AKADEMIK EDUARD ČECH

ZÁKLADY ANALYTICKÉ GEOMETRIE

II

PŘÍRODOVĚDECKÉ VYDAVATELSTVÍ

PRAHA 1952

PŘEDMLUVA

Kdežto prvý svazek této knihy byl věnován základům metrické a afinní geometrie, je předmětem převážné části druhého svazku studium projektivní geometrie. Druhý svazek se skládá celkem z pěti kapitol (X až XIV).

V kapitole X je nejprve provedeno projektivní rozšíření eukleidovského prostoru, které dává prvý příklad projektivního prostoru, načež je zaveden abstraktní pojem projektivního prostoru a jsou studovány jeho lineární podprostory a jejich vzájemná poloha. Velmi zevrubně je rozebrán pojem duálního prostoru. Jako v prvém svazku zůstává i zde pojem soustavy souřadnic v pozadí a všude se počítá přímo s geometrickými objekty. Podrobně studuji orientaci projektivní přímky, ale orientabilita vícerozměrných projektivních prostorů zůstává stranou.

V kapitole XI jsou probrány nejjednodušší vlastnosti kolineárních zobrazení. Předmětem úvahy jsou též nejjednodušší zvláštní případy, totiž perspektivní zobrazení a homologie, ale klasifikaci kolineací ponechávám stranou. Pečlivě je probrána dualisace pojmu lineárního podprostoru tak, aby vynikla její algebraická povaha.

V kapitolách I až XI byl studován výhradně reálný prostor. Zdálo se mi vhodné, před theorii kvadrik vsunout systematický výklad komplexní geometrie, který je předmětem kapitoly XII, jež zároveň slouží jako rekapitulace dosud probrané látky.

V kapitole XIII je probrána projektivní theorie kvadrik. Považoval jsem za instruktivní neopírat se tu, jak je to obvyklé, o algebraickou theorii kvadratických forem, nýbrž pracovat přímo s geometrickými pojmy. Čtenář, který prostuduje pečlivě jak theorii kvadratických forem vyloženou v Algebře prof. Vl. Kořínka, tak i moje zpracování theorie kvadrik, bude veden k užitečnému přemýšlení o vzájemném poměru algebry a geometrie. Tak jako v prvém svazku věnuji i zde hlavní pozornost m-rozměrnému případu a zejména probírám jen velmi neúplně theorii kuželoseček.

Kapitola XIV je věnována několika navzájem velmi různým thematům. Nejprve provádím afinní klasifikaci kvadrik, při čemž se omezuji na regulární kvadriky. Potom se obracím k projektivnímu nazírání na eukleidovskou metriku, které aplikuji na metrickou klasifikaci kvadrik. Projektivní studium kvadrik doplňuji úvodem do theorie svazků kvadrik; zde se v m-rozměrném prostoru omezuji na „obecný případ" a pouze pro m = 2 provádím diskusi všech možností. Pojem svazku aplikuji na metrickou klasifikaci kvadrik a na soustavy konfokálních kvadrik. V závěru kapitoly podávám dvě ukázky aplikability theorie kvadrik, a to jednak na přímkovou geometrii, jednak na kulovou geometrii.

X

PROJEKTIVNÍ PROSTOR

69. LINEÁRNÍ KOMBINACE BODŮ V EUKLEIDOVSKÉM PROSTORU. Prostor $\mathbf{E}_m$ se skládá z *bodů*; avšak v prvním svazku jsme prováděli aritmetisaci geometrie tak, že zpravidla jsme nepočítali s *body*, nýbrž s *vektory*. Základní pojem, který se vyskytoval znovu a znovu, byl pojem *lineární kombinace vektorů*. Budeme nyní zkoumat, jak lze do výpočtů zavést lineární kombinace bodů.

Je-li v prostoru $\mathbf{E}_m$ zvolen určitý bod P jako *počátek*, můžeme postupovat takto. Přiřadíme každému bodu X vektor $X - P$, čímž dostaneme vzájemně jednoznačný vztah mezi množinou $\mathbf{E}_m$ všech bodů a množinou $\mathbf{V}_m$ všech vektorů, při kterém počátku P odpovídá nulový vektor $\mathbf{o}$. Jsou-li nyní X, X', ... dané body (v konečném počtu) a jsou-li c, c', ... daná reálná čísla, pokusíme se najít účelný smysl pro lineární kombinaci

$$cX + c'X' + \ldots \tag{69.1}$$

Za tím účelem nahraďme každý z daných bodů X, X', ... příslušným vektorem $X - P$, $X' - P'$, ...; dostaneme místo (69.1) lineární kombinaci vektorů

$$c(X - P) + c'(X' - P) + \ldots, \tag{69.2}$$

která podle definic prvého svazku znamená určitý vektor $\mathbf{u}$. Můžeme potom buďto zkusit tu dohodu, že bychom pod lineární kombinací (69.1) rozuměli vektor $\mathbf{u}$, nebo zkusit tu dohodu, že bychom pod lineární kombinací (69.1) rozuměli bod $P + \mathbf{u}$. Taková dohoda je však účelná pouze tehdy, jestliže je nezávislá na volbě počátku P.

Jestliže nyní místo počátku P zavedeme jiný počátek Q, potom místo vektoru (69.2) budeme mít nový vektor

$$c(X - Q) + c'(X' - Q) + \ldots \tag{69.2'}$$

Znamená-li $\mathbf{u}$ vektor (69.2), $\mathbf{v}$ vektor (69.2'), potom je

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + (c + c' + \ldots)(P - Q)$$

a tudíž

$$Q + \mathbf{v} = (P + \mathbf{u}) + (c + c' + \ldots - 1)(P - Q) .$$

Tím jsme vedeni k následujícím dvěma definicím, nezávislým na volbě počátku P. *Jestliže předně*

$$(69.3) \qquad c + c' + \ldots = 0 ,$$

potom lineární kombinace bodů (69.1) *znamená vektor* (69.2); *jestliže za druhé*

$$(69.4) \qquad c + c' + \ldots = 1 ,$$

potom lineární kombinace bodů (69.1) *znamená bod*

$$P + c(X - P) + c'(X' - P) + \ldots$$

Jestliže však neplatí ani (69.3), ani (69.4), potom lineární kombinaci bodů (69.1) prozatím nedáváme žádný smysl.

Všimněme si, že v prvém svazku se vyskytly definice, které jsou zvláštními případy definic nyní zaváděných. Je to předně definice vektoru $X - X'$, která spadá pod případ (69.3), za druhé pak definice středu dvojice bodů $\frac{1}{2}(X + X')$, která spadá pod případ (69.4).

Dále si všimněme, že je-li prostor $\mathbf{E}_k$ vnořen do prostoru $\mathbf{E}_m$ a jsou-li X, X', ... body prostoru $\mathbf{E}_k$, potom jak v případě (69.3), tak i v případě (69.4) smysl výrazu (69.1) zůstává týž, ať už jej uvažujeme v prostoru $\mathbf{E}_k$ či v prostoru $\mathbf{E}_m$.

Posléze poznamenejme toto. Jsou-li

$$(69.5) \qquad A_0 , A_1 , \ldots , A_k$$

body prostoru $\mathbf{E}_m$, potom podle definice vyslovené ke konci článku 18 body (69.5) jsou mezi sebou lineárně nezávislé v tom případě, že totéž platí o vektorech

$$(69.6) \qquad A_1 - A_0 , \ldots , A_k - A_0 ,$$

což znamená, že rovnice

$$x_1(A_1 - A_0) + \ldots + x_k(A_k - A_0) = \mathbf{o}$$

platí pouze pro $x_1 = \ldots = x_k = 0$. Této definici můžeme nyní dát jiný tvar. Jsou-li dána libovolně čísla $x_1 , \ldots , x_k$, určíme číslo x_0 z rovnice

$$(69.7) \qquad x_0 + x_1 + \ldots + x_k = 0 .$$

Potom je

$$x_0A_0 + x_1A_1 + \ldots + x_kA_k = x_1(A_1 - A_0) + \\ + \ldots + x_k(A_k - A_0)\,. \tag{69.8}$$

Neboť za předpokladu (69.7) levá strana v (69.8) znamená vektor

$$x_0(A_0 - P) + x_1(A_1 - P) + \ldots + x_k(A_k - P)$$

nezávislý na volbě počátku P, a je patrné, že pro $P = A_0$ rovnice (69.8) je správná. Z toho plyne nový tvar definice lineární nezávislosti bodů: *Body* (69.5) *jsou mezi sebou lineárně nezávislé, právě když*[1]) *za předpokladu* (69.7) *rovnice platí pouze pro*

$$x_0 = x_1 = \ldots = x_k = 0\,.$$

Fakt, ke kterému jsme v článku 18 dospěli jen nepřímo, že totiž pojem lineární nezávislosti bodů má smysl nezávislý na pořadí daných bodů, je z nové definice bezprostředně patrný.

Jestliže body (69.5) jsou mezi sebou lineárně nezávislé, potom, jak víme, určují lineární podprostor $\mathbf{E}_k$ dimense k prostoru $\mathbf{E}_m$. Při tom $\mathbf{E}_k$ podle článku 18 je množina všech bodů tvaru

$$A_0 + x_1(A_1 - A_0) + \ldots + x_k(A_k - A_0)\,. \tag{69.9}$$

Jsou-li však $x_1, \ldots, x_k$ libovolně daná čísla a definujeme-li číslo x_0 rovnicí

$$x_0 + x_1 + \ldots + x_k = 1\,, \tag{69.10}$$

potom bod (69.9) splyne s bodem

$$x_0A_0 + x_1A_1 + \ldots + x_kA_k\,. \tag{69.11}$$

Neboť že tomu tak je, volíme-li počátek $P = A_0$, je jasné; na druhé straně bod (69.11) za předpokladu (69.10) je nezávislý na volbě počátku P. Tím je dokázáno, že *lineární podprostor* $\mathbf{E}_k$ *prostoru* $\mathbf{E}_m$ *určený lineárně nezávislými body* (69.5) *je množina všech bodů tvaru* (69.11), *kde čísla* $x_0, x_1, \ldots, x_k$ *jsou podrobena pouze podmínce* (69.10). Vyjádření (69.11) má proti vyjádření (69.9) tu přednost, že je z něho přímo patrné, že lineární podprostor $\mathbf{E}_k$ je nezávislý na pořadí bodů (69.5). Čtenář sám snadno dokáže, že *zaměření* $\mathbf{V}_k$ *prostoru* $\mathbf{E}_k$ *je množina*

[1]) V prvém svazku jsem psal v obdobných případech „tehdy a jenom tehdy, jestliže“. Výstižný výraz „právě když“ zavedl K. Rychlík.

všech vektorů tvaru (69.11), *kde čísla* $x_0, x_1, \ldots, x_k$ *jsou podrobena pouze podmínce* (69.7).

Formulujme ještě znovu výsledek ve zvláštním případě $k = 1$. *Jsou-li* A, B *dva různé body, potom přímka* AB *je množina všech bodů tvaru*

$$xA + yB\,, \quad \text{kde} \quad x + y = 1\,. \tag{69.12}$$

Čtenář snadno prokáže správnost tohoto důležitého doplňku: Úsečka AB je množina všech těch bodů tvaru (69.12), ve kterých x, y jsou nezáporná čísla; vnitřek úsečky AB je množina všech těch bodů tvaru (69.12), ve kterých x, y jsou kladná čísla.

V předcházejícím jsme uvažovali lineární kombinace bodů. Snadný je přechod k lineárním kombinacím *bodů a vektorů* tvaru

$$cX + c'X' + \ldots + a\mathbf{v} + a'\mathbf{v}' + \ldots \tag{69.13}$$

Takové lineární kombinaci dáme smysl v případech (69.3) a (69.4); v obou případech nechť $\mathbf{u}$ znamená vektor (69.2). Potom za předpokladu (69.3) znamená (69.13) *vektor* $\mathbf{u} + a\mathbf{v} + a'\mathbf{v}' + \ldots$; za předpokladu (69.4) znamená (69.13) *bod* $P + \mathbf{u} + a\mathbf{v} + a'\mathbf{v}' + \ldots$

70. ARITMETICKÉ BODY EUKLEIDOVSKÉHO PROSTORU. Měli bychom nyní zkoumat početní pravidla platná pro výrazy tvaru (69.1) a pro obecnější výrazy tvaru (69.13) vztahující se na ty případy, v nichž jsme těmto výrazům dali určitý geometrický smysl. Odvozování takových nových pravidel je však zbytečné, neboť jak se ukáže, jsou zahrnuta ve známých nám pravidlech o počítání s vektory.

