro každý jiný „bod“ uvnitř „absolutní kuželosečky“ jest

α) $$x_3^2 - x_2^2 - x_1^2 > 0,$$

kdežto pro „body“ vně „absolutní kuželosečky“ je

β) $$x_3^2 - x_2^2 - x_1^2 < 0.$$

Můžeme tedy vždy vhodnou volbou koeficientu úměrnosti docíliti, že pro souřadnice „bodů“ uvnitř „absolutní kuželosečky“ je

$$x_3^2 - x_2^2 - x_1^2 = 1.$$

Souřadnicím, které splňují tuto podmínku, říkáme **bodové souřadnice Weierstrassovy**. Použití těchto souřadnic značně zjednoduší některé výsledné vzorce a možno jich též s výhodou použíti při problémech analytické geometrie v rovině hyperbolické. Tak na příklad vzorec pro vzdálenost dvou bodů (IV, 2, 9)

$$m(xy) = k \operatorname{arc} \operatorname{Cos} \frac{f_{xy}}{\sqrt{f_{xx} f_{yy}}}$$

se zjednoduší na

$$m(xy) = k \operatorname{arc} \operatorname{Cos} (x_3 y_3 - x_2 y_2 - x_1 y_1)$$

nebo

17) $$\boxed{\operatorname{Cos} \frac{m}{k} = x_3 y_3 - x_2 y_2 - x_1 y_1},$$

ježto

$$f_{xx} = x_3^2 - x_2^2 - x_1^2 = 1 = y_3^2 - y_2^2 - y_1^2 = f_{yy}.$$

V rovnici 17) je na levé straně pohybový invariant a tudíž musí býti i výraz na pravé straně pohybovým invariantem. Toho použijeme, abychom stanovili geometrický význam *Weierstrassových* souřadnic, neboť místo obecného bodu x můžeme vzíti bod ve zvláštní poloze, který se pohybem po kružnici o středu y dá převésti do bodu x. Budiž bod b tímto bodem ve zvláštní poloze. Tento bod je průsečíkem kolmice z bodu y na přímku $(o'o''')$ základního trojúhelníka s touto přímkou. Přímka yb prochází „bodem“ o'' a tudíž má rovnici

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = x_3 y_1 - x_1 y_3 = 0.$$

Souřadnice bodu b jsou podle toho

$$b_2 = 0, \qquad b_1 = \varrho y_1, \qquad b_3 = \varrho y_3,$$

kde ϱ určíme z rovnice

$$b_3^2 - b_1^2 - b_2^2 = \varrho^2 (y_3^2 - y_1^2) = \varrho^2 (1 + y_2^2) = 1.$$

Je tedy (omezíme-li se na kladnou odmocninu)

$$b_2 = 0, \qquad b_1 = \frac{y_1}{\sqrt{1 + y_2^2}}, \qquad b_3 = \frac{y_3}{\sqrt{1 + y_2^2}}$$

a vzdálenost yb je dána vzorcem

$$\operatorname{Cos} \frac{m(yb)}{k} = \frac{y_3^2 - y_1^2}{\sqrt{1 + y_2^2}} = \frac{1 + y_2^2}{\sqrt{1 + y_2^2}} = \sqrt{1 + y_2^2},$$

který možno psáti (vzhledem k VIII, 1, 7)

$$\operatorname{Sin} \frac{m(yb)}{k} = y_2 .$$

Tím jsme získali geometrický význam souřadnice y_2 obecného bodu. Právě týmž způsobem odvodíme

$$\operatorname{Sin} \frac{m(yc)}{k} = y_1 .$$

Geometrický význam souřadnice y_3 je z rovnice 17), pro $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = 1$ dán vzorcem

$$\operatorname{Cos} \frac{m(yo''')}{k} = y_3 .$$

Ježto y_1, y_2, y_3 jsou souřadnice *Weierstrassovy*, platí pro ně relace

$$y_3^2 - y_2^2 - y_1^2 = \operatorname{Cos}^2 \frac{m(yo''')}{k} - \operatorname{Sin}^2 \frac{m(yb)}{k} - \operatorname{Sin}^2 \frac{m(yc)}{k} = 1 ,$$

kterouž také můžeme psáti

$$\operatorname{Sin}^2 \frac{m(yo''')}{k} = \operatorname{Sin}^2 \frac{m(yb)}{k} + \operatorname{Sin}^2 \frac{m(yc)}{k} .$$

Rozvineme-li *Sin* v řadu (podle VIII, 1, 6), obdržíme

$$\left(\frac{m^2(yo''')}{k^2} + \frac{m^4(yo''')^4}{3k^4} + \ldots\right) = \left(\frac{m^2(yb)}{k^2} + \frac{m^4(yb)}{3k^4} + \ldots\right) +$$
$$+ \left(\frac{m^2(yc)}{k^2} + \frac{m^4(yc)}{3k^4} + \ldots\right).$$

V případě, že $\frac{m(yo''')}{k} \to 0$, $\frac{m(yc)}{k} \to 0$, $\frac{m(yb)}{k} \to 0$,

můžeme v prvém přiblížení psáti

$$m^2(yo''') = m^2(yb) + m^2(yc) .$$

Tento výsledek můžeme vyjádřiti takto:

Jsou-li vzdálenosti bodů yb, yc, yo''' dostatečně malé vzhledem ke konstantě k, pak pro ně platí v prvním přiblížení věta Pythagorova.

Tím je znovu potvrzen výrok, že „geometrie euklidovská je diferenciální geometrií hyperbolické geometrie“.

2. Souřadnice přímkové. Za souřadnice přímkové nějaké „přímky“ budeme považovati bodové souřadnice jejího „pólu“ vzhledem k „absolutní kuželosečce“. (Viz IV,

1, konec.) Jsou-li přímky tečnami absolutní kuželosečky, příslušné póly jsou body absolutní kuželosečky, a tudíž přímková rovnice „absolutní kuželosečky“ je táž jako její bodová rovnice. Ježto však pro „body“ vně „absolutní kuželosečky“ platí relace β), je výhodné přímkovou rovnici „absolutní kuželosečky“ uvésti na tvar

$$\Xi_1^2 + \Xi_2^2 - \Xi_3^2 = 0 .$$

Jsou-li totiž X_1, X_2, X_3 souřadnice „přímky“, pak pro ně platí podle právě uvedeného jich významu

β) $$X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 > 0$$

a můžeme tudíž vhodnou volbou koeficientu úměrnosti vždy dosáhnouti toho, že je pro ně splněna rovnice

$$X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 = 1 .$$

Tyto souřadnice jsou přímkové souřadnice *Weierstrassovy*. Důležité je, že vzorce, získané pro obyčejné souřadnice přímkové, zachovají svoji formu i pro tyto souřadnice. Neboť oba druhy souřadnic liší se jen znaménkem u souřadnice s indexem 3, ale ve všech vzorcích se tyto souřadnice vyskytují vždy dvojmo, takže rozdíl znaménkový se neuplatní.

Můžeme tedy z rovnice (IV, 2, 10*a*) odvoditi vzorec pro úhel dvou různoběžných přímek X, Y ve tvaru

$$M(XY) = \arccos (X_1Y_1 + X_2Y_2 - X_3Y_3) \cdot$$

nebo

18) $$\boxed{\cos M(XY) = X_1Y_1 + X_2Y_2 - X_3Y_3}$$ [10])

Geometrický význam souřadnic přímkových není třeba zvláště uváděti vzhledem k tomu, že jsou to vlastně souřadnice „bodů“.

3. **Některé aplikace.** Okolnost posléze uvedená poslouží nám jako pomůcka ke stanovení některých pohybových invariantů. Ježto

$$x_3y_3 - x_2y_2 - x_1y_1$$

je pohybovým invariantem, musí podle uvedené definice těchto souřadnic i

$$Y_3y_3 - Y_2y_2 - Y_1y_1$$

---

[10]) Doporučuji čtenáři, by si z této rovnice odvodil podmínku kolmosti dvou přímek a podmínku rovnoběžnosti.

býti pohybovým invariantem. Jeho geometrický význam stanovíme snadno, zvolíme-li „přímku“ Y ve zvláštní poloze (obr. 3). Je-li na příklad $Y \equiv o''' o'$, pak její přímkové souřadnice jsou bodovými souřadnicemi „pólu“ o'', t. j.

$$Y_1 = 0, \quad Y_2 = 1, \quad Y_3 = 0.$$

Je tedy v tomto případě

$$Y_3 y_3 - Y_2 y_2 - Y_1 y_1 \equiv - y_2 = - \operatorname{Sin} \frac{m(yb)}{k}$$

a proto obecně vzdálenost m bodu y od přímky Y je dána vzorcem

$$\operatorname{Sin} \frac{m}{k} = Y_1 y_1 + Y_2 y_2 - Y_3 y_3.$$

Pohybový invariant $X_3 Y_3 - X_2 Y_2 - X_1 Y_1$ má také svoji důležitost při studiu přímek mimoběžných. Zvolme za takové mimoběžky přímky co''' a yb. Souřadnice prvé jsou

$$X_3 = 0, \quad X_2 = 0, \quad X_1 = 1,$$

druhá má rovnici $x_3 y_1 - x_1 y_3 = 0$ a tudíž její přímkové souřadnice jsou

$$Y_1 = - \varrho y_3, \quad Y_2 = 0, \quad Y_3 = - \varrho y_1,$$

kde ϱ vypočítáme z rovnice

$$Y_1^2 + Y_2^2 - Y_3^2 = \varrho^2 (y_3^2 - y_1^2) = \varrho^2 (1 + y_2^2) = 1.$$

Opět se omezíme na odmocninu kladnou, takže vzhledem k výpočtům předcházejícího odstavce obdržíme

$$X_3 Y_3 - X_2 Y_2 - X_1 Y_1 = - Y_1 = + \frac{y_3}{\sqrt{1 + y_2^2}} = + b_3 = + \operatorname{Cos} \frac{m(bo''')}{k}.$$

Podle toho je délka m osy dvou mimoběžek Y, Z určena vzorcem

$$\operatorname{Cos} \frac{m}{k} = Y_3 Z_3 - Y_2 Z_2 - Y_1 Z_1.$$

Všechny tyto vzorce jeví, jak uvidíme, nápadnou podobnost se vzorci geometrie na kouli. V dalším odstavci najdeme důvody této podobnosti.

4. Diferenciální aplikace. Nechť jsou dány dva body nekonečně blízké x, y. Souřadnice bodu y můžeme vyjádřiti souřadnicemi bodu x

$$y_j = x_j + dx_j + \frac{1}{2} d^2 x_j + \ldots \qquad (j = 1, 2, 3).$$

Přírůstky dx_j, d^2x_j... nemohou býti libovolné, neboť souřadnice bodu y musí splňovati podmínku pro *Weierstrassovy* souřadnice. Jejím diferencováním obdržíme

$$x_3dx_3 - x_2dx_2 - x_1dx_1 = 0$$
$$dx_3^2 - dx_2^2 - dx_1^2 = x_1d^2x_1 + x_2d^2x_2 - x_3d^2x_3.$$

Vzdálenost m obou bodů je dána vzorcem 17). Cos na levé straně můžeme rozvinouti v řadu (VIII, 1, 6). Tak získáme

$$1 + \frac{(m:k)^2}{2!} + \frac{(m:k)^4}{4!} + \dots = x_3y_3 - x_2y_2 - x_1y_1 =$$
$$= x_3^2 - x_2^2 - x_1^2 + (x_3dx_3 - x_2dx_2 - x_1dx_1) + \frac{1}{2}(x_3d^2x_3 - x_2d^2x_2 - x_1d^2x_1) + \dots$$

neboli

$$\frac{(m:k)^2}{2!} + \frac{(m:k)^4}{4!} + \dots = \frac{1}{2}(dx_1^2 + dx_2^2 - dx_3^2) + \dots$$

Píšeme-li opět dm místo m, obdržíme z předchozí rovnice v prvém přiblížení

$$dm^2 = k^2(dx_1^2 + dx_2^2 - dx_3^2)$$

jako vzorec pro čtverec vzdálenosti dvou nekonečně blízkých bodů. Tento vzorec je možno aplikovati zajímavým způsobem. Zaveďme souřadnice $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, $\bar{x}_3$ vztahy

$$\bar{x}_1 = kx_1, \quad \bar{x}_2 = kx_2, \quad \bar{x}_3 = ikx_3.$$

Z podmínky pro *Weierstrassovy* souřadnice získáme

19) $$-\bar{x}_3^2 - \bar{x}_2^2 - \bar{x}_1^2 = k^2$$

a rovnice pro dm^2 se změní na

20) $$dm^2 = d\bar{x}_1^2 + d\bar{x}_2^2 + d\bar{x}_3^2.$$

Rovnice 19) je rovnicí koule o poloměru ki a rovnice 20) představuje čtverec euklidovské vzdálenosti dvou nekonečně blízkých bodů v prostoru. Jsou-li obě rovnice současně platné, jako v našem případě, je 20) čtvercem euklidovského diferenciálu oblouku na kouli o poloměru ki. Vzdálenosti na této kouli můžeme interpretovati jako vzdálenosti v hyperbolické rovině, a rovněž tak úhly.

Geometrii v hyperbolické rovině možno interpretovati jako geometrii na imaginární kouli o poloměru ki v euklidovském prostoru.

Tohoto poznatku užijeme v následujícím paragrafu, abychom snadnou cestou dospěli k některým poučkám z trigonometrie hyperbolické roviny. Nejdříve však zodpovíme otázku, co odpovídá v této interpretaci přímkám a kružnicím hyperbolické roviny? To rozhodneme snadno: Přímkové souřadnice X_1, X_2, X_3 jsou vlastně souřadnicemi bodů a tudíž příslušné souřadnice $\overline{X}_1$, $\overline{X}_2$, $\overline{X}_3$ jsou s nimi vázány relacemi

$$\overline{X}_1 = kX_1, \quad \overline{X}_2 = kX_2, \quad \overline{X}_3 = ikX_3.$$

Podle toho je rovnice přímky v hyperbolické rovině

21) $$\overline{x}_3\overline{X}_3 + \overline{x}_2\overline{X}_2 + \overline{x}_1\overline{X}_1 = 0.$$

V prostorové interpretaci představuje 21) rovinu procházející počátkem, t. j. středem koule. Rovnice 19) a 21) představují tedy průsek této roviny s koulí, t. j. hlavní kružnici:

Přímky hyperbolické roviny jeví se v této interpretaci jako hlavní kružnice koule.

Z kružnic na prvém místě stojí absolutní kuželosečka, která patří každému svazku kružnic. Její rovnice jest

$$\overline{\xi}_3^2 + \overline{\xi}_2^2 + \overline{\xi}_1^2 = 0.$$

V prostorové interpretaci je to však rovnice kulové kružnice v nevlastní rovině euklidovského prostoru. Říká se jí také absolutní kružnice a vznikne průsekem libovolné (reálné, či imaginárné) koule s nevlastní rovinou (viz též [VI, 7]):

Absolutní kuželosečka jeví se jako absolutní kružnice, neboli kružnice kulová.

Nyní snadno rozhodneme o tom, jak se jeví kružnice hyperbolické roviny. Tak na příklad rovnice cyklu o středu s je podle rovnice 17)

$$\operatorname{Cos}\frac{r}{k} = x_3s_3 - x_2s_2 - x_1s_1.$$

V nových souřadnicích ji můžeme psáti

$$\operatorname{Cos}\frac{r}{k} = -\frac{1}{k^2}(\overline{x}_3\overline{s}_3 + \overline{x}_2\overline{s}_2 + \overline{x}_1\overline{s}_1).$$

To je rovnice roviny, neprocházející počátkem. Tato rovina protíná kouli 19) v kružnici, která není hlavní:

Cykly hyperbolické roviny jeví se na kouli jako kružnice, které nejsou hlavní.

Podobně možno dokázati, že i aequidistanty resp. horocykly jeví se na kouli jako kružnice, které nejsou hlavní.

Tak na příklad, je-li bod s na absolutní kuželosečce v hyperbolické rovině, jest odpovídající mu bod v prostorové interpretaci na absolutní kružnici. Horocykly jsou proto znázorněny kružnicemi, které leží v průsečných rovinách, dotýkajících se absolutní kuželosečky. Jejich rovnice jsou

$$k^2 \operatorname{const} = \bar{x}_3 \bar{s}_3 + \bar{x}_2 \bar{s}_2 + \bar{x}_1 \bar{s}_1 .$$

Rovnice aequidistanty ku přímce Y je

$$k^2 \operatorname{Sin} \frac{m}{k} = (\bar{x}_3 \bar{Y}_3 + \bar{x}_2 \bar{Y}_2 + \bar{x}_1 \bar{Y}_1),$$

kde m značí vzdálenost bodu aequidistanty od Y.

§ 5. **Trigonometrie.**

1. Pomocné vzorce. V následujících odstavcích budeme se zabývati hyperbolickou rovinou se stanoviska posledního odstavce předcházejícího paragrafu. Podaří se nám odvoditi mnoho důležitých vět a vzorců, když do formulí sférické trigonometrie dosadíme za poloměr veličinu ryze imaginární. Nejdříve uvedeme pomocné vzorce sférické trigonometrie a pak je naznačeným způsobem budeme interpretovati. Uvažujme tedy na kouli o poloměru r sférický trojúhelník o stranách a, b, c a protějších úhlech α, β, γ. Jeho obsah budiž P a sférický nadbytek ν (t. j. rozdíl $\nu = \alpha + \beta + \gamma - \pi$). Pak platí vzorce:

$$\text{22)} \quad \left\{ \begin{array}{ll} a) & \sin \frac{a}{r} : \sin \frac{b}{r} : \sin \frac{c}{r} = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma, \\ b) & \cos \frac{a}{r} = \cos \frac{b}{r} \cos \frac{c}{r} + \sin \frac{b}{r} \sin \frac{c}{r} \cos \alpha, \\ c) & \cos \alpha = - \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos \frac{a}{r}, \\ d) & P = r^2 \operatorname{arc} \nu \quad (\nu = \alpha + \beta + \gamma - \pi). \end{array} \right.$$

Pro pravoúhlý trojúhelník sférický ($\gamma = 90^0$) platí tak zvané *Neperovo* pravidlo, které je vyjádřeno vzorci:

$$\text{23)} \quad \left\{ \begin{array}{ll} a) & \cos \frac{c}{r} = \cos \frac{a}{r} \cos \frac{b}{r}, \\ b) & \sin \frac{b}{r} = \sin \beta \sin \frac{c}{r}, \\ b') & \sin \frac{a}{r} = \sin \alpha \sin \frac{c}{r}, \\ c) & \cos \beta = \sin \alpha \cos \frac{b}{r}, \\ c') & \cos \alpha = \sin \beta \cos \frac{a}{r}. \end{array} \right.$$

Kružnice na kouli, jejíž poloměr jest r, má sférický poloměr $\frac{\delta}{2}$

24) $$\frac{\delta}{2} = r\alpha,$$ [11]

při čemž α je příslušným úhlem středovým.

Oblouk s kružnice, příslušný úhlu ω, je dán vzorcem

25) $$s = \omega r \sin \frac{\delta}{2r}.$$

Sférická plocha kružnice (t. j. plocha vrchlíku, kružnicí na kouli vymezeného) je

26) $$V_\delta = 2\pi r^2 \left(1 - \cos \frac{\delta}{2r}\right) = 4\pi r^2 \sin^2 \frac{\delta}{4r}.$$

2. Vzorce geometrie hyperbolické. V minulém paragrafu jsme dokázali, že hyperbolickou geometrii můžeme interpretovati jako geometrii na kouli o poloměru ki v prostoru euklidovském. Při tom přímkám hyperbolické roviny odpovídají hlavní kružnice. Sférický trojúhelník na kouli je právě tvořen hlavními kružnicemi. Odpovídá tedy trojúhelníku v rovině hyperbolické sférický trojúhelník na kouli o poloměru ki. Dosazením $r = ki$ do vzorců 22), 23) minulého odstavce získáme vzorce pro trojúhelník roviny hyperbolické. Při tom musíme používati známého vztahu mezi funkcemi goniometrickými a hyperbolickými (VIII, 1, 10). Takovým způsobem obdržíme ze vzorců 22) *a) b) c)*:

22′)
$$\boxed{\begin{aligned} &a)\ \operatorname{Sin}\frac{a}{k} : \operatorname{Sin}\frac{b}{k} : \operatorname{Sin}\frac{c}{k} = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma \\ &b)\ \operatorname{Cos}\frac{a}{k} = \operatorname{Cos}\frac{b}{k}\operatorname{Cos}\frac{c}{k} - \operatorname{Sin}\frac{b}{k}\operatorname{Sin}\frac{c}{k}\cos\alpha \\ &c)\ \cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\operatorname{Cos}\frac{a}{k} \end{aligned}}$$

a ze vzorců pro pravoúhlý sférický trojúhelník vzorce pro pravoúhlý trojúhelník v rovině hyperbolické

---

[11]) Sférickým poloměrem kružnice na kouli nazýváme obloukovou vzdálenost jejího sférického středu (pólu) od bodů obvodu. Ježto kružnice má dva sférické středy (póly), má i dva sférické poloměry, které dohromady dávají poloviční obvod hlavní kružnice na kouli.

23′) $$\boxed{\begin{aligned} &a)\ \operatorname{Cos}\frac{c}{k} = \operatorname{Cos}\frac{a}{k}\operatorname{Cos}\frac{b}{k}\\ &b)\ \operatorname{Sin}\frac{b}{k} = \sin\beta\operatorname{Sin}\frac{c}{k}\\ &b')\ \operatorname{Sin}\frac{a}{k} = \sin\alpha\operatorname{Sin}\frac{c}{k}\\ &c)\quad \cos\beta = \sin\alpha\operatorname{Cos}\frac{b}{k}\\ &c')\quad \cos\alpha = \sin\beta\operatorname{Cos}\frac{a}{k}\end{aligned}}$$

Z rovnice 23′*c′)* získáme pro $\alpha = 0$

23′ *c″*) $$\sin\beta = \frac{1}{\operatorname{Cos}\frac{a}{k}}.$$

Tento vzorec není nám neznámý, neboť vyjadřuje t. zv. úhel rovnoběžnosti (IV, 7, 11). Touto rovnicí jest každé délce a přiřazen úhel $\Pi(a) = \beta$. V tomto označení jest hoření vzorec ekvivalentní se vzorci

23″) $$a)\ \operatorname{Tg}\frac{a}{k} = \cos\Pi(a),\qquad c)\ \operatorname{Sin}\frac{a}{k} = \operatorname{cotg}\Pi(a),$$
$$b)\ \operatorname{Cos}\frac{a}{k} = \frac{1}{\sin\Pi(a)},\qquad d)\ \operatorname{Cotg}\frac{a}{k} = \frac{1}{\cos\Pi(a)}.$$

Použitím jich získáme z 22′*b)*

$$\frac{1}{\sin\Pi(a)} = \frac{1}{\sin\Pi(b)\sin\Pi(c)} - \frac{\cos\alpha}{tg\,\Pi(b)\ tg\,\Pi(c)}$$

nebo

$$\boxed{\cos\alpha\cos\Pi(b)\cos\Pi(c) + \frac{\sin\Pi(b)\sin\Pi(c)}{\sin\Pi(a)} = 1}$$

Toto jest základní rovnice, kterou odvodil *Lobačevský* ve své „Géometrie imaginaire“.

Rozveďme v rovnicích 23′ *a) b′) Cos* a *Sin* v řadu. Získáme tak

$$1 + \frac{(c:k)^2}{2!} + \frac{(c:k)^4}{4!} + \ldots = \left(1 + \frac{(a:k)^2}{2!} + \ldots\right)\left(1 + \frac{(b:k)^2}{2!} + \ldots\right) =$$
$$= 1 + \frac{(a:k)^2}{2!} + \frac{(b:k)^2}{2!} + \ldots$$

$$\frac{(a:k)}{1} + \frac{(a:k)^3}{3!} + \ldots = \left(\frac{(c:k)}{1} + \frac{(c:k)^3}{3!} + \ldots\right)\sin\alpha$$

Když $\frac{a}{k} \to 0$, $\frac{b}{k} \to 0$, $\frac{c}{k} \to 0$, obdržíme v prvém přiblížení při zanedbání veličin nekonečně malých vyšších řádů

$$c^2 = a^2 + b^2,$$
$$a = c \sin \alpha.$$

To jsou však základní vzorce rovinné trigonometrie euklidovské. Podobně bychom odvodili další formule ze vzorců ostatních. Můžeme tedy říci:

V rozměrech dostatečně malých vzhledem ke k platí v prvém přiblížení na rovině hyperbolické geometrie euklidovská.

(Srovnej III, 5; IV, 6; V, 4.)

Z rovnice 22*d)* odvodíme dosazením $r = ki$ obsah trojúhelníka

$$P = -k^2 \nu.$$

Snadno dokážeme, že obsah trojúhelníka jest kladný tímto postupem: 1. ν je spojitou funkcí souřadnic stran trojúhelníka a pro třikráte asymptotický trojúhelník jest $\nu < 0$. 2. V hyperbolické rovině nemůže nikdy býti $\nu = 0$, neboť tato rovnice je (za předpokladů zde splněných) rovnocenná s pátým postulátem *Euklidovým*, který v hyperbolické rovině nikdy splněn není. (Srov. výklad tohoto postulátu v (I, 1) a větu o rovnoběžkách v (IV, 4).) 3. Z obou vět plyne, že nemůže $\nu > 0$ a tudíž musí

27) $$\boxed{-\nu = \pi - \alpha - \beta - \gamma > 0}.$$

Tedy skutečně

28) $$\boxed{P = k^2(\pi - \alpha - \beta - \gamma)}$$

je veličinou kladnou.

Tím jsme získali ihned dvě věty:

Součet úhlů v trojúhelníku jest menší než dva pravé.

Obsah trojúhelníka jest přímo úměrný sférickému defektu $\pi - \alpha - \beta - \gamma$ a tudíž maximální obsah trojúhelníka jest πk^2.

(Takový trojúhelník musí býti trojnásob asymptotický, t. j. $\alpha = \beta = \gamma = 0$.)[12])

Ježto podle vzorce 28) jest obsah trojúhelníka nezávislý na stranách, nemůžeme sestrojiti trojúhelníky o stejných úhlech a různých obsazích. To znamená, že není možno sestrojiti k danému trojúhelníku trojúhelník podobný. Tento výsledek jsme již odvodili obecně pro libovolný útvar z teorie kružnice a pohybu (V, 2, odst. 1). *Wallis*, chtěje dokázati V. postulát *Euklidův*, předpokládal existenci podobných trojúhelníků.

3. Kružnice. Oblouk kružnice můžeme odvoditi ze vzorce 25) dosazením $r = ki$. Smíme tak učiniti proto, ježto jsme dokázali, že kružnicím hyperbolické roviny odpovídají na kouli o poloměru $r = ki$ opět kružnice. Tímto způsobem získáme pro oblouk příslušný úhlu ω

25′) $$\boxed{S_\delta = \omega k \operatorname{Sin} \frac{\delta}{D}} \quad (D = 2k).$$

Z této rovnice můžeme odvoditi vzorec pro obvod cyklu. U cyklu je totiž po oběhnutí obvodu $\omega = 2\pi$ a proto obvod O_δ cyklu jest

29) $$\boxed{O_\delta = 2\pi k \operatorname{Sin} \frac{\delta}{D}}$$

Je-li kružnice aequidistantou k přímce, k níž patří (imaginární, viz V, 1, odst. 3, sub *c*) ‚poloměr' $\frac{{}^0\delta}{2}$, můžeme vzorec 25′) snadno přetvořiti. Nechť je $S_{{}^0\delta}$ délka na této přímce. Pak podle 25′) pro ni platí

$$S_{{}^0\delta} = \omega k \operatorname{Sin} \frac{{}^0\delta}{D}.$$

[12]) *Gauss* psal roku 1799 svému spolužáku *W. Bolyaiovi*: „Mann könne sich eine Geometrie konstruiren, für die das Parallelenaxiom nicht gültig sei. Wenn man jedoch annehme, dass es für den Dreiecksinhalt eine obere Grenze nicht gebe, so könne man die euklidische Geometrie beweisen. Anderenfalls käme man zu einer anderen Geometrie.“ („Bylo by možno sestrojiti geometrii, pro niž by neplatil axiom o rovnoběžkách. Ale za předpokladu, že neexistuje horní hranice pro obsah trojúhelníka, bylo by lze dokázati euklidovskou geometrii. Jinak dospělo by se k jiné geometrii.“ V, 2, odst. 1.)