Zaveďme nejprve několik definic. Dvojici (A, k) složenou z bodu A a z čísla k *různého od nuly* nazveme *vlastním aritmetickým bodem* (zkráceně vl. ar. bodem). Body v dosavadním smyslu nazveme pro jasnost *eukleidovskými body* (zkráceně e. body). *Polohou* vl. ar. bodu (A, k) nazveme e. bod A, *koeficientem* téhož vl. ar. bodu nazveme číslo k. Všimněme si, že podle naší definice koeficient vlastního ar. bodu je vždy různý od nuly. *Vl. ar. bod* $(A, 1)$, *jehož koeficient je roven jedné, považujeme za totožný s e. bodem* A.

Nevlastní aritmetický bod (zkráceně n. ar. bod) budiž prostě nový název pro vektor; *koeficientem* každého n. ar. bodu rozumíme číslo nula. *Polohou* n. ar. bodu $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$ rozumíme směr $\{\mathbf{u}\}$; *nulový vektor* *nemá žádnou polohu.* Označme $\boldsymbol{W}_{m+1}$ množinu všech, vlastních i nevlastních, ar. bodů.

Předpokládejme, že v prostoru $\boldsymbol{E}_m$ je zavedena lineární soustava souřadnic

$$\langle P ; \mathbf{e}_1 , \ldots , \mathbf{e}_m \rangle . \tag{70.1}$$

Přiřadíme každému ar. bodu $m + 1$ čísel, která nazveme jeho *souřadnicemi* a které rozlišíme jako

nultou, první, ... , m-tou

souřadnicí. Při tom nultou souřadnicí každého ar. bodu α bude jeho koeficient. Pokud se týče ostatních souřadnic, rozeznávejme dva případy podle toho, zda α je vl. ar. bod či vektor. Jestliže předně

$$\alpha = (a_1 , \ldots , a_m) \tag{70.2}$$

je vektor, potom první až m-tou souřadnicí budou táž čísla $a_1 , \ldots , a_m$, která nesla tento název dosud; nultou souřadnicí je číslo 0 a píšeme

$$\alpha = (0 , a_1 , \ldots , a_m) ,$$

což tedy znamená totéž jako (70.2). Jestliže za druhé $\alpha = (A , k)$ je vlastní ar. bod, potom jeho první až m-tou souřadnicí rozumíme součin čísla k s první až m-tou souřadnicí e. bodu A; nultou souřadnicí ar. bodu α, jak bylo již poznamenáno, je koeficient k. Je-li $\alpha = (A , k)$, kde

$$A = [a_1 , \ldots , a_m] , \tag{70.3}$$

píšeme

$$\alpha = (k , ka_1 , \ldots , ka_m) .$$

Ježto podle předcházejícího ar. bod $(A , 1)$ s koeficientem rovným jedné považujeme za totožný s e. bodem A, znamená

$$A = (1 , a_1 , \ldots , a_m)$$

totéž jako (70.3).

Tedy po zavedení lineární soustavy souřadnic (70.1) každý ar. bod má určitou nultou, první až m-tou souřadnici. Obráceně, jsou-li dána libovolně reálná čísla $a_0 , a_1 , \ldots , a_m$, existuje právě jeden ar. bod

$$(a_0 , a_1 , \ldots , a_m) ,$$

který je vlastní pro $a_0 \neq 0$, nevlastní pro $a_0 = 0$. Jsou-li nyní

$$\alpha = (a_0, a_1, \dots, a_m); \qquad \beta = (b_0, b_1, \dots, b_m)$$

libovolné dva ar. body, položíme

$$(70.4) \qquad \alpha + \beta = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots, a_m + b_m)$$

a je-li c libovolné reálné číslo, položíme

$$(70.5) \qquad c\alpha = (ca_0, ca_1, \dots, ca_m).$$

Na základě těchto definic *množina* W_{m+1} *všech ar. bodů je vektorový prostor dimense* $m + 1$; množina V_m všech vektorů (neboli n. ar. bodů) je ve W_{m+1} obsažená lineární soustava dimense m. Množina E_m všech e. bodů se skládá z těch ar. bodů, jejichž nultá souřadnice je rovna jedné; E_m *netvoří* lineární soustavu ve W_{m+1}. E. bod P spolu s lineárně nezávislými vektory $e_1, \dots, e_m$ tvoří basi vektorového prostoru W_{m+1}; je to speciální base splňující tu podmínku, že nultá souřadnice je rovna jedné pro první prvek base a rovna nule pro ostatní prvky base.

Jsou-li nyní $X, X', \dots$ libovolně dané e. body a jsou-li $c, c', \dots$ libovolně daná reálná čísla, potom podle právě formulovaných definic výraz (69.1) znamená v každém případě určitý ar. bod a snadno se zjistí, že v případech (69.3) a (69.4) nově definovaný smysl výrazu (69.1) splývá s dříve definovaným jeho smyslem. Tím je zároveň potvrzeno, že skutečně, jak jsme uvedli na počátku tohoto článku, není třeba zkoumat početní pravidla pro výrazy tvaru (69.1), ježto tato pravidla jsou zahrnuta ve známých nám pravidlech pro počítání s vektory. Poznamenejme ještě, že definice součtu $A + u$ bodu A s vektorem u, podaná v prvním svazku, je zvláštním případem definice (70.4). Rovněž tak i dřívější popis smyslu výrazu (69.13), platný tehdy, platí-li (69.3) a (69.4), je zřejmě v souladu s nynějšími definicemi (70.4) a (70.5).

Důležité je dokázat, že definice (70.4) a (70.5) jsou nezávislé na volbě lineární soustavy souřadnic (70.1). Především je zřejmé, že jestliže α je vektor, potom součin $c\alpha$ definovaný v (70.5) má týž smysl jako součin $c\alpha$ definovaný v prvém svazku. Jestliže v (70.5) je $\alpha = (A, k)$ vl. ar. bod, je patrné, že $c\alpha = \mathbf{o}$ v případě $c = 0$, $c\alpha = (A, ck)$ v případě $c \neq 0$. Tedy smysl součinu (70.5) je ve všech případech nezávislý na volbě lineární soustavy souřadnic (70.1). Přistupme k součtu (70.4). Jsou-li předně α, β vektory, potom součet $\alpha + \beta$ definovaný v (70.4) má týž smysl jako součet $\alpha + \beta$ definovaný v prvém svazku. Jestliže v (70.4) je $\alpha = (A, k)$ vl. ar. bod, $\beta = \mathbf{v}$ vektor, zjistí se snadno, že

$$\alpha + \beta = \left(A + \frac{1}{k}\mathbf{v}, k\right),$$

kde pravá strana je nezávislá na volbě lineární soustavy souřadnic (70.1); podobně tomu je, jestliže α je vektor, β vl. ar. bod. Zbývá případ, že

$$\alpha = (A, k); \qquad \beta = (B, h)$$

jsou vl. ar. body. Zde jsou dvě možnosti. Jestliže předně $h + k = 0$, je patrné, že součet $\alpha + \beta$ znamená vektor $k(A - B)$. Jestliže za druhé $h + k \neq 0$, potom se snadno zjistí, že $\alpha + \beta$ znamená vl. ar. bod $(C, h + k)$, kde e. bod C je dán výrazem

$$C = \frac{k}{h+k}A + \frac{h}{h+k}B$$

se součtem koeficientů napravo rovným jedné. Tím je prokázáno, že smysl součtu (70.4) je ve všech případech nezávislý na volbě lineární soustavy souřadnic (70.1).

Z právě provedených úvah, které daly definicím (70.4) a (70.5) tvar nezávislý na volbě lineární soustavy souřadnic, bezprostředně plyne důležitý výsledek. Je-li prostor $\mathbf{E}_k$ vnořen do prostoru $\mathbf{E}_m$ a znamená-li $\mathbf{W}_{k+1}$ množinu všech ar. bodů prostoru $\mathbf{E}_k$, $\mathbf{W}_{m+1}$ množinu všech ar. bodů prostoru $\mathbf{E}_m$, potom jsou-li α, β prvky množiny $\mathbf{W}_{k+1}$, mají operace $\alpha + \beta$, $c\alpha$ týž význam v prostoru $\mathbf{W}_{k+1}$ jako v prostoru $\mathbf{W}_{m+1}$. Z toho plyne, že $\mathbf{W}_{k+1}$ *je lineární soustava vektorového prostoru* $\mathbf{W}_{m+1}$. Totéž plyne ostatně i přímo z původních definic (70.4) a (70.5), volíme-li lineární soustavu souřadnic (70.1) v $\mathbf{E}_m$ tak, aby bylo

$$\mathbf{E}_k = \{P; \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}.$$

Poznamenejme ještě, že ježto jsme vl. bod $(A, 1)$ ztotožnili s e. bodem A, plyne z definice (70.5) pro libovolný vl. ar. bod (A, k), že

(70.6) $$(A\,, k) = kA\,.$$

V dalším tudíž označení $(A\,, k)$ pro vl. ar. bod je nepotřebné.

71. POJEM PROJEKTIVNÍHO PROSTORU. Úvahy předcházejících dvou článků jsou početním podkladem pro zavedení pojmu projektivního prostoru, který hrál velmi důležitou úlohu v historii geometrie. Ačkoli pojem projektivního prostoru dávno ztratil své někdejší dominující postavení, je stále ještě beze sporu jedním z nejvýznamnějších geometrických pojmů.

Budiž dán eukleidovský prostor $\mathbf{E}_m$. Nazveme *projektivním rozšířením* prostoru $\mathbf{E}_m$ a označíme $\overline{\mathbf{E}}_m$ množinu složenou jednak z bodů *prostoru* $\mathbf{E}_m$, které jako v předcházejícím článku nazveme *eukleidovskými body* (e. body), jednak ze *směrů prostoru* $\mathbf{E}_m$, t. j. z lineárních soustav dimense 1 obsažených v zaměření $\mathbf{V}_m$ prostoru $\mathbf{E}_m$, které nazveme *úběžné body*. Společný název, který zavedeme pro eukleidovské i pro úběžné body, tedy pro všecky prvky prostoru $\overline{\mathbf{E}}_m$, bude *geometrické body* (zkráceně g. body). Často se také říká e. bodům *body v konečnu*, úběžným bodům *body v nekonečnu*. Posléze jsou v literatuře běžné také tyto názvy: *vlastní geometrický* bod (zkráceně vl. g. bod) místo e. bod, *nevlastní geometrický bod* (zkráceně n. g. bod) místo úběžný bod.

Tyto poslední názvy naznačují souvislost s úvahami předcházejícího článku, kde jsme zavedli vlastní i nevlastní *aritmetické* body; nechť opět $\mathbf{W}_{m+1}$ znamená množinu všech (vlastních i nevlastních) ar. bodů. Z našich definic plyne ihned, že *poloha každého vl. ar. bodu je vl. g. bod*; obráceně pak každý vl. g. bod je polohou nekonečně mnoha vl. ar. bodů, které se navzájem liší pouze svými koeficienty; je-li A jeden z těchto vl. ar. bodů, potom všecky mají tvar cA, kde c probíhá všechna reálná čísla různá od nuly. Podobně poloha každého n. ar. bodu neboli vektoru, s výjimkou nulového vektoru, který nemá žádnou polohu, je n. g. bod; obráceně každý n. g. bod je polohou nekonečně mnoha n. ar. bodů (nenulových vektorů); je-li $\mathbf{v} \neq \mathbf{o}$ jeden z nich, potom všecky mají tvar $c\,.\,\mathbf{v}$, kde c opět probíhá všecka reálná čísla různá od nuly. Každý aritmetický bod (ať vlastní či nevlastní), jehož polohou je určitý geometrický bod, nazveme *aritmetickým zástupcem* (ar. zástupcem) tohoto g. bodu. Početní důkazy geometrických vět se provádějí tak, že každý g. bod nahradíme nějakým jeho ar. zástupcem (voleným zpravidla libovolně, ale někdy je výhodná nějaká speciální volba ar. zástupce).

Je však velmi účelné zaujmout abstraktnější stanovisko. Budiž dán vektorový prostor $\mathbf{W}_{m+1}$ konečné dimense $m + 1$ s nulovým vektorem $\mathbf{o}$, při čemž $m \geq 1$; prvky prostoru $\mathbf{W}_{m+1}$ nazveme *aritmetické body* (ar. body). Nazveme *projektivním prostorem dimense m* nebo *m-rozměrným projektivním prostorem* a označíme $\mathbf{P}_m$ množinu prvků, které nazveme *geometrické body* (zkráceně g. body) a které jsou vzájemně jednoznačně přiřazeny lineárním soustavám $\{X\}$ dimense jedna obsaženým ve $\mathbf{W}_{m+1}$; zpravidla můžeme přímo ztotožnit g. body s takovými lineárními soustavami $\{X\}$. Každý ar. bod $X \neq \mathbf{o}$ jednoznačně určuje g. bod $\{X\}$, který nazveme *polohou* ar. bodu $X \neq \mathbf{o}$. Tedy $\mathbf{o}$ nemá žádnou polohu, kdežto každý ar. bod $X \neq \mathbf{o}$ má určitou polohu. Je-li g. bod polohou ar. bodu X, takže $X \neq \mathbf{o}$, nazveme ar. bod X *aritmetickým zástupcem* (ar. zástupcem) tohoto g. ~~bodu. Tedy~~ každý g. bod $\{X\}$ má nekonečně mnoho ar. zástupců; je-li X jeden z nich, mají všichni tvar cX, kde c probíhá všecka reálná čísla různá od nuly. *Velmi často pro stručnost mluvíme o g. bodu X*, ~~čímž míníme g.~~ bod, jehož ar. zástupcem je daný ar. bod $X \neq \mathbf{o}$. Je-li tedy $c \neq 0$ reálné číslo, potom g. bod X je totožný s g. bodem cX, ačkoli ar. bod X je různý od ar. bodu cX.

Mluvíme-li stručně o *bodě* projektivního prostoru $\mathbf{P}_m$, máme ovšem na mysli g. bod náležející do $\mathbf{P}_m$.

Podle našich definic projektivní rozšíření $\bar{\mathbf{E}}_m$ m-rozměrného eukleidovského prostoru $\mathbf{E}_m$ je příkladem m-rozměrného projektivního prostoru $\mathbf{P}_m$. V tomto případě máme dvoje g. body, vlastní a nevlastní; v obecném případě projektivního prostoru $\mathbf{P}_m$ rozlišování g. bodů na vlastní a nevlastní odpadá. Poznamenejme ještě, že v naší terminologii dimense projektivního prostoru $\mathbf{P}_m$ není rovna dimensi vektorového prostoru $\mathbf{W}_{m+1}$, nýbrž je o jedničku menší. Vektorový prostor $\mathbf{W}_{m+1}$ nazveme *aritmetickým základem* (zkráceně ar. základem) projektivního prostoru $\mathbf{P}_m$.

Projektivní přímkou nazveme jednorozměrný projektivní prostor $\mathbf{P}_1$, *projektivní rovinou* dvojrozměrný projektivní prostor $\mathbf{P}_2$; pro určitost nazveme přímku $\boldsymbol{E}_1$ a rovinu $\boldsymbol{E}_2$ ve smyslu prvního svazku *eukleidovskou přímkou* a *eukleidovskou rovinou.*

Basi vektorového prostoru $\boldsymbol{W}_{m+1}$, který je aritmetickým základem projektivního prostoru $\boldsymbol{P}_m$, nazveme *aritmetickou basí* (ar. basí) prostoru $\boldsymbol{P}_m$. Je-li $A_0, A_1, \ldots, A_m$ ar. base, je v označení prvého svazku

$$\boldsymbol{W}_{m+1} = \{A_0, A_1, \ldots, A_m\}.$$

Budeme psát

$$\text{(71.1)} \qquad \boldsymbol{P}_m = \{A_0, A_1, \ldots, A_m\}_g;$$

index g naznačuje, že $\boldsymbol{P}_m$ (na rozdíl od $\boldsymbol{W}_{m+1}$) se skládá z geometrických bodů.

Je-li dána určitá ar. base $A_0, A_1, \ldots, A_m$ projektivního prostoru $\boldsymbol{P}_m$, potom každý ar. bod má tvar

$$X = x_0A_0 + x_1A_1 + \ldots + x_mA_m$$

s jednoznačně určenými čísly $x_0, x_1, \ldots, x_m$, jež jsou *souřadnicemi* ar. bodu X (vzhledem k dané ar. basi); píšeme

$$X = (x_0, x_1, \ldots, x_m).$$

Táž čísla $x_0, x_1, \ldots, x_m$ jsou také souřadnicemi *geometrického* bodu $\{X\}$ a nazývají se *homogenními souřadnicemi* tohoto g. bodu. G. bod je ovšem určen jednoznačně svými homogenními souřadnicemi, jež jsou podrobeny pouze té podmínce, že nejsou všecky současně rovny nule. Avšak g. bod nemá jednoznačně určené homogenní souřadnice, neboť *zároveň s čísly* $x_0, x_1, \ldots, x_m$ *jsou při libovolně zvoleném* $c \neq 0$ *také čísla* $cx_0, cx_1, \ldots, cx_m$ *homogenními souřadnicemi téhož g. bodu.*

O dimensi m projektivního prostoru $\boldsymbol{P}_m$ jsme předpokládali, že $m \geq 1$; dimense ar. základu $\boldsymbol{W}_{m+1}$ je $m + 1 \geq 2$. Prostor $\boldsymbol{P}_m$ se podle definice skládá ze všech lineárních soustav dimense jedna obsažených ve $\boldsymbol{W}_{m+1}$ ($=$ g. bodů). Někdy je účelné nevylučovat případy $m = 0$ a $m = -1$; chceme-li zahrnout tyto případy, mluvíme o *projektivním prostoru v širším smyslu.* Pro $m = 0$ máme projektivní prostor v širším smyslu $\boldsymbol{P}_0$, který obsahuje *jediný g. bod*; jeho ar. základ $\boldsymbol{W}_1$ je vektorový prostor dimense 1. Pro $m = -1$ máme projektivní prostor v širším smyslu $\boldsymbol{P}_{-1}$, což je prostě *prázdná množina* (neobsahuje vůbec žádný g. bod); ar. základ $\boldsymbol{W}_0$ obsahuje pouze nulový vektor.

72. LINEÁRNÍ PODPROSTORY PROJEKTIVNÍHO PROSTORU. Budiž dán projektivní prostor $\mathbf{P}_m$ dimense m a budiž $\mathbf{W}_{m+1}$ jeho ar. základ. Je-li $\mathbf{W}_{k+1}$ lineární soustava dimense $k + 1 \geqq 2$ obsažená ve $\mathbf{W}_{m+1}$, je $\mathbf{W}_{k+1}$ vektorovým prostorem dimense $k + 1$ a tudíž $\mathbf{W}_{k+1}$ je ar. základem projektivního prostoru $\mathbf{P}_k$ dimense k, který je částí projektivního prostoru $\mathbf{P}_m$. Pravíme, že projektivní prostor $\mathbf{P}_k$ je *vnořen* do projektivního prostoru $\mathbf{P}_m$ nebo že $\mathbf{P}_k$ je *lineární podprostor* projektivního prostoru $\mathbf{P}_m$. Podle věty 13.2 je $k \leqq m$, při čemž rovnost nastane pouze tehdy, je-li $\mathbf{W}_{k+1} = \mathbf{W}_{m+1}$, t. j. pouze tehdy, je-li $\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_m$. Někdy je účelné nevylučovat případy $k = 0$ a $k = -1$; nevylučujeme-li tyto případy, mluvíme o lineárním podprostoru *v širším smyslu* dimense k. Lineárním podprostorem v širším smyslu dimense 0 je každý jednotlivý g. bod prostoru $\mathbf{P}_m$; lineární podprostor v širším smyslu dimense -1 je prázdná množina. Důležitý je případ $k = m - 1$; lineární podprostor dimense $m - 1$ projektivního prostoru $\mathbf{P}_m$ se nazývá *nadrovina* prostoru $\mathbf{P}_m$. Pro $m = 1$ nadrovina projektivní přímky $\mathbf{P}_1$ není nic jiného než g. bod přímky $\mathbf{P}_1$; pro $m = 2$ nadrovina projektivní roviny $\mathbf{P}_2$ není nic jiného než projektivní přímka vnořená do $\mathbf{P}_2$; pro $m = 3$ nadrovina projektivního prostoru $\mathbf{P}_3$ není nic jiného než projektivní rovina vnořená do $\mathbf{P}_3$.

Lineární nezávislost g. bodů projektivního prostoru $\mathbf{P}_m$ definujeme tak, že znamená lineární nezávislost jejich ar. zástupců ve vektorovém prostoru $\mathbf{W}_{m+1}$, při čemž je patrné, že na bližší volbě těchto ar. zástupců nezáleží. Lineární nezávislost e. bodů definovaná v článku 18 je, jak se snadno dokáže, zvláštním případem lineární nezávislosti v právě definovaném smyslu. V projektivním prostoru $\mathbf{P}_m$ nelze udat více než $m + 1$ lineárně nezávislých g. bodů; danými $k + 1$ $(1 \leqq k \leqq m)$ lineárně nezávislými g. body prochází právě jeden lineární podprostor dimense k (a žádný lineární podprostor nižší dimense); je to [viz (71.1)] lineární podprostor

$$\{A_0, A_1, \ldots, A_k\}_g,$$

kde A_r $(0 \leqq r \leqq k)$ jsou libovolně volení ar. zástupci daných g. bodů.

Předpokládejme nyní, že vyšetřovaný projektivní prostor $\mathbf{P}_m = \overline{\mathbf{E}}_m$ je projektivní rozšíření eukleidovského prostoru $\mathbf{E}_m$. Je patrné, že množina všech úběžných bodů prostoru $\bar{\mathbf{E}}_m$ je nadrovina prostoru $\bar{\mathbf{E}}_m$, kterou nazveme *úběžnou nadrovinou* prostoru $\bar{\mathbf{E}}_m$. Často je účelné nazvat úběžnou nadrovinu projektivního rozšíření $\bar{\mathbf{E}}_m$ eukleidovského prostoru $\mathbf{E}_m$ stručně úběžnou nadrovinou eukleidovského prostoru $\mathbf{E}_m$. Pro $m = 1$ úběžnou nadrovinou (v širším smyslu) eukleidovské přímky $\mathbf{E}_1$ je jediný úběžný bod náležející do projektivního rozšíření eukleidovské přímky $\mathbf{E}_1$; tento úběžný bod není ničím jiným nežli *směrem* e. přímky $\mathbf{E}_1$. Pro $m = 2$ úběžná nadrovina e. roviny $\mathbf{E}_2$ je její *úběžnou přímkou*; pro $m = 3$ úběžná nadrovina obyčejného prostoru $\mathbf{E}_3$ je jeho *úběžnou rovinou.*

Projektivní rozšíření $\bar{\mathbf{E}}_m$ eukleidovského prostoru $\mathbf{E}_m$ je důležitým příkladem projektivního prostoru dimense m. Jiným neméně důležitým příkladem projektivního prostoru dimense m je úběžná nadrovina eukleidovského prostoru $\mathbf{E}_{m+1}$; tento příklad projektivního prostoru je pozoruhodný tím, že zde odpadá rozlišování g. bodů na „vlastní“ a „nevlastní“; všecky g. body tohoto prostoru mají stejnou strukturu. V dalším poznáme řadu jiných důležitých projektivních prostorů a lépe si uvědomíme důležitost tohoto pojmu.

Budiž opět dán eukleidovský m-rozměrný prostor $\mathbf{E}_m$ a budiž dán jeho k-rozměrný lineární podprostor $(1 \leq k < m)$ ve smyslu článku 18. Zvolíme-li libovolně e. bod P náležející do $\mathbf{E}_k$ a basi $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$ pro zaměření e. prostoru $\mathbf{E}_k$, jest

$$\mathbf{E}_k = \{P; \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}.$$

V důsledku předcházejících definic je

$$\bar{\mathbf{E}}_k = \{P, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}_g;$$

projektivní rozšíření $\bar{\mathbf{E}}_k$ e. prostoru $\mathbf{E}_k$ vnořeného do e. prostoru $\mathbf{E}_m$ je tedy projektivním prostorem vnořeným do projektivního prostoru $\bar{\mathbf{E}}_m$. G. body prostoru $\bar{\mathbf{E}}_k$ jsou tedy jednak g. body prostoru $\mathbf{E}_k$ (vlastní g. body prostoru $\bar{\mathbf{E}}_k$), jednak směry obsažené v $\mathbf{E}_k$ (nevlastní g. body prostoru $\bar{\mathbf{E}}_k$). Tedy projektivní rozšíření $\bar{\mathbf{E}}_k$ lineárního podprostoru $\mathbf{E}_k$ eukleidovského prostoru $\mathbf{E}_m$ je lineárním podprostorem projektivního prostoru $\bar{\mathbf{E}}_m$. Takovéto lineární podprostory prostoru $\bar{\mathbf{E}}_m$ nazveme *vlastními lineárními podprostory* prostoru $\bar{\mathbf{E}}_m$.