Pro $\operatorname{Sin}\frac{{}^0\delta}{D}$ obdržíme však vzorce (IV, 2, 9*b*) $\operatorname{Sin}\frac{{}^0\delta}{D} = i$ $\left(\operatorname{Cos}\frac{{}^0\delta}{D} = 0\right)$,[13]) z čehož

$${}^0S_{{}^0\delta} = \omega k i.$$

Označme $\frac{l}{2} = \frac{{}^0\delta}{2} - \frac{\delta}{2}$ rozdíl ‚poloměrů' obecné aequidistanty a příslušné přímky. Pak pro oblouk aequidistanty platí podle 25')

$$S_\delta = \omega k \operatorname{Sin}\frac{{}^0\delta - l}{D} = \omega k\left[\operatorname{Sin}\frac{{}^0\delta}{D}\operatorname{Cos}\frac{l}{D} - \operatorname{Cos}\frac{{}^0\delta}{D}\operatorname{Sin}\frac{l}{D}\right] = \frac{S_{{}^0\delta}}{i}\, i \operatorname{Cos}\frac{l}{D}$$

a tudíž

$$\boxed{S_\delta = S_{{}^0\delta}\operatorname{Cos}\frac{l}{D}} \tag{30}$$

Pro $S_{{}^0\delta} \to \infty$ obdržíme oblouk, jehož délka roste nade všechny meze, jak je ve shodě s dřívějšími údaji o aequidistantě.

Abychom mohli vyjádřiti oblouk horocyklu, přetvoříme vzorec 25') zavedením délky tětivy T, příslušné oblouku S. T je třetí stranou trojúhelníka rovnoramenného, jehož druhé dvě strany $\frac{\delta}{2}$ svírají úhel ω. Obdržíme tudíž podle 22'*b*)

$$\operatorname{Cos}\frac{T}{k} = \operatorname{Cos}^2\frac{\delta}{D} - \operatorname{Sin}^2\frac{\delta}{D}\cos\omega = 1 + \operatorname{Sin}^2\frac{\delta}{D}(1 - \cos\omega).$$

Použitím vzorců

$$\operatorname{Cos}\frac{T}{k} - 1 = 2\operatorname{Sin}^2\frac{T}{2k} = 2\operatorname{Sin}^2\frac{T}{D}, \qquad 1 - \cos\omega = 2\sin^2\frac{\omega}{2}$$

získáme

$$\operatorname{Sin}\frac{T}{D} = \operatorname{Sin}\frac{\delta}{D}\sin\frac{\omega}{2}$$

nebo vzhledem k 25'),

$$S_\delta = \frac{\frac{\omega}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}}\, 2k \operatorname{Sin}\frac{T}{D}.$$

---

[13]) „Pól" této „přímky" je totiž právě od jejího libovolného „bodu" x ‚vzdálen' $\frac{{}^0\delta}{2}$, při čemž $f_{xs} = 0$, neboť „body" s a x jsou polárně sdruženy.

Zvolíme-li pevné T, pak se vzrůstajícím δ klesá ω. V limitním případě, jedná-li se o horocykl, pak $\delta \to \infty$, $\omega \to 0$ a

$$S_T = \lim_{\substack{\delta \to \infty \\ \omega \to 0}} S_\delta = \lim_{\omega \to 0} \frac{\frac{\omega}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} 2k \operatorname{Sin} \frac{T}{D} = 2k \operatorname{Sin} \frac{T}{D} \lim_{\omega \to 0} \frac{\frac{\omega}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}}.$$

Ježto však

$$\lim_{\omega \to 0} \frac{\frac{\omega}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} = 1,$$

je pro horocyklický oblouk S_T příslušný tětivě T,

31) $$\boxed{S_T = D \operatorname{Sin} \frac{T}{D}}.$$

Z tohoto vzorce je zřejmo, že **oblouk každého horocyklu, příslušný téže délce tětivy, je konstantní, nezávislý na horocyklu.**

Ze vzorce 29) odvodíme tak zvanou větu *Bolyaiovu:*

Obvody cyklů, jichž poloměry jsou rovny stranám trojúhelníka, jsou v poměru sinů protějších úhlů.

Důkaz této věty je snadný. Ze vzorce 22′a) plyne

$$\operatorname{Sin} \frac{2a}{D} : \operatorname{Sin} \frac{2b}{D} : \operatorname{Sin} \frac{2c}{D} = \pi D \operatorname{Sin} \frac{2a}{D} : \pi D \operatorname{Sin} \frac{2b}{D} : \pi D \operatorname{Sin} \frac{2c}{D} =$$
$$= O_{2a} : O_{2b} : O_{2c} = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma,$$

čímž je důkaz proveden.

Obsah kružnice obdržíme ze vzorce 26), kam opět dosadíme $r = ki$. Získáme tak

26′) $$\boxed{V_\delta = D^2 \pi \operatorname{Sin}^2 \frac{\delta}{2D}},$$

což je vzorec pro obsah cyklu. Zavedeme-li označení $\Pi\left(\frac{\delta}{4}\right)$ pro úhel, příslušný délce $\frac{\delta}{4}$, pak můžeme psáti vzhledem k 23″c) vzorec v této formě:

$$V_\delta = D^2 \pi \operatorname{cotg}^2 \Pi\left(\frac{\delta}{4}\right),$$

a specielně pro $\Pi\left(\frac{\delta}{4}\right) = 45^0$

$$V_\delta = D^2\pi = 4\pi k^2.$$

Mají-li dva trojnásob asymptotické trojúhelníky společnou jednu stranu, jest obsah čtyřnásob asymptotického čtyřúhelníka tak vzniklého právě $2\pi k^2$. Ježto dovedeme k danému úhlu rovnoběžnosti vždy sestrojiti příslušnou délku, umíme tedy nalézti kružnici, která má obsah rovný dvojnásobku obsahu čtyřnásob asymptotického čtyřúhelníka. Je tím v určitém smyslu rozřešena úloha kvadratury kruhu. *J. Bolyai* našel konstrukci, vedoucí ke kvadratuře kruhu o obecném poloměru v hyperbolické rovině. — Více se trigonometrií nebudeme zabývati a obrátíme se k úvahám diferenciálním.

Poznámka. Není bez zajímavosti vypočítati hodnoty uvedené ve vzorcích tohoto posledního odstavce pro případ, že rozměry měřených veličin jsou dostatečně malé vzhledem ke k. Obdržíme tak opět vzorce euklidovské geometrie pro kružnici v rovině, což přenechávám čtenáři.

§ 6. Úvahy diferenciální.[14])

1. Pomocné vzorce. V tomto paragrafu budeme se zabývati úvahami většinou diferenciálními a užijeme k tomu teorie ploch, známé z diferenciální geometrie. Proto nejdříve uvedeme některé potřebné vzorce z této teorie.

Čtverec diferenciálu vzdálenosti je v euklidovské rovině vyjádřen v pravoúhlých souřadnicích x, y výrazem $ds^2 = dx^2 + dy^2$. V křivočarých souřadnicích x_1, x_2 jest obecně

32) $$ds^2 = E dx_1^2 + 2 F dx_1 dx_2 + G dx_2^2, \quad EG - F^2 \neq 0,$$

kde E, F, G jsou funkcemi souřadnic x_1, x_2. V případě, že běží o rovinu euklidovskou, možno vždy jeden vzorec převésti ve druhý, při čemž dx, dy jsou exaktní diferenciály. Čtverec diferenciálu vzdálenosti dvou bodů na ploše, jejíž souřadnice (parametry) jsou x_1, x_2, je dán rovněž výrazem 32). Při tom však obecně není možno tuto formu převésti na součet čtverců (totálních) diferenciálů. O funkcích E, F, G předpokládáme, že splňují podmínky $EG - F^2 > 0$, $E \geqq 0$, $G \geqq 0$, kterým je ve všech případech, o nichž zde budeme

[14]) Tento paragraf není nezbytný pro pochopení celkové souvislosti.

jednati, vyhověno.[14a]) Výrazu $Edx_1^2 + 2\,Fdx_1\,dx_2 + Gdx_2^2$ říkáme někdy také „fundamentální" nebo „metrická" forma. Je-li tato forma dána, je dán i výraz pro úhel φ dvou směrů $\frac{dx_1}{dx_2}$, $\frac{\delta x_1}{\delta x_2}$ na ploše:

$$\cos\varphi = \frac{Edx_1\delta x_1 + F(dx_1\delta x_2 + \delta x_1 dx_2) + Gdx_2\delta x_2}{\sqrt{(Edx_1^2 + 2\,Fdx_1 dx_2 + Gdx_2^2)(E\delta x_1^2 + 2\,F\delta x_1\delta x_2 + G\delta x_2^2)}}.$$

Z toho vidíme, že dvě plochy, vztažené k týmž souřadnicím a mající koeficienty fundamentálních forem vázány relacemi

$$33)\qquad 'E = E\sigma(x_1, x_2),\qquad 'F = F\sigma(x_1, x_2),\qquad 'G = G\sigma(x_1, x_2),$$

jsou takovým způsobem na sebe zobrazitelné, že odpovídající směry na obou plochách svírají stejné úhly. Takovému zobrazení říkáme konformní.

Jiný způsob zobrazení, při němž nejen úhly odpovídajících směrů, ale i vzdálenosti odpovídajících bodů jsou stejné, nazývá se rozvinutí jedné plochy na druhou. Dvě plochy jsou na sebe rozvinutelné, když jejich fundamentální formy, vyjádřené týmiž souřadnicemi, jsou v odpovídajících bodech stejné. To je postačující a nutná podmínka rozvinutelnosti dvou ploch. Není tím však řečeno, že při stejné fundamentální formě můžeme rozvinutím jedné plochy na druhou tuto dokonale přikrýti. (Na příklad válec a rovina jsou na sebe rozvinutelné, ale pláštěm válce nikdy nemůžeme celou rovinu přikrýti.) Z ekvivalence fundamentálních forem nesmíme usuzovati na stejné vlastnosti na obou plochách v celém jejich oboru.

Podmínku rozvinutelnosti dvou ploch můžeme vyjádřiti ještě jinak. Na ploše existuje totiž funkce K, nazvaná *Gaussovou* mírou křivosti (též mírou křivosti, nebo jen křivostí), která se rozvinutím jedné plochy na druhou nemění. Tato funkce je dána vzorcem

$$34)\qquad K = \frac{1}{2\sqrt{EG-F^2}}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{F}{E\sqrt{EG-F^2}}\frac{\partial E}{\partial x_2} - \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\frac{\partial G}{\partial x_1}\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{2}{\sqrt{EG-F^2}}\frac{\partial F}{\partial x_1} - \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\frac{\partial E}{\partial x_2} - \frac{F}{E\sqrt{EG-F^2}}\frac{\partial E}{\partial x_1}\right]\right\}.$$

[14a]) Mlčky předpokládáme, že E, F, G, jejich prvé a druhé parciální derivace dle parametrů jsou pro zkoumaný obor hodnot x_1, x_2 konečné a spojité.

Dá se dokázati věta: „Jsou-li dvě plochy na sebe rozvinutelné, pak v odpovídajících bodech mají stejnou *Gaussovu* míru křivosti.“

Zvláštní zmínky zasluhuje případ, kdy tato funkce K je konstantní. Plochy, u nichž $K =$ konst. není funkcí místa, nazývají se plochy konstantní míry křivosti. Dvě plochy stejné konstantní míry křivosti jsou vždy na sebe rozvinutelné.

Geometrie na obou plochách na sebe rozvinutelných je (alespoň v určitém oboru) stejná.

2. Různé formy diferenciálu vzdálenosti v rovině hyperbolické. Nyní stanovíme diferenciál vzdálenosti dvou nekonečně blízkých bodů roviny hyperbolické. K tomu použijeme vzorce (IV, 2, 9). Ačkoli tyto vzorce jsou odvozeny užitím souřadnic trimetrických homogenních, můžeme je vždy upotřebit i pro souřadnice nehomogenní $\frac{x_1}{x_3}$, $\frac{x_2}{x_3}$. Budoucně budeme psáti v tomto paragrafu vždy x_1 místo $\frac{x_1}{x_3}$ a x_2 místo $\frac{x_2}{x_3}$, kde x_1 a x_2 nám budou značiti souřadnice nehomogenní. Nechť tedy absolutní kuželosečka v těchto souřadnicích je dána rovnicí

35) $$c^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 = 0\,, \qquad c = \text{konst.}$$ [14b])

a vzdálenost dvou bodů $m(x, y)$ vzorcem (IV, 2, 9b)

$$m(xy) = k\,i \arcsin \sqrt{\frac{(c^2 - x_1^2 - x_2^2)(c^2 - y_1^2 - y_2^2) - (c^2 - x_1 y_1 - x_2 y_2)^2}{(c^2 - x_1^2 - x_2^2)(c^2 - y_1^2 - y_2^2)}}\,.$$

Jsou-li body x a y nekonečně blízké, můžeme psáti pro jejich souřadnice

$$y_j = x_j + dx_j + \frac{1}{2} d^2 x_j + \ldots \qquad (j = 1, 2).$$

Tyto souřadnice dosadíme do předcházejícího vzorce. Při tom arcsin rozvineme v řadu (VIII, I, 5). Omezíme-li se na veličiny nekonečně malé prvého řádu, získáme po delším počtu

$$dm = k \sqrt{\frac{c^2(dx_1^2 + dx_2^2) - (x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1)^2}{(c^2 - x_1^2 - x_2^2)^2}}\,.$$

[14b]) Tato konstanta není v žádné souvislosti se stejně označenou konstantou v (IV, 2, 7).

Je-li $c = k$, vzorec se zjednoduší na

$$
\boxed{dm^2 = \frac{(dx_1^2 + dx_2^2) - \frac{1}{k^2}(x_1 dx_2 - x_2 dx_1)^2}{\left(1 - \frac{x_1^2 + x_2^2}{k^2}\right)^2}} \tag{36}
$$

a pro $c = 1$

$$
dm^2 = k^2 \frac{dx_1^2(1 - x_2^2) + 2x_1 x_2 dx_1 dx_2 + dx_2^2(1 - x_1^2)}{(1 - x_1^2 - x_2^2)^2} \, . \tag{36'}
$$

Poslední tvar fundamentální formy je historicky zajímavý. Koncem šedesátých let minulého století zabýval se *Beltrami* (1835—1900) problémem zobraziti plochu na rovinu tak, aby geodetickým čarám na ploše odpovídaly přímky v rovině. Dospěl k výsledku, že plochy, které takovým způsobem je možno na rovinu zobraziti, mají fundamentální formu ve tvaru 36'). Podle toho, co jsme uvedli o rozvinutelnosti dvou ploch, znamená *Beltramiho* výsledek, že geometrie na oněch plochách je (alespoň v omezeném oboru) stejná s geometrií hyperbolické roviny. Znázornění plochy na rovinu podařilo se mu tak, že interpretoval x_1, x_2 jako pravoúhlé souřadnice v rovině, a tak zkoumaná plocha zobrazila se u v n i t ř určité kružnice ($x_1^2 + x_2^2 = 1$). Body na obvodu této kružnice zobrazovaly nevlastní body zkoumané plochy a přímky protínající se na obvodu této kružnice zobrazovaly (ovšem jen jejich část uvnitř kružnice) „rovnoběžné“ čáry geodetické na zkoumané ploše. Touto interpretací dospěl *Beltrami* k pojmu hyberbolické roviny. Je důležito upozorniti, že *Beltrami* neznal pojmu hyperbolické roviny tak, jak jsme jej odvodili, ale dospěl k němu řešením uvedeného problému. Tím však byla dokázána logická nespornost hyperbolické geometrie v rovině (která v našem podání je samozřejmá), neboť bylo možno ji nyní interpretovati jako geometrii na plochách, které mají fundamentální formu 36'). Zásluha *Beltramiho* spočívá v tom, že na tento fakt upozornil.

Interpretujme x_1, x_2 jako pravoúhlé souřadnice v rovině a položme $c = k$.

„Absolutní kuželosečka“ je tedy kružnice o rovnici

$$
k^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 = 0 \, . \tag{37}
$$

Můžeme ji považovati za rovník koule, jejíž rovnice v nehomogenních, prostorových pravoúhlých souřadnicích ξ_1, ξ_2, ξ_3 je
$$
k^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 \, .
$$

Orthogonální projekcí této koule na rovinu rovníku získáme vztahy

$$\xi_1 = x_1, \qquad \xi_2 = x_2, \qquad \xi_3 = \pm\sqrt{k^2 - x_1^2 - x_2^2}.$$

Fundamentální forma koule je

$$38)\quad ds^2 = d\xi_1^2 + d\xi_2^2 + d\xi_3^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \frac{(x_1\,dx_1 + x_2\,dx_2)^2}{k^2 - x_1^2 - x_2^2} =$$

$$= \frac{dx_1^2 + dx_2^2 - \frac{1}{k^2}(x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1)^2}{1 - \frac{x_1^2 + x_2^2}{k^2}}.$$

Porovnáním 38) a 36) obdržíme

$$ds^2 = dm^2\left(1 - \frac{x_1^2 + x_2^2}{k^2}\right) = dm^2\,\frac{\xi_3^2}{k^2}.$$

Uvažujeme-li jen dolení polovinu koule, můžeme psáti

$$dm = -\frac{k}{\xi_3}\,ds.$$

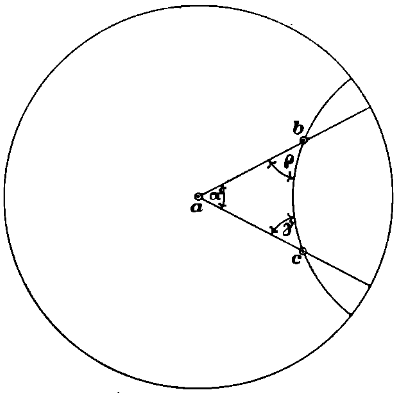
Proto můžeme říci:

Promítneme-li polokouli orthogonálně na rovinu rovníku, pak geometrie v hyperbolické rovině tak vzniklé je konformní s geometrií na oné polokouli.

Toto zobrazení je z toho důvodu pohodlné, ježto všechny věty, týkající se úhlů, jsou snadno názoru přístupné. Na příklad trojnásob asymptotický trojúhelník roviny hyperbolické jeví se jako trojúhelník na kouli, omezený třemi kružnicemi, jichž roviny, kolmé na rovník, protínají se v tečnách koule. Tento trojúhelník na kouli má skutečně všechny tři úhly rovny 0.

3. O postulátech Euklidových. Promítneme-li kouli z pólu na rovinu rovníku, pak zobrazení toto jest opět konformní. Dá se snadno dokázati, že všechny kružnice na kouli se touto projekcí zobrazí v rovině zase jako kružnice. Uvažujeme-li speciálně kouli, o níž byla svrchu řeč, vidíme, že můžeme přímky hyperbolické roviny znázorniti jako oblouky kružnic orthogonálních na obraz absolutní kružnice (rovníku). Neboť přímkám v prvém druhu projekce odpovídaly na kouli kružnice, které kolmo protínaly rovník. Druhou projekcí koule na rovinu se tyto kružnice promítají opět jako kružnice kolmé na rovník. Toto zobrazení hyper-

bolické roviny je často velice výhodné. Tak je na příklad možno velmi snadno dokázati, že součet úhlů v trojúhelníku je menší než 180°. Na obr. 4 zvolen takový „trojúhelník", že jeden jeho vrchol se zobrazuje do středu „absolutní kružnice". Tento trojúhelník je zcela obecný, ale jeho zobrazení má tu výhodu, že „strany" ab, ac se jeví jako přímky. Třetí „strana" jest ovšem obloukem kružnice orthogonální k „abs. kružnici". Tato „strana" bc musí vždy býti obrácena konvexně k a a tedy součet $\alpha + \beta + \gamma$ je jistě menší než 180°.



Obr. 4.

Tento způsob zobrazení je i s jiné stránky velice zajímavý. Jeho užitím lze totiž konstruktivně zbudovati geometrii, která vyhovuje čtyřem prvým postulátům *Euklidovým.*

Abychom alespoň *zhruba* naznačili tuto cestu, shodněme se na této terminologii:

‚Nevlastní bod' = reálný bod nějaké kružnice L. ‚Nevlastní bod' nechť je nedostupný.

‚Bod' = reálný bod uvnitř kružnice L.

‚Přímka' = oblouk orthogonální kružnice k L, a to jen oblouk uvnitř L, resp. průměr kružnice L (uvnitř L).

‚Úhel' = úhel euklidovský.

‚Kružnice' = orthogonální trajektorie lineárního svazku ‚přímek', a to jen její část uvnitř L.

Ježto jsou tři druhy svazku ‚přímek', jsou i tři druhy ‚kružnic'.

Za těchto předpokladů lze dokázati, že v této geometrii platí prvé čtyři postuláty *Euklidovy*. Tak prvý postulát

„Dva ‚body' lze vždy spojiti (jedinou) ‚přímkou'" je ekvivalentní s předposlední větou v (VIII, 8). Druhý postulát

„Přímou čáru lze vždy (v ‚bodě' vlastním) prodloužiti" je postulátem konstruktivním a jako takový splněn i zde, což plyne z elementární konstrukce kružnice. Třetí postulát

„Z libovolného středu a poloměru lze vždy sestrojiti ‚kružnici'" je ekvivalentní s poslední větou v (VIII, 8). („Středem kružnice' je zde jeden ze společných bodů svazku L'. Je-li střed ‚bodem', získáme svazek ‚různoběžek', je-li ‚bodem nevlastním', získáme svazek ‚rovnoběžek' — které ostatně budeme ihned přesně definovati — a konečně jsou-li ony průsečíky imaginárné, pak získáme svazek ‚mimoběžek', které nemají společného ‚bodu', ani ‚bodu nevlastního'. Podle toho rozeznáváme i tři druhy ‚kružnic'.) Čtvrtý postulát

„Všechny pravé ‚úhly' jsou ekvivalentní" je splněn vždy, je-li splněn originální postulát *Euklidův*, neboť v obou geometriích je úhel stejně definován. Pátý postulát však splněn není. To je zřejmo již z toho, že vždy mohu k ‚přímce' *ab* (obr. 4) sestrojiti takovou, která s ní svírá ‚úhel' $= 0$ a neprotíná ji v ‚bodě', ale součet ‚úhlů' tvořených touto ‚přímkou', ‚přímkou' *ab* a ‚příčkou' *ac* je menší než 180^0.

Tento postulát můžeme nahraditi jiným. K tomu cíli zavedeme pojem ‚rovnoběžek' větou: „Dvě ‚rovnoběžky' jsou ‚přímky' v rovině, které (prodlouženy) protínají se **jen** v ‚bodě nevlastním'. (Definice 23 u *Euklida*!)

Podle této definice

lze ‚bodem' mimo ‚přímku' vésti k ní dvě ‚rovnoběžky'.

Jejich konstrukce je zřejmá, a proto se o ní nezmiňujeme. Právě uvedenou větu můžeme považovati za pátý postulát naší geometrie, kterým jsme nahradili pátý postulát *Euklidův*. Z názoru je zřejmo, že ‚rovnoběžky' svírají ‚úhel' $= 0$.

Doporučuji čtenáři, aby si provedl některé základní konstrukce v této geometrii, čímž se mu naše úvahy o hyperbolické geometrii značně ozřejmí.

Poznámka: Těchto pět postulátů ovšem nestačí k vybudování hyperbolické geometrie. Neuváděl jsem ostatních z toho důvodu, že jsem v tomto odstavci chtěl pouze naznačiti, jak možno *Euklidovy* postuláty aplikovati a nesledoval jsem účel vybudovati geometrii **axiomaticky**.

4. Jiné tvary fundamentální formy.

Fundamentální forma 36) je příliš složitá. Proto se pokusíme vhodnou volbou jiných souřadnic u_1, u_2 ji převésti na jednodušší tvar. Jako souřadnici u_1 pohyblivého bodu na ploše zvolíme hyperbolickou vzdálenost od bodu $\underset{\circ}{u}$ ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$) a za souřadnici u_2 zvolíme hyperbolický úhel přímky $u\underset{\circ}{u}$ s přímkou $x_1 = 0$. Tyto souřadnice jsou tedy v určitém vztahu k cyklům hyperbolické roviny. Po delším počtu, který zde opomíjím, obdržíme

$$39a) \qquad dm^2 = du_1^2 + k^2 \operatorname{Sin}^2 \left(\frac{u_1}{k}\right) du_2^2.$$

Kdybychom při zavedení nových souřadnic brali místo cyklů v úvahu aequidistanty, resp. horocykly, obdrželi bychom podobně v prvém případě

$$39b) \qquad dm^2 = du^2_1 + \operatorname{Cos}^2 \left(\frac{u_1}{k}\right) du^2_2$$

a v druhém případě

$$39c) \qquad dm^2 = du_1^2 + e^{\frac{2u_1}{k}} du_2^2.$$

V prvém případě jest u_1 délkou na poloměru aequidistanty, vyťatou aequidistantou a příslušnou přímkou $x_1 = 0$ (jež patří do svazku aequidistant) a u_2 jest vzdáleností průsečíku onoho poloměru s přímkou od bodu $\underset{\circ}{u}$ ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$). V druhém případě jest $u_2 =$ konst. rovnicí přímky kolmé na horocykl $u_1 =$ konst. Těmto třem formám se také někdy říká eliptická, hyperbolická a parabolická forma.

Vypočítejme míru křivosti jedné z těchto forem! (Všechny tři formy musí vésti k stejné hodnotě míry křivosti ve stejných bodech, neboť představují touž hyperbolickou rovinu.)

Zvolme třeba formu 39c). Tu jest

$$E = 1,\ F = 0,\ G = e^{\frac{2u_1}{k}},\ \sqrt{EG - F^2} = e^{\frac{u_1}{k}}$$

a tudíž podle 34)

$$K = \frac{e^{-\frac{u_1}{k}}}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial u_1} \left[-e^{-\frac{u_1}{k}} \frac{2}{k} e^{\frac{2u_1}{k}} \right] \right\} = -\frac{e^{-\frac{u_1}{k}}}{k} \frac{\partial}{\partial u_1} e^{\frac{u_1}{k}} = -\frac{1}{k^2}.$$

Ježto k je číslo reálné, je $-k^2$ vždy záporné. Podle toho, co jsme uvedli v prvém odstavci tohoto paragrafu, můžeme říci:

H y p e r b o l i c k á r o v i n a j e s t r o z v i n u t e l n á n a p l o c h y k o n s t a n t n í z á p o r n é m í r y k ř i v o s t i.

Říkáme též, že hyperbolická rovina má zápornou konstantní míru křivosti $-\frac{1}{k^2}$.[15])

Jest tedy geometrie hyperbolické roviny v omezeném oboru identická s geometrií na plochách konstantní záporné míry křivosti. Tento výsledek, na nějž upozornil *Beltrami*, mohli jsme již odvoditi ze vzorce 36).