Nevlastní lineární podprostor prostoru $\bar{\mathbf{E}}_m$ je lineární podprostor úběžné nadroviny prostoru $\bar{\boldsymbol{E}}_m$. Je-li $\boldsymbol{V}_h$ ($2 \leqq h \leqq m$) lineární soustava dimense h obsažená v zaměření $\boldsymbol{V}_m$ prostoru $\boldsymbol{E}_m$, je $\boldsymbol{V}_h$ ar. základem určitého nevlastního lineárního podprostoru dimense $h - 1$ prostoru $\bar{\boldsymbol{E}}_m$ a každý nevlastní lineární podprostor prostoru $\bar{\boldsymbol{E}}_m$ vznikne tímto způsobem.

Je-li $\boldsymbol{P}_k$ lineární podprostor projektivního rozšíření $\bar{\boldsymbol{E}}_m$ eukleidovského prostoru $\boldsymbol{E}_m$, může se stát, že $\boldsymbol{P}_k$ obsahuje pouze nevlastní g. body; v tomto případě $\boldsymbol{P}_k$ je zřejmě nevlastním lineárním podprostorem ve smyslu právě definovaném. V opačném případě zvolme libovolně e. bod P obsažený v $\boldsymbol{P}_k$; podle věty 13.1 je možné k P připojit dalších k ar. bodů Q_r ($1 \leqq r \leqq k$) tak, že vznikne ar. base $P, Q_1, \dots, Q_k$ pro P_k. Je-li c_r ($1 \leqq r \leqq k$) koeficient ar. bodu Q_r, je patrné, že ar. bod $\boldsymbol{u}_r = Q_r - c_r P$ má koeficient nula, t. j. že $\boldsymbol{u}_r$ je vektor; zároveň je patrné, že $P, \boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k$ je nová ar. base pro $\boldsymbol{P}_k$. Z toho však snadno plyne, že $\boldsymbol{P}_k$ je projektivní rozšíření lineárního podprostoru

$$\boldsymbol{E}_k = \{P ; \boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k\}$$

eukleidovského prostoru $\boldsymbol{E}_m$. Tudíž $\boldsymbol{P}_k$ je vlastní lineární podprostor prostoru $\bar{\boldsymbol{E}}_m$ ve smyslu definovaném výše.

Tím je zjištěno, jaké jsou lineární podprostory projektivního rozšíření $\bar{\boldsymbol{E}}_m$ eukleidovského prostoru $\boldsymbol{E}_m$. Jsou to jednak lineární podprostory úběžné nadroviny prostoru $\bar{\boldsymbol{E}}_m$, které obsahují pouze úběžné body, jednak to jsou projektivní rozšíření lineárních podprostorů eukleidovského prostoru $\boldsymbol{E}_m$.

73. SPOJENÍ A PRŮNIK DVOU LINEÁRNÍCH PODPROSTORŮ PROJEKTIVNÍHO PROSTORU. Buďtež nyní $\boldsymbol{P}'_h$, $\boldsymbol{P}''_k$ dva lineární podprostory projektivního prostoru $\boldsymbol{P}_m$ s dimensemi h, k, kde $1 \leqq h < m$, $1 \leqq k < m$, tedy $m \geqq 2$. Buďtež $\boldsymbol{W}'_{h+1}$, $\boldsymbol{W}''_{k+1}$, $\boldsymbol{W}_{m+1}$ ar. základy projektivních prostorů $\boldsymbol{P}'_h$, $\boldsymbol{P}''_k$, $\boldsymbol{P}_m$. $\boldsymbol{W}'_{h+1}$, $\boldsymbol{W}''_{k+1}$ jsou lineární soustavy vektorového prostoru $\boldsymbol{W}_{m+1}$; dimense $\boldsymbol{W}'_{h+1}$, $\boldsymbol{W}''_{k+1}$, $\boldsymbol{W}_{m+1}$ jsou po řadě $h + 1$, $k + 1$, $m + 1$. V článku 24 jsme zavedli pojem průniku a spojení lineárních soustav: průnik lineárních soustav $\boldsymbol{W}'_{h+1}$, $\boldsymbol{W}''_{k+1}$ označme T_a, spojení S_a; jsou to lineární soustavy obsažené ve $\boldsymbol{W}_{m+1}$. Označme ještě T_g *průnik lineárních podprostorů* $\boldsymbol{P}'_h$, $\boldsymbol{P}''_k$ prostoru $\boldsymbol{P}_m$, t. j. množinu všech g. bodů náležejících jak do $\boldsymbol{P}'_h$, tak i do $\mathbf{P}''_k$, dále S_g *spojení lineárních podprostorů* $\mathbf{P}'_h$, $\mathbf{P}''_k$ prostoru $\mathbf{P}_m$; S_g je nejmenší lineární podprostor obsahující jako část jak $\mathbf{P}'_h$, tak i $\mathbf{P}''_k$. Při tom S_a je ar. základ projektivního prostoru S_g; má-li S_g dimensi s, má S_a dimensi $s + 1$. Podobně T_a je ar. základ pro T_g; má-li T_g dimensi t, má T_a dimensi $t + 1$. Na rozdíl od S_g můžeme o T_g tvrdit pouze, že je to lineární podprostor *v širším smyslu* projektivního prostoru $\mathbf{P}_m$: může býti $t = -1$, t. j. průnik T_g lineárních podprostorů $\mathbf{P}'_h$, $\mathbf{P}''_k$ může být prázdný; také může být $t = 0$, t. j. průnik T_g lineárních podprostorů $\mathbf{P}'_h$, $\mathbf{P}''_k$ může obsahovat jediný bod.

Čísla s, t vedle zřejmých nerovností

(73.1) $$-1 \leqq t \leqq \min(h, k),$$

(73.2) $$\max(h, k) \leqq s \leqq m$$

podle článku 24 splňují důležitou rovnost

(73.3) $$t + s = h + k.$$

Při tom rovnosti $t = \min(h, k)$, $s = \max(h, k)$ buďto platí obě nebo neplatí žádná; platí pak, právě když jeden z obou lineárních podprostorů $\mathbf{P}'_h$, $\mathbf{P}''_k$ je částí druhého.

Budiž zejména $k = m - 1$, t. j. $\mathbf{P}''_k = \mathbf{P}''_{m-1}$ budiž nadrovina prostoru $\mathbf{P}_m$. Potom $s \geqq m - 1$, a jestliže prostor $\mathbf{P}'_h$ není obsažen v $\mathbf{P}''_{m-1}$, nemůže být $s = m - 1$, takže musí být $s = m$, načež podle (73.3) je $t = h - 1$. Tedy: *Přímka* $\mathbf{P}'_1$, *která neleží v nadrovině* $\mathbf{P}''_{m-1}$, *má s touto nadrovinou právě jeden společný bod. Lineární podprostor* $\mathbf{P}'_h$ *dimense* $h \geqq 2$, *který neleží v nadrovině* $\mathbf{P}''_{m-1}$, *protne tuto nadrovinu v lineárním podprostoru dimense* $h - 1$. Jednoduchý příklad na tyto věty dostaneme, je-li $\mathbf{P}_m$ projektivním rozšířením $\bar{\mathbf{E}}_m$ eukleidovského prostoru a je-li $\mathbf{P}''_{m-1}$ úběžnou nadrovinou. Potom naše věty se redukují na známý fakt, že eukleidovská přímka má právě jeden úběžný bod a že úběžné body eukleidovského lineárního podprostoru $\mathbf{E}_h$ dimense $h \geqq 2$ tvoří v $\bar{\mathbf{E}}_m$ nevlastní lineární podprostor dimense $h - 1$. V eukleidovském prostoru $\mathbf{E}_m$ přímka $\mathbf{E}'_1$, která neleží v nadrovině $\mathbf{E}''_{m-1}$, může mít k $\mathbf{E}''_{m-1}$ dvojí vzájemnou polohu: buďto je $\mathbf{E}'_1$ rovnoběžná s $\mathbf{E}''_{m-1}$ a nemá s $\mathbf{E}''_{m-1}$ žádný společný bod, nebo $\mathbf{E}'_1$ má s $\mathbf{E}''_{m-1}$ právě jeden společný bod. V obou případech má projektivní rozšíření $\bar{\mathbf{E}}'_1$ s projektivním rozšířením $\bar{\mathbf{E}}''_{m-1}$ právě jeden společný bod, který v prvém případě je úběžný, ve druhém eukleidovský. Podobně tomu je i když místo přímky $\mathbf{E}_1'$ uvažujeme lineární podprostor $\mathbf{E}_h'$ dimense $h \geqq 2$. Vidíme, že jestliže nerozlišujeme mezi eukleidovskými a úběžnými body, chová se projektivní prostor $\overline{\mathbf{E}}_m$ jednodušeji než eukleidovský prostor $\mathbf{E}_m$; to platí nejen při studiu otázky vzájemné polohy nadroviny k jinému lineárnímu podprostoru, nýbrž i při studiu obecnější otázky vzájemné polohy dvou lineárních podprostorů. Čtenář nechť znovu odvodí výsledky článku 25 o vzájemné poloze lineárních podprostorů $\mathbf{E}_h'$, $\mathbf{E}_k''$ eukleidovského $\mathbf{E}_m$ na základě výsledku (73.1) až (73.3) týkajícího se projektivních rozšíření $\overline{\mathbf{E}}_h'$, $\overline{\mathbf{E}}_k''$. Při tom jest třeba rozeznávat dva případy podle toho, zda průnik T_t projektivních prostorů $\overline{\mathbf{E}}_h'$, $\overline{\mathbf{E}}_k''$ je či není obsažen v úběžné nadrovině prostoru $\mathbf{E}_m$.

Zde si všimněme pouze ještě případu $h = k = 1$, t. j. vzájemné polohy dvou přímek $\mathbf{P}_1'$, $\mathbf{P}_1''$ projektivního prostoru $\mathbf{P}_m$. Zde je $t \leqq 1$ a je-li $\mathbf{P}_1' \neq \mathbf{P}_1''$, je $t < 1$, t. j. buďto $t = 0$ nebo $t = -1$; podle (73.3) je v prvém případě $s = 2$, ve druhém $s = 3$. Tedy *dvě různé přímky projektivního prostoru leží vždy obě v trojrozměrném lineárním podprostoru; právě když mají společný bod* (jistě jediný), *leží obě přímky v téže rovině.* V eukleidovském prostoru $\mathbf{E}_m$ dvě různé přímky ležící v téže rovině buďto byly rovnoběžné nebo měly společný bod; po přechodu k $\overline{\mathbf{E}}_m$ máme společný bod v obojím případě, v prvém případě úběžný, ve druhém eukleidovský.

74. PRINCIP DUALITY. Poznali jsme dosud v podstatě dva konkretní případy m-rozměrného projektivního prostoru $\mathbf{P}_m$, totiž předně projektivní rozšíření eukleidovského m-rozměrného prostoru $\mathbf{E}_m$ skládající se jednak z bodů, jednak ze směrů prostoru $\mathbf{E}_m$, za druhé pak úběžnou nadrovinu eukleidovského $(m + 1)$-rozměrného prostoru $\mathbf{E}_{m+1}$ skládající se ze směrů prostoru $\mathbf{E}_{m+1}$. Již na str. 16 jsme poznamenali, že existuje řada jiných významných příkladů projektivních prostorů, s nimiž se později seznámíme. V tomto článku učiníme prvý velmi důležitý krok v tomto směru. Dokážeme totiž, že je-li dán libovolný m-rozměrný projektivní prostor $\mathbf{P}_m$, potom množina všech nadrovin prostoru $\mathbf{P}_m$, kterou označíme $\tilde{\mathbf{P}}_m$, tvoří nový m-rozměrný projektivní prostor, který nazveme *duálním* k původnímu projektivnímu prostoru $\mathbf{P}_m$. To je velmi důležitá věc. Dokážeme-li totiž jakoukoli větu správnou pro každý m-rozměrný projektivní prostor $\boldsymbol{P}_m$, můžeme tuto větu aplikovat na duální prostor $\tilde{\boldsymbol{P}}_m$; tím vznikne nová věta, zvaná *duální větou* k větě původní, kterou už není třeba zvlášť dokazovat, protože její důkaz je už obsažen v důkaze původní věty. V tom spočívá t. zv. *princip duality*, který velmi zjednodušuje vyšetřování projektivních prostorů.

Náš cíl je tedy dokázat, že množina všech nadrovin m-rozměrného projektivního prostoru $\boldsymbol{P}_m$ tvoří nový m-rozměrný projektivní prostor. Pro $m = 1$ je to zřejmé, neboť pro $m = 1$ pojem nadroviny splývá s pojmem bodu, takže duální prostor $\tilde{\boldsymbol{P}}_1$ je prostě totožný s prostorem $\boldsymbol{P}_1$. Přes to následující úvahy platí i pro $m = 1$, nedávají ovšem pro $m = 1$ nic podstatně nového.

V článku 46 jsme zavedli lineární funkce vektoru a odvodili jsme jejich základní vlastnosti. Při tom jsme sice měli na mysli speciální vektorový prostor, který je zaměřením eukleidovského prostoru, ježto však dva vektorové prostory téže dimense jsou (viz článek 14) navzájem isomorfní, je patrné, že věty článku 46 jsou správné pro každý vektorový prostor konečné dimense. Užijeme jich nyní na vektorový prostor $\boldsymbol{W}_{m+1}$ dimense $m + 1$, který je ar. základem projektivního prostoru $\boldsymbol{P}_m$ dimense m. Místo názvu lineární funkce vektoru zavedeme název *lineární forma*, což tedy je pravidlo f, které každému ar. bodu X přiřazuje reálné číslo $f(X)$, při čemž jednak

(74.1) $$f(X + Y) = f(X) + f(Y)$$

pro libovolné dva ar. body X, Y, jednak

(74.2) $$f(cX) = cf(X)$$

pro libovolný ar. bod X a pro libovolné reálné číslo c. Je-li ve $\boldsymbol{W}_{m+1}$ zavedena určitá base $A_0, A_1, \dots, A_m$, potom pro

(74.3) $$X = (x_0, x_1, \dots, x_m)$$

máme

(74.4) $$f(X) = a_0x_0 + a_1x_1 + \dots + a_mx_m .$$

Při tom jsou $a_0, a_1, \dots, a_m$ určitá reálná čísla, zvaná *koeficienty* lineární formy. V algebře nazýváme lineární formou speciální funkci proměnných $x_0, x_1, \dots, x_m$ tvaru $a_0x_0 + a_1x_1 + \dots + a_mx_m$, kde $a_0, a_1, \dots, a_m$ jsou dané konstanty. V geometrii je však výhodnější definovat lineární formu vlastnostmi (74.1) a (74.2) nezávislými na volbě base vektorového prostoru $\mathbf{W}_{m+1}$.

Jako v článku 46 definujeme způsobem zcela na snadě ležícím součet dvou lineárních forem a součin reálného čísla s lineární formou. V důsledku těchto definic množina všech lineárních forem, kterou označíme $\tilde{\mathbf{W}}_{m+1}$, je vektorovým prostorem téže dimense $m + 1$, kterou má původní vektorový prostor $\mathbf{W}_{m+1}$. Nulovým vektorem ve $\tilde{\mathbf{W}}_{m+1}$ je ta lineární forma, která každému ar. bodu přiřazuje číslo 0 (neboli ta lineární forma, která při jedné a tudíž při kterékoli volbě base má všecky koeficienty rovné nule); označíme ji $\tilde{\mathbf{o}}$.

Poznámka. V článku 46 i v článku 49 v prvém svazku jsme užívali vodorovného pruhu (psali jsme $\bar{\mathbf{o}}$ místo $\tilde{\mathbf{o}}$). Ježto však nyní vodorovného pruhu jsme užili pro projektivní rozšíření eukleidovského prostoru, užíváme pro dualitu raději vlnitého pruhu.

Z věty 46.1 plyne, že je-li $f \neq \tilde{\mathbf{o}}$ lineární forma ve $\mathbf{W}_{m+1}$, existuje nadrovina ϱ prostoru $\mathbf{P}_m$ tak, že g. bod $\{X\}$ leží v ϱ, právě když ar. bod X splňuje rovnici $f(X) = 0$. Pravíme, že $f(X) = 0$ je *rovnice nadroviny* ϱ v projektivním prostoru $\mathbf{P}_m$. Obráceně podle věty 46.1 ke každé nadrovině ϱ prostoru $\mathbf{P}_m$ existují lineární formy, které jsou v právě popsaném vztahu k ϱ; je-li f jedna z nich, jsou všecky tvaru $c \,.\, f$, kde c probíhá všecka reálná čísla různá od nuly. A z toho právě plyne už správnost výše formulované základní věty, že *nadroviny prostoru* $\mathbf{P}_m$ *můžeme považovat za body nového projektivního prostoru*, který označíme $\tilde{\mathbf{P}}_m$, který nezveme *duálním prostorem* k $\mathbf{P}_m$ a který má touž dimensi jako původní prostor $\mathbf{P}_m$. Mimo to je patrné, že výše definovaná množina $\tilde{\mathbf{W}}_{m+1}$ všech lineárních forem ve $\mathbf{W}_{m+1}$ je ar. základem duálního prostoru $\tilde{\mathbf{P}}_m$. V důsledku toho je účelné dát název *aritmetické nadroviny* (zkráceně ar. nadroviny) lineárním formám ve $\mathbf{W}_{m+1}$; pro jasnost budeme, je-li toho třeba, mluvit o *geometrických nadrovinách* (zkráceně g. nadrovinách), máme-li na mysli nadroviny prostoru $\mathbf{P}_m$ neboli body (g. body) duálního prostoru $\tilde{\mathbf{P}}_m$. Nazýváme tedy:

ar. body prvky množiny $\mathbf{W}_{m+1}$;
g. body prvky množiny $\mathbf{P}_m$;
ar. nadroviny prvky množiny $\tilde{\mathbf{W}}_{m+1}$;
g. nadroviny prvky množiny $\tilde{\mathbf{P}}_m$.

Pro $m = 2$ mluvíme o ar. a g. *přímkách*, pro $m = 3$ o ar. a g. rovinách.

V předcházejícím jsme ar. nadroviny, t. j. prvky vektorového prostoru $\tilde{W}_{m+1}$, úplně ztotožnili s lineárními formami ve W_{m+1}. To však není podstatné a můžeme pod ar. nadrovinami rozumět také jiné objekty než lineární formy ve W_{m+1}, jen když jsou tyto objekty vzájemně jednoznačně přiřazeny lineárním formám ve W_{m+1}. Této poznámky můžeme užít k tomu, abychom vztah mezi oběma vektorovými prostory W_{m+1} a $\tilde{W}_{m+1}$ a tudíž i vztah mezi oběma projektivními prostory P_m a $\tilde{P}_m$ vyjádřili v takovém tvaru, aby v něm oba uvažované prostory vystupovaly úplně symetricky.

Předpokládejme nejprve, že byla zvolena nějaká base $A_0, A_1, \dots$ $\dots, A_m$ vektorového prostoru W_{m+1} a označme ar. bod (74.3) místo (74.3) určitěji

(74,3′) $$X = (x_0, x_1, \dots, x_m)_b,$$

kde index b naznačuje, že X je ar. *bod*, t. j. prvek prostoru W_{m+1}. Přiřadíme nyní uvažované basi $A_0, A_1, \dots, A_m$ vektorového prostoru W_{m+1} určitou basi vektorového prostoru $\tilde{W}_{m+1}$ takto. Prostor $\tilde{W}_{m+1}$ se skládá z lineárních forem ve W_{m+1} (nebo z jiných prvků vzájemně jednoznačně přiřazených takovým lineárním formám); lineární forma f ve W_{m+1} má však tvar (74.4) a je jednoznačně určena svými koeficienty $a_0, a_1, \dots, a_m$; můžeme ji označit

(74.5) $$(a_0, a_1, \dots, a_m)_r,$$

kde index r naznačuje, že běží o ar. *nadrovinu*, t. j. o prvek prostoru $\tilde{W}_{m+1}$. Označme $f_0, f_1, \dots, f_m$ ty lineární formy ve W_{m+1}, které v ar. bodě (74.3′) nabývají hodnot

$$f_0(X) = x_0, \quad f_1(X) = x_1, \dots, \quad f_m(X) = x_m;$$

je patrné, že lineární formy $f_0, f_1, \dots, f_m$ tvoří basi vektorového prostoru $\tilde{W}_{m+1}$, kterou nazveme duální k dané basi prostoru W_{m+1}, a že lineární forma (74.5) má tvar

$$a_0 f_0 + a_1 f_1 + \dots + a_m f_m.$$

Máme tedy dánu určitou basi jak ve vektorovém prostoru W_{m+1}, tak i ve vektorovém prostoru $\tilde{W}_{m+1}$. Je-li

(74.6) $$X = (x_0, x_1, \dots, x_m)_b$$

libovolný prvek prostoru $\mathbf{W}_{m+1}$ a je-li

$$\tilde{Y} = (y_0, y_1, \dots, y_m)_r \tag{74.7}$$

libovolný prvek ve $\tilde{\mathbf{W}}_{m+1}$, položíme

$$d(X, \tilde{Y}) = x_0 y_0 + x_1 y_1 + \dots + x_m y_m . \tag{74.8}$$

Pomocí výrazu $d(X, \tilde{Y})$ je vztah mezi $\mathbf{W}_{m+1}$ a $\tilde{\mathbf{W}}_{m+1}$ vyjádřen způsobem naprosto souměrným vzhledem k oběma vektorovým prostorům. Existuje vzájemně jednoznačný vztah mezi ar. nadrovinami (prvky vektorového prostoru $\tilde{\mathbf{W}}_{m+1}$) a mezi lineárními formami v prostoru $\mathbf{W}_{m+1}$, při čemž ar. nadrovině

$$\tilde{A} = (a_0, a_1, \dots, a_m)_r$$

odpovídá ta lineární forma, která libovolnému prvku (74.6) prostoru $\mathbf{W}_{m+1}$ přiřazuje číslo

$$d(X, \tilde{A}) = a_0 x_0 + a_1 x_1 + \dots + a_m x_m .$$

Stejně však také existuje vzájemně jednoznačný vztah mezi ar. body (prvky vektorového prostoru $\mathbf{W}_{m+1}$) a mezi lineárními formami v prostoru $\tilde{\mathbf{W}}_{m+1}$, při čemž ar. bodu

$$A = (a_0, a_1, \dots, a_m)_b$$

odpovídá ta lineární forma, která libovolnému prvku (74.7) prostoru $\tilde{\mathbf{W}}_{m+1}$ přiřazuje číslo

$$d(A, \tilde{Y}) = a_0 y_0 + a_1 y_1 + \dots + a_m y_m .$$

Vztah mezi oběma vektorovými prostory $\mathbf{W}_{m+1}$, $\tilde{\mathbf{W}}_{m+1}$, který jsme právě popsali užívajíce určité base pro $\mathbf{W}_{m+1}$ a base k ní duální pro $\tilde{\mathbf{W}}_{m+1}$, byl popsán způsobem nezávislým na volbě basí v článku 49. Charakteristické vlastnosti základního výrazu $d(X, \tilde{Y})$ jsou popsány ve (49.1) až (49.6), při čemž máme pouze ten formální rozdíl, že tehdy jsme užívali vodorovného pruhu, který jsme nyní nahradili vlnitým pruhem. Mimo to oba navzájem *duálně sdružené vektorové* prostory tehdy byly označeny $\mathbf{V}_m$, $\bar{\mathbf{V}}_m$, nyní $\mathbf{W}_{m+1}$, $\tilde{\mathbf{W}}_{m+1}$; jejich společná dimense tehdy byla označena m, nyní pak je $m + 1$. Připomeňme si, že věta 49.3 praví, že ke každé basi prostoru $\mathbf{W}_{m+1}$ máme právě jednu *duální basi* prostoru $\tilde{\mathbf{W}}_{m+1}$ tak, že platí (74.8).