5. *Möbiusova* k r u h o v á a f i n i t a. Zaveďme nové souřadnice x, y rovnicemi

$$40) \qquad a)\ x = u_2, \qquad b)\ y = ke^{-\frac{u_1}{k}}$$

a stanovme, jak se změní forma 39c)! Snadným počtem obdržíme

$$41) \qquad dm^2 = \frac{k^2}{y^2}(dx^2 + dy^2).$$

Nyní interpretujme x, y jako pravoúhlé souřadnice cartézské v rovině! Souřadné ose X, t. j. $y = 0$, odpovídá čára, jejíž všechny body jsou od určitého horocyklu ($u_1 = 0$) nekonečně vzdáleny. Osa X představuje tedy absolutní kuželosečku. V rovnici 40b) nemůže býti pro žádné u_1 souřadnice y záporná. Rovina hyperbolická se tedy zobrazuje jen na jednu polovinu euklidovské roviny (nad osou X). Ježto pro euklidovský diferenciál vzdálenosti platí věta Pythagorova

$$ds^2 = dx^2 + dy^2,$$

je toto zobrazení hyperbolické roviny k o n f o r m n í s geometrií na jejím euklidovském modelu.

O tomto zobrazení možno dokázati další zajímavé vlastnosti. Tak na příklad hyperbolické přímky zobrazují se jako půlkružnice, jejichž středy jsou na ose X (a tudíž i jako přímky k ní kolmé).[16]) Kružnice hyperbolické roviny jeví se

[15]) *Hilbert* dokázal, že neexistuje regulární plocha záporné konstantní míry křivosti, na níž by v plném rozsahu (v celém jejím oboru) platila geometrie hyperbolická.

[16]) Snadno se to dokáže, uvažujeme-li integrál

$$\int_{y_0}^{y_1} dm = \int_{y_0}^{y_1} \frac{k}{y}\sqrt{dx^2 + dy^2},$$

který pro přímku musí býti extremní hodnoty.

na modelu zase jako kružnice a to: cykly jako kružnice, které osu X neprotínají, aequidistanty jako kružnice ji protínající a horocykly jako kružnice jí se dotýkající, případně jako přímky s ní rovnoběžné.[17])

Pohyb v tomto zobrazení je dán rovnicí

$$'z = \frac{a_1 z + a_3}{a_2 z + a_4}, \quad a_1 a_4 - a_2 a_3 = 1,$$

kde z, $'z$ jsou komplexní proměnné tvaru $z = x + iy$, $'z = 'x + i'y$ a koeficienty a reálné. Tento případ je speciálním případem t. zv. kruhové afinity *Möbiusovy*, která je vyjádřena touž rovnicí, jenom že koeficienty a jsou komplexní. Je tedy každý pohyb *Möbiusovou* kruhovou afinitou, ale každá taková afinita není ještě pohybem.

Tímto způsobem zobrazení se nebudeme zabývati, ježto bychom neobdrželi již poznatků podstatně nových. Mohli jsme však toto zobrazení voliti zcela dobře jako východisko úvah. Neučinili jsme tak jen proto, že cesta, kterou jsme se brali, byť byla i delší, nevyžadovala zvláštních odborných znalostí.

Jako jediný příklad aplikace tohoto zobrazení stůjž zde výpočet obsahu obecného trojúhelníka abc. Zvolíme jeho obraz tak, že alespoň jedna jeho strana (ac) se zobrazuje jako přímka (obr. 5). Strany ab, bc zobrazují se jako oblouky kružnic, které mají střed na ose X. Vypočteme nejdříve obsah trojúhelníka $ab'c'$, dvojnásob asymptotického. Obsah nějaké plochy, omezené jistou křivkou C, je dán integrálem

$$P = \iint_C \sqrt{EG - F^2}\, dx_1\, dx_2.$$

Aplikací tohoto vzorce na obsah trojúhelníka $ab'c'$ obdržíme vzhledem ke 41)

$$P_{ab'c'} = k^2 \int_{x_{c'}}^{r} dx \int_{y}^{\infty} \frac{dy}{y^2} = k^2 \int_{x_{c'}}^{r} \frac{dx}{y}.$$

Zavedeme-li polární souřadnice ψ, r rovnicemi

$$x = r\cos\psi, \qquad y = r\sin\psi,$$

[17]) Poslední věta plyne přímo z transformační rovnice 40*b*). Pro kružnici vůbec se to dá dokázati tak, že hledáme orthogonální trajektorie „přímek“, procházejících jedním „bodem“ (to jest kružnic, jichž středy jsou na ose X a které procházejí jedním bodem).

můžeme poslední integrál přepsati

$$P_{ab'c'} = -k^2 \int_{\varphi}^{0} d\psi = k^2\varphi = k^2(\pi - \alpha).$$

Podobně obdržíme pro trojúhelník dvojnásob asymptotický $bb'c'$ obsah

$$P_{bb'c'} = k^2(\pi - \beta').$$

Obsah trojúhelníka jednou asymptotického abc' je roven rozdílu obsahů obou trojúhelníků

$$P_{abc'} = P_{ab'c'} - P_{bb'c'} = k^2(\beta' - \alpha).$$

Stejným způsobem obdržíme obsah trojúhelníka jednou asymptotického cbc'

$$P_{cbc'} = k^2(\beta'' - \gamma').$$

Obsah trojúhelníka abc je roven rozdílu obsahů trojúhelníků abc', cbc'

$$P_{abc} = P_{abc'} - P_{cbc'} = k^2(\beta' - \beta'' + \gamma' - \alpha).$$

Ježto však

$$\beta' - \beta'' = -\beta, \qquad \gamma' = \pi - \gamma,$$

můžeme pro obsah trojúhelníka abc psáti

$$P_{abc} = k^2(\pi - \alpha - \beta - \gamma).$$

Obdrželi jsme tak již známou formuli. (Viz rovnici 28.) V třetím odstavci tohoto paragrafu jsme dokázali, že součet úhlů v trojúhelníku je menší než dva pravé. Je tedy $\pi - \alpha - \beta - \gamma > 0$ a tedy i $P_{abc} > 0$, jak jsme též dokázali při odvození rovnice 28).

Podobným způsobem stanovíme obsah n-úhelníka. Rozdělíme jej na n trojúhelníků o společném vrcholu uvnitř n-úhelníka. Obsah takového trojúhelníka budiž $k^2(\pi - \alpha_j - \beta_j - \gamma_j)$ $(j = 1, \dots n)$. Obsah zkoumaného n-úhelníka je roven součtu obsahů těchto n trojúhelníků. Označíme-li jej $P_{(n)}$, získáme

$$P_{(n)} = k^2 \sum_1^n{}^j (\pi - \alpha_j - \beta_j - \gamma_j) = k^2 [n\pi - \sum_1^n{}^j (\beta_j + \gamma_j + \alpha_j)].$$

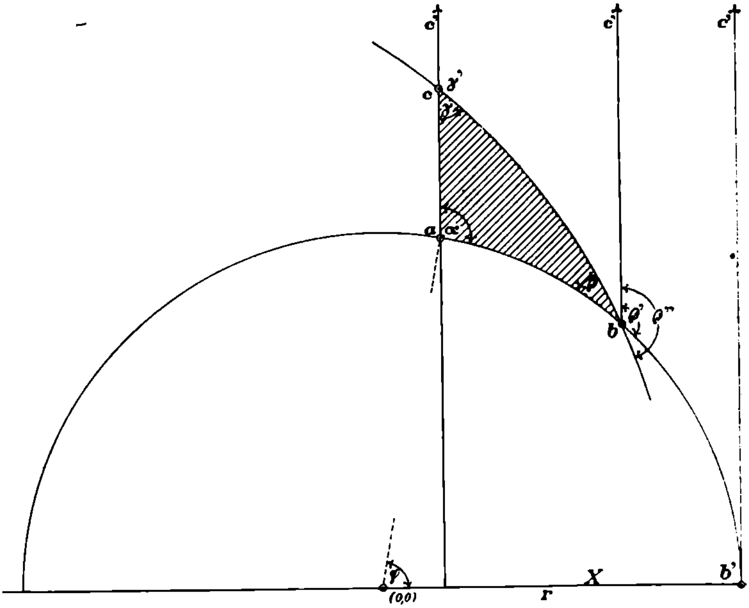
Jsou-li α_j úhly středové u společného vrcholu, je $\sum_1^n{}^j \alpha_j = 2\pi$ a tudíž

$$P_{(n)} = k^2[n\pi - 2\pi - \sum_1^n{}^j (\beta_j + \gamma_j)] = k^2[\pi(n-2) - \sum_1^n{}^j (\beta_j + \gamma_j)].$$

Speciálně pro n-úhelník n-násob asymptotický jest obsah $P_{(n)}$

$$P_{(n)} = \pi k^2 (n-2).$$

Z tohoto vzorce však nenásleduje, že vždy možno dva takové n-úhelníky převésti pohybem do sebe (jako je tomu u trojúhelníků trojnásob asymptotických), neboť grupa transformací pohybových je trojmocná. Můžeme tedy nejvýše převésti tři vrcholy jednoho do tří vrcholů druhého n-úhelníka. Tím svoje úvahy skončíme a obrátíme se ke studiu geometrie eliptické.



Obr. 5.

Poznámka. *Poincaré* uvažoval hyperbolickou rovinu, která je vně „absolutní kuželosečky". Takové geometrie mohou býti různé, podle toho, jak zvolíme konstanty k (pro vzdálenost bodů) a k' (pro úhel přímek). Zajímavé je, že v nich obecně není volnost pohybu. Nebudeme se jimi zabývati, ježto jsou příliš speciální, byť i některé skýtaly praktický užitek při studiu speciální teorie relativity.

Kapitola VI.

ELIPTICKÁ ROVINA.

§ 1. Formulace problému.

V této kapitole zmíníme se stručně o geometrii eliptické v rovině, krátce o eliptické rovině. Ježto základní úvahy, jimiž dospějeme k nejdůležitějším vzorcům, neliší se podstatně od úvah obdobných, provedených při studiu roviny hyperbolické, nebudeme je opakovati, nýbrž jen stručně na ně poukážeme, kde toho bude potřeba vyžadovati. Úkol geometrie eliptické v rovině jsme již definovali v kap. II, 4. Uvedeme jej nyní v přesné formě:

Eliptická geometrie v rovině zabývá se studiem invariantů vzhledem ke trojmocné grupě projektivních transformací

$$
\begin{aligned}
\varrho' x_1 &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 \\
\varrho' x_2 &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 \\
\varrho' x_3 &= a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3
\end{aligned}
\qquad (a_{ij} \text{ konst. reálné } ij = 1, 2, 3), \tag{1}
$$

které reprodukují jednoduchou, imaginární kuželosečku

$$f_{\xi\xi} \equiv g_{11}\xi_1^2 + g_{22}\xi_2^2 + g_{33}\xi_3^2 + 2g_{12}\xi_1\xi_2 + 2g_{23}\xi_2\xi_3 + 2g_{13}\xi_1\xi_3 = 0 \tag{2}$$

$$(g_{ij} = g_{ji} \text{ reálné konst.}).$$

Této kuželosečce budeme opět říkati absolutní kuželosečka. Podobným způsobem mohli bychom definovati úkol geometrie eliptické vzhledem ke studiu přímek:

Eliptická geometrie v rovině zabývá se též studiem invariantů vzhledem ke trojmocné grupě projektivních transformací

$$
\begin{aligned}
\varrho' X_1 &= A_{11} X_1 + A_{12} X_2 + A_{13} X_3 \\
\varrho' X_2 &= A_{21} X_1 + A_{22} X_2 + A_{23} X_3 \\
\varrho' X_3 &= A_{31} X_1 + A_{32} X_2 + A_{33} X_3 ,
\end{aligned}
\tag{1'}
$$

které reprodukují kuželosečku 2), jejíž přímková rovnice jest

$$2') \quad F_{\Xi\Xi} \equiv \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & \Xi_1 \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & \Xi_2 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & \Xi_3 \\ \Xi_1 & \Xi_2 & \Xi_3 & 0 \end{vmatrix} \equiv G_{11}\Xi_1^2 + G_{22}\Xi_2^2 + G_{33}\Xi_3^2 + 2G_{12}\Xi_1\Xi_2 +$$

$$+ 2G_{13}\Xi_1\Xi_3 + 2G_{23}\Xi_2\Xi_3 = 0.$$

V rovnicích 1') mají koeficienty A_{ij} a přímkové souřadnice X_j tentýž význam, jako v kapitole (IV, 1, 1'). Tak jako dříve v geometrii hyperbolické, budeme i nyní činiti rozdíl mezi útvary v eliptické rovině a mezi jejich euklidovskými obrazy na euklidovském modelu roviny eliptické. Je tedy na příklad rovnice 2) rovnicí „absolutní kuželosečky“, souřadnice $x_1 : x_2 : x_3$ souřadnicemi „bodu“ atd.

§ 2. Základní úvahy.

1. Základní vzorce. Z definice geometrie eliptické jest zřejmo, že ty pojmy, které jsou definovány bez ohledu na reálnost absolutní kuželosečky v geometrii hyperbolické, můžeme přenésti i do geometrie eliptické. To platí zejména o definici vzdálenosti dvou bodů (IV, 2, 7) a úhlu dvou přímek (IV, 2, 8). Pro tyto pojmy obdrželi jsme na udaných místech rovnice

$$3) \qquad m(xy) = \frac{c}{2}\log \lambda = \frac{c}{2}\log \frac{f_{xy} + \sqrt{f_{xy}^2 - f_{xx} f_{yy}}}{f_{xy} - \sqrt{f_{xy}^2 - f_{xx} f_{yy}}},$$

$$4) \qquad M(XY) = \frac{C}{2}\log \Lambda = \frac{C}{2}\log \frac{F_{XY} + \sqrt{F_{XY}^2 - F_{XX} F_{YY}}}{F_{XY} - \sqrt{F_{XY}^2 - F_{XX} F_{YY}}}.$$

Jde nyní o to, stanoviti vhodným způsobem konstanty c, resp. C. Ty určíme z požadavků, které klademe na vzdálenost, resp. na úhel. O vzdálenosti předpokládáme, že

pro dva různé body reálné jest vždy reálná, od nuly různá.

Ježto absolutní body jsou vždy imaginárně sdružené, jest možno $\log \lambda$ psáti vždy ve formě ryze imaginární (VIII, 2, 15). Zavedeme-li tedy označení $c = k + k'i$, jest

$$m(xy) = \frac{k + k'i}{2}\log \lambda = \frac{k + k'i}{2}\, i\,(\varphi + 2\varkappa\pi) = \frac{ki - k'}{2}(\varphi + 2\varkappa\pi).$$

Má-li býti hořejšímu požadavku vyhověno, je nutno voliti $k = 0$, t. j.

$$5)\qquad \boxed{m(xy) = \frac{k'i}{2} \log \frac{f_{xy} + \sqrt{f_{xy}^2 - f_{xx} f_{yy}}}{f_{xy} - \sqrt{f_{xy}^2 - f_{xx} f_{yy}}}}$$

V rovině eliptické měříme tedy vzdálenosti elipticky.

Konstantu C stanovíme velmi snadno. Víme, že „tečny" z průsečíku „přímek" X, Y k „absolutní kuželosečce" jsou vždy imaginárně sdružené, zcela tak, jak tomu bylo v rovině hyperbolické. Musíme proto konstantu C voliti tak, jako v rovině hyperbolické, má-li úhel dvou různých přímek reálných býti vždy reálný. Žádáme-li kromě toho, aby úhrnná hodnota úhlu byla jako v rovině euklidovské a hyperbolické právě π, musíme zvoliti $C = i$, t. j.

$$6)\qquad \boxed{M(XY) = \frac{i}{2} \log \frac{F_{XY} + \sqrt{F_{XY}^2 - F_{XX} F_{YY}}}{F_{XY} - \sqrt{F_{XY}^2 - F_{XX} F_{YY}}}}$$

V rovině eliptické měříme úhly také elipticky.

Jest dobře si uvědomiti rozdíl měření v rovině hyperbolické a eliptické. Kdežto v rovině hyperbolické měříme vzdálenosti hyperbolicky a úhly elipticky, v rovině eliptické měříme vzdálenosti i úhly elipticky. Jest nasnadě očekávati, že v této rovině bude duálně si odpovídati vzdálenost dvou bodů a úhel dvou přímek. Později dokážeme, že tomu tak vskutku jest (VI, 5).

Z rovnic 5) a 6) odvodíme snadno vzorce:

$$7)\qquad m(xy) = k' \arccos \frac{f_{xy}}{\sqrt{f_{xx} f_{yy}}} = k' \arcsin \sqrt{\frac{f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2}{f_{xx} f_{yy}}}$$

$$8)\qquad M(XY) = \arccos \frac{F_{XY}}{\sqrt{F_{XX} F_{YY}}} = \arcsin \sqrt{\frac{F_{XX} F_{YY} - F_{XY}^2}{F_{XX} F_{YY}}},$$

které později budeme potřebovati.

2. Důsledky základních vzorců. Tak jako dříve, budeme i nyní nazývati úhlem, resp. vzdáleností jen hlavní

hodnoty výrazů 6) resp. 5). Pojednáme nejdříve o charakteristických vlastnostech vzdálenosti dvou bodů.

V předcházejícím odstavci jsme naznačili, že vzdálenosti měříme elipticky. Z toho plyne, že v rovině eliptické jsou přímky eliptické. Absolutní body těchto přímek jsou vždy imaginárně sdružené průsečíky jejich s absolutní kuželosečkou. O takových přímkách jsme již jednali v kapitole III. Nemusíme tedy znovu zde odvozovati výsledky tam získané. Připomeňme si jen hlavní jejich vlastnost: Na přímce eliptické není reálných bodů nevlastních; taková přímka nemá reálných bodů v nekonečnu a není tudíž nekonečná. (Její úhrnná délka jest $k'\pi$.) To platí o každé reálné přímce eliptické roviny a tedy i o této rovině samotné.

Eliptická rovina nemá reálných bodů nevlastních a není tudíž nekonečná.

Z této věty ovšem nenásleduje, že taková rovina není neomezená. Stačí připomenouti si plochu kulovou jako typický příklad plochy neomezené, nikoli však nekonečné, abychom připustili možnost existence takové plochy. Ostatně se k tomuto tématu vrátíme ještě v následujícím paragrafu.

Teorii eliptického svazku přímek jsme odvodili taktéž v kapitole III. Ježto podle vzorce 6) předcházejícího odstavce jest každý svazek přímek eliptické roviny eliptický, můžeme prostě výsledky na uvedeném místě odvozené přenésti do této kapitoly. Jako aplikaci nejdůležitějších ze známých vlastností eliptického svazku přímek uvedeme:

Úhrnná hodnota úhlu svazku přímek eliptické roviny jest π. V žádném svazku přímek této roviny nejsou reálné přímky, které by s jinými přímkami téhož svazku svíraly úhel nekonečně velký.

Podle toho, co jsme v kapitole III uvedli o svazku eliptickém a euklidovském, mohli bychom snad očekávati ještě nějaké analogie mezi rovinou euklidovskou a eliptickou, pokud se týče studia jejich přímek. Ale není tomu tak. Naopak eliptická rovina vyznačuje se jednou vlastností, týkající se přímek, která ji ostře odlišuje od roviny euklidovské. Snadno ji odvodíme, ptáme-li se po rovnoběžkách v eliptické rovině. Svírají-li dvě přímky v této rovině úhel rovný nule, pak podle 6) musí býti $F^2_{XY} - F_{XX}F_{YY} = 0$, to jest jejich průsečík musí se nalézati na absolutní kuželosečce.

Tato však jest imaginární a tudíž dvě reálné přímky se v jejím bodě nemohou protínati. Z toho plyne, že

v eliptické rovině neexistují rovnoběžky.

Ještě snad zbývá se zmíniti o tom, zda existují mimoběžky, podobně jako v rovině hyperbolické. Je však ihned patrno, že tomu tak není, neboť při studiu eliptické roviny neomezujeme se na určitou část jejího euklidovského modelu, nýbrž uvažujeme celý model. Musí se tedy každé dvě přímky protínati. Ostatně to plyne i ze vzorce 6). Ten nemůže dávati nikdy imaginární hodnoty pro M, jsou-li přímky X, Y reálné.

Poznámka: Z definice kolmých přímek ve svazku eliptickém plyne, že i v rovině eliptické jsou dvě přímky kolmé, jsou-li polárně sdruženy k absolutní kuželosečce.

§ 3. Weierstrassovy souřadnice a jejich aplikace.

1. *Weierstrassovy* souřadnice. „Absolutní kuželosečka“ může býti vždy dána rovnicí ve tvaru kanonickém polárním (VIII, 6, 33″)

9) $$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 0.$$

Souřadnice libovolného reálného „bodu“ vyhovují vždy podmínce $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 0$ a můžeme tedy vhodnou volbou koeficientu úměrnosti dosáhnouti, že pro ně platí

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1.$$

Souřadnice, vázané touto podmínkou, nazývají se opět bodové souřadnice *Weierstrassovy.* Řešením vzorce 7) obdržíme velmi jednoduchý výraz pro *cos* vzdálenosti v těchto souřadnicích:

$$\cos \frac{m(xy)}{k'} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 .$$

O geometrickém významu těchto souřadnic zmíníme se v odstavci druhém tohoto paragrafu. — Přímkové souřadnice „přímky“ definujeme jako bodové souřadnice jejího „pólu“ vzhledem k „absolutní kuželosečce“ 9). To však je právě definice souřadnic přímkových, jak jsme ji uvedli v (IV, 1). Vzhledem k svému významu splňují tyto souřadnice opět rovnici

9′) $$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 1 .$$

Pro úhel dvou přímek obdržíme v těchto souřadnicích podle 8)

$$\cos M(XY) = X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + X_3 Y_3 .$$

2. Jejich prostorová interpretace. Vzdálenost dvou nekonečně blízkých bodů x a y

$$y_j = x_j + d\,x_j + \frac{1}{2} d^2 x_j + \ldots\ldots \qquad (j = 1, 2, 3)$$

stanovíme metodou obdobnou jako v (V, 4, odst. 4). Získáme nejprve

$$1 - \frac{(m:k')^2}{2!} + \frac{(m:k')^4}{4!} - \ldots = x_3 y_3 + x_2 y_2 + x_1 y_1 = x^2_3 + x^2_2 + x^2_1 +$$
$$+ x_3 dx_3 + x_2 dx_2 + x_1 dx_1 + \frac{1}{2}(x_3 d^2 x_3 + x_2 d^2 x_2 + x_1 d^2 x_1) + \ldots$$

a poté

10) $$dm^2 = k'^2 (d\,x^2_1 + d\,x^2_2 + d\,x^2_3).$$

Transformací souřadnic

$$\bar{x}_j = x_j k', \quad (j = 1, 2, 3)$$

změní se podmínka pro *Weierstrassovy* souřadnice na

11) $$\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 + \bar{x}_3^2 = k'^2,$$

kdežto vzorec 10) přejde v

12) $$dm^2 = d\bar{x}_1^2 + d\bar{x}_2^2 + d\bar{x}_3^2.$$

Rovnice 11) jest rovnicí koule v euklidovském prostoru, vztaženém ku pravoúhlým souřadnicím cartézským $\bar{x}_j$. Její poloměr jest k'. Rovnice druhá představuje čtverec vzdálenosti dvou jejích nekonečně blízkých bodů.

Můžeme tedy říci:

Geometrii eliptickou v rovině možno interpretovati jako geometrii na kouli o poloměru k' v euklidovském prostoru.

Z této věty odvodíme mnoho důsledků. Předně známe význam souřadnic x_j. Jsou to souřadnice bodů na kouli o poloměru rovném jedné (a souřadnice $\bar{x}_j$ jsou souřadnicemi bodů na kouli o poloměru k'). Dále vidíme, že trigonometrie eliptické roviny nalézá svoji interpretaci jako sférická trigonometrie. Proto nebudeme se jí blíže zabývati. Jako nejzajímavější důsledek z této trigonometrické interpretace uvedeme větu:

Součet úhlů trojúhelníka v rovině eliptické jest větší než dva pravé.

O kouli poloměru k' víme, že je to plocha kladné konstantní míry křivosti. Možno ji tedy rozvinouti na plochu o téže kladné míře křivosti. Vzhledem k tomu, co jsme uvedli o interpretaci geometrie eliptické, můžeme uvésti:

Eliptická rovina jest rozvinutelná na plochy o kladné konstantní míře křivosti.

Říkáme též, že eliptická rovina má konstantní kladnou míru křivosti $\frac{1}{k'^2}$.

Z těchto vět neplyne ovšem, že geometrie eliptická jest v celém rozsahu identická s geometrií na plochách o kladné konstantní míře křivosti. Později uvidíme, v čem se obě tyto geometrie liší. *Beltrami*, který hořejší větu učinil základem svých úvah o geometrii eliptické, identifikoval obě geometrie v celém rozsahu a dospěl proto k některým větám, které nejsou správné. (Viz § 6, odst. 2.)

Z elementární geometrie je známo, že sférická trigonometrie na kouli o poloměru k' přejde v prvém přiblížení (t. j. při zanedbání veličin nekonečně malých vyšších řádů) v trigonometrii rovinnou, jsou-li měřené míry μ vzhledem ke k' tak malé, že $\frac{\mu}{k'} \to 0$.

Tento výsledek můžeme hned aplikovati na eliptickou rovinu větou:

V dostatečně malém oboru eliptické roviny vzhledem ke k' platí v prvém přiblížení euklidovská geometrie.

§ 4. Kružnice. Pohyb.

1. Kružnice. Kružnici v rovině eliptické definujeme jako křivku, jejíž body jsou od daného bodu s stejně vzdáleny. Této definice použijeme ke stanovení rovnice jejího obrazu. Podle vzorce 7) splňují „body“ „kružnice“ rovnici

$$\left(\cos^2 \frac{m}{k'}\right) f_{xx} f_{ss} = f_{xs}^2$$

a je to tedy kuželosečka. Bodu s budeme opět říkati střed kružnice. Již z této rovnice je zřejmo, že existuje jen jeden druh kružnic o reálném středu. (V rovině hyperbolické byly tři takové druhy: Buď cykly o „středu“ uvnitř „absolutní kuželosečky“, nebo horocykly, jichž střed byl bodem nevlastním, nebo konečně aequidistanty o ideálním středu.)

Každá taková „kružnice" je určena třemi údaji $s_1 : s_2 : s_3$, $\cos \frac{m}{k'}$. Je-li x průsečný „bod" „kružnice" s „absolutní kuželosečkou", jest $f_{xx} = 0$ a tedy x leží na přímce

$$f_{xs}^2 = 0,$$

která jest dvojnásob počítanou polárou „bodu" s vzhledem k „absolutní kuželosečce". Shrneme-li tyto výsledky, obdržíme věty:

V eliptické rovině jest ∞^3 kružnic. Každá „kružnice" jest kuželosečkou, která se dvojnásob dotýká „absolutní kuželosečky" v průsečících poláry („středu" s vzhledem k „absolutní kuželosečce") s touto kuželosečkou. Jest jen jeden druh kružnic o reálném středu.

Ježto ve *Weierstrassových* souřadnicích je rovnice „kružnice"

$$\cos \frac{m}{k'} = x_1 s_1 + x_2 s_2 + x_3 s_3,$$

odpovídá jí na kouli kružnice průsečná s touto rovinou.

2. Pohyb. Pohyb eliptické roviny definujeme týmž způsobem, jako pohyb roviny hyperbolické (V, 2, odst. 1), jenom že předpokládáme absolutní kuželosečku imaginární. Stejným způsobem jako na uvedeném místě můžeme dokázati tyto věty o pohybu:

Pohyb v eliptické rovině jest vyjádřen trojmocnou grupou projektivních transformací 1), které reprodukují absolutní kuželosečku. Každá taková transformace představuje pohyb v eliptické rovině. Transformace, vedoucí k podobnosti, neexistují.

Není tedy možno ani v rovině eliptické sestrojiti obrazce podobné.

Tyto věty mohli jsme též odvoditi z interpretace geometrie eliptické jako geometrie na kouli. O této geometrii je známo, že v ní jednomocná grupa projektivních transformací, které reprodukují kulovou kružnici koule, vede k otáčení po sféricky koncentrických kružnicích. Těmto kružnicím odpovídají v rovině obecně zase kružnice. Můžeme tedy říci:

Jednomocná projektivní grupa transformací, které reprodukují svazek koncentrických kružnic (a tudíž i absolutní kuželosečku), představuje pohyb eliptické roviny po těchto kružnicích.

V tomto svazku nalézá se i přímka, dříve zmíněná polára středu s vzhledem k absolutní kuželosečce. Jí odpovídá na kouli hlavní kružnice, náležející do svazku kružnic svrchu zmíněného. Sférické poloměry svazku stojí kolmo na každé z kružnic a tudíž i na hlavní kružnici. Z toho odvozujeme pro eliptickou rovinu:

Geometrickým místem bodů vzdálených o $\frac{k'\pi}{2}$ od daného bodu je přímka.[1])

Podle vět získaných vidíme, že v eliptické rovině existuje jediný druh pohybu. Není tomu tak však v prostoru eliptickém trojrozměrném. Tam můžeme totiž stanoviti takový pohyb po přímkách, že body odpovídající jsou od sebe stejně vzdáleny. Právě tento druh pohybu dal vzniknouti pojmu t. zv. *Cliffordových* rovnoběžek.[2]) Naším úkolem jest však jen studium eliptické roviny a proto se omezujeme jen na tuto stručnou poznámku.

Tím pokládáme základní úvahy o eliptické rovině za skončeny. Jest jistě ještě mnoho zajímavých vět, kterých jsme neuvedli. Ale laskavý čtenář si je v případě potřeby odvodí pomocí geometrie na kouli, nebo metodami obdobnými jako v geometrii hyperbolické.[3])

Obrátíme se nyní k některým otázkám speciálním.

§ 5. **Metrická dualita.**

1. Projektivní dualita. Říkáme, že v nějaké rovině existuje duální vztah přímek X a bodů x, když

---

[1]) Čtenář může tuto větu dokázati i přímo ze vzorců pro vzdálenost. K tomu stačí si uvědomiti, že bod s a libovolný bod oné přímky jsou polárně sdruženy vzhledem k absolutní kuželosečce. — Obdobná věta měla též platnost pro model hyperbolické roviny, nikoliv však pro hyp. rovinu samu, neboť na příklad cykly nemají ve svém svazku přímky, aequidistanty nemají středu.

[2]) To jsou přímky, jichž body jsou od sebe stejně vzdáleny.

[3]) Takové věty jsou na příklad: „Dvě přímky mají vždy jednu a jen jednu společnou kolmici." „Mají-li tři neb více přímek společnou kolmici, musí tyto přímky procházeti nutně jedním bodem." „Každému svazku přímek bodem můžeme přiřaditi přímku, která jest ke všem přímkám tohoto svazku kolmá."

souřadnice každých dvou elementů duálních x, X jsou ve vztazích

$$13)\quad \begin{aligned} \varrho X_1 &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 \\ \varrho X_2 &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3 \\ \varrho X_3 &= c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \sigma x_1 &= C_{11}X_1 + C_{21}X_2 + C_{31}X_3 \\ \sigma x_2 &= C_{12}X_1 + C_{22}X_2 + C_{32}X_3 \, . \\ \sigma x_3 &= C_{13}X_1 + C_{23}X_2 + C_{33}X_3 \end{aligned}$$

Při tom C_{ij} jsou algebraické doplňky v determinantu

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} \neq 0,$$

příslušné prvkům c_{ij}, dělené tímto determinantem, a c_{ij} jsou konstanty reálné. Má-li tato definice duality míti smysl, musí býti nezávislá na projektivních transformacích, které jsou podkladem geometrie zkoumané roviny. To znamená: přiřadíme-li onou transformací duálním elementům x, X elementy $'x$, $'X$, musí tyto elementy $'x$, $'X$ býti opět duální.

Z této podmínky snadno odvodíme rovnice

$$14)\qquad \beta c_{ij} = \sum_{1}^{3}{}_{k,\varrho}\, a_{ki}\, a_{\varrho j}\, c_{k\varrho}, \qquad \gamma C_{ij} = \sum_{1}^{3}{}_{k,\varrho}\, A_{ki} A_{\varrho j}\, C_{k\varrho}$$

(β, γ koef. úměrnosti).

Charakteristickým znakem duality je, že dvojpoměr čtyř bodů a jim duálně přiřazených čtyř přímek je stejný. Tato věta jest ihned zřejmá z rovnic 13).

2. P o l a r i t a. Zvláštním případem duality je p o l a r i t a v z h l e d e m k n ě j a k é k u ž e l o s e č c e o rovnici

$$g_{11}x_1^2 + g_{22}x_2^2 + g_{33}x_3^2 + 2(g_{12}x_1x_2 + g_{13}x_1x_3 + g_{23}x_2x_3) = 0 .$$

Tato polarita je dualitou, v níž koeficienty c_{ij}, resp. C_{ij} jsou dány rovnicemi (až na faktor úměrnosti)

$$13')\qquad c_{ij} = g_{ij}\,(= g_{ji}) \qquad C_{ij} = G_{ij}\,(= G_{ji}) .$$

Pak každému bodu x odpovídá duálně polára X vzhledem k této kuželosečce a obráceně. (Čtenář se o tom snadno přesvědčí, když stanoví rovnice poláry k bodu, resp. pólu k přímce podle [VIII, 6.] Nalézá-li se bod x právě na kuželosečce, přímka X, která je mu duálně přiřazena, je právě tečnou kuželosečky v bodě x.) Tohoto způsobu přiřazení jsme již ve speciálním případě užívali, totiž při souřadnicích *Weierstrassových* (v rovině hyperbolické i eliptické). Ovšem, že jsme předpokládali kuželosečku, která se reprodukuje.

To není v odporu s transformačními rovnicemi 14), které v tomto případě mají tvar

14′) $$\beta g_{ij} = \sum_{1}^{3}{}^{k,e} a_{ki}\, a_{ej}\, g_{ke}, \qquad \gamma G_{ij} = \sum_{1}^{3}{}^{i,j} A_{ki}\, A_{ej}\, G_{ke}.$$

Násobíme-li tyto rovnice $x_i\, x_j$ resp. $X_i\, X_j$ a tak vzniklé rovnice sečteme, obdržíme

$$\beta \sum_{1}^{3}{}^{ij} g_{ij}\, x_i x_j = \sum_{1}^{3}{}^{k,e}_{i,j} (a_{ki}\, x_i)\,(a_{ej}\, x_j)\, g_{ke} = \sigma \sum_{1}^{3}{}^{k,e} g_{ke}{}'x_k{}'x_e,$$

$$\gamma \sum_{1}^{3}{}^{ij} G_{ij}\, X_i X_j = \sum_{1}^{3}{}^{k,e}_{i,j} (A_{ki} X_i)\,(A_{ej} X_j)\, G_{ke} = \sigma \sum_{1}^{3}{}^{k,e} G_{ke}{}'X_k{}'X_e,$$

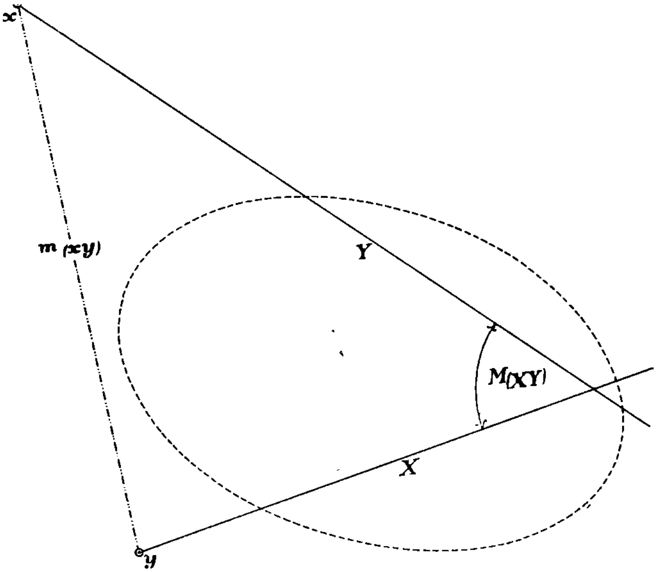
což je podmínkou reprodukce kuželosečky.

3. Metrická dualita. Buďtež x a y dva libovolné body, jimž rovnicemi 13) jsou přiřazeny duálně přímky X, Y. Vzdálenost bodů x, y měříme pomocí čtyř bodů x, y, ξ, ξ', úhel přímek X, Y měříme pomocí čtyř přímek X, Y, Ξ, Ξ'. Význam bodů ξ, ξ' resp. přímek Ξ, Ξ' v rovině hyperbolické, eliptické i euklidovské je již znám a netřeba se o něm znova zmiňovati. — O nějaké rovině říkáme, že je metricky duální, když oněm čtyřem bodům x, y, ξ, ξ' (z nichž dva jsou zcela libovolné) jsou duálně přiřazeny přímky X, Y, Ξ, Ξ' (právě v témž pořádku). Ježto vzdálenosti $m\,(xy)$, resp. úhly $M\,(XY)$ měříme pomocí logaritmů určitých dvojpoměrů $(\xi\,\xi'\,x\,y)$, resp. $(\Xi\,\Xi'\,X\,Y)$, je zřejmo, že v metrické dualitě poměr $\dfrac{m\,(x\,y)}{M\,(X\,Y)}$ musí býti konstantní (závislý jen na volbě konstant, jimiž ony logaritmy násobíme). — Může býti rovina hyperbolická, eliptická neb euklidovská metricky duální? V rovině hyperbolické je metrická dualita vyloučena, neboť vzdálenosti měříme hyperbolicky, úhly elipticky. Reálným bodům ξ, ξ' nemůžeme přiřaditi duálně imaginární přímky Ξ, Ξ'. Rovina euklidovská rovněž není metricky duální. V ní měříme totiž vzdálenosti parabolicky a úhly elipticky. Reálným splývajícím bodům $\xi \equiv \xi'$ nemůžeme přiřaditi imaginární různé přímky Ξ, Ξ'. V rovině eliptické měříme vzdálenosti i úhly elipticky, proto lze očekávati, že tato rovina je metricky duální. Tomu skutečně tak je. Neboť v polaritě vzhledem k absolutní kuželosečce (což je zvláštní případ duality) jsou nejen dvojpoměry příslušných elementů stejné, ale bodům absolutním

ξ, ξ' na přímce xy odpovídají duálně tečny Ξ, Ξ' z průsečíku přímek XY k absolutní kuželosečce. (Body ξ, ξ' a přímky Ξ, Ξ' jsou ovšem imaginární, sdružené.) Odpovídá tedy vzdálenosti bodů xy v polaritě úhel přímek, jim polárně sdružených. Proto říkáme, že

metrika eliptické roviny je sama k sobě polární.

Tato metrická polarita je jakési „estetické" plus, které rovina eliptická má před rovinami hyperbolickými a eukli-



Obr. 1.

dovskými. Právě tato vlastnost to byla, která eliptické geometrii získala hojně přívrženců (na příklad *Clifford* a j.). Ba byli mnozí, kteří právě jmenovanou vlastnost uváděli za důvod, proč máme se přikloniti k mínění, že naše geometrie není ani hyperbolická, ani euklidovská, ale eliptická (na příklad *Zöllner*). Na obr. 1 znázorněna je vzdálenost dvou bodů x, y, která za předpokladu $k' = 1$ je právě rovna úhlu kolmic X, Y, které jsou polární k bodům x, y. Absolutní kuželosečka jest ovšem imaginární. Na obr. 1 je její ideální obraz vyčárkován; poláry sdružené vzhledem k abs.

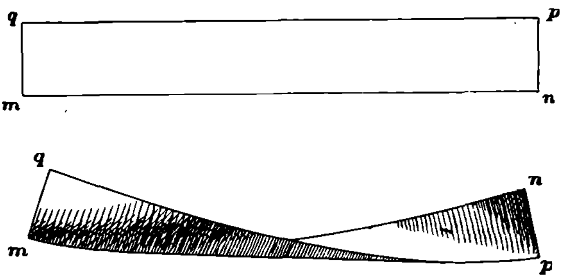
kuželosečce zobrazují se jako t. zv. antipoláry jejího ideálního obrazu.

Poznámka: Ač eliptická rovina je jen polárně metrická, říká se všeobecně, že je duálně metrická. Proto jsme tak též nadepsali tento paragraf, třebaže nadpis nevystihuje plně význam oné duality.

§ 6. Dvojitost eliptické roviny.

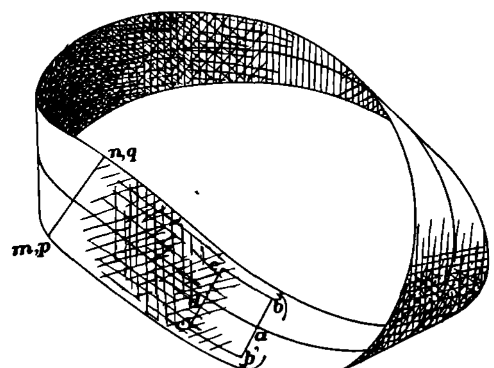
1. List *Möbiusův*. V třetím paragrafu této kapitoly jsme ukázali, že je možno geometrii eliptické roviny interpretovati jako geometrii na kouli o poloměru k'. K tomuto výsledku jsme dospěli na základě ekvivalence fundamentálních forem obou útvarů. Zároveň jsme upozornili, že z této ekvivalence nesmíme usuzovati na ekvivalenci obou útvarů v celém jejich rozsahu. (Jinými slovy, nemůžeme tvrditi, že oba útvary při rozvinutí na sebe se v celém rozsahu pokryjí.) V tomto paragrafu upozorníme na rozdíly geometrie na kouli a eliptické geometrie. Uvažujme nejprve kouli. Stanovme na ní libovolnou kružnici a posunujme po ní nějaký čtyřúhelník *abcd* tak, aby strana *da* byla ve směru tečny kružnice a pohybu a bod *a* se pohyboval po kružnici. Oběhneme-li kružnici jednou, přijde čtyřúhelník *abcd* opět do své původní polohy. Můžeme označiti sled vrcholů *abcd* jako orientaci bodu *a*. Vidíme tedy, že po jednom oběhnutí po kružnici na kouli (obecně po jakékoliv uzavřené křivce na kouli) se orientace bodu *a* nezmění. Takovým plochám, na nichž orientace bodu po jednom oběhnutí uzavřené čáry se nemění, říkáme plochy jednoduché. (Je zajímavo si povšimnouti, že koule je každou svojí uzavřenou čarou *C*, která je bez singularit, rozdělena na dvě části. Z jedné části nelze přejíti do druhé bez překročení čáry *C*.)

Až do doby *Möbiusovy* se předpokládalo, že všechny plochy jsou jednoduché. *Möbius* (1790—1868) upozornil však na možnost ploch, které nejsou jednoduché a sám také takovou plochu sestrojil. Nazývá se po něm *Möbiusův* list. Vznikne z rovnoběžníka *mnpq*, (obr. 2*a*), který přehneme způsobem naznačeným v obr. 2*b* a poté jeho kratší strany spojíme tak, aby vrcholy na téže úhlopříčně splynuly (obr. 3). Narýsujme na této ploše čáru, která neprotíná okrajů (viz obr. 3) a pohybujme po ní rovnoběžník *abcd*. Po jednom oběhnutí této čáry přejde rovnoběžník *abcd* do polohy *ab'c'd*, aniž by body *b* nebo *c* překročily čáru, po které jsme pohybovali. Je-li opět sled *abcd* orientací bodu *a*, můžeme říci, že po jednom oběhu se orientace bodu *a* změnila. (Vyjadřujeme se zde vědomě poněkud nepřesně. Sled *abcd* se totiž po



Obr. 2*a*), 2*b*).

takovém oběhnutí nemění, to jest nepřejde třeba v *adcb*. Čtenář však jistě chápe, co rozumíme orientací *abcd*.) Oběhneme-li opět se čtyřúhelníkem *ab'c'd* jednou (to je vlastně podruhé se čtyřúhelníkem *abcd*) onu čáru, ob-

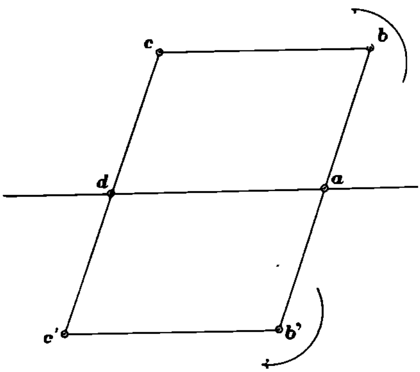


Obr. 3.

držíme původní polohu čtyřúhelníka *abcd* a tudíž po dvojnásobném oběhu se orientace bodu *a* zachová. Takovým plochám říkáme plochy dvojité. Na nich existují uzavřené čáry, které je nerozdělují na dvě části. (Není tím však řečeno, že každá plocha, na níž existují uzavřené čáry, které ji nerozdělují na dvě části, je nutně dvojitá. Na příklad anuloid není dvojitou plochou, ač na něm možno vésti uzavřené čáry, které jej nerozdělují na dvě části.) *Möbiusův* list má okrajové čáry, je však možno sestrojiti plochy dvojité bez okrajových čar.

Poznámka: Disciplina, která studuje uvedené vlastnosti ploch, nazývá se analysis situs. Pokud studuje plochy jakožto útvary, uložené v prostoru o větším počtu dimensí než dvě, jmenuje plochy dvojité plochami jednostrannými a plochy jednoduché plochami dvojstrannými. V tom případě může každému obecnému bodu jakékoli obecné plochy přisouditi jeden nebo druhý směr normály plochy v tomto bodě. Dva body, které takto vzniknou z jednoho, nazývá konjugované. Definuje plochy jednostranné jako plochy, u nichž možno z libovolného bodu po spojité čáře přejíti ke konjugovanému bez přechodu eventuelních okrajových čar, což u ploch dvojstranných je nemožné.

2. Eliptická rovina. Ukážeme nyní, že na rozdíl od koule eliptická rovina je dvojitá. Sestrojme v ní nějaký rovnoběžník *abcd* a pohybujme jím po prodloužené straně *da* v tomto směru (obr. 4). Sled vrcholů *abcd* označme opět



Obr. 4.

jako orientaci bodu *a*. V třetí kapitole § 9, odst. 3 jsme uvažovali o pohybu orientovaného bodu po eliptické přímce. Ačkoli jsme tam poněkud jiným způsobem definovali orientaci, plyne hned z oněch úvah, že v eliptické rovině bod *b* po jednom oběhnutí přímky přejde do takové polohy *b'*, že směr *ab* je protivný směru *ab'*. To má pro náš pevný čtyřúhelník za následek, že i bod *c* po jednom oběhnutí přejde do polohy *c'* takové, že směr *dc* je protivný směru *dc'*. Z toho plyne, že po jednom oběhnutí čtyřúhelníka *abcd* po přímce se orientace bodu *a*, t. j. *abcd* změní na orientaci protivnou *ab'c'd*. (Přímka v rovině eliptické nerozděluje tedy rovinu na dvě části. Můžeme z té části roviny, kde jsou body *bc*, přejíti pohybem do té části roviny, kde jsou body *b'c'*, aniž bychom onu přímku přestoupili.) Z toho plyne, že

eliptická rovina je dvojitá.

Rozvinutím eliptické roviny na kouli o poloměru k' pokryjeme jen polovinu koule a proto obsah roviny eliptické je $2\pi k'^2$.

V tom spočívá právě rozdíl mezi geometrií na kouli a geometrií v eliptické rovině. Tento důležitý poznatek objevil nedávno zemřelý matematik *Klein*. Před ním nebyl znám a právě tato neznalost způsobila, že *Beltrami* interpretací geometrie eliptické jako geometrie na kouli dospěl k některým nesprávným tvrzením. Tak na příklad uvedl tyto věty:[4])

„Dvě geodetické křivky na dvojrozměrném útvaru konstantní kladné míry křivosti (to je přímky v naší rovině), které se protínají, musí se nutně protínati ve dvou bodech."

Nebo:

„Taková geodetická čára není nutně určena jen dvěma body."

(Obě věty získáme z geometrie na kouli, uvědomíme-li si, že tam geodetické čáry jsou hlavní kružnice.)

Tyto věty by byly platné i v rovině eliptické, jen kdybychom považovali týž bod s různými orientacemi za dva různé body. K tomu však není zvláštní příčiny. Ba dopustili bychom se jistě chyby, kdybychom tak důsledně činili. Vždyť „orientace" bodu jest jen pomocný pojem, který má smysl jen, když jej zavádíme u téhož bodu! Proto musíme říci, že uvedené dvě věty neplatí v rovině eliptické, čímž jejich obecný význam jest popřen.

Naskýtá se však otázka, zda neexistují jiné plochy konstantní míry křivosti, které by vykazovaly tutéž souvislost v celém svém rozsahu jako eliptická rovina. Bylo však dokázáno, že taková plocha by nutně musela býti uzavřená. O krok dále dospěl *Liebmann*, když dokázal, že jediná

---

[4]) *Beltrami* neomezil se na kouli, t. j. prostor dvojrozměrný, nýbrž studoval prostory „sférické" o libovolném počtu rozměrů. Zde však se z důvodů didaktických omezujeme jen na kouli.

regulární analytická plocha uzavřená, která je kladné konstantní míry křivosti, je koule. Na té však neplatí v plném rozsahu geometrie eliptické roviny. Z toho plyne, že

neexistuje v prostoru plocha, na níž by v plném rozsahu platila geometrie eliptické roviny.

Poznámka: Eliptické geometrii říká se někdy také *Riemannova* geometrie na rozdíl od geometrie na kouli, t. j. sférické geometrie. *Riemann* byl prvý, který upozornil na možnost eliptického prostoru. Prvý také vyslovil domněnku, že prostor, který není nekonečný, nemusí býti nutně omezený.

§ 7. Nevlastní rovina euklidovského prostoru.

Projektivní geometrie v prostoru (jinak geometrie projektivního prostoru) zabývá se studiem invariantů vzhledem k projektivní grupě transformací

$$\begin{aligned}
\varrho' x_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 \\
\varrho' x_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 \\
\varrho' x_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 \\
\varrho' x_4 &= a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 .
\end{aligned}$$

Předepíšeme-li této grupě nějaké podmínky, získáme nějakou speciální geometrii v prostoru.

Význačné místo mezi těmito geometriemi zaujímají tak zvané geometrie lineárních svazků. Ty studují invarianty vzhledem k uvedené grupě transformací, při čemž předpokládají, že tato grupa reprodukuje nějaký pevný bod. Útvary, o něž v takové geometrii jde, jsou pevný bod, svazek přímek tím bodem a svazek rovin tím bodem procházející. Je-li tento pevný bod položen tak (jinými slovy, zvolíme-li systém souřadný tak), že jeho souřadnice jsou $0:0:0:1$, pak uvedená grupa transformací musí míti

$$a_{14} = a_{24} = a_{34} = 0.$$

Předpokládejme, že tato grupa ještě reprodukuje nějakou rovinu, třeba $x_4 = 0$. Pak musí býti

$$a_{41} = a_{42} = a_{43} = 0.$$

Jsou tedy transformace příslušné grupy

$$\begin{aligned}
\varrho' x_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\
\varrho' x_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\
\varrho' x_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \\
\varrho' x_4 &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a_{44}x_4 .
\end{aligned}$$

Tuto grupu můžeme dále specialisovati, předepíšeme-li, že v pevné rovině $x_4 = 0$ má reprodukovati kuželosečku

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2 = 0, \qquad \xi_4 = 0.$$

U této grupy se již zastavíme. Předpokládejme nyní, že rovina $x_4 = 0$ je nevlastní rovinou euklidovského modelu tohoto prostoru. Pak pro cartézské souřadnice x, y, z bodů můžeme při vhodné volbě jednotkového bodu psáti

$$\frac{x_1}{x_4} : \frac{x_2}{x_4} : \frac{x_3}{x_4} = x : y : z.$$

Geometrie lineárních svazků v bodě $0:0:0:1$, kterou jsme takto získali, jest ekvivalentní se studiem invariantů v rovině $x_4 = 0$ vzhledem k projektivní grupě transformací

$$\begin{aligned} \varrho' x &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ \varrho' y &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ \varrho' z &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z, \end{aligned}$$

která reprodukuje kuželosečku

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0.$$

Tato geometrie je geometrií eliptické roviny. Příslušná geometrie lineárních svazků předpokládá tedy, že nevlastní rovina euklidovského modelu jest eliptická. Jsou-li x, y, z pravoúhlé cartézské souřadnice, je tato geometrie obvyklou geometrií svazků v euklidovském prostoru.[5])

Z toho můžeme odvoditi důsledek:

Nevlastní rovina euklidovského prostoru jest eliptická.

Tím máme znovu dokázánu logickou nespornost eliptické geometrie. Tento výsledek mohli jsme ostatně očekávati, ježto víme, že úhly v prostoru euklidovském měříme elipticky. Ovšem existence eliptické roviny nevlastní není následek eliptického měření úhlů, neboť při odvození vzorce *Laguerreova* jsme již předpokládali (mlčky), že nevlastní přímka roviny úhlu jest eliptická!

Právě naopak:

úhly v prostoru euklidovském měříme proto elipticky, ježto nevlastní rovina tohoto prostoru jest eliptická.

---

[5]) Čtenáři doporučuji, aby k definici této geometrie dospěl postupem naznačeným v kap. II. Hoření větou jest definitoricky zaveden pojem euklidovského prostoru.

Existencí této roviny vysvětlí se mnoho fakt, která neodborníka jistě zarážejí. Uvedeme zde některá z nich:

O dvou přímkách (rovinách) v euklidovském prostoru říkáme, že jsou rovnoběžné, protínají-li se v nevlastní rovině. Odpovídá tedy přímce nevlastní roviny svazek rovnoběžných rovin, procházejících touto přímkou. Dvě roviny rovnoběžné obdržíme, promítneme-li ji ze dvou obecně položených bodů vlastních. Obráceně, dvě přímky v rovině nevlastní promítají se z téhož vlastního bodu dvěma rovinami různoběžnými, což znamená, že každé dvě přímky nevlastní se protínají. To právě souhlasí s tím, že tato rovina je eliptická.

Neexistují tudíž v rovině nevlastní rovnoběžky.

Přímce euklidovského prostoru odpovídá v nevlastní rovině bod bez orientace, kdežto paprsku (orientované přímce) odpovídá bod s orientací. Proto úhrnná hodnota úhlu ve svazku přímek je polovinou úhrnné hodnoty úhlu svazku paprsků. Ježto však úhrnná hodnota úhlu svazku přímek jest v euklidovském prostoru právě π a odpovídá úhrnné délce přímky nevlastní roviny, musí pro tuto rovinu býti $k' = 1$.

N e v l a s t n í   e l i p t i c k á   r o v i n a   e u k l i d o v s k é h o   p r o s t o r u   m á   k ř i v o s t $k' = 1$.