75. LINEÁRNÍ PODPROSTORY DUÁLNÍHO PROSTORU. Budiž dán m-rozměrný projektivní prostor P_m a budiž $\tilde{P}_m$ projektivní prostor k němu duální. Jako dosud ponecháme název bod (určitěji g. bod) pro prvky původního prostoru P_m ; prvky duálního prostoru $\tilde{P}_m$ jsou, jak víme, nadrovinami (určitěji g. nadrovinami) prostoru P_m . Ponecháváme název nadrovina pro nadroviny prostoru P_m , ale ovšem máme také nadroviny prostoru $\tilde{P}_m$, které jsou prvky projektivního prostoru duálního k prostoru $\tilde{P}_m$. Ježto podle předcházejícího jsou prostory P_m , $\tilde{P}_m$ *navzájem* duální, musí nadroviny prostoru $\tilde{P}_m$ být ve vzájemně jednoznačném vztahu s body původního prostoru P_m . Tento vzájemně jednoznačný vztah je nadmíru jednoduchý: ukazuje se, že nadrovina prostoru $\tilde{P}_m$ je prostě množina všech těch nadrovin původního prostoru P_m , které procházejí určitým bodem prostoru P_m , a že také obráceně, zvolíme-li v P_m libovolně bod, potom množina všech nadrovin (prostoru P_m) procházejících zvoleným bodem tvoří nadrovinu prostoru $\tilde{P}_m$. Tento výsledek je zvláštním případem $h = 0$ následujícího obecnějšího výsledku.

Budiž $-1 \leqq h \leqq m$ a budiž

$$h + k = m - 1 , \tag{75.1}$$

takže také $-1 \leqq k \leqq m$. Označme $\tilde{P}_h$ libovolný lineární podprostor v širším smyslu ~~prostoru $\tilde{P}_m$~~ dimense h ; jako obvykle znamená P_k libovolný lineární podprostor v širším smyslu prostoru P_m dimense k . Dokážeme, že existuje vzájemně jednoznačný vztah mezi všemi $\tilde{P}_h$ na jedné straně a všemi P_k na straně druhé tak, že libovolně daný $\tilde{P}_h$ je množina všech nadrovin (prostoru P_m) procházejících každým bodem příslušného P_k , a že také obráceně pro libovolně daný P_k množina všech nadrovin (prostoru P_m) procházejících každým jeho bodem tvoří $\tilde{P}_h$.

Pro

$$h = -1 \quad \text{je} \quad k = m , \quad \text{tedy} \quad P_k = P_m ;$$

$\tilde{P}_{-1}$ znamená prázdnou množinu a skutečně množina všech nadrovin prostoru P_m procházejících každým bodem tohoto prostoru P_m je prázdná. Pro $h = m$ je $k = -1$, $\tilde{P}_h = \tilde{P}_m$; $\tilde{P}_m$ je množina obsahující *každou* nadrovinu prostoru P_m a skutečně můžeme tvrdit, že zcela libovolná nadrovina prostoru $\mathbf{P}_m$ prochází všemi body prostoru $\mathbf{P}_k$, neboť $\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_{-1}$ je prázdná množina, která vůbec žádných bodů nemá.

Budiž tedy $0 \leqq h \leqq m - 1$, takže také $0 \leqq k \leqq m - 1$. Budiž $\mathbf{W}_{m+1}$ ar. základ projektivního prostoru $\mathbf{P}_m$, $\tilde{\mathbf{W}}_{m+1}$ ar. základ prostoru $\tilde{\mathbf{P}}_m$, takže $\mathbf{W}_{m+1}$, $\tilde{\mathbf{W}}_{m+1}$ jsou dva duálně sdružené vektorové prostory společné dimense $m + 1$. Podle předcházejícího máme pro každý prvek X prostoru $\mathbf{W}_{m+1}$ (ar. bod) a pro každý prvek $\tilde{Y}$ prostoru $\tilde{\mathbf{W}}_{m+1}$ (ar. nadrovinu) definováno číslo $d(X, \tilde{Y})$, při čemž z úvah článku 74 je snadno patrný ten základní fakt, že pro $X \neq \mathbf{o}$, $\tilde{Y} \neq \tilde{\mathbf{o}}$ je $d(X, \tilde{Y}) = 0$, *právě když bod* $\{X\}$ *leží v nadrovině* $\{\tilde{Y}\}$ neboli, což je totéž, *právě když nadrovina* $\{\tilde{Y}\}$ *prochází bodem* $\{X\}$.

Nyní podle článku 72 každý $\mathbf{P}_k$ má za ar. basi určitou lineární soustavu $\mathbf{W}_{k+1}$ dimense $k + 1$ vektorového prostoru $\mathbf{W}_{m+1}$ a obráceně každá taková lineární soustava je ar. basí určitého $\mathbf{P}_k$. Podobně ovšem i každý $\tilde{\mathbf{P}}_h$ má za ar. basi určitou lineární soustavu $\tilde{\mathbf{W}}_{h+1}$ dimense $h + 1$ vektorového prostoru $\tilde{\mathbf{W}}_{m+1}$ a obráceně každá taková lineární soustava je ar. basí určitého $\tilde{\mathbf{P}}_h$. Avšak z vět 49.5 a 49.6 (ve kterých ovšem číslo m musíme nyní nahradit číslem $m + 1$) vyplývá, že existuje vzájemně jednoznačný vztah mezi všemi $\mathbf{W}_{k+1}$ na jedné straně a všemi $\tilde{\mathbf{W}}_{h+1}$ na straně druhé tak, že při daném $\mathbf{W}_{k+1}$ je $\tilde{\mathbf{W}}_{h+1}$ množinou všech těch ar. nadrovin $\tilde{Y}$, pro něž $d(X, \tilde{Y}) = 0$ platí pro všecky ar. body X náležející do $\mathbf{W}_{k+1}$, a obráceně při daném $\tilde{\mathbf{W}}_{h+1}$ je $\mathbf{W}_{k+1}$ množinou všech těch ar. bodů X, pro něž $d(X, \tilde{Y}) = 0$ platí pro všecky ar. nadroviny $\tilde{Y}$ náležející do $\tilde{\mathbf{W}}_{h+1}$. Stačí nyní si připomenout význam rovnice $d(X, \tilde{Y}) = 0$, abychom si uvědomili, že v tom je obsažen důkaz výše formulovaného vzájemně jednoznačného vztahu mezi všemi $\mathbf{P}_k$ na jedné straně a všemi $\tilde{\mathbf{P}}_h$ na straně druhé.

Lineární podprostor (v širším smyslu) projektivního ptostoru $\tilde{\mathbf{P}}_m$ duálního k danému projektivnímu prostoru $\mathbf{P}_m$ nazveme *duálním podprostorem* (v širším smyslu) prostoru $\mathbf{P}_m$. Tedy každý duální podprostor v širším smyslu $\tilde{\mathbf{P}}_h$ dimense h prostoru $\mathbf{P}_m$ je množina všech těch nadrovin prostoru $\mathbf{P}_m$, které procházejí určitým lineárním podprostorem v širším smyslu $\mathbf{P}_{m-h-1}$ dimense $m - h - 1$ prostoru $\mathbf{P}_m$; pravíme, že $\mathbf{P}_{m-h-1}$ je *vrcholem* duálního podprostoru $\tilde{\mathbf{P}}_h$, při čemž obráceně každý $\mathbf{P}_{m-h-1}$ je vrcholem právě jednoho $\tilde{\mathbf{P}}_h$. Jsou-li $\mathbf{P}'$,

$\mathbf{P}''$ dva lineární podprostory v širším smyslu prostoru $\mathbf{P}_m$ a jsou-li $\tilde{\mathbf{P}}'$, $\tilde{\mathbf{P}}''$ ty lineární podprostory duálního prostoru $\tilde{P}_m$, jejichž vrcholy jsou $\mathbf{P}'$, $\mathbf{P}''$, je patrné, že $\tilde{\mathbf{P}}'$ je částí $\tilde{\mathbf{P}}''$, právě když $\mathbf{P}''$ je částí $\mathbf{P}'$; mimo to, jestliže dim znamená dimensi, je $\dim\tilde{\mathbf{P}}' \leqq \dim\tilde{\mathbf{P}}''$, právě když $\dim\mathbf{P}' \geqq \dim\mathbf{P}''$.

Buďtež nyní dány dva lineární podprostory $\mathbf{P}'$, $\mathbf{P}''$ prostoru $\mathbf{P}_m$; označme S spojení a T průnik podprostorů $\mathbf{P}'$, $\mathbf{P}''$, takže také S, T jsou lineární podprostory (v širším smyslu) prostoru $\mathbf{P}_m$. Buďtež $\tilde{\mathbf{P}}'$, $\tilde{\mathbf{P}}''$, $\tilde{S}$, $\tilde{T}$ ty duální podprostory (v širším smyslu), jejichž vrcholy jsou $\mathbf{P}'$, $\mathbf{P}''$, S, T. Potom platí, že $\tilde{T}$ je spojení a že $\tilde{S}$ je průnik duálních podprostorů $\tilde{\mathbf{P}}'$, $\tilde{\mathbf{P}}''$. Neboť S je lineární podprostor nejvyšší dimense mezi těmi lineárními podprostory, které obsahují jako část jak $\mathbf{P}'$, tak i $\mathbf{P}''$. Podle předcházejícího tedy $\tilde{S}$ má nejvyšší dimensi mezi všemi těmi duálními podprostory v širším smyslu, které jsou obsaženy jako část jak v $\tilde{\mathbf{P}}'$, tak i v $\tilde{\mathbf{P}}''$, a to právě znamená, že $\tilde{S}$ je průnikem duálních podprostorů $\tilde{\mathbf{P}}'$, $\tilde{\mathbf{P}}''$. Že $\tilde{T}$ je jejich spojením, dokáže se úvahou zcela stejného typu.

76. DVOJPOMĚR. V tomto článku budeme vyšetřovat projektivní přímku $\mathbf{P}_1$. Nazveme stručně *čtveřicí* na přímce $\mathbf{P}_1$ čtyři v určitém pořadí dané a *navzájem různé* g. body přímky $\mathbf{P}_1$ a přiřadíme každé takové čtveřici určité reálné číslo, které označíme $(ABCD)$ a které nazveme *dvojpoměrem* čtveřice. Body čtveřice buďtež dány svými ar. zástupci A, B, C, D. Ježto $\{A\} \neq \{B\}$, jsou ar. body A, B lineárně nezávislé a tvoří tudíž ar. basi pro $\mathbf{P}_1$, takže existují reálná čísla u_1, u_2, v_1, v_2 tak, že

$$(76.1) \qquad C = u_1A + u_2B\,, \qquad D = v_1A + v_2B\,.$$

Podmínka, že g. body čtveřice jsou navzájem různé, je vyjádřena jednak lineární nezávislostí ar. bodů A, B, jednak ještě nerovnostmi

$$(76.2) \qquad u_1u_2v_1v_2 \neq 0\,, \qquad u_1v_2 \neq u_2v_1\,.$$

Můžeme tudíž položit

$$(76.3) \qquad (ABCD) = \frac{u_2v_1}{u_1v_2}$$

a máme

$$(76.4) \qquad 0 \neq (ABCD) \neq 1\,.$$

Snadno zjistíme, že číslo (76.3) se nezmění, jestliže u některého z daných čtyř g. bodů změníme jeho ar. zástupce. Neboť místo

(76.5) $$u_1\,,\quad u_2\,,\quad v_1\,,\quad v_2$$

máme

$$u_1 : k\,,\quad u_2\,,\quad v_1 : k\,,\quad v_2\,,$$

jestliže místo A zvolíme kA. Podobně jestliže místo B zvolíme kB, potom místo (76.5) máme

$$u_1\,,\quad u_2 : k\,,\quad v_1\,,\quad v_2 : k\,.$$

Jestliže místo C zvolíme kC, potom místo (76.5) máme

$$ku_1\,,\quad ku_2\,,\quad v_1\,,\quad v_2\,.$$

Jestliže místo D zvolíme kD, potom místo (76.5) máme

$$u_1\,,\quad u_2\,,\quad kv_1\,,\quad kv_2\,.$$

Je patrné, že při kterékoli z těchto čtyř změn číslo (76.3) zůstává nezměněno. Je tedy toto číslo jednoznačně určeno danou čtveřicí; bylo již řečeno, že je nazýváme dvojpoměrem čtveřice.

Víme, že pro dvojpoměr platí nerovnosti (76.4). Obráceně platí:

VĚTA 76.1. *Budtež dány na projektivní přímce* $\mathbf{P}_1$ *tři různé g. body* A, B, C *a budiž dáno reálné číslo* λ tak, že

(76.6) $$0 \neq \lambda \neq 1\,.$$

Potom existuje na $\mathbf{P}_1$ *právě jeden g. bod* D *různý od všech tří daných g. bodů, pro který dvojpoměr* $(ABCD)$ *je roven* λ.