Podle toho, co jsme uvedli o přímce a paprsku, pochopíme snadno, proč v euklidovském prostoru je svazek přímek d v o j i t ý, svazek paprsků j e d n o d u c h ý. Skutečně rovina vrcholem svazku přímek tento nerozděluje na dvě části, kdežto rovina vrcholem svazku paprsků jej rozděluje. (Paprsek směřuje buď nad rovinu, nebo pod rovinu.) Kdyby si byl *Beltrami* uvědomil takto důsledky existence nevlastní roviny eliptické, nebyl by asi pronesl prvou z vět uvedených v § 6. Neboť platnost oné věty i pro eliptickou rovinu by měla za následek podivné věty: „V euklidovském prostoru dvě roviny se protínají ve dvou přímkách“, případně „dvě rovnoběžky mají v euklidovském prostoru dva body společné“.

Tím pokládáme úvahy o eliptické rovině za skončeny a obrátíme se k poslední možnosti geometrie v rovině, kdy totiž absolutní kuželosečka je složená. Geometrií, které mají za základ příslušnou grupu transformací, je více a náleží k nim i geometrie euklidovská. Všechny tyto geometrie zahrnujeme pod společný název g e o m e t r i í   p a r a b o l i c k ý c h.

Kapitola VII.

ROVINY PARABOLICKÉ. HISTORICKÉ POZNÁMKY.

§ 1. Všeobecné rozdělení.

Když jsme uvažovali o rovině hyperbolické a eliptické, přepokládali jsme, že absolutní kuželosečka není složená. Zbývá nám tudíž zmíniti se též o této možnosti. Tu je však nutno rozeznávati všechny druhy složených kuželoseček. Tyto druhy jsou — podle toho, běží-li o kuželosečku bodovou nebo tečnovou (VIII, 6, odst. 4):

1*a*) dvojice bodů reálných různých (na dvojné přímce),

1*b*) dvojice přímek reálných různých (dvojným bodem),

2*a*) dvojice bodů imaginárně sdružených (na dvojné reálné přímce),

2*b*) dvojice přímek imaginárně sdružených (dvojným reálným bodem),

3*a*) dvojný bod reálný,

3*b*) dvojná přímka reálná.

Celkem získáme tak šest druhů různých geometrií. Při tom však geometrie patřící kuželosečkám pod stejným číslem jsou duální. Proto budeme se zabývati jen geometriemi sub 1*a*), 2*a*), 3*a*). Duální úvahy přenecháme čtenáři.

Nejdůležitější pro nás je geometrie *Minkowskiho* (sub 1*a*), kterou se budeme zabývati v následujícím paragrafu. Jako v euklidovské rovině, tak i zde je absolutní kuželosečka složená ze dvou různých bodů. Proto můžeme všech pojmů, které v euklidovské geometrii jsou definovány vzhledem k absolutní kuželosečce (bez ohledu na její imaginárnost), používati též v rovině *Minkowskiho*. Na příklad pojem pohybu, podobnosti (resp. zrcadlení), rovnoběžnosti atd. Jak se tyto — formálně stejně definované — pojmy liší věcně v obou geometriích, poznáme z vývodů následujícího paragrafu.

§ 2. Rovina Minkowskiho (1a).

1. Pohyb a podobnost. Budiž podkladem našich úvah projektivní grupa transformací, která reprodukuje dvojici bodů reálných o souřadnicích

$$\xi \ldots \quad 1:1:0, \qquad \xi' \ldots \quad 1:-1:0.$$

Reprodukuje se tedy i přímka o rovnici $x_3 = 0$. Proto v příslušných transformacích (IV, 1, 1) musí býti

$$a_{31} = a_{32} = 0. \tag{1}$$

Ježto uvažované transformace tvoří grupu, jest determinant jejich rozdílný od nuly a můžeme tedy vždy dosáhnouti toho, aby byl roven $\varepsilon\,(=\pm 1)$, t. j.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \varepsilon. \tag{2}$$

Reprodukce shora zmíněné dvojice bodů má za následek rovnice

$$\begin{matrix} a_{11} + a_{12} = a_{21} + a_{22} \\ a_{11} - a_{12} = -a_{21} + a_{22} \end{matrix}, \quad \text{nebo} \quad \begin{matrix} a_{11} - a_{12} = a_{21} - a_{22} \\ a_{11} + a_{12} = -a_{21} - a_{22} \end{matrix},$$

jichž řešení můžeme spojiti v jedno

$$\begin{aligned} a_{11} &= \varepsilon a_{22} \\ a_{12} &= \varepsilon a_{21}. \end{aligned}$$

Dosazením těchto hodnot do rovnice 2) získáme

$$\varepsilon a_{33}\,(a_{11}^2 - a_{12}^2) = \varepsilon,$$

nebo po krácení ε

$$a_{33}\,(a_{11}^2 - a_{12}^2) = 1.$$

Proto můžeme položiti (při ε, ε', $\varepsilon'' = \pm 1$)

$$a_{11} = \varepsilon a_{22} = \frac{\varepsilon'}{c} \operatorname{Cos} \psi, \quad a_{12} = \varepsilon a_{21} = \frac{\varepsilon''}{c} \operatorname{Sin} \psi, \quad a_{33} = c^2 \quad (a_{33} > 0),$$

nebo

$$a_{11} = \varepsilon a_{22} = \frac{\varepsilon''}{c} \operatorname{Sin} \psi, \quad a_{12} = \varepsilon a_{21} = \frac{\varepsilon'}{c} \operatorname{Cos} \psi, \quad a_{33} = -c^2 \quad (a_{33} < 0).$$

Smluvíme-li se na tom, že ψ může nabýti též hodnot záporných, můžeme položiti $\varepsilon'' = +1$ a i tak obdržíme všechny kombinace znamének. Transformace hledané grupy mají pak tvar

$$3)\qquad a)\begin{cases}\varrho' x_1 = \dfrac{1}{c}(\varepsilon' x_1 \operatorname{Cos}\psi + x_2 \operatorname{Sin}\psi) + a_{13}x_3\\ \varrho' x_2 = \dfrac{\varepsilon}{c}(x_1 \operatorname{Sin}\psi + \varepsilon' x_2 \operatorname{Cos}\psi) + a_{23}x_3\\ \varrho' x_3 = c^2 x_3,\end{cases}$$

$$\text{nebo}\qquad b)\begin{cases}\varrho' x_1 = \dfrac{1}{c}(x_1 \operatorname{Sin}\psi + \varepsilon' x_2 \operatorname{Cos}\psi) + a_{13}x_3\\ \varrho' x_2 = \dfrac{\varepsilon}{c}(\varepsilon' x_1 \operatorname{Cos}\psi + x_2 \operatorname{Sin}\psi) + a_{23}x_3\\ \varrho' x_3 = -c^2 x_3.\end{cases}$$

V této grupě jest obsažena i grupa transformací, vedoucích k podobnosti ($\psi = 0$):

$$4)\qquad a)\ \begin{aligned}\varrho' x_1 &= \frac{\varepsilon'}{c} x_1 + a_{13}x_3\\ \varrho' x_2 &= \frac{\varepsilon\varepsilon'}{c} x_2 + a_{23}x_3,\\ \varrho' x_3 &= c^2 x_3\end{aligned}\qquad \text{nebo}\qquad b)\ \begin{aligned}\varrho' x_1 &= \frac{\varepsilon'}{c} x_2 + a_{13}x_3\\ \varrho' x_2 &= \frac{\varepsilon\varepsilon'}{c} x_1 + a_{23}x_3\\ \varrho' x_3 &= -c^2 x_3.\end{aligned}$$

Je-li $c = 1$, obdržíme grupu vedoucí k p o h y b u

$$5)\qquad a)\ \begin{aligned}\varrho' x_1 &= \varepsilon' x_1 \operatorname{Cos}\psi + x_2 \operatorname{Sin}\psi + a_{13}x_3\\ \varrho' x_2 &= \varepsilon(x_1 \operatorname{Sin}\psi + \varepsilon' x_2 \operatorname{Cos}\psi) + a_{23}x_3\\ \varrho' x_3 &= x_3,\end{aligned}$$

$$\text{nebo}\qquad b)\ \begin{aligned}\varrho' x_1 &= x_1 \operatorname{Sin}\psi + \varepsilon' x_2 \operatorname{Cos}\psi + a_{13}x_3\\ \varrho' x_2 &= \varepsilon(\varepsilon' x_1 \operatorname{Cos}\psi + x_2 \operatorname{Sin}\psi) + a_{23}x_3\\ \varrho' x_3 &= -x_3.\end{aligned}$$

Význam obou druhů transformací poznáme snadno, když žádáme aby se reprodukoval též „bod“ s o souřadnicích 0, 0, 1. Pak jest $a_{13} = a_{23} = 0$ a rovnice 3*a*) přiřazují k sobě útvary v t é ž e č á s t i r o v i n y. To znamená, že útvar původní a transformovaný jsou v téže části roviny, vymezené nulovými přímkami bodu s (to jest přímkami $s\xi$, $s\xi'$, viz paragraf 2). Rovnicemi 3*b*) je však útvaru jedné části roviny přiřazen útvar v d r u h é části roviny, vymezené nulovými přímkami bodu s. Tyto útvary jsou tedy v r ů z n ý c h č á s t e c h roviny.[1])

Shrneme-li dosavadní poznatky, můžeme říci:

V t é t o r o v i n ě, t. z v. r o v i n ě *Minkowskiho*, j e m o ž n o s e s t r o j i t i o b r a z c e p o d o b n é. P r o t o n e n í

[1]) Čtenář si tato tvrzení sám snadno dokáže úvahou o hodnotách $x_1^2 - x_2^2$ resp. $'x_1^2 - 'x_2^2$ pro bod původní x a transformovaný $'x$.

každá projektivní transformace, která reprodukuje dvojici bodů ξ, ξ', transformací pohybovou. Každý pohyb je však vyjádřen projektivní transformací, která tuto dvojici reprodukuje.

2. **Vzdálenost dvou bodů.** Vzdálenost dvou bodů x, y měříme užitím dvojpoměru čtyř bodů, z nichž dva jsou body x, y a druhé dva splývají v jednom bodě, který jest průsečíkem přímky xy a $\xi\xi'$. Tento případ jsme již projednávali v kapitole III, když jsme jednali o jednorozměrném útvaru parabolickém. Jsou tedy i zde, v rovině *Minkowskiho*, přímky vesměs (s výjimkou přímky $\xi\xi'$) **parabolické**. Nemůžeme ovšem vzorce, v kapitole třetí pro vzdálenost dvou bodů odvozené, beze změny aplikovati zde, neboť dříve šlo o jednorozměrný útvar, kdežto nyní jde o rovinu, t. j. útvar dvojrozměrný. Užijeme však stejného myšlenkového postupu. Rovinu *Minkowskiho* můžeme pokládati za limitní případ roviny hyperbolické, v níž absolutní kuželosečka se rozloží ve dva body. Je-li tudíž v hyperbolické rovině rovnice „absolutní kuželosečky“ v tvaru přímkovém

6) $$\Xi_1^2 - \Xi_2^2 + \Xi_3^2 \delta = 0 \qquad (\delta = \text{konst. reálná}),$$

pak pro $\delta \to 0$ obdržíme v prvém přiblížení rovnici kuželosečky složené ze dvou bodů, t. j.

$$\Xi_1^2 - \Xi_2^2 = 0.$$

Bodová rovnice kuželosečky 6) jest

6′) $$(\xi_1^2 - \xi_2^2)\delta + \xi_3^2 = 0.$$

Pro $\delta \to 0$ přejde v prvém přiblížení v rovnici dvojné přímky, spojující absolutní body, t. j.

$$\xi_3^2 = 0.$$

Odvodíme tedy nejprve vzorec pro vzdálenost dvou bodů v rovině hyperbolické, v níž je „absolutní kuželosečka“ dána rovnicemi 6) resp. 6′) a potom užijeme limitního přechodu. Vzdálenost dvou bodů x, y v rovině hyperbolické je dána vzorcem (IV, 2, 9b)

$$m(xy) = i\,\mathrm{k} \arcsin \sqrt{\frac{f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2}{f_{xx} f_{yy}}}.$$

V našem případě jest

$$f_{xx} = (x_1^2 - x_2^2)\delta + x_3^2 \qquad f_{xy} = (x_1 y_1 - x_2 y_2)\delta + x_3 y_3$$
$$f_{yy} = (y_1^2 - y_2^2)\delta + y_3^2 \qquad f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = \delta\,\{[x_1 y_3]^2 - [x_2 y_3]^2 - [x_1 y_2]^2 \delta\}$$

a tudíž můžeme psáti místo uvedeného vzorce

$$m(xy) = i\,k \arcsin \sqrt{\delta}\sqrt{\frac{[x_1 y_3]^2 - [x_2 y_3]^2 - [x_1 y_2]^2 \delta}{[(x_1^2 - x_2^2)\delta + x_3^2][(y_1^2 - y_2^2)\delta + y_3^2]}}\,.$$

Označme pro stručnost odmocninu

$$\sqrt{\frac{-([x_1 y_2]^2 \delta + [x_2 y_3]^2 - [x_1 y_3]^2)}{[(x_1^2 - x_2^2)\delta + x_3^2][(y_1^2 - y_2^2)\delta + y_3^2]}}$$ pouze symbolem $\sqrt{\ }$

a rozviňme arc sin v řadu (VIII, 1, 5).[1b] Obdržíme

$$m(xy) = i\,k\left(\frac{\sqrt{\delta}\sqrt{\ }}{1} + \frac{1}{2}\frac{(\sqrt{\delta}\sqrt{\ })^3}{3} + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{(\sqrt{\delta}\sqrt{\ })^5}{5} + \ldots\right)$$

nebo vytkneme-li $\sqrt{\delta}\sqrt{\ }$

$$m(xy) = i\,k\sqrt{\delta}\sqrt{\ }\left(1 + \frac{1}{2}\frac{(\sqrt{\delta}\sqrt{\ })^2}{3} + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{(\sqrt{\delta}\sqrt{\ })^4}{5} + \ldots\right).$$

Zvolme nyní libovolnou, od nuly různou konstantu D a volme ke každému δ příslušné k tak, aby

$$k\sqrt{\delta} = D.$$

Je tedy

$$m(xy) = i\,D\sqrt{\ }\left(1 + \frac{1}{2}\frac{(\sqrt{\delta}\sqrt{\ })^2}{3} + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{(\sqrt{\delta}\sqrt{\ })^4}{5} + \ldots\right).$$

Čím je δ menší, tím méně liší se $1 + \frac{1}{2}\frac{(\sqrt{\delta}\sqrt{\ })^2}{3} + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{(\sqrt{\delta}\sqrt{\ })^4}{5} + \ldots$ od jedné a tudíž tím méně liší se $m(xy)$ od $i\,D\sqrt{\ }$. Pro $\delta \to 0$ (vylučujeme-li ze svých úvah body, pro něž je $x_3 = 0$, $y_3 = 0$, t. j. body, pro které při $\delta \to 0$ je $\lim\limits_{\delta \to 0} f_{xx} = 0$, $\lim\limits_{\delta \to 0} f_{yy} = 0$) obdržíme

$$\lim_{\delta \to 0} m(xy) = i \lim_{\delta \to 0} D\sqrt{\ } = D\sqrt{\frac{[x_2 y_3]^2 - [x_1 y_3]^2}{x_3^2\, y_3^2}}\,.$$

Pro $\delta \to 0$ přechází rovina hyperbolická v prvém přiblížení v rovinu *Minkowskiho*, v níž absolutní kuželosečka je dvojicí bodů ξ, ξ'. Pro tuto rovinu zavedeme definitoricky hořejší výraz jako vzdálenost m dvou bodů.

1b) Předpokládáme ovšem body x, y tak voleny, že je to možné. Toto omezení obecnosti je jen přechodné, neboť pro $\delta \to 0$ tato možnost vždy nastane.

Pravou stranu rovnice můžeme psáti výhodněji, zavedeme-li zkrácené označení $(a\,b\,c)$ pro determinant

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Pak snadno nahlédneme, že je vzdálenost dvou bodů v rovině *Minkowskiho* dána výrazem

$$m\,(x\,y) = 4\,D\varrho^3 \frac{\sqrt{(\xi\,x\,y)\,(\xi'\,x\,y)}}{(\xi\,\xi'\,x)\,(\xi\,\xi'\,y)}\,,$$

kde ϱ je nějaký koeficient úměrnosti od nuly různý. Zavedeme-li ještě novou konstantu l rovnicí

$$l = 16\,D^2\varrho^6\,,$$

získáme konečně pro čtverec vzdálenosti

$$m^2\,(x\,y) = l\,\frac{(\xi\,x\,y)\,(\xi'\,x\,y)}{(\xi\,\xi'\,x)^2\,(\xi\,\xi'\,y)^2}\,. \tag{7}$$

Že takto definovaná vzdálenost vyhovuje podmínkám, na vzdálenost kladeným, může se čtenář přesvědčiti z rovnice 7') (na konci tohoto odstavce), která jest jen jiným tvarem rovnice 7).

Zlomek na pravé straně může míti tyto hodnoty:

$$\frac{(\xi\,x\,y)\,(\xi'\,x\,y)}{(\xi\,\xi'\,x)^2\,(\xi\,\xi'\,y)^2} \gtreqless 0\,.$$

Předpokládáme-li, že body x, y jsou různé od ξ, ξ', musí v těchto třech případech býti resp.

$$(\xi\,x\,y)\,(\xi'\,x\,y) \gtreqless 0\,.$$

Je-li splněna podmínka prostřední, musí býti

$$(\xi\,x\,y) = 0 \qquad \text{nebo} \qquad (\xi'\,x\,y) = 0\,.$$

Pak jest $m\,(x\,y) = 0$. Ale hořejší rovnice vyjadřují podmínku, aby body x, y, ξ, resp. x, y, ξ', ležely na jedné přímce.

Z toho plyne důležitý poznatek:

Přímky, spojující libovolný bod y s bodem ξ, nebo ξ', mají tu vlastnost, že vzdálenost libovolného bodu x na každé z nich od bodu y je rovna nule. Tyto přímky, t. zv. přímky nulové, jsou pro každý reálný bod y reálné.

Je-li bod y na přímce $\xi\xi'$, můžeme pro jeho souřadnice psáti

$$\varrho y_j = \lambda \xi_j + \mu \xi_j' \qquad (j = 1, 2, 3).$$

V tom případě je $\varrho(\xi\xi' y) = \varrho\lambda(\xi\xi'\xi) + \varrho\mu(\xi\xi'\xi') = 0$ a proto vzdálenost každého bodu x, který není na přímce $\xi\xi'$, od libovolného bodu y ($\neq \xi, \xi'$) roste nade všechny meze, blíží-li se bod y přímce $\xi\xi'$.

Má-li vzdálenost $m(xy)$ reálných bodů x, y býti reálná, od nuly různá, musí $(\xi xy)(\xi' xy) > 0$, t. j. determinanty (ξxy) a $(\xi' xy)$ musí současně býti buď kladné, nebo záporné. Je-li tomu tak, znamená to, že každý bod x', který leží v téže části roviny (vymezené přímkami $y\xi$, $y\xi'$) jako bod x, má od bodu y vzdálenost reálnou. Pro každý jiný bod x'', který leží v jednom z úhlů vedlejších (k úhlům vrcholovým, v nichž se nalézají body x, x'), jest $(\xi x'' y)(\xi' x'' y) < 0$ a tudíž vzdálenost $m(x'' y)$ jest imaginární. Z toho plyne:

Vzdálenost dvou reálných bodů není vždy reálná.

Nejsme oprávněni omeziti se jen na tu část roviny, kde je vzdálenost od bodu y reálná, neboť toto vymezení závisí na bodě y, který ovšem můžeme voliti libovolně. Přes to však není nezajímavo podotknouti, že pro bytost, schopnou takto měřiti jen vzdálenosti reálné, by v této rovině neexistovala volnost pohybu. To ostatně není nic divného. V našem čtyřrozměrném čas-prostoru můžeme se též s časem pohybovati jen směrem do budoucna, nikoli do minula.

Definujme kružnici jako geometrické místo bodů, které jsou od pevného bodu (středu) stejně vzdáleny. Z rovnice 7) odvodíme snadno, že obrazem kružnice je kuželosečka. Je-li s „střed kružnice", pak její rovnice je vskutku kvadratická v souřadnicích plynulého „bodu" x

$$m^2 (\xi\xi' x)^2 (\xi\xi' s)^2 = l (\xi x s)(\xi' x s).$$

Je-li „středem" „kružnice" „bod" s (0, 0, 1), můžeme její rovnici uvésti na tvar

$$m^2 x_3^2 = D^2 (x_2 - x_1)(x_1 + x_2),$$

nebo

$$x_1^2 - x_2^2 + \left(\frac{m}{D}\right)^2 x_3^2 = 0.$$

„Kružnice" s touto koncentrická, jejíž poloměr jest mi, má rovnici

$$x_1^2 - x_2^2 - \left(\frac{m}{D}\right)^2 x_3^2 = 0.$$

Poslední dvě rovnice jsou skutečně rovnice „křivek“, které se pohybem 5a) (při $a_{13} = a_{23} = 0$) reprodukují.

Limitním případem kružnice je právě dvojice přímek nulových [pro $m(xs) = 0$]. Jako již dříve, mohli bychom i nyní dokázati, že jednomocná grupa transformací, která reprodukuje body $\xi, \xi,' s$ a koncentrické kružnice, jest vyjádřením pohybu po tomto svazku koncentrických kružnic. Ježto existuje jen jeden druh kružnic s reálným poloměrem existuje též jen jeden druh pohybu po kružnicích. (Při tom ovšem o pohybu po nulových přímkách nemůžeme mluviti, neboť ty se sice reprodukují tímto pohybem po koncentrických kružnicích o středu s, ale pohyb na nich není definován.) Přes to však můžeme takovým pohybem čtverým způsobem k sobě přiřaditi útvary pohybované. Důvod spočívá v tom, že obecně neleží bod s na kružnici, a tudíž průměr ji protíná ve dvou bodech. Jsou-li tyto průsečné body se dvěma průměry $'x$ a $'x'$ resp. x a x', můžeme přiřaditi bodům ξ, x, ξ' body

$$\begin{aligned} &\xi,\ 'x,\ \xi', \text{ nebo} \\ &\xi,\ 'x',\ \xi', \text{ nebo} \\ &\xi',\ 'x,\ \xi, \text{ nebo} \\ &\xi',\ 'x',\ \xi. \end{aligned}$$

Jednomocná grupa transformací, která reprodukuje body s, ξ, ξ' a každou přímku bodem s, ale nikoliv každou kružnici, reprodukuje celý svazek koncentrických kružnic (to znamená, že nějaké kružnici v tomto svazku po transformaci odpovídá obecně jiná kružnice téhož svazku) a vede tedy k podobnosti, jejíž střed je právě s. Obdobným způsobem bychom mohli dokázati, že tato podobnost v jedné části roviny, vymezené nulovými přímkami, je možná jen dvojím způsobem, neboť jednomu průsečnému bodu x nějakého poloměru s kružnicí můžeme přiřaditi jeden ze dvou průsečíků téhož průměru s jinou kružnicí svazku. Tomu neodporují rovnice 4), které vedou ke čtyřem způsobům přiřazení, neboť v nich jest obsaženo i zrcadlení, spojené s podobností.

Předpokládejme, že „přímka“ $\xi\xi'$ je nevlastní přímkou euklidovského modelu *Minkowskiho* roviny. V tom případě vhodnou volbou jednotkového bodu můžeme docíliti, že $\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}$ jsou přímo cartézské souřadnice. Píšeme-li je x_1, x_2, můžeme rovnici 7) přetvořiti na

$$m^2(xy) = -D^2[(x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2],$$

Dva nekonečně blízké body jsou tedy od sebe vzdáleny o délku *dm*, jejíž čtverec je dán výrazem

$$dm^2 = D^2 (dx_2^2 - dx_1^2).$$

Forma tato liší se v zásadě od euklidovské jen tím, že u dx_1^2 je jiné znamení. Proto se rovině, která má takovou formu, říká někdy kvasieuklidovská rovina.

Poznámka. Konstantu l, která vlastně určuje jednotkovou délku, nechali jsme dosud bez povšimnutí. Můžeme ji však snadno určiti, když dvěma bodům j a p, jichž vzdálenost předpokláoáme reálnou, předepíšeme vzdálenost rovnou jedné. Získáme tak ze vzorce 7)

$$1 = l \frac{(\xi j p)(\xi' j p)}{(\xi \xi' j)^2 (\xi \xi' p)^2}$$

a tudíž pro vzdálenost dvou libovolných bodů

$$m^2 (x y) = \frac{(\xi \xi' j)^2 (\xi \xi' p)^2 (\xi x y)(\xi' x y)}{(\xi \xi' x)^2 (\xi \xi' y)^2 (\xi j p)(\xi' j p)}. \tag{7'}$$

Pak příslušná fundamentální forma jest

$$dm^2 = \frac{dx_1^2 - dx_2^2}{(j_1 - p_1)^2 - (j_2 - p_2)^2}.$$

Ze vzdálenosti jp mohu dle hořeních pravidel usuzovati na reálnost, či imaginárnost vzdálenosti jx resp. px, kde x je obecný bod roviny *Minkowskiho*. Ze vzdálenosti jx resp. px mohu právě stejným způsobem usuzovati na reálnost, či imaginárnost vzdálenosti xy, kde y je další obecně položený bod roviny *Minkowskiho*. Body j, p stanoví tedy svoji vzdáleností jednotku míry (jako v rovině euklidovské), ale zároveň dovolují rozhodnouti o každé vzdálenosti reálných bodů, zda je reálná, či imaginárná.

3. Úhel dvou přímek. Měření úhlů má v rovině *Minkowskiho* charakter hyperbolický. Úvahy, které jsme prováděli při studiu svazku hyperbolického, nemůžeme ovšem jen tak zhola zde aplikovati, neboť nyní jde o rovinu, kdežto dříve projednávali jsme jen jednorozměrný svazek hyperbolický. Můžeme však použíti obdobného postupu, jako v předcházejícím odstavci: Stanovíme úhel dvou „přímek“ X, Y pomocí „absolutní kuželosečky“, jejíž rovnice je 6). V kapitole IV získali jsme pro tento případ rovnici 8), vyjadřující úhel $M(XY)$

$$M(XY) = \frac{C}{2} \log \frac{F_{XY} + \sqrt{F_{XY}^2 - F_{XX} F_{YY}}}{F_{XY} - \sqrt{F_{XY}^2 - F_{XX} F_{YY}}}.$$

Musíme voliti $C = K =$ konst reálné, abychom získali při limitním přechodu úhel reálný. (Konstanta K není v žádné souvislosti s křivostí, označenou týmž písmenem v kapitole

V.) Za tohoto předpokladu jest úhel funkcí mnohoznačnou. Omezíme se však opět jen na hlavní její hodnoty. Z hořejšího vzorce odvodíme pro $C = K$

$$M(XY) = K \arcsin \sqrt{\frac{F_{XY}^2 - F_{XX} F_{YY}}{F_{XX} F_{YY}}}.$$

(Pro odvození viz III, 3, 18′*b*.) Použitím rovnice 6) získáme

$$\frac{M(XY)}{K} = \arcsin \sqrt{\frac{[X_1 Y_2]^2 + \delta([X_2 Y_3]^2 - [X_3 Y_1]^2)}{(X_1^2 - X_2^2 + \delta X_3^2)(Y_1^2 - Y_2^2 + \delta Y_3^2)}}.$$

Pišme místo odmocniny

$\sqrt{\dfrac{[X_1 Y_2]^2 + \delta([X_2 X_3]^2 - [X_3 Y_1]^2)}{(X_1^2 - X_2^2 + \delta X_3^2)(Y_1^2 - Y_2^2 + \delta Y_3^2)}}$ pouze symbol $\sqrt{\ }$

a rozveďme *arc Sin* v řadu (VIII, 1, 5′). Pro $\delta \to 0$ získáme podle citované rovnice (není-li $X_1 = X_2$, nebo $Y_1 = Y_2$, což vždy předpokládáme)

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{M}{K} = \lim_{\delta \to 0} \left(\frac{\sqrt{\ }}{1} - \frac{1}{2} \frac{(\sqrt{\ })^3}{3} + \frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{(\sqrt{\ })^5}{5} - \ldots \right) =$$

$$= \left(\frac{[X_1 Y_2]}{\sqrt{(X_1^2 - X_2^2)(Y_1^2 - Y_2^2)}} - \frac{1}{2.3} \frac{[X_1 Y_2]^3}{\sqrt{(X_1^2 - X_2^2)(Y_1^2 - Y_2^2)}^3} + \right.$$

$$\left. + \frac{1.3}{2.4.5} \frac{[X_1 Y_2]^5}{\sqrt{(X_1^2 - X_2^2)(Y_1^2 - Y_2^2)}^5} - \ldots \right) =$$

$$= \arcsin \frac{[X_1 Y_2]}{\sqrt{(X_1^2 - X_2^2)(Y_1^2 - Y_2^2)}}.$$

Výraz $\lim\limits_{\delta \to 0} \dfrac{M}{K}$ zavádíme **definitoricky** jako úhel dvou přímek roviny *Minkowskiho* a píšeme jej $\dfrac{M}{K}$. Je tedy úhel dvou přímek definován rovnicí

$$8) \qquad \boxed{\sin \frac{M}{K} = \frac{[X_1 Y_2]}{\sqrt{(X_1^2 - X_2^2)(Y_1^2 - Y_2^2)}}}$$

Abychom z tohoto vzorce odvodili některé důsledky, přepíšeme jej na jiný tvar. Předpokládejme, že průsečík přímek X, Y je bod b. Pak platí (VIII, 3, 19)

$$b_1 : b_2 : b_3 = [X_2 Y_3] : [X_3 Y_1] : [X_1 Y_2].$$

Zvolme na přímce X libovolný bod x, na přímce Y libovolný bod y. Pak přímkové souřadnice přímek X, Y můžeme vyjádřiti souřadnicemi bodů x, y (VIII, 3, 18)

$$X_1 : X_2 : X_3 = [b_2 x_3] : [b_3 x_1] : [b_1 x_2], \quad Y_1 : Y_2 : Y_3 = [b_2 y_3] : [b_3 y_1] : [b_1 y_2].$$

Je tedy rovnice 8) identická s rovnicí

$$\text{8}') \qquad \sin \frac{M}{K} = \frac{b_3 (b x y)}{\sqrt{([b_2 x_3]^2 - [b_3 x_1]^2)([b_2 y_3]^2 - [b_3 y_1]^2)}},$$

nebo

$$\text{8}'') \qquad \boxed{\sin \frac{M}{K} = \frac{1}{2} \frac{(\xi' \xi b)(b x y)}{\sqrt{(\xi b x)(\xi' b x)(\xi b y)(\xi' b y)}}}$$

Podle předpokladu neleží body b, x, y na jedné přímce a tudíž je $(b x y) \neq 0$.

Je-li $(\xi \xi' b) = 0$, leží bod b na spojnici bodů $\xi \xi'$. Pak je $Sin \dfrac{M}{K} = 0$, t. j. $M = 0$ a přímky jsou rovnoběžné. Z toho plyne, že

jedním bodem mimo přímku možno k této vésti jen jednu rovnoběžku.

Blíží-li se jeden z determinantů ve jmenovateli, třeba $(\xi b x)$, nule, roste M nade všechny meze. Ale $(\xi b x) = 0$ značí, že přímka bx je přímkou nulovou. Říkáme, že

úhel libovolné přímky a přímky nulové je nekonečně veliký.

Blíží-li se oba determinanty $(\xi b x)$ a $(\xi' b y)$ nule a je-li současně $(\xi \xi' b) \neq 0$, roste rovněž M nade všechny meze. Ale $(\xi b x) = 0$, $(\xi' b y) = 0$ jsou rovnice přímek nulových, které při $(\xi \xi' b) \neq 0$ protínají se ve vlastním bodě b:

Úhel nulových přímek je nekonečně veliký.

Aby byl úhel M reálný, je třeba, aby součiny

$$(\xi b x)(\xi' b x), \quad \text{a} \quad (\xi b y)(\xi' b y)$$

byly téhož znamení. To nastane jen tenkráte, jsou-li body x, y v jednom ze dvou úhlů, tvořených přímkami nulovými bodem b. Pak přímky X, Y nejsou oddělovány nulovými přímkami. V opačném případě, kdy totiž tyto přímky jsou oddělovány nulovými přímkami, jsou hořejší součiny různých znamének a tudíž M imaginární:

Úhel dvou přímek, které nejsou nulovými přímkami oddělovány, je reálný. V opačném případě jest úhel imaginární.

Obrátíme se k dalším případům složené kuželosečky absolutní.

§ 3. Rovina euklidovská a rovina semimetrická.

1. Rovina euklidovská (2*a*). Problém studovati invarianty projektivní grupy transformací, které reprodukují dvojici bodů imaginárně sdružených, jest vlastně problémem euklidovské geometrie v rovině. Ten jsme projednávali již na počátku této knihy (II) a není tedy potřebí znova se k němu vraceti. Ostatně bychom mohli pokračovati též metodou předcházejícího odstavce, která by názorně osvětlila vztah obecné roviny eliptické a mezného jejího případu, t. j. roviny euklidovské. To však přenechávám čtenáři.

2. Rovina semimetrická (3*a*). Je-li absolutní kuželosečka jediným bodem, počítaným dvakráte, pak nemůžeme v této rovině stanoviti vzdálenost dvou libovolných bodů známými prostředky. Jenom takové body, jichž spojnice oním bodem pevným prochází, mají vzdálenost definovanou. Tato má ovšem charakter parabolický. Rovněž úhel dvou libovolných přímek má charakter parabolický, neboť nulové přímky splývají v jedinou. — Ježto je definována vzdálenost jen pro zvláštní polohy bodů, říkáme této rovině rovina semimetrická.

Úvahy o této rovině vypadají již z rámce této práce a přimykají se spíše úvahám obecné projektivní geometrie, která neoperuje vztahy metrickými. Proto se touto rovinou zabývati nebudeme.

Takovým způsobem probrali jsme všechny základní případy klasické geometrie neeuklidovské v rovině. Čtenář, který se o tyto problémy blíže zajímá, snadno naše úvahy zobecní pro neeuklidovský prostor troj- nebo vícerozměrný.

Historické poznámky.

§ 4. Vývoj neeuklidovské geometrie.

Neeuklidovská geometrie vděčí za svůj vznik skepsi o V. postulátu *Euklidovu*. Marná snaha dokázati jej vedla konečně k přesvědčení, že je nedokazatelný. Logickým důsledkem toho byl pokus o systém geometrie, který by tohoto postulátu neobsahoval. Trvalo velice dlouho, než se matematikové tohoto pokusu odvážili. Zmínili jsme se již na příslušných místech o tom, jak mnozí z těch, kteří chtěli dokázati V. postulát, dospěli až ke geometrii hyperbolické, ale neodvážili se tvrditi, že je bezesporná.

Jedním z prvých zakladatelů neeuklidovské geometrie byl *Gauss*. Neuveřejnil však výsledky svých prací. Jsou obsaženy v dopisech, jež byly později publikovány. *Gauss* definoval také rovnoběžky takovým způsobem, že tato definice byla platná i pro geometrii hyperbolickou (IV, 5). Věděl již také, že je možno sestrojiti trojúhelník s libovolně malými úhly. Poznal, že v hyperbolické geometrii neexistují útvary podobné. Chtěje prakticky rozhodnouti, která ze dvou geometrií, euklidovská, či hyperbolická, je platná, měřil úhly trojúhelníka, jehož vrcholy byly Brocken, Inselsberg a Hoher-Hagen. Odchylka součtu úhlů od 180^0 byla však v mezích pozorovacích chyb. — Z jeho současníků zabývali se neeuklidovskou geometrií *Schweikart* (1780—1855) a *Taurinus* (1794—1887). Oba dva (jakož i *Gauss*) poznali, že ve vzorcích této geometrie vystupuje konstanta, blíže neurčená. *Taurinus* odvodil již v podstatě i vzorec pro úhel rovnoběžnosti, ale nevěřil v možnost neeuklidovské geometrie.[1c])

První soustavně propracoval neeuklidovskou geometrii (hyperbolickou) *Lobačevský* (1793—1856); nazval ji pangeometrií, nebo též imaginární geometrií. On vybudoval úplný logický systém této geometrie. V mnoha pojednáních propracoval celou stavbu neeuklidovské geometrie, zvláště pak formule trigonometrické. Východiskem jeho úvah byl předpoklad, že bodem lze vésti k přímce dvě rovnoběžky, které právě oddělují různoběžky od mimoběžek. Je s podivem, jak krásných výsledků se dopracoval, aniž měl tak snadnou pomoc v názoru, jehož jsme používali my, opírajíce se o různá zobrazení neeuklidovské geometrie. — V únoru 1926 bylo tomu právě sto let, kdy předložil svoji práci o neeuklidovské geometrii matematickému oddělení kazaňské university „Exposition succincte des principes de la géométrie avec une démonstration rigoureuse du théorème des parallèles". — Nezávisle od *Lobačevského* objevil a propracoval geometrii neeuklidovskou maďarský důstojník *J. Bolyai* (1802—1860). Od něho pochází řada

1c) Ke svým výsledkům dospěl cestou ryze analytickou, když dosadil do vzorců sférické trigonometrie imaginární poloměr.

konstrukcí (konstrukce rovnoběžek, úsečky příslušné úhlu, kvadratura kruhu, atd., nikoli však tím způsobem, který my jsme naznačili). Geometrie hyperbolická je často podle těchto matematiků zvána geometrií *Lobačevský-Bolyaiovou.*

V době před *Riemannem* šlo vždy jen o geometrii hyperbolickou. To bylo způsobeno předpokladem, který většinou byl mlčky činěn, že přímka je nekonečná. *Riemann* (1826—1866), místo aby vycházel z úvah o nekonečném prostoru, jak to činili jeho předchůdci, postavil se ve své habilatiční přednášce na stanovisko diferenciální. To znamená, že počal studovati geometrii v nekonečně malém okolí bodu. Jako prvý důsledek tohoto postupu objevila se možnost nahraditi pojem přímky nekonečné pojmem přímky neomezené. Analytickým východiskem jeho úvah je kvadratická fundamentální forma. Dokázal, že za určitých předpokladů, které jsou splněny i v euklidovském prostoru, je možno fundamentální formu n-rozměrného prostoru uvésti na tvar

$$\frac{\sum_1^n j\, dx_j^2}{1 + a \sum_1^n j\, x_j^2}.$$

Při tom byla a reálná konstanta. Nyní ovšem bylo nutno rozeznávati případy, kdy a je větší, menší, nebo rovno nule. Konstanta $\frac{1}{a}$ je co do významu ekvivalentní s konstantami k^2, k'^2, kterých jsme užívali v geometrii hyperbolické a eliptické. Podle toho, zda je $a < 0$, > 0, nebo $= 0$, obdržíme geometrii hyperbolickou, eliptickou nebo euklidovskou.[2]) — Eliptickému prostoru říká se někdy též prostor *Riemannův.*

Východisko *Riemannovo* hleděl zdůvodniti *Helmholtz* (1821—1894), když dokazoval, že metrická forma prostoru je za jistých předpokladů, které jsou splněny i v prostoru euklidovském, nutně kvadratická. V jeho pracích je obsažena již myšlenka, že pohyb je vyjádřen grupou transformací. S tohoto stanoviska zabýval se tímto problémem *Lie* (1842—1899), který geometrii hyperbolickou, eliptickou

---

[2]) Měl *Riemann* ve svých úvahách na mysli geometrii eliptickou, či sférickou? To dneska s jistotou nemůžeme říci, neboť obě mají stejnou diferenciální formu fundamentální, a *Riemann* vycházel z úvah diferenciálních!

a euklidovskou definoval jako studium grup, které mají (třeba i v omezeném prostoru) charakter pohybový. — Tím blížíme se již *Kleinově* definici geometrie jako studia invariantů vzhledem ke grupě transformací.

Na tomto místě sluší se zmíniti o *Cayleyově* projektivní metrice. Je to v zásadě studium vztahů polohy nějakého útvaru vzhledem k absolutnímu útvaru (kuželosečce v rovině, kvadrice v prostoru). *Cayley* (1821—1895) studoval projektivní metriku nezávisle na geometrii neeuklidovské.

Hyperbolická geometrie byla již vybudována, ale nebyla v té době ještě názorně prokázána její logická nespornost. Teprve *Beltrami* (1835—1900) při studiu geodetického zobrazení ploch na rovinu dospěl k názoru, že tato geometrie v rovině jest ekvivalentní s geometrií na plochách konstantní záporné míry křivosti. Při geodetickém zobrazení takových ploch dospěl nezávisle od *Cayleye* k projektivní metrice. Ve svých úvahách zabýval se též prostory eliptickými (vlastně sférickými). (VI, 6, odst. 2.)

Odtud byl již jen krok k projektivnímu vyjádření hyperbolické, eliptické a euklidovské geometrie, kterýžto krok učinil *Klein* (1849—1925). On použil projektivní metriky *Cayleyovy*, ale zavedl do ní konstanty k, resp. k', kterých jsme používali. Od něho pochází též pojmenování hyperbolická, eliptická a parabolická geometrie. On též prvý upozornil na rozdíl geometrie eliptické a sférické (VI, 6, odst. 2).

Tím byla stavba neeuklidovské geometrie (hyperbolické a eliptické) principielně ukončena a otevřelo se pole studiu speciálních otázek. To však již nepatří do historických poznámek o této disciplině, spíše do její systematiky. Odkazuji proto čtenáře na pojednání originální, resp. různé monografie *(Clifford, Study, Coolidge, Hjelmsljev, Bonola, Liebmann, Mc Leod* atd.), uvedené v poznámkách bibliografických.

V následujícím paragrafu ukážeme, jak základní myšlenky *Riemannovy, Kleinovy* a *Lieovy* vedly v současné době ke geometrickým systémům, které hyperbolickou a eliptickou geometrii obsahují jako velmi speciální případ.

§ 5. Diferenciální geometrie doby současné.

Východiskem úvah doby současné je jednak diferenciální stanovisko *Riemannovo*, jednak *Kleinova* definice geometrie. Tak podkladem diferenciální projektivní geometrie v n-rozměrném prostoru[2a]) je studium těch vlastností m-rozměrných ploch ($m < n$), které se nemění při projektivní grupě transformací

$$\varrho' x_i = \sum_{1}^{n+1} a_{ij} x_j \qquad (a_{ij} \text{ konst. reálné, } i, j = 1 \ldots n+1).$$

Při tom ony m-rozměrné plochy jsou dány $n+1$ rovnicemi typu

$$x_j = x_j (u_1 \ldots . u_m).$$

Velmi krásných výsledků docílili v této geometrii hlavně *Fubini* a *Čech*.[3])[4]) Poněkud méně obecná je t. zv. diferenciální geometrie afinní, která studuje ty vlastnosti zprvu zmíněných ploch, které jsou invariantní vzhledem k afinní grupě transformací

$$x_k = a_{ko} + \sum_{1}^{n} {}_j\, a_{kj} x_j \qquad (a_{ko},\ a_{kj} = \text{konst. reálné, } j, k = 1 \ldots n)$$

n-rozměrného prostoru. Tato grupa reprodukuje nevlastní ($n - 1$)-rozměrnou rovinu prostoru. Celá řada německých i jiných geometrů se zabývala touto geometrií. Jsou to zejména *Pick, Blaschke, Berwald, Reidemeister, Winternitz, Tzitzeica, Čech* atd.

Geometrie shora jmenované obsaženy jsou jako speciální případy v té geometrii, která studuje invarianty vzhledem k obecné grupě transformací souřadnic n-rozměrného prostoru

$$'x_i = '\varphi_i (x_1 \ldots x_n) \text{ resp. } x_i = \varphi_i ('x_1 \ldots 'x_n) \quad (i = 1, \ldots n)$$

a ke grupě transformací, značících pohyb

$$y_i = \Phi_i (x_1 \ldots x_n, \underset{0}{y_1} \ldots \underset{0}{y_n})$$

($\underset{0}{y_i}$ značí hodnotu y_i právě v bodě zkoumaném).

[2a]) Prvý, kdo použil pojmu prostoru o více dimensích, byl asi *Lagrange* (v „Théorie des fonctions"). Existence t. zv. křivek *Peanových* (a *Hilbertových*) vynutila si přesnou definici pojmu dimense. Počet dimensí je invariantem vzhledem k jistým jednojednoznačným a spojitým transformacím. Bližší údaje najde čtenář téměř v každé učebnici o teorii množství.

[3]) Při té příležitosti upozorňuji na první českou knihu o diferenciální geometrii projektivní: „Projektivní diferenciální geometrie" (Jednota čs. matem. a fys. 1926), jejímž autorem je posledně jmenovaný prof. *Čech.*

[4]) Vedle těchto matematiků nutno jmenovati též *Wilczynskiho*, který činí východiskem svých úvah teorii rovnic diferenciálních.

Tato geometrie musí se nutně omeziti na diferenciální stanovisko *Riemannovo*. Pro zmíněné transformace souřadnic platí v okolí zkoumaného bodu

9) $$d'x_i = \sum_1^n {}_j \frac{\partial' \varphi_i}{\partial x_j} dx_j \qquad dx_j = \sum_1^n {}_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial' x_i} d'x_i .$$

Z toho plyne, že tato geometrie musí uvažovati takové veličiny v_i resp. V_i, které při transformaci souřadnic se transformují podle rovnic

$$'V_i = \sum_1^n {}_j \frac{\partial' \varphi_i}{\partial x_j} V_j , \qquad 'v_j = \sum_1^n {}_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial' x_j} v_i ;$$

pak je totiž výraz

$$\sum_1^n {}_i \, 'V_i \, 'v_i = \sum_1^n {}_{i,j,k} \frac{\partial' \varphi_i}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi_k}{\partial' x_i} V_j v_k = \sum_1^n {}_i V_i v_i$$

invariantní vzhledem k transformacím 9). Veličiny ty nazývají se složky vektorů kontravariantních (V_i), resp. kovariantních (v_i). Grupa pohybová musí býti pak dána rovnicemi

$$V_i = \Phi_i (x_1 \ldots x_n ; \underset{o}{V_1} \ldots \underset{o}{V_n}) , \qquad v_i = \Phi_i' (x_1 \ldots x_n ; \underset{o}{v_1} \ldots \underset{o}{v_n}),$$

nebo, vzhledem k tomu, že tato geometrie je diferenciální,

$$dV_i = \sum_1^n {}_j \Phi_{ij} \, dx_j , \qquad dv_i = \sum_1^n {}_j \Phi'_{ij} \, dx_j .$$

Dosud se tato geometrie zabývala většinou jen takovými rovnicemi pohybovými, v nichž Φ_{ij}, resp. Φ'_{ij} jest lineární funkcí složek V_i, resp. v_j, t. j.

$$\Phi_{ij} = \sum_1^n {}_k \Gamma_{ikj} V_k , \qquad \Phi'_{ij} = \sum_1^n {}_k \Gamma_{kij} v_k .$$

Různou volbou těchto koeficientů obdržíme různé geometrie. Tato metoda jest velmi obecná a v tom spočívá též jedna její nevýhoda, neboť pro problémy speciální není zrovna nejvhodnější. Proto je nutno dříve vytčené metody geometrie projektivní a afinní považovati za rovnocenné s touto metodou.[5]) Skutečným zakladatelem jejím je *Ricci-*

[5]) Tak na př. vhodnou volbou koeficientů Γ, resp. Γ' získáme geometrii afinní, po případě projektivní, jejichž výsledky se takto snadno zobecní. Speciální problémy těchto geometrií je nutno však řešiti metodami jim vlastními, nechceme-li zbytečně kalkul ztěžovati.

Curbastro. Ukázalo se, že je vhodnou pomůckou k matematickým úvahám teorie relativity. Její metody pod názvem absolutní počet diferenciální, nebo též počet *Ricciho* zdokonalili a propracovali zvláště *Levi-Civita, Weyl, Schouten, Struik, Eddington, Cartan* atd.

Kdybychom chtěli touto metodou studovati na př. rovinu hyperbolickou, bylo by nejvýhodnější fundamentální formu předpokládati ve tvaru

$$ds^2 = k^2 \frac{dx_1^2 + dx_2^2}{x_2^2}.$$

Za jistých předpokladů, které jsou splněny nejen v rovině hyperbolické, ale i v euklidovském prostoru na každé ploše v obecném bodě, obdržíme

$$\Gamma_{ijk} + \Gamma'_{ijk} = 0,$$

$$\Gamma_{111} = \Gamma_{212} = \Gamma_{221} = \Gamma_{122} = 0, \quad \Gamma_{211} = -\Gamma_{112} = -\Gamma_{121} = -\Gamma_{222} = -\frac{1}{x_2}.$$

Tyto rovnice mohly býti východiskem našich úvah. Zvolili jsme však jinou cestu z toho důvodu, že je přístupnější.

Kapitola VIII.

ÚVAHY POMOCNÉ.

§ 1. Funkce cyklometrické a hyperbolické.

Definujme číslo e rovnicí

1) $$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\,.\,2} + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots$$

Pomocí e možno vyjádřiti funkce trigonometrické bez ohledu na jejich geometrický význam

2) $$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots \qquad (i = \sqrt{-1})$$
$$\sin x = \frac{i}{2}(e^{-ix} - e^{ix}) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$$

Z těchto rovnic plyne

3) $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, $\quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x$, $\quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Při tom platí

4) $$e^{i(x + 2\varkappa\pi)} = e^{ix}, \qquad e^{x + 2\varkappa\pi i} = e^{x} \qquad (\varkappa \text{ číslo celé } \gtreqless 0),$$

Z rovnice
$$y = \sin x, \text{ resp. } y = \cos x$$
můžeme vyjádřiti x jako funkci y rovnicí
$$x = \arcsin y, \text{ resp. } x = \arccos y,$$

Pro arcsinx platí rozvoj

5) $$\arcsin x = \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\,\frac{x^5}{5} + \ldots$$

Podobně definujeme funkce hyperbolické *Sin* (sinus hyperbolicus), *Cos* (cosinus hyperbolicus) vzorci:

6) $$\mathrm{Cos}\, x = \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x}) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$
$$\mathrm{Sin}\, x = \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x}) = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$$

Z těchto rovnic plynou vztahy

7) $e^x = \mathrm{Cos}\, x + \mathrm{Sin}\, x$, $e^{-x} = \mathrm{Cos}\, x - \mathrm{Sin}\, x$, $\mathrm{Cos}^2 x - \mathrm{Sin}^2 x = 1$.

Pro zvláštní hodnoty $0, \infty$[1]) hyperbolické funkce vyhovují rovnicím

8) $$\mathrm{Sin}\, 0 = 0 \qquad \mathrm{Cos}\, 0 = 1$$
$$\mathrm{Sin}\, \infty = \infty \qquad \mathrm{Cos}\, \infty = \infty$$

Z rovnice
$$y = \mathrm{Sin}\, x, \text{ resp. } y = \mathrm{Cos}\, x$$
můžeme vyjádřiti x jako funkci y rovnicí
$$x = \mathrm{arc\,Sin}\, y, \text{ resp. } x = \mathrm{arc\,Cos}\, y.$$

Diferenciací rovnic 6) plyne

9) $$d\,\mathrm{Sin}\, x = \mathrm{Cos}\, x\, dx, \qquad d\,\mathrm{Cos}\, x = \mathrm{Sin}\, x\, dx.$$

Hyperbolické a goniometrické funkce jsou vázány rovnicemi, jež obdržíme srovnáním rovnic 2), 6)

10) $$i\,\mathrm{Sin}\, x = \sin i x, \qquad \mathrm{Cos}\, x = \cos i x.$$

Z této rovnice a rovnice 5) obdržíme pro arc Sin rozvoj

5') $$\mathrm{arc\,Sin}\, x = \frac{x}{1} - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{x^5}{5} - \dots$$

§ 2. Přirozený logaritmus.

Uvažujme komplexní proměnnou $z = x + iy$, $(i = \sqrt{-1})$. Můžeme ji též vyjádřiti rovnicí $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, kde $r = \left|\sqrt{x^2 + y^2}\right|$.[1a])

Komplexní funkce w, která vyhovuje rovnici
$$e^w = z,$$
nazývá se **přirozený logaritmus** proměnné z. Značíme ji
$$w = \log z;$$

---

[1]) Symbol ∞ zavádíme definitoricky pro označení **potenciálního** nekonečna (t. j. nikoliv konstanty). Jeho vysvětlení je obsaženo ve větě: „Blíží-li se argument x funkce $f(x)$ neomezeně nějaké hodnotě x_0 a hodnota funkce $f(x)$ při tom roste nade všechny meze, zavádíme symbol ∞ rovnicí $f(x_0) = \infty$. — Tento symbol pro potenciální nekonečno liší se zásadně od symbolu ∞^n $(n \geq 1)$, užívaného pro určité **aktuální** nekonečno (konstantu) k vyjádření pojmu, který za určitých předpokladů odpovídá „naivní“ představě „dimense“. Říkáme na příklad, že všech funkcí $ax + by + 1$, $(a, b$, const reálné) je ∞^2, nebo též že všech přímek reálných v rovině je ∞^2 atp.

[1a]) $\left|\sqrt{x^2 + y^2}\right|$ čti: absolutní hodnota odmocniny z $x^2 + y^2$.

w je dáno rovnicí

11) $$w = \log(x + iy) = \overline{\log}\, r + i\varphi + 2\varkappa\pi i,$$

kde $\varkappa$ je libovolné celé, reálné číslo a $\overline{\log}$ značí v tomto případě logaritmus v obvyklém smyslu aritmetickém. Známe-li jednu hodnotu funkce w, obdržíme ostatní přičtením celočíselného násobku čísla $2\pi i$. Proto říkáme, že funkce w je mnohoznačná. Pro $\varkappa = 0$ obdržíme t. zv. hlavní hodnotu w_h:

12) $$w_h = \overline{\log}\, r + i\varphi.$$

Je-li $y = 0$ a $x > 0$ reálné, rovnice 11) nám skýtá

13 a) $$\log x = \overline{\log}\, x + 2\varkappa\pi i, \qquad (y = 0,\ x > 0 \text{ reálné})$$

Pro $y = 0$ a $x < 0$ reálné obdržíme z 11)

13 b) $$\log x = \overline{\log}\, |x| + (2\varkappa + 1)\pi i, \qquad (y = 0,\ x < 0 \text{ reálné}).$$

Hlavní hodnoty těchto funkcí jsou

13′ a) $$\log x = \overline{\log}\, x$$

resp.

13′ b) $$\log x = \overline{\log}\, |x| + \pi i.$$

Mezi ∞^1 hodnotami pro přirozený logaritmus čísla kladného je jen jedna reálná. Přirozený logaritmus čísla záporného je vždy imaginárný. Je-li z tvaru

14) $$z = \frac{a + bi}{a - bi},$$

kde a, b jsou čísla reálná, je vždy $r = 1$ a tudíž

15) $$\log z = i(\varphi + 2\varkappa\pi).$$

§ 3. Systémy souřadné.