DŮKAZ. Zvolme libovolně ar. zástupce A, B, C. Ar. body A, B tvoří ar. basi pro $\mathbf{P}_1$ a existují čísla $u_1 \neq 0$, $u_2 \neq 0$ tak, že $C = u_1A + u_2B$. Běží o to, určit čísla v_1, v_2 tak, aby platily nerovnosti (76.2) a aby bylo $u_2v_1 = \lambda u_1v_2$. Je patrné, že $v_2 \neq 0$ můžeme libovolně zvolit, načež $v_1 \neq 0$ je jednoznačně určeno; (76.2) platí podle (76.6). Píšeme-li $D = v_1A + v_2B$, platí (76.3), při čemž není sice jednoznačně určen ar. bod D, je však jednoznačně určen g. bod D.

Poznámka. V předcházejícím jsme volili ar. zástupce A, B, C libovolně. Je však patrné, že je můžeme volit tak, že

(76.7) $$C = A + B\,,$$

načež $(ABCD) = \lambda$ pro

(76.8) $$D = \lambda A + B\,.$$

Z definice dvojpoměru plyne snadno:

VĚTA 76.2. *Je-li A, B, C, D, E pět různých g. bodů na projektivní přímce, potom pro jejich dvojpoměry platí*

$$(ABCD) \cdot (ABDE) = (ABCE) .$$

Dvojpoměr čtveřice je závislý na pořadí bodů, ze kterých se skládá čtveřice. Z definice je přímo patrné, že

$$(ABDC) = \frac{1}{(ABCD)} , \tag{76.9}$$

$$(BACD) = \frac{1}{(ABCD)} . \tag{76.10}$$

Dále uvažme, že ze (76.1) plyne

$$B = -\frac{u_1}{u_2} A + \frac{1}{u_2} C , \qquad D = \frac{u_2 v_1 - u_1 v_2}{u_2} A + \frac{v_2}{u_2} C ,$$

takže

$$(ACBD) = \frac{u_1 v_2 - u_2 v_1}{u_1 v_2} .$$

Porovnáme-li se (76.3), máme

$$(ACBD) = 1 - (ABCD) . \tag{76.11}$$

Vzorce (76.9) až (76.11) ukazují, jak se změní dvojpoměr čtveřice, jestliže vyměníme třetí bod se čtvrtým, nebo první s druhým, nebo druhý se třetím. Je-li $(ABCD) = \lambda$, dospějeme opětovným užitím těchto vzorců posléze k výsledku:

$$(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA) = \lambda , \tag{76.12}$$

$$(ACBD) = (BDAC) = (CADB) = (DBCA) = 1 - \lambda , \tag{76.13}$$

$$(ABDC) = (BACD) = (CDBA) = (DCAB) = \frac{1}{\lambda} , \tag{76.14}$$

$$(ACDB) = (BDCA) = (CABD) = (DBAC) = \frac{1}{1-\lambda} , \tag{76.15}$$

$$(ADBC) = (BCAD) = (CBDA) = (DACB) = \frac{\lambda - 1}{\lambda} , \tag{76.16}$$

$$(ADCB) = (BCDA) = (CBAD) = (DABC) = \frac{\lambda}{\lambda - 1} . \tag{76.17}$$

Je-li tedy λ hodnota dvojpoměru při určitém pořadí bodů, z nichž se skládá čtveřice, potom při všech možných 24 pořadích máme 6 zpravidla navzájem různých hodnot dvojpoměru:

$$(76.18) \qquad \lambda\,,\ 1-\lambda\,,\ \frac{1}{\lambda}\,,\ \frac{1}{1-\lambda}\,,\ \frac{\lambda-1}{\lambda}\,,\ \frac{\lambda}{\lambda-1}\,.$$

Při tom každá ze 6 hodnot (76.18) odpovídá čtyřem různým pořadím bodů ve čtveřici. Všimněme si těch čtyř pořadí (76.12), ve kterých dvojpoměr je roven λ. Všecka tato čtyři pořadí mají to společné, že čtveřice A, B, C, D je rozdělena na dvě dvojice:

$$(76.19) \qquad A\,,B\,;\quad C\,,D\,.$$

Při tom můžeme obě dvojice (77.19) mezi sebou vyměnit beze změny hodnoty dvojpoměru, t. j. na vzájemném pořadí obou dvojic nezáleží. Naproti tomu záleží na pořadí bodů uvnitř jednotlivé dvojice, a to tak, že beze změny hodnoty dvojpoměru můžeme v obou dvojicích zároveň změnit pořadí bodů, ze kterých se dvojice skládá.

Při tom jsme předpokládali, že všecka čísla (76.18) jsou navzájem různá. Ježto $0 \neq \lambda \neq 1$, zjistíme snadno, že některá z čísel (76.18) mohou splynout pouze tak, že buďto λ je rovné jednomu ze tří čísel

$$(76.20) \qquad -1\,,\ 2\,,\ \tfrac{1}{2}$$

nebo je

$$(76.21) \qquad \lambda^2 - \lambda + 1 = 0\,.$$

Avšak rovnice (76.21) nemá reálné kořeny a ježto vyšetřujeme pouze reálné hodnoty, máme ten výsledek, že při všech možných změnách pořadí bodů ve čtveřici nabude dvojpoměr méně než 6 různých hodnot, právě když při některém pořadí je dvojpoměr roven jednomu ze tří čísel (76.20). Je-li tomu tak, je dvojpoměr roven jednomu ze tří čísel (76.20) při *každém* pořadí bodů čtveřice, a to tak, že každá z hodnot (76.20) platí právě pro osm různých pořadí. Zvláště důležitá jsou ta pořadí, u kterých dvojpoměr je roven -1. Je-li

$$(76.22) \qquad (ABCD) = -1\,,$$

pravíme, že g. body A, B, C, D tvoří *harmonickou čtveřici*. Pojem harmonické čtveřice je tedy závislý na pořadí bodů, ze kterých se čtveřice skládá. Je-li čtveřice harmonická při některém pořadí, je harmonická při právě osmi ze všech 24 možných pořadí bodů ve čtveřici. Společné všem těmto pořadím je to, že daná čtveřice je určitým způsobem rozdělena na dvě dvojice (76.19). Naproti tomu nezáleží na vzájemném pořadí bodů uvnitř některé dvojice, ani na vzájemném pořadí obou dvojic. V důsledku toho zavádíme pro (76.22) ještě jiný způsob vyjadřování: pravíme, že body C , D jsou *harmonicky sdruženy* vzhledem k bodům A , B nebo že bod D je harmonicky sdružen s bodem C vzhledem k bodům A , B . Správnost tohoto rčení zůstane tedy nedotčena, jestliže vyměníme mezi sebou body A , B , nebo jestliže vyměníme mezi sebou body C , D , nebo jestliže vyměníme mezi sebou obě dvojice (76.19).

Budiž nyní dána *eukleidovská* přímka $\mathbf{E}_1$ a na ní tři různé e. body A , B , C . Potom existuje číslo t tak, že

$$A = C + t(B - C)$$

a je $0 \neq t \neq 1$. Vektor $\mathbf{u} = B - C$ je ar. zástupcem úběžného bodu na $\bar{\mathbf{E}}_1$. Je $B = C + \mathbf{u}$, $A = C + t\mathbf{u}$, takže podle definice dvojpoměru $(C\mathbf{u}AB) = t$ neboli podle (76.12): $(ABC\mathbf{u}) = t$, takže podle článku 27 je

$$(ABC\mathbf{u}) = \frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}} . \tag{76.23}$$

Jsou-li A , B , C , D čtyři různé e. body na e. přímce $\mathbf{E}_1$, potom vedle (76.23) máme též

$$(ABD\mathbf{u}) = \frac{\overrightarrow{DA}}{\overrightarrow{DB}} ,$$

takže podle věty (76.2) je

$$(ABCD) = \frac{\overrightarrow{CA} \,.\, \overrightarrow{DB}}{\overrightarrow{CB} \,.\, \overrightarrow{DA}} . \tag{76.24}$$

Zavedeme-li do (76.23) značku pro dělící poměr [viz (27.7)], máme

$$(ABC\mathbf{u}) = (C\,;A\,,B) \tag{76.23'}$$

a (76.24) zní

$$(ABCD) = \frac{(C\,;A\,,B)}{(D\,;A\,,B)} . \tag{76.24'}$$

Dvojpoměr čtveřice e. bodů je tudíž poměrem dvou dělících poměrů; to je důvodem pro název dvojpoměr.

Je-li C střed dvojice A, B, potom (76.23) dává $(ABC\boldsymbol{u}) = -1$. Platí tedy:

VĚTA 76.3. *Úběžný bod e. přímky AB a střed dvojice A, B jsou harmonicky sdruženy vzhledem k e. bodům A, B.*

77. ORIENTACE PROJEKTIVNÍ PŘÍMKY. V článcích 29 a 30 jsme zavedli pojem orientace eukleidovského prostoru $\boldsymbol{E}_m$ tak, že tato orientace byla závislá pouze na *zaměření* $\boldsymbol{V}_m$ prostoru $\boldsymbol{E}_m$. Při tom bylo podstatné pouze to, že $\boldsymbol{V}_m$ je vektorový prostor dimense m, takže můžeme obecněji mluvit o orientaci libovolného netriviálního vektorového prostoru konečné dimense. Nyní ar. základ $\boldsymbol{W}_{m+1}$ m-rozměrného projektivního prostoru $\boldsymbol{P}_m$ je vektorový prostor dimense $m+1$. V souhlase s citovanými články můžeme tedy zavést tyto definice. Jsou-li

(77.1) $$A_0, A_1, \ldots, A_m; \qquad B_0, B_1, \ldots, B_m$$

dvě base prostoru $\boldsymbol{W}_{m+1}$ (neboli dvě ar. base prostoru $\boldsymbol{P}_m$), existují reálná čísla a_{rs} $(0 \leqq r, s \leqq m)$ tak, že

$$B_r = a_{r0}A_0 + a_{r1}A_1 + \ldots + a_{rm}A_m \quad \text{pro} \quad 0 \leqq r \leqq m.$$

Determinant

$$\begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & \ldots & a_{0m} \\ a_{10} & a_{11} & \ldots & a_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m0} & a_{m1} & \ldots & a_{mm} \end{vmatrix}$$

je vždy různý od nuly; nazývá se *determinantem přechodu* od prvé ke druhé z ar. basí (77.1). O determinantech přechodu platí věty článku 29. Všecky ar. base prostoru $\boldsymbol{P}_m$ můžeme rozdělit na dvě třídy (viz počátek článku 30) tak, že dvě ar. base téže třídy jsou vždy *souhlasné*, t. j. determinant přechodu od jedné ke druhé ar. basi je kladný, kdežto dvě ar. base různých tříd jsou vždy *nesouhlasné*, t. j. determinant přechodu od jedné ke druhé ar. basi je záporný.

V souhlase s obdobnou definicí článku 30 je nasnadě definovat, že orientovat prostor $\boldsymbol{P}_m$ znamená vybrat jednu z obou právě zmíněných tříd, ar. base této třídy nazvat *kladné* a ar. base druhé třídy nazvat *záporné*. Naznačíme si důvod, proč taková orientace prostoru $\mathbf{P}_m$ při sudém m není účelná. Přechodu od ar. base $A_0, A_1, \ldots, A_m$ k ar. basi $B_0, B_1, \ldots, B_m$ můžeme přiřadit transformaci vektorového prostoru $\mathbf{W}_{m+1}$, která ar. bod

$$X = x_0A_0 + x_1A_1 + \ldots + x_mA_m$$

převádí v ar. bod

$$X' = x_0B_0 + x_1B_1 + \ldots + x_mB_m .$$

S touto transformací vektorového prostoru $\mathbf{W}_{m+1}$ je sdružena transformace projektivního prostoru $\mathbf{P}_m$, která g. bod $\{X\}$ převádí v g. bod $\{X'\}$; taková transformace prostoru $\mathbf{P}_m$ se jmenuje kolineace. Kolineace budeme podrobně studovat v následující kapitole. Nyní přechodu od ar. base $A_0, A_1, \ldots, A_m$ k ar. basi $-A_0, -A_1, \ldots, -A_m$ odpovídající kolineace není nic jiného než identická transformace projektivního prostoru $\mathbf{P}_m$, ačkoli takový přechod při sudém m znamená změnu orientace. Pro lichá m naproti tomu se ukazuje, že naznačená definice orientace prostoru $\mathbf{P}_m$ je účelná, a také jí užijeme v článku 83; ale pro liché $m > 1$ popis geometrického významu orientace prostoru $\mathbf{P}_m$ přesahuje rámec této knihy a při studiu geometrického významu orientace se proto v následujícím omezíme na případ $m = 1$ projektivní přímky.