1. Souřadnice bimetrické. Uvažujme dva body o' a o'' na přímce P. Poměr vzdáleností (braných algebraicky) libovolného bodu x na P od bodů o' a o'' určuje tento bod jednoznačně. Označme tyto vzdálenosti b', resp. b''. Jsou-li c', resp. c'' dvě libovolné, od nuly různé konstanty, pak i poměr

$$\frac{b'}{c'} : \frac{b''}{c''} = x_1 : x_2$$

tento bod x jednoznačně stanoví. Čísla x_1, x_2 jmenujeme homogenními bimetrickými souřadnicemi bodu x na přímce. (Lépe v „přímé řadě bodové".) Je zřejmé, že čísla ϱx_1, ϱx_2 a σx_1, σx_2 stanoví svým poměrem týž bod, i když $\varrho \neq \sigma$, $\varrho, \sigma \neq 0$. Body o', resp. o'' (tak zvané body základní) mají souřadnice

$$\begin{array}{ll} o'' \ldots\ldots\ldots \varrho,\ 0 & \text{nebo}\ 1,\ 0 \\ o' \ldots\ldots\ldots 0,\ \varrho & \phantom{\text{nebo}}\ 0,\ 1 \end{array}$$

Na přímce existuje jediný bod (tak zvaný jednotkový), jehož souřadnice jsou 1, 1. Bod o souřadnicích 0, 0 na přímce neexistuje.

Zvolme bod mimo přímku P a promítněme z něho body o', o'', x paprsky O', O'', X. Čísla x_1, x_2 určují svým poměrem jednoznačně paprsek X spojující střed promítání s bodem x. Souřadnicím x_1 resp. x_2 říkáme v tomto případě homogenní bimetrické souřadnice paprsku ve svazku paprsků. (Svazek paprsků, přesněji „lineární svazek paprsků", je souhrn všech paprsků, procházejících jedním bodem.) Platí o nich věty odvozené pro bimetrické souřadnice na přímce. (Tyto souřadnice můžeme ovšem odvoditi též přímo z vlastností svazku, aniž bychom si pomáhali nějakou, ostatně zcela libovolnou přímkou, která svazku nepatří.)

2. Souřadnice trimetrické. Uvažujme trojúhelník o vrcholech o', o'', o''' a stranách $O' \equiv \overline{o''o'''}$, $O'' \equiv \overline{o'''o'}$, $O''' \equiv \overline{o'o''}$. Poměr vzdáleností libovolného bodu roviny trojúhelníka od stran O', O'', O''' určuje tento bod jednoznačně. Označme tyto vzdálenosti b', b'', b'''. Jsou-li c', c'', c''' tři libovolné, od nuly různé konstanty, pak i poměr

$$\frac{b'}{c'} : \frac{b''}{c''} : \frac{b'''}{c'''} = x_1 : x_2 : x_3$$

tento bod jednoznačně stanoví. Číslům x_1, x_2, x_3 říkáme homogenní trimetrické souřadnice bodové v rovině. Je zřejmé, že čísla ϱx_i a σx_i ($i = 1, 2, 3$) stanoví týž bod i při $\varrho \neq \sigma$, ϱ, $\sigma \neq 0$. Vrcholy o', o'', o''' (tak zvané body základní) mají souřadnice

$$\begin{array}{ll} o' \ldots\ldots\ldots \varrho,\ 0,\ 0 & \phantom{\text{nebo}}\ 1,\ 0,\ 0 \\ o'' \ldots\ldots\ldots 0,\ \varrho,\ 0 & \text{nebo}\ 0,\ 1,\ 0 \\ o''' \ldots\ldots\ldots 0,\ 0,\ \varrho & \phantom{\text{nebo}}\ 0,\ 0,\ 1 \end{array}$$

V rovině existuje jediný bod, jehož souřadnice jsou v poměru

$$x_1 : x_2 : x_3 = 1 : 1 : 1.$$

Říkáme mu bod jednotkový. Bod o souřadnicích 0, 0, 0 v rovině neexistuje.

Rovinná křivka m-tého stupně je v těchto souřadnicích určena rovnicí

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0$$

kde f je homogenní funkcí stupně m-tého v proměnných. Podle toho je rovnice přímky lineární a homogenní. Pišme ji ve tvaru

$$X_1 x_1 + X_2 x_2 + X_3 x_3 = 0. \tag{16}$$

Prochází-li tato přímka dvěma body z, t (t. j. body, jichž souřadnice jsou z_1, z_2, z_3 a t_1, t_2, t_3), musí rovnice 16) souřadnicím těchto bodů vyhovovati. Je tedy rovnice 16) ekvivalentní s rovnicí

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ t_1 & t_2 & t_3 \end{vmatrix} = x_1 (z_2 t_3 - z_3 t_2) + x_2 (z_3 t_1 - z_1 t_3) + x_3 (z_1 t_2 - z_2 t_1) = 0. \tag{17}$$

Porovnáním 16) a 17) získáme

$$X_1 : X_2 : X_3 = z_2 t_3 - z_3 t_2 : z_3 t_1 - z_1 t_3 : z_1 t_2 - z_2 t_1. \tag{17'}$$

Označme obecně determinant $\begin{vmatrix} z_i & z_j \\ t_i & t_j \end{vmatrix} = z_i t_j - z_j t_i$, $(i, j = 1, 2, 3)$ symbolem $[z_i t_j]$.

Rovnice 17') jsou ekvivalentní s relacemi

$$\varrho X_1 = [z_2 t_3], \quad \varrho X_2 = [z_3 t_1], \quad \varrho X_3 = [z_1 t_2] \quad (\varrho \neq 0). \tag{18}$$

Čísla X_1, X_2, X_3 určují svým poměrem jednoznačně přímku, spojující body z a t. Říkáme jim přímkové homogenní souřadnice trimetrické v rovině. — Rovnice bodu, který je průsečíkem přímek Z (Z_1, Z_2, Z_3) a $T (T_1, T_2, T_3)$ jest obdobně se 17),

$$\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \\ T_1 & T_2 & T_3 \end{vmatrix} = X_1 [Z_2 T_3] + X_2 [Z_3 T_1] + X_3 [Z_1 T_2] = 0. \tag{19}$$

§ 4. **Projektivní příbuznost.**

Uvažujme v prostoru dvě libovolné roviny. Trimetrické souřadnice bodu v jedné rovině označme x_1, x_2, x_3, v druhé $'x_1, 'x_2, 'x_3$. Jsou-li body obou rovin si tak přiřazeny, že platí rovnice

$$\begin{aligned} \varrho\, 'x_1 &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 \\ \varrho\, 'x_2 &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 \\ \varrho\, 'x_3 &= a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 \end{aligned} \tag{20}$$

(a_{ij} = reálná konst., $i, j = 1, 2, 3$, $\varrho \neq 0$ koef. úměrnosti), říkáme, že obě roviny jsou ve vztahu či příbuznosti projektivní. Při tom předpokládáme, že determinant soustavy

$$21)\qquad D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

je od nuly různý. Za tohoto předpokladu můžeme řešiti rovnice podle x. Získáme tak rovnice inversní

$$22)\qquad \begin{aligned} \sigma x_1 &= A_{11}\,'x_1 + A_{21}\,'x_2 + A_{31}\,'x_3 \\ \sigma x_2 &= A_{12}\,'x_1 + A_{22}\,'x_2 + A_{32}\,'x_3 \quad (\sigma \neq 0 \text{ koef. úměrnosti}). \\ \sigma x_3 &= A_{13}\,'x_1 + A_{23}\,'x_2 + A_{33}\,'x_3 \end{aligned}$$

Zde jest A_{ij} algebraický doplněk v determinantu D, příslušný k a_{ij}, dělený D. Tedy na příklad

$$D A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad D A_{21} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \text{atd.}$$

Rovnicím 20), 22) říkáme rovnice transformační, krátce transformace. Pomocí jich odvodíme i transformace přímkových souřadnic. Podle 20) jest až na konstantní faktor

$$['z_2\,'t_3] = \sum_{i,j=1}^{3} a_{2i}\, a_{3j}\, [z_i t_j] = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{3} \begin{vmatrix} a_{2i} & a_{3i} \\ a_{2j} & a_{3j} \end{vmatrix} [z_i t_j]\,.$$

Transformuje se tedy X_1 podle

$$23)\qquad \varkappa\,'X_1 = A_{11}X_1 + A_{13}X_2 + A_{13}X_3 \quad (\varkappa \neq 0 \text{ koef. úměrnosti}).$$

Podobně odvodíme

$$23')\qquad \begin{aligned} \varkappa' X_2 &= A_{21}X_1 + A_{22}X_2 + A_{23}X_3 \\ \varkappa' X_3 &= A_{31}X_1 + A_{32}X_2 + A_{33}X_3\,. \end{aligned}$$

Souřadnice bodové transformují se podle 20), přímkové podle 23).

Když jednu rovinu přemístíme tak, aby splynula s rovinou druhou, rovnice definují projektivní příbuznost dvou rovin soumístných. Místo toho říkáme, že rovnice 20) definují projektivní příbuznost dvou soustav soumístných.

V takových soustavách je nasnadě otázka, zda existují body, jež odpovídají samy sobě? Existuje-li takový bod $x \equiv {}'x$, musí jeho souřadnice vyhovovati rovnicím 20), jež můžeme psáti ve tvaru

$$23'')\qquad \begin{aligned} (a_{11} - \varrho)\, x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \varrho)\, x_2 + a_{23}x_3 &= 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33} - \varrho)\, x_3 &= 0\,. \end{aligned}$$

Tento systém rovnic má jen tenkráte řešení nenulové (t. j. alespoň jedna souřadnice jest od nuly různá), když

$$\text{24)} \qquad \begin{vmatrix} a_{11}-\varrho, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}-\varrho, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}-\varrho \end{vmatrix} = 0.$$

Rovnice 24) je třetího stupně v ϱ a jejím řešením obdržíme tudíž tři kořeny ϱ', ϱ'', ϱ''' obecně různé. Každému kořenu ϱ odpovídá obecně[7] jeden bod $x \equiv {}'x$. Těmto třem bodům říkáme samodružné body soumístných soustav projektivních. Dvě soustavy soumístné projektivní mají obecně tři body samodružné. Tyto body mohou ve zvláštním případě různě splývati. (Také jich může býti nekonečně mnoho.) Přímka, spojující dva body samodružné, má tu vlastnost, že kterýkoli její bod transformuje se do bodu téže přímky. Říkáme, že se tato přímka při transformaci 20) reprodukuje.

Aby projektivní příbuznost 20) byla stanovena, potřebujeme znáti koeficienty a_{ij}, to je zdánlivě devět údajů. Ježto však bod je určen poměrem svých souřadnic, stačí znáti poměr těchto devíti koeficientů, čili osm údajů. Říkáme, že je v rovině celkem ∞^8 projektivních příbuzností. Potřebných osm údajů získáme, když čtyřem libovolným bodům jedné soustavy přiřadíme čtyři libovolné body soustavy druhé. Získáme tak čtyři dvojice rovnic typu

$$\frac{'x_1}{'x_3} = \frac{b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3}{b_{31}x_1 + b_{32}x_2 + b_{33}x_3}, \quad \frac{'x_2}{'x_3} = \frac{b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3}{b_{31}x_1 + b_{32}x_2 + b_{33}x_3}; \left(b_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{33}}\right).$$

Z nich vypočteme hodnoty b_{ij}, jichž je jen osm neznámých, neboť $b_{33} = 1$.

Poznámka. Co jsme dokázali o soumístných soustavách rovinných, platí s malými obměnami i pro soumístné projektivní soustavy bodů na přímce, resp. pro dva projektivní lineární svazky paprskové. Projektivní vztah je v tomto případě stanoven rovnicemi

$$\begin{aligned} \varrho' x_1 &= d_{11}x_1 + d_{12}x_2 \qquad & (d_{11}d_{22} - d_{12}d_{21} \neq 0, \\ \varrho' x_2 &= d_{21}x_1 + d_{22}x_2 \qquad & d_{ij} = \text{reálná konst. } i, j = 1, 2). \end{aligned}$$

Je tedy ∞^3 těchto projektivností. Obecně dvě takové projektivnosti mají dva body (resp. dva paprsky) samodružné.

§ 5. Grupa transformací.

Rovnice 20) označujeme též symbolicky takto

$$\text{20}') \qquad 'x = T_a\, x.$$

Tuto rovnici čteme: Bodu x je přiřazen projektivní transformací o koeficientech a_{ij} bod $'x$. Je zřejmé, v čem spočívá výhoda tohoto označení. Můžeme totiž krátce vyznačiti různé projektivní transformace. Tak na příklad rovnice

$$'x = T_c x$$

znamená, že jsme bodu x přiřadili bod $'x$ nějakou projektivní transformací o koeficientech c_{ij} (které mohou býti různé, ale případně i stejné s koeficienty prve zmíněné transformace). — Rovnici 22) značíme symbolicky

$$x = T_a^{-1}\,'x\,. \tag{22'}$$

Takovým způsobem označení jest ihned vystižena souvislost transformace původní 20′) a jí inversní 22′). Mezi všemi transformacemi je jedna t. zv. transformace i d e n t i c k á. Obdrželi bychom ji třeba z transformace 20) za předpokladu, že $a_{11} = a_{22} = a_{33} \neq 0$ a ostatní koeficienty $= 0$. Taková transformace identická přiřazuje bodu x opět týž bod x. Symbolicky značíme tuto transformaci rovnicí

$$x = T_o x\,.$$

Přiřaďme bodu x bod $'x$ transformací 20′) a bodu $'x$ bod $''x$ transformací $''x = T_f\,'x$. Obdržíme tak bod $''x$ po dvou transformacích, což značíme symbolicky

$$''x = T_f\,T_a\,x\,.$$

Může se státi, že k bodu $''x$ bychom dospěli též jen jedinou transformací, třeba $''x = T_g\,x$. Můžeme v takovém případě psáti

$$''x = T_g\,x = T_f\,T_a\,x\,.$$

Symbol x je v posledních dvou členech zbytečný a proto jej příště již psáti nebudeme.

V minulém paragrafu jsme dokázali, že je celkem ∞^8 projektivních transformací. Splňují-li tyto transformace podmínky, jichž symbolický tvar je

$$a)\ T_e\,T_f = T_g\,, \qquad b)\ T_e(T_f\,T_g) = (T_e\,T_f)\,T_g\,, \qquad c)\ T_e\,T_o = T_o\,T_e = T_e\,,$$
$$d)\ T_e\,T_e^{-1} = T_e^{-1}\,T_e = T_o\,,$$

říkáme, že tvoří o s m i m o c n o u g r u p u projektivních transformací, krátce o s m i m o c n o u p r o j e k t i v n í g r u p u.

Podmínky *a), b), c), d)* vyjádříme slovy takto:

a) Dvě transformace můžeme vždy nahraditi jedinou. (Tudíž i libovolný konečný počet transformací můžeme nahraditi jedinou.)

b) Výsledek tří transformací je nezávislý na tom, které dvě transformace po sobě jdoucí nahradíme jedinou. (Tak zv. zákon asociativní.)

c) Uvažované transformace obsahují též transformaci identickou.

d) Ke každé z uvažovaných transformací můžeme udati transformaci inversní.

Každá grupa, obsažená v grupě G_8, nazývá se její podgrupou. Taková podgrupa grupy G_8 může, ale nemusí býti méně než osmimocná. Obdržíme ji, když transformacím 20) grupy G_8 předepíšeme nějaké podmínky tak, že *a), b), c), d)* jsou i potom v platnosti. Na př. můžeme žádati, aby grupa G_8 reprodukovala nějakou kuželosečku, t. j. aby body této kuželosečky se transformovaly transformacemi 20) opět do bodů na téže kuželosečce. (Tato podgrupa projektivní grupy jest trojmocná G_3.)

Uvažujme o libovolném útvaru v rovině. Jest možno, že některé vlastnosti tohoto útvaru se transformacemi 20) nemění. Takovým vlastnostem říkáme invariantní vlastnosti útvaru vzhledem k transformaci 20). Matematickému vyjádření invariantní vlastnosti říkáme invariant transformace.[2]) Projektivním invariantem nazýváme invariant transformací 20), tvořících projektivní grupu. Projektivní invariant jest zároveň invariantem každé podgrupy z grupy projektivní. Obráceně to však platiti nemusí. Projektivní invariant podgrupy nemusí býti invariantem grupy. Tak jest na příklad výraz

$$\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_3}\right)^2$$

invariantem podgrupy G_1

$$\begin{aligned}\varrho' x_1 &= x_1 a \cos \alpha + x_2 a \sin \alpha \\ \varrho' x_2 &= x_1 a \sin \alpha - x_2 a \cos \alpha \\ \varrho' x_3 &= a x_3,\end{aligned}$$

nikoliv však projektivním invariantem.[3])

Pro nás je důležitý projektivní invariant, nazvaný dvojpoměr čtyř bodů (resp. čtyř přímek). Jsou-li na přímce

---

[2]) Tato věta není definicí invariantu, vystihuje však dostatečně pro náš účel, co rozumíme slovem invariant.

[3]) Invariant může obsahovati souřadnice bodové, přímkové, případně i nějaké konstanty. V teorii invariantů se rozeznávají jmény invarianty, které obsahují určité z právě vytčených veličin.

čtyři body a, b, c, d, nazýváme dvojpoměrem těchto čtyř bodů podíl poměrů vzdáleností

$$\frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd} .$$

Dvojpoměr ten značíme $(abcd)$. Chceme-li jej vyjádřiti souřadnicemi, stačí předpokládati, že body a, b, c, d leží třeba na přímce $x_3 = 0$:

$$a(a_1, a_2, 0), \quad b(b_1, b_2, 0), \quad c(c_1, c_2, 0), \quad d(d_1, d_2, 0).$$

Snadným výpočtem získáme

$$(a\,b\,c\,d) = \frac{[a_1\,c_2]\,[b_1\,d_2]}{[b_1\,c_2]\,[a_1\,d_2]} = (c\,d\,a\,b). \tag{25}$$

Podobně je dvojpoměr čtyř paprsků A, B, C, D

$$(A\,B\,C\,D) = \frac{\sin(A\,C)}{\sin(B\,C)} : \frac{\sin(A\,D)}{\sin(B\,D)} = (C\,D\,A\,B). \tag{26}$$

Jsou-li souřadnice těchto paprsků, jdoucích bodem o rovnici $X_3 = 0$,

$$A(A_1, A_2, 0), \quad B(B_1, B_2, 0), \quad C(C_1, C_2, 0), \quad D(D_1, D_2, 0),$$

snadno vypočteme

$$(A\,B\,C\,D) = \frac{[A_1\,C_2]\,[B_1\,D_2]}{[B_1\,C_2]\,[A_1\,D_2]} . \tag{26'}$$

Je-li $(a\,b\,c\,d) = -1$, říkáme, že tyto čtyři body jsou harmonické, nebo též, že body c, d oddělují harmonicky body a, b. Totéž říkáme o přímkách, je-li příslušný dvojpoměr roven -1.

Dvojpoměr čtyř paprsků nám poslouží ke stanovení trimetrických souřadnic bodových. Označme paprsky, spojující jednotkový bod j a obecný bod x s vrcholem o' základního trojúhelníka, P′, resp. I' (obr. 1 *a*).

Z definice dvojpoměru čtyř paprsků rovnicí 26) plyne, že

$$(O''\,O'''P'\,I') = \frac{\overline{xx''}}{\overline{xx'''}} : \frac{\overline{jj''}}{\overline{jj'''}} .$$

Ale pro souřadnice bodů x a j platí podle odst. 2, § 3

$$\varrho x_2 = \frac{\overline{xx''}}{c''}, \quad \varrho x_3 = \frac{\overline{xx'''}}{c'''}, \quad \varrho j_2 = \frac{\overline{jj''}}{c''}, \quad \varrho j_3 = \frac{\overline{jj'''}}{c'''}, \quad j_2 = j_3$$

a tudíž

$$(O''\,O'''\,P'\,I') = \frac{x_2 c''}{x_3 c'''} : \frac{j_2 c''}{j_3 c'''} = \frac{x_2}{x_3} : \frac{j_2}{j_3} = \frac{x_2}{x_3} : \frac{1}{1} = \frac{x_2}{x_3} .$$

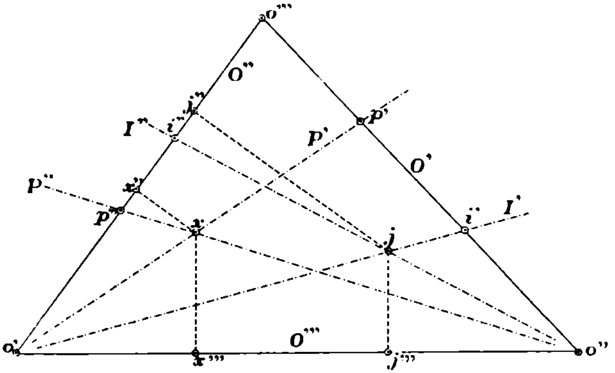
Podobně bychom dokázali

$$(O' O'' P' I'') = \frac{x_1}{x_3}.$$

Poměr souřadnic trimetrických

$$x_1 : x_2 : x_3 = (O' O''' P'' I'') : (O'' O''' P' I') : 1$$

se tedy nemění projektivní transformací. Proto těmto souřadnicím také říkáme **projektivní souřadnice homogenní.**



Obr. 1 *a*).

Obr. 1 *b*).

Čtenář snadno nahlédne, že poměry $\frac{x_1}{x_3}$, $\frac{x_2}{x_3}$ jsou podle předcházejících výsledků též

$$\frac{x_1}{x_3} = (o''' o' p'' i''), \quad \frac{x_2}{x_3} = (o''' o'' p' i').$$

Je-li O''' úběžnou přímkou zkoumané roviny, můžeme vhodnou volbou jednotkového bodu (t. j. volbou konstant $c' : c'' : c'''$) dosáhnouti, že $\frac{x_1}{x_3}$, $\frac{x_2}{x_3}$ jsou tak zvané cartézské souřadnice (kosoúhlé). Jsou-li osy $O'' \perp O'$, získáme pravoúhlé souřadnice cartézské, které čtenář již zná v označení $x = \frac{x_1}{x_3}$, $y = \frac{x_2}{x_3}$.

Poznámka. Podobným způsobem můžeme dokázati, že i bimetrické souřadnice x_1, x_2 bodu na přímce jsou projektivní (obr. 1 *b*). Pro tyto souřadnice platí

$$\varrho x_1 = \frac{\overline{x o'}}{c'}, \quad \varrho x_2 = \frac{\overline{x o''}}{c''}, \quad \varrho j_1 = \frac{\overline{j o'}}{c'}, \quad \varrho j_2 = \frac{\overline{j o''}}{c''}, \quad j_1 = j_2$$

a tudíž

$$(o'o''xj) = \frac{\overline{xo'}}{\overline{xo''}} : \frac{\overline{jo'}}{\overline{jo''}} = \frac{c'x_1}{c''x_2} : \frac{c'j_1}{c''j_2} = \frac{x_1}{x_2},$$

čímž důkaz proveden. Úplnou analogii pro souřadnice přímky ve svazku přenechávám čtenáři.

§ 6. Formy kvadratické.

1. Polární proces. Výraz druhého stupně v proměnných x_1, x_2, x_3

$$27) \quad {}^3f \equiv g_{11}x_1^2 + g_{22}x_2^2 + g_{33}x_3^2 + 2(g_{12}x_1x_2 + g_{13}x_1x_3 + g_{23}x_2x_3)$$

nazývá se ternární forma kvadratická. Při tom předpokládáme, že alespoň jeden z konstantních koeficientů $g_{ij} = g_{ji}$ $(i, j = 1, 2, 3)$ jest od nuly různý. V dalším budeme se zabývati jen takovými formami, u nichž všechny koeficienty jsou reálné a determinant

$$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}$$

od nuly různý.

Položme ${}^3f = 0$. Rovnice

$$28) \quad g_{11}x_1^2 + g_{22}x_2^2 + g_{33}x_3^2 + 2g_{12}x_1x_2 + 2g_{13}x_1x_3 + 2g_{23}x_2x_3 = 0$$

představuje kuželosečku, třeba v souřadnicích projektivních. Body v rovině kuželosečky, z nichž lze vésti dvě reálné tečny, nazveme body vně kuželosečky. Z bodu uvnitř kuželosečky lze vésti jen dvě tečny imaginárné. Body, které jsou buď vně, nebo uvnitř kuželosečky, nazveme společně body mimo kuželosečku. Zvolme libovolný bod mimo kuželosečku o souřadnicích y_1, y_2, y_3. Operace

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\, {}^3f}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial\, {}^3f}{\partial x_2} y_2 + \frac{\partial\, {}^3f}{\partial x_3} y_3\right)$$

nazývá se polární proces. Forma, která tímto polárním procesem vznikne

$${}^3f_1 \equiv (g_{11}y_1 + g_{12}y_2 + g_{13}y_3)x_1 + (g_{21}y_1 + g_{22}y_2 + g_{23}y_3)x_2 + (g_{31}y_1 + \\ + g_{32}y_2 + g_{33}y_3)x_3,$$

nazývá se první polární formou formy ${}^3f$. Položíme-li ${}^3f_1 = 0$, rovnice

$$(g_{11}y_1 + g_{12}y_2 + g_{13}y_3)x_1 + (g_{21}y_1 + g_{22}y_2 + g_{23}y_3)x_2 + (g_{31}y_1 + \\ + g_{32}y_2 + g_{33}y_3)x_3 = 0$$

představuje poláru bodu y vzhledem ke kuželosečce 28). (Polárou bodu y vzhledem ke kuželosečce nazýváme spojnici dotyčných bodů tečen z bodu y ke kuželosečce vedených.)

Rovnice 28) představuje kuželosečku v souřadnicích bodových. Táž kuželosečka v souřadnicích přímkových má rovnici

$$28') \qquad {}^3F = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & X_1 \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & X_2 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & X_3 \\ X_1 & X_2 & X_3 & 0 \end{vmatrix} \equiv \begin{aligned} &G_{11}X_1^2 + G_{22}X_2^2 + G_{33}X_3^2 + 2G_{12}X_1X_2 + \\ &+ 2G_{13}X_1X_3 + 2G_{23}X_2X_3 = 0. \end{aligned}$$

Této rovnici říkáme též někdy tečnová rovnice kuželosečky. Bodová rovnice kuželosečky představuje tuto jako geometrické místo bodů. Tečnová rovnice kuželosečky ji představuje jako obálku přímek (tečen). Je-li determinant d bodové rovnice rozdílný od nuly, pak je i determinant

$$D = \begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Zvolme libovolnou přímku Y, která není tečnou naší kuželosečky. Polární forma

$$^3F_1 \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\, {}^3F}{\partial X_1} Y_1 + \frac{\partial\, {}^3F}{\partial X_2} Y_2 + \frac{\partial\, {}^3F}{\partial X_3} Y_3\right) = (G_{11}Y_1 + G_{12}Y_2 + G_{13}Y_3)X_1 +$$
$$+ (G_{21}Y_1 + G_{22}Y_2 + G_{23}Y_3)X_2 + (G_{31}Y_1 + G_{32}Y_2 + G_{33}Y_3)X_3$$

skýtá nám rovnici bodu $^3F_1 = 0$, který jest **pólem** poláry Y vzhledem ke kuželosečce.

Je-li v ^3f $x_3 = 0$, získáme formu **binární** kvadratickou

$$^2f \equiv g_{11}x_1^2 + 2g_{12}x_1x_2 + g_{22}x_2^2.$$

Položíme-li $^2f = 0$, získáme rovnici dvou bodů na přímce $x_3 = 0$:

$$29) \qquad g_{11}x_1^2 + 2g_{12}x_1x_2 + g_{22}x_2^2 = 0.$$

Polární proces provedený na tuto formu nám skýtá rovnici bodu, který s bodem y $(y_1, y_2, 0)$ je harmonicky oddělován body 29). Interpretaci duální (t. j. pro dva paprsky ve svazku) přenechávám čtenáři.

2. **Kanonický tvar formy binární.** Kanonickým tvarem rovnice 29) nazýváme ten její obecný tvar, při kterém je nejmenší počet koeficientů. Obdržíme jej z rovnice 29), když vhodně volíme systém souřadný. Levou stranu takové rovnice nazýváme kanonický tvar formy

binární. Dokážeme, že kanonický tvar binární formy jest možno psáti (až na faktor úměrnosti)

30) buď $x_1^2 - x_2^2$, nebo $x_1^2 + x_2^2$.

K důkazu zvolme za body základní na přímce takové body o' a o'', které jsou harmonicky oddělovány body danými (rovnicí 29). Polární forma k 29) jest

$$^2f_1 = (g_{11}x_1 + g_{12}x_2)y_1 + (g_{12}x_1 + g_{22}x_2)y_2.$$

Rovnici $^2f_1 = 0$ mají vyhovovati souřadnice bodů o' a o'', t. j. (1, 0) a (0, 1).

$$(g_{11}1 + g_{12}0)0 + (g_{12}1 + g_{22}0)1 = 0.$$

Musí tedy býti $g_{12} = 0$. Podle toho možno rovnici 29) vždy psáti

29') $\frac{g_{11}}{g_{22}} x_1^2 + x_2^2 = 0.$

Při obecné poloze jednotkového bodu mají zkoumané body souřadnice

$$\frac{x_1}{x_2} = \pm i \sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}}.$$

Vhodnou volbou jednotkového bodu můžeme vždy dosáhnouti, že je $\frac{g_{22}}{g_{11}} = -1$, nebo $\frac{g_{22}}{g_{11}} = +1$ [3a]).

Tím je naše tvrzení dokázáno.

3. Kanonické tvary formy ternární. Kanonickým tvarem rovnice 28) nazýváme ten její tvar, při kterém vystupuje nejmenší počet koeficientů. Levou stranu tak upravené rovnice nazýváme kanonický tvar formy ternární. Rozeznáváme dva kanonické tvary formy ternární. Prvý je kanonický tvar polární, který možno psáti

31) $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$, nebo $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$,

[3a]) Jsou-li body zkoumané reálné, stačí voliti konstantu $c' : c''$ určující jednotkový bod tak, aby $\left(\frac{c'}{c''}\right)^2 = -\frac{b_1' b_2'}{b_1'' b_2''}$, při čemž b_1', b_1'' resp. b_2' b_2'' jsou vzdálenosti bodů 29) od bodů o', o''.

Jsou-li však zkoumané body imaginárně sdružené, volíme příslušnou konstantu podle rovnice

$$\left(\frac{c'}{c''}\right)^2 = \frac{b_1' b_2'}{b_1'' b_2''}.$$

druhý, kanonický tvar **tečnový** možno psáti

$$32) \qquad x_1^2 - x_2 x_3 .$$

Ukážeme nejprve, jak je možno získati vhodnou volbou souřadného systému kanonický tvar polární. Zvolíme souřadný trojúhelník tak, aby byl polárním trojúhelníkem dané kuželosečky (rovnicí 28).[4])

Aplikujeme-li úvahu předešlého odstavce, získáme rovnici kuželosečky ve tvaru

$$33) \qquad g_{11} x_1^2 + g_{22} x_2^2 + g_{33} x_3^2 = 0 .$$

Nechť tato kuželosečka je reálná (při $g_{11} > 0$, $g_{22} > 0$, $g_{33} < 0$), nebo imaginární (g_{11}, g_{22}, $g_{33} > 0$), vždy jedna ze stran souřadného polárního trojúhelníka ji protíná v bodech imaginárně sdružených. Nechť je to třeba strana O'''. Podle poznámky [3]) předcházejícího odstavce můžeme vhodnou volbou konstanty $c' : c''$ dosáhnouti, že tyto průsečné body mají souřadnice

$$i : 1 : 0 , \qquad i : -1 : 0 ,$$

t. j. $g_{11} : g_{22} = 1$. Podle toho je vždy možno rovnici kuželosečky psáti

$$33') \quad \text{buď} \quad x_1^2 + x_2^2 - g_{33} x_3^2 = 0 , \quad \text{nebo} \quad x_1^2 + x_2^2 + g_{33} x_3^2 = 0 .$$

Jednotkový bod určen je však poměrem tří konstant c', c'', c'''. Můžeme proto ještě vhodně voliti poměr $c' : c'''$. Ten zvolíme tak (opět podle poznámky citované), aby průsečíky přímky O'' měly souřadnice

$$1 : 0 : 1 , \qquad 1 : 0 : -1$$

v případě kuželosečky reálné, nebo

$$i : 0 : 1 , \qquad i : 0 : -1$$

v případě kuželosečky imaginární. Je tudíž při této volbě v obou případech $g_{33} = 1$. Rovnice kuželosečky v kanonickém tvaru polárném je pak skutečně

$$33'') \quad \text{buď} \quad x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0 , \quad \text{nebo} \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 .$$

V prvém případě je kuželosečka reálná, v druhém imaginární. Rovnicí 33'') je prvá část našeho tvrzení dokázána.

Máme-li dokázati druhou část našeho tvrzení (o kanonickém tvaru tečnovém), volíme bod o' sice opět pólem

---

[4]) Polární trojúhelník dané kuželosečky je takový, jehož vrcholy jsou póly protějších stran vzhledem ke kuželosečce a obráceně.

přímky O', ale za body o'', o''' volíme průsečíky přímky O' s kuželosečkou. Ježto body základní jsou reálné, je zřejmo, že vylučujeme případ kuželosečky imaginárné a bod o' volíme vně kuželosečky, aby jeho polára O' protínala kuželosečku v bodech reálných. Rovnice 28) má vyhovovati souřadnicím $0:1:0$ a $0:0:1$ bodů o'', o'''. Musí tedy býti

$$g_{22} = g_{33} = 0\,.$$

Koeficienty g_{12}, g_{13} získáme z úvahy, že přímka $x_1 = 0$ (t. j. O') je podle předpokladu polárou bodu o' $(1, 0, 0)$. Úvahami nám již známými odvodíme

$$g_{12} = g_{13} = 0\,.$$

Zvolíme-li nyní jednotkový bod na kuželosečce, musí býti

$$g_{11} + 2\,g_{23} = 0\,.$$

Rovnice kuželosečky v tomto systému souřadném je tedy

34) $$x_1^2 - x_2 x_3 = 0\,.$$

Tím jsme dokázali i druhou část našeho tvrzení. Z rovnice 34) plyne též

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_3}{x_1}\,.$$

Položíme-li

35) $$\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_3}{x_1} = \lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\,,$$

můžeme pro body kuželosečky psáti

35′) $$x_1 : x_2 : x_3 = \lambda_1 \lambda_2 : \lambda_2^2 : \lambda_1^2.$$

Vyjádření takovému říkáme p a r a m e t r i c k é. Parametrem určujícím bod na kuželosečce je $\lambda = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$. Tohoto vyjádření použijeme s výhodou v paragrafu následujícím.

4. K u ž e l o s e č k y s l o ž e n é. Dříve však než k tomuto paragrafu přistoupíme, musíme ještě promluviti o případě, který jsme s počátku ze svých úvah vylučovali, kde determinant z koeficientů bodové rovnice kuželosečky je roven nule. Předpokládejme, že bodová rovnice kuželosečky je

$$g_{11} x_1^2 + g_{22} x_2^2 + g_{33} x_3^2 = 0\,.$$

Determinant z jejích koeficientů má býti nyní podle předpokladu roven nule, t. j.

$$\begin{vmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} \end{vmatrix} = g_{11}\, g_{22}\, g_{33} = 0\,.$$

To není jinak možno, než když jest alespoň jeden z koeficientů, třeba g_{33}, roven 0.

Tu můžeme rovnici 33) psáti

36) $$g_{11} x_1^2 + g_{22} x_2^2 = 0 .$$

Tato rovnice představuje dvě přímky o rovnicích

$$x_1 \sqrt{g_{11}} + i x_2 \sqrt{g_{22}} = 0 , \qquad x_1 \sqrt{g_{11}} - i x_2 \sqrt{g_{22}} = 0 .$$

Obě přímky jsou reálné, je-li $\frac{g_{22}}{g_{11}} < 0$.

Tečnová rovnice kuželosečky 33) jest

$$X_1^2 g_{22} g_{33} + X_2^2 g_{11} g_{33} + X_3^2 g_{11} g_{22} = 0$$

a tudíž v případě, že $g_{33} = 0$, tato rovnice se zjednoduší na

36′) $$X_3^2 = 0 .$$

Poslední rovnice představuje průsečík svrchu zmíněných přímek. — Čtenář se snadno přesvědčí, že determinant z koeficientů rovnice 36′) je rovný nule. Je-li ještě $g_{11} = 0$ a $g_{22} \neq 0$, rovnice kuželosečky jest $x_2^2 = 0$, což představuje rovnici přímky, dvakráte počítané. — Uvažujme nyní kuželosečku jako obálku tečen. Její rovnice nechť je

37) $$G_{11} X_1^2 + G_{22} X_2^2 + G_{33} X_3^2 = 0 .$$

V případě, že determinant z koeficientů této rovnice je roven nule, musí jeden z těchto koeficientů, třeba $G_{33} = 0$. Pak rovnice

38) $$G_{11} X_1^2 + G_{22} X_2^2 = 0$$

představuje dvojici bodů o rovnicích

$$X_1 \sqrt{G_{11}} + i X_2 \sqrt{G_{22}} = 0 , \qquad X_1 \sqrt{G_{11}} - i X_2 \sqrt{G_{22}} = 0 .$$

Bodová rovnice kuželosečky 37) jest

$$x_1^2 G_{22} G_{33} + x_2^2 G_{11} G_{33} + x_3^2 G_{11} G_{22} = 0$$

a tudíž při $G_{33} = 0$

39) $$x_3^2 = 0 .$$

Tato rovnice představuje rovnici přímky (dvakráte počítané), na níž se svrchu zmíněné body nalézají. — Je-li ještě $G_{11} = 0$ a $G_{22} \neq 0$, získáme $X_2^2 = 0$, t. j. rovnici bodu, dvakráte počítaného.

Kuželosečky, jichž příslušný determinant je roven nule, nazveme kuželosečkami **složenými**, na rozdíl od kuželoseček dříve projednávaných, které se nazývají kuželosečky **jednoduché**.

§ 7. Podgrupa G_3.

V pátém paragrafu jsme dokázali, že projektivní grupa G_8 obsahuje ∞^6 transformací typu 20). Zmínili jsme se též, že z této grupy můžeme vybrati podgrupy, předepíšeme-li transformacím nějaké podmínky. Studujme blíže podgrupu, která reprodukuje nějakou kuželosečku (jednoduchou). Nechť tato kuželosečka je dána rovnicemi 35′) (nebo 34).

Má-li se tato kuželosečka reprodukovati transformacemi 20), musí býti identicky (t. j. pro každé $x_1 : x_2 : x_3$) splněna rovnice

$$x_1^2 - x_2 x_3 = \varrho^2 \left[\left(\sum_1^3{}^i a_{1i} x_i \right)^2 - \left(\sum_1^3{}^j a_{2j} x_j \right) \left(\sum_1^3{}^k a_{3k} x_k \right) \right]$$

($\varrho \neq 0$ koef. úměrnosti).

Z toho můžeme odvoditi podmínky pro koeficienty a_{jk}. Tak na příklad koeficient při $\varrho^2 x_3^2$ v pravém členu této rovnice musí býti roven nule, t. j.

$$a_{13}^2 - a_{23} a_{33} = 0, \tag{40}$$

neboť na levé straně se x_3^2 vůbec nevyskytuje. Ze všech obdobných podmínek mohli bychom vyjádřiti osm nezávislých koeficientů třemi. Hledaná podgrupa je tedy **trojmocná**, G_3. Rovnice 40) použijeme ke stanovení vztahu mezi parametrem $\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ bodu $x_1 : x_2 : x_3$ na kuželosečce a parametrem $'\lambda = \frac{'\lambda_1}{'\lambda_2}$ bodu $'x_1 : 'x_2 : 'x_3$ na kuželosečce mu odpovídajícího. Pro bod transformovaný je též

$$'\lambda = \frac{'x_1}{'x_2} = \frac{'x_3}{'x_1}.$$

Jsou-li m, n dvě libovolná čísla (z nichž alespoň jedno jest od nuly různé), můžeme též psáti

$$'\lambda = \frac{m\,'x_3 + n\,'x_1}{m\,'x_1 + n\,'x_2}.$$

Dosadíme-li do této rovnice z transformačních rovnic 20), obdržíme po snadné úpravě

$$'\lambda = \frac{x_1 (m a_{31} + n a_{11}) + x_2 (m a_{32} + n a_{12}) + x_3 (m a_{33} + n a_{13})}{x_1 (m a_{11} + n a_{21}) + x_2 (m a_{12} + n a_{22}) + x_3 (m a_{13} + n a_{23})} \tag{41}$$

Poměr čísel $m : n$ můžeme voliti tak, aby byly splněny rovnice

$$m a_{33} + n a_{13} = 0, \qquad m a_{13} + n a_{23} = 0,$$

neboť determinant této soustavy dvou rovnic je roven nule (rovnice 40). V tom případě v rovnici 41) se anulují koeficienty při x_3 a tudíž z ní obdržíme podle 35)

$$'\lambda = \frac{\lambda(m a_{31} + n a_{11}) + (m a_{32} + n a_{12})}{\lambda(m a_{11} + n a_{21}) + (m a_{12} + n a_{22})} = \frac{\lambda c_{11} + c_{12}}{\lambda c_{21} + c_{22}}$$

$$\left\{\begin{array}{l} c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22} \text{ konst. reálné} \\ c_{11} c_{22} - c_{12} c_{21} \neq 0 \end{array}\right\}$$

Tato rovnice jest ekvivalentní s rovnicemi

$$\varrho '\lambda_1 = c_{11} \lambda_1 + c_{12} \lambda_2, \qquad \varrho '\lambda_2 = c_{21} \lambda_1 + c_{22} \lambda_2,$$

které jsou transformačními rovnicemi pro body kuželosečky. Dvě řady bodů na kuželosečce jsou těmito rovnicemi uvedeny v projektivní příbuznost. Čtenář se snadno přesvědčí (postupem obdobným jako v § 4), že ony dvě řady mají obecně dva body samodružné. Ježto však v projektivní příbuznosti dvou soustav rovinných jsou obecně tři body samodružné, musí třetí samodružný bod, patřící grupě G_8, ležeti mimo kuželosečku. Musí to býti průsečík tečen kuželosečky v samodružných bodech, neboť jen tyto tečny se na kuželosečce reprodukují. Shrneme-li tyto výsledky, můžeme říci:

Podgrupa, která reprodukuje danou kuželosečku, je trojmocná. Dva ze samodružných bodů příslušných transformací jsou na kuželosečce, třetí je v průsečíku tečen v těchto bodech ke kuželosečce.

§ 8. Orthogonální kružnice.

Zvolme v rovině pravoúhlý systém cartézský za systém souřadný. Kružnice o poloměru r, mající střed v počátku systému, je dána rovnicí

42) $$x^2 + y^2 = r^2.$$

Budeme ji nazývati kružnicí L. Zvolme dva její libovolné poloměry a považujme je za tečny jiné kružnice, dotýkající se zvolených poloměrů v jejich koncových bodech. Najděme rovnici této kružnice! Rovnice kružnice o středu (a, b) a poloměru w je

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = w^2.$$

Má-li tato rovnice představovati onu kružnici, musí

$$a^2 + b^2 = w^2 + r^2.$$

Předposlední rovnici můžeme tedy v našem případě přepsati na

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + r^2 = 0. \tag{43}$$

Této kružnici budeme říkati kružnice L'. Kružnice L' a L protínají se pod pravým úhlem. Říkáme též, že L a L' jsou orthogonální kružnice. Kružnice L' určena je dvěma údaji, neboť v její rovnici jsou dvě libovolné veličiny a, b. Proto říkáme, že všechny kružnice L' tvoří dvojmocný svazek, nebo též, že je jich ∞^2. Do tohoto dvojmocného svazku jsou zahrnuty i průměry kružnice L jako mezný případ kružnic, jichž poloměry rostou nade všechny meze.[5]) Tyto „zvláštní" druhy kružnic označíme symbolem L_0.

Kružnice L' je určena dvěma obecně položenými body $p(x', y')$, $q(x'', y'')$, neboť dosazením souřadnic těchto bodů do 43) získáme rovnice

$$ax' + by' = \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2 + r^2), \qquad ax'' + by'' = \frac{1}{2}(x''^2 + y''^2 + r^2),$$

které za předpokladu, že $x'y'' - x''y' \neq 0$ (t. j., že spojnice pq neprochází středem kružnice L) skýtají jediné, jednoznačné řešení pro a a b.

Prochází-li však spojnice pq středem kružnice L, můžeme vždy předpokládati, že ony body leží právě na ose X (neboť souřadný systém můžeme vždy kol počátku tak otočiti, že libovolná přímka tímto bodem procházející je právě novou osou X). Z rovnice 43) jest ihned zřejmo, že takové body p, q nemohou býti libovolné. Musí míti souřadnice

$$x' = a + \sqrt{a^2 - r^2}, \qquad x'' = a - \sqrt{a^2 - r^2},$$

které obdržíme řešením 43) a rovnice $y = 0$. Tyto body jsou imaginárně sdružené nebo reálné, je-li $a < r$ nebo $a > r$. V tomto případě však musí jeden býti uvnitř, druhý vně kružnice L, jak ihned plyne z rovnice $x'x'' = r^2$. Dokážeme, že každá kružnice, těmito (imaginárně sdruženými nebo reálnými) body procházející, jest orthogonální ke kružnici L a ke všem kružnicím (jež také označíme jako kružnice L), které procházejí průsečnými body kružnice L a symetrály S

---

[5]) V tom případě roste totiž a i b nade všechny meze, ale poměr $\frac{a}{b}$ může býti konečný. Obdržíme tudíž z rovnice 43) skutečně rovnici přímky

$$-\frac{a}{b}x - y = 0$$

procházející počátkem, t. j. středem kružnice L.

úsečky pq. Symetrálu S můžeme totiž považovati za chordálu dvou kružnic L.[6]) Z elementární geometrie je známá definice chordály dvou kružnic jako geometrického místa středů kružnic, které dané dvě orthogonálně protínají. Tím je také naše tvrzení dokázáno, neboť všechny kružnice L mají touž chordálu. — Kružnice L' tvoří zde svazek jednomocný. Určeny jsou dvěma body p, q, jichž spojnice prochází počátkem. Říkáme též, že je jich možno vésti ∞^1 (dvěma body p, q).

Jsou-li oba tyto body p, q uvnitř nebo oba vně, nebo konečně oba na kružnici L, pak vždy určují jedinou kružnici L_0.

K jednomocnému svazku kružnic L' můžeme vždy sestrojiti kružnici L, známe-li alespoň jeden její bod b, neboť tečna v b ke kružnici L', tímto bodem vedené, protne pq ve středu hledané kružnice L.

Shrneme-li tyto poznatky, můžeme říci:

Dvěma body uvnitř kružnice L je vždy určena jediná kružnice orthogonální (L' nebo L_0).

K jednomocnému svazku kružnic L' můžeme vždy sestrojiti kružnici orthogonální, známe-li alespoň jeden její bod.

---

[6]) Chordála dvou kružnic, které se reálně protínají, je spojnice jejich reálných průsečíků. Neprotínají-li se obě kružnice reálně, sestrojíme naznačeným způsobem chordály v každé z těchto kružnic a libovolné třetí, která je obě reálně protíná. Průsečík těchto chordál je bod hledané chordály daných kružnic. Tutéž konstrukci opakujeme ještě s jinou pomocnou kružnicí a získáme druhý bod hledané chordály.

LITERATURA.*)

Barbarin: „Géométrie non-euclidéenne.“ (Paříž, 1907.)

Beck: Koordinatengeometrie I. (Berlín, 1919.)

Beltrami: „Risoluzione del problema di riportare i punti di una superficie sopra un piano....“ (Ann. di Mat. Sv. VII. 1866.)
„Teoria fondamentale degli spazi di curvatura constante.“ (Ann. di Mat. Sv. II. 1868.)
„Saggio di interpretazione della geometria non euclidea.“ (Giorn. di Mat. 6, 1868.)

Berwald: „Differentialinvarianten in der Geometrie. Riemannsche Mannigfaltigkeiten u. ihre Verallgemeinerungen.“ (Enzyklop. d. math. W. III D 11, v tisku.)

Bianchi: „Lezioni di geometria differenziale.“ (Pisa—Bologna, 1922—23.)

Bieberbach: „Über die Entwickelung der nichteuklidischen Geometrie im 19. Jahrh.“ (Preuss. Ak. d. W. 1925.)

J. Bolyai: „Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens a veritate aut falsitate Axiomatis XI Euclidei....“ (Znovu otištěno maďarskou Akademií 1902.)

Bonola (Liebmann): „Die nichteuklidische Geometrie.“ (Lipsko—Berlín, 1921.)

Cayley: „Sixth Memoir upon Quantics.“ (Phil. Transact. Sv. CXLII, 1859.)

Clebsch-Lindemann: „Vorlesungen über Geometrie.“ (Lipsko, 1891.)

Clifford: „Preliminary sketch of biquaternions.“ (Londýn, Proc. Math. Soc. 4. [1873].)

Coolidge: „The elements of non-euclidean geometry.“ (Oxford, 1909.)

Dieck: „Nichteuklidische Geometrie in der Kugelebene.“ (Lipsko—Berlín, 1918.)

De Tilly: „Recherches sur les éléments de Géometrie.“ (Brusel, 1860.)

Egnell: „L'ochématique.“ (Paříž, 1926.)

Engel: „N. I. Lobatschefskij. Zwei geometrische Abhandlungen“. (Lipsko, 1898.)

Engel-Staeckel: „Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss.“ (Lipsko, 1895.)
„Urkunden zur Geschichte der nicht-Euklidischen Geometrie.“ (Lipsko, 1899, 1913.)

Enriques: „Conferenze sulla geometria non euclidea.“ (Pisa, rozebráno.)
„Fragen der Elementargeometrie.“ (Lipsko, 1911.)
„Prinzipien der Geometrie.“ (Enz. mathem. W. III. 1, Heft 1, 1907.)

*) Tento soupis není ovšem úplný. Jsou zde uvedeny jen práce s pedagogického hlediska důležitější. V citovaných knihách najde čtenář další odkazy prací originálních, neb monografických knih.

Fubini: „Il parallelismo di Clifford negli spazî ellitici." (Dissertace, Pisa, 1900.)

Flye St. Marie: „Théorie analytique sur la théorie des parallèles." (Paříž, 1871.)

Frischauf: „Absolute Geometrie nach J. Bolyai." (Lipsko, 1872.)
„Elemente der absoluten Geometrie." (Lipsko, 1876.)

Haas: „Die Vektoranalysis." (Berlín, 1922.)

Helmholtz: „Über die Tatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen." (Göt. Nachr. Sv. XV. 1868.)

Hilbert: „Grundlagen der Geometrie." (Lipsko, 1923.)

Hjelmslev (= Petersen): „Géométrie des droites dans l'espace non-euclidien." (Kodaň, 1900.)

Heiberg-Menge: „Euclidis Opera omnia." (Lipsko, 1883.)

Killing: „Die nichteuklidischen Raumformen in analytischer Behandlung." (Lipsko, 1885.)

Klein: „Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen." (Erlangen, 1872.)
„Nichteuklidische Geometrie " (Litograf. 1890—1892. Gotinky.)*)
„Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus." (Berlín, 1925.)

Lie-Engel: „Theorie der Transformationsgruppen III. (Lipsko, 1893.)

Liebmann: „Nichteuklidische Geometrie." (III. vydání. Berlín, 1923.)

N. I. Lobačevský: „Imaginäre Geometrie." (Přel. Liebmann, Abh. z. Gesch. d. Math., Lipsko, 1904.)
„Anwendung der imaginären Geometrie auf einige Integrale." (Přel. Liebmann, Abh. z. Gesch. d. Math., Lipsko, 1904.)
„Géométrie imaginaire." (Crelle Journal. Sv. XVII. 1837.)
„Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien." (Berlin, 1840, II 1887.)**)
„Pangéométrie ou précis de géométrie fondée sur une théorie générale et rigoureuse des parallèles." (Znovu otištěno 1905 v Paříži.)

Mac Leod: „Géométrie non-euclidienne." (Paříž, 1924.)

Pierpont: „Somme of modern views of space." (Bull. Am. Soc. XXXII, 3.)

Poincaré (Lindemann): „Wissenschaft und Hypothese." (Lipsko, 1904.)

Riemann: „Über die Hypothesen, die der Geometrie zu Grunde liegen." (Znovu vydáno redakcí Weylovou, Berlín, 1923.)

Schur: „Grundlagen der Geometrie." (Lipsko—Berlin, 1909.)

Simon: „Nichteuklidische Geometrie." (Berlín, 1925.)

Sommerville: „Bibliography of Noneuclidean Geometry." (Londýn, 1911.)
„The elements of non-euclidean geometry." (Londýn, 1919.)

Study: „Beiträge zur nichteuklidischen Geometrie." (Am. Journal of Math. 1907, 29.)

*) V sebraných pojednáních *Kleinových* („Gesammelte math. Abhandlungen", Berlín) najde čtenář mnoho úvah o geometrii neeuklidovské.

**) Étude géométrique sur la théorie des parallèles, suivie d'un Extrait de la correspondance de Gauss et de Schumacher." (Přel. Hoüel, Paříž, 1866.)

„Die realistische Weltansicht und die Lehre vom Raume.“ (Brunšvik, 1914.)
„Über Nichteuklidische und Liniengeometrie.“ (Jahresb. D. M. Ver. 11 [1902], 15 [1906].)

Turc: „Introduction élémentaire à la géométrie lobatchewskienne.“ (Paříž.)

Universita v Kluži: „Libellus post saeculum quam Joannes Bolyai de Bolya . . . . . “ (1902.)

Vahlen: „Abstrakte Geometrie.“ (Lipsko, 1905.)

Vörös: „Analitika geometria absoluta.“ („La ebeno Bolyaia“, Budapešť, 1910, „La spaco Bolyaia“, Budapešť, 1912.)

Weber-Wellstein: „Enzyklopädie der Elementar-Mathematik.“ (2. sv. Lipsko, 1915.)

Weyl: „Raum-Zeit-Materie.“ (V. vydání. Berlin, 1923.)
„Mathematische Analyse des Raumproblems.“ (Berlín, 1923.)

Woods: „Forms of non-euclidean space.“ (Boston, 1905.)

Young: „On the analytical basis of noneuclidean geometry. (Am. J. of M. 33, 1911.)

Zacharias: „Elementargeometrie und elem. nichteukl. Geometrie . . . .“ (Enz. m. W. III AB 9.)

REJSTŘÍK.

OBSAH.

Kapitola I. Úvod.

Kapitola II. Formulace problému.

Kapitola III. Jednorozměrný útvar neeuklidovský.

Hyperbolický útvar jednorozměrný.

Eliptický útvar jednorozměrný.

Kapitola VI. Eliptická rovina.

Kapitola VII. Roviny parabolické. Historické poznámky.

Historické poznámky. Str.

Kapitola VIII. Uvahy pomocné.

Tiskem knihtiskárny „Politika“ v Praze.