Budiž dána *orientovaná projektivní přímka* $\mathbf{P}_1$, což podle předcházejícího znamená, že ar. base přímky $\mathbf{P}_1$ jsou rozděleny na kladné a záporné tak, že je-li A_0, A_1 kladná ar. base, potom druhá ar. base

$$B_0 = aA_0 + bA_1 , \qquad B_1 = cA_0 + dA_1$$

je kladná, právě když determinant přechodu $ad - bc$ je kladný.

Jsou-li nyní na naší orientované přímce $\mathbf{P}_1$ dány tři g. body $\{A\}$, $\{B\}$, $\{C\}$ (v určitém pořadí), definujeme *znamení* trojice $\{A\}$, $\{B\}$, $\{C\}$, které označíme

$$\operatorname{sgn}(ABC) , \tag{77.2}$$

takto. Jestliže předně $\{A\} = \{B\}$, je číslo (77.2) rovné nule. Jestliže za druhé $\{A\} \neq \{B\}$, potom ar. body A, B tvoří ar. basi pro $\mathbf{P}_1$, o které můžeme předpokládati, že je kladná. Potom existují reálná čísla x, y tak, že $C = xA + yB$. Volíme-li jiné ar. zástupce αA,

βB , γC , kde ovšem $\alpha\beta\gamma \neq 0$ a mimo to $\alpha\beta > 0$, aby také ar. base αA , βB byla kladná, potom místo čísel x , y budeme mít čísla $\gamma x : \alpha$, $\gamma y : \beta$ a tedy místo součinu xy bude $k . xy$, kde číslo $k = \gamma^2 : \alpha\beta$ je kladné. Můžeme tedy definovat zcela jednoznačně, že číslo (77.2) je rovné: nule pro $xy = 0$, jedné pro $xy < 0$, minus jedné pro $xy > 0$. Z definice plyne:

VĚTA 77.1. *Splynou-li některé dva z g. bodů* A , B , C , *je číslo* (77.1) *rovné nule. Jsou-li g. body* A , B , C *navzájem různé, je číslo* (77.1) *rovné* ± 1.

Zřejmě je vždy

$$\operatorname{sgn}(BAC) = -\operatorname{sgn}(ABC) . \tag{77.3}$$

Dále je

$$\operatorname{sgn}(ACB) = -\operatorname{sgn}(ABC) , \tag{77.4}$$

což vyžaduje důkazu pouze pro ten případ, že g. body A , B , C jsou navzájem různé. Volme ar. body A , B tak, aby tvořily kladnou ar. basi a volme ar. bod C tak, aby bylo $C = xA + B$, takže také ar. body A , C tvoří kladnou ar. basi. Potom je $\operatorname{sgn}(ABC)$ rovné 1 pro $x < 0$, rovné -1 pro $x > 0$. Avšak $B = -xA + C$, takže $\operatorname{sgn}(ACB)$ je rovné 1 pro $x > 0$, rovné -1 pro $x < 0$. Z toho je patrná platnost (77.4). Ze (77.3) a (77.4) se zjistí postupně, že

$$\begin{aligned} &\operatorname{sgn}(ABC) = \operatorname{sgn}(BCA) = \operatorname{sgn}(CAB) = \\ &= -\operatorname{sgn}(ACB) = -\operatorname{sgn}(BAC) = -\operatorname{sgn}(CBA) . \end{aligned} \tag{77.5}$$

Porovnáme-li definici dvojpoměru s definicí čísla (77.2), vidíme ihned, že platí:

VĚTA 77.2. *Jsou-li* A , B , C , D *čtyři různé g. body přímky* $\mathbf{P}_1$, *je* $\operatorname{sgn}(ABC) = \operatorname{sgn}(ABD)$, *je-li dvojpoměr* $(ABCD)$ *kladný,* $\operatorname{sgn}(ABC) = -\operatorname{sgn}(ABD)$, je-li dvojpoměr $(ABCD)$ záporný.

Dále platí:

VĚTA 77.3. *Jsou-li* A , B , C , D *čtyři g. body přímky* $\mathbf{P}_1$ *a je-li* $\operatorname{sgn}(ABD) = 1$, $\operatorname{sgn}(BCD) = 1$, *je také* $\operatorname{sgn}(ACD) = 1$.

DŮKAZ. Ježto $\operatorname{sgn}(ABD) \neq 0$, jsou g. body A , B , D navzájem různé. Ježto $\operatorname{sgn}(BCD) \neq 0$, je g. bod C různý od B i od D , je však také různý od A , neboť podle (77.3) je $\operatorname{sgn}(CBD) = -\operatorname{sgn}(BCD)$, takže $\operatorname{sgn}(ABD) \neq \operatorname{sgn}(CBD)$. Jsou tedy g. body A, B, C, D navzájem různé. Podle (77.5) je $\operatorname{sgn}(BDA) = 1$, $\operatorname{sgn}(BDC) = -1$, takže podle věty 77.2 dvojpoměr $(BDAC)$ je záporný. Podle (76.12) a (76.13) je $(CDAB) = 1 - (BDAC)$, takže $(CDAB) > 0$ a podle věty 77.2 je $\operatorname{sgn}(CDA) = \operatorname{sgn}(CDB)$. Podle (77.5) je však $\operatorname{sgn}(CDA) = \operatorname{sgn}(ACD)$, $\operatorname{sgn}(CDB) = \operatorname{sgn}(BCD)$ a ježto $\operatorname{sgn}(BCD) = 1$, je $\operatorname{sgn}(CDA) = 1$. Čtenář ostatně snadno dokáže větu 77.3 přímo bez užití věty 77.2.

Z definice plyne:

VĚTA 77.4. *Při změně orientace projektivní přímky číslo* (77.2) *se znásobí číslem* -1.

Budiž nyní dána *eukleidovská* přímka $\mathbf{E}_1$. Orientovat $\mathbf{E}_1$ ve smyslu článku 27 znamená rozdělit její nenulové vektory na kladné a na záporné tak, že je-li $\mathbf{u}$ kladný, je $x\mathbf{u}$ kladný, právě když $x > 0$. Předpokládejme, že $\mathbf{E}_1$ je orientována a zvolme na $\mathbf{E}_1$ e. bod A a kladný vektor $\mathbf{u}$. Potom dvojice ar. bodů A, $\mathbf{u}$ tvoří ar. basi pro projektivní rozšíření $\bar{\mathbf{E}}_1$ naší e. přímky a prohlásíme-li tuto ar. basi za kladnou, je $\bar{\mathbf{E}}_1$ orientována. Tato orientace projektivní přímky $\bar{\mathbf{E}}_1$ je závislá pouze na dané orientaci eukleidovské přímky $\mathbf{E}_1$, neboť vezmeme-li místo e. bodu A e. bod $B = A + z\mathbf{u}$ a místo kladného vektoru $\mathbf{u}$ kladný vektor $\mathbf{v} = x\mathbf{u}$, kde tedy $x > 0$, potom determinant přechodu od ar. base A, $\mathbf{u}$ k ar. basi B, $\mathbf{v}$ je roven x, je tedy kladný. Tedy dané orientaci $\mathbf{E}_1$ přísluší určitá orientace $\bar{\mathbf{E}}_1$ a je patrné, že obráceně orientace $\bar{\mathbf{E}}_1$ určuje orientaci $\mathbf{E}_1$, při které pro dva různé e. body vektor $B - A$ je kladný, právě když A, B je kladná ar. base pro $\bar{\mathbf{E}}_1$. Tedy orientace $\mathbf{E}_1$ a orientace $\bar{\mathbf{E}}_1$ si navzájem odpovídají a bez obavy z nedorozumění je můžeme ztotožnit.

78. PROJEKTIVNÍ INTERVALY. V tomto článku opět předpokládáme, že je dána projektivní přímka $\mathbf{P}_1$ a všecky vyšetřované body leží na $\mathbf{P}_1$.

Zvolme dva různé body $\{A\}$, $\{B\}$ a rozdělíme všecky ostatní body $\{X\}$ na dvě třídy tak, že do jedné třídy dáme všecky ty, pro něž ve vyjádření

$$X = x_1 A + x_2 B$$

obě čísla x_1, x_2 (různá od nuly, ježto g. bod X je různý od g. bodů A, B) mají totéž znamení, do druhé třídy pak ty, pro něž znamení čísel x_1, x_2 jsou navzájem opačná. Je zřejmé, že toto rozdělení na třídy je nezávislé na volbě ar. zástupců uvažovaných g. bodů. Jestliže body C, D náleží každý do jiné třídy, řekneme, že dvojice A, B *odděluje* bod C od bodu D. Z definice dvojpoměru je patrné, že platí:

VĚTA 78.1. *Dvojice A, B odděluje bod C od bodu D, právě když dvojpoměr* $(ABCD)$ je záporný.

Z věty 78.1 plyne podle (76.12):

VĚTA 78.2. *Jestliže dvojice A, B odděluje bod C od bodu D, potom dvojice C, D odděluje bod A od bodu B.*

Ze (76.12) až (76.17) plyne snadno:

VĚTA 78.3. *Čtyři různé body projektivní přímky lze právě jedním způsobem rozdělit na dvě dvojice tak, aby jedna* (podle věty 78.2 kterákoli) *dvojice oddělovala jeden od druhého body dvojice druhé.*

Porovnáme-li nynější definici oddělování s definicí oddělování na eukleidovské přímce vyslovenou v prvém svazku na str. 74, dostaneme:

VĚTA 78.4. *Jsou-li A, B, C tři různé body eukleidovské přímky $\mathbf{E}_1$, potom bod C odděluje A od B na $\mathbf{E}_1$, právě když bod C spolu s úběžným bodem oddělují A od B na projektivním rozšíření $\overline{\mathbf{E}}_1$.*

Jsou-li A, B dva různé g. body, nazveme *intervalem AB* množinu složenou z g. bodu A, z g. bodu B a ze všech těch dalších g. bodů přímky $\mathbf{P}_1$, které náležejí do jedné z obou tříd definovaných na počátku tohoto článku. Jsou tedy na projektivní přímce AB *dva* různé intervaly AB, které dohromady vyplní celou projektivní přímku a které mají společné pouze body A, B, jež nazýváme *krajními body* každého z obou intervalů AB. Každý jiný bod naší přímky náleží do jediného intervalu AB a pravíme, že je jeho *vnitřním bodem.* Interval AB je jednoznačně určen teprve tehdy, jestliže vedle obou krajních bodů A, B je dán ještě jeden vnitřní bod C; můžeme nazvat *intervalem ACB* ten interval AB, jehož vnitřním bodem je bod C. Z věty 78.1 je patrné, že bod $\{X\} \neq \{C\}$ je vnitřním bodem intervalu ACB, právě když dvojpoměr $(ABCX)$ je kladný; je-li D bod přímky

$\mathbf{P}_1$, který nenáleží do intervalu ACB, potom X je vnitřním bodem tohoto intervalu, právě když dvojpoměr $(ABCX)$ je záporný.

Je-li C bod eukleidovské přímky $\mathbf{E}_1$ a je-li $\mathbf{u}$ úběžný bod téže přímky, plyne z věty 78.4, že intervaly $C\mathbf{u}$ na projektivní přímce $\overline{\mathbf{E}}_1$ vzniknou, jestliže polopřímky s počátkem C obsažené v přímce $\mathbf{E}_1$ rozšíříme o úběžný bod $\mathbf{u}$. Jsou-li A, B dva různé body eukleidovské přímky $\mathbf{E}_1$, potom úsečka AB je jedním z obou intervalů AB. Neboť je-li $\mathbf{u}$ úběžný bod přímky $\mathbf{E}_1$ a je-li X e. bod různý od A i od B, potom podle (76.23) dvojpoměr $(ABX\mathbf{u})$ je záporný, právě když vektory $X - A$, $X - B$ jsou nesouhlasné, t. j. právě když X je vnitřním bodem úsečky AB.

Nyní si promluvíme o souvislosti pojmu intervalu s pojmem orientace projektivní přímky $\mathbf{P}_1$. Předpokládejme, že přímka $\mathbf{P}_1$ je orientována, takže pro každé tři body A, B, C je definováno znamení $\operatorname{sgn}(ABC)$. Je-li nyní D určitý bod přímky $\mathbf{P}_1$, označme $\mathbf{P}_1 - D$ množinu, která vznikne z množiny $\mathbf{P}_1$ odstraněním g. bodu D. Jsou-li X, Y dva body množiny $\mathbf{P}_1 - D$, položme

$$\operatorname{sgn}(X, Y) = \operatorname{sgn}(X, Y, D). \tag{78.1}$$

Z věty 77.3 plyne, že symbol $\operatorname{sgn}(X, Y)$ má vlastnosti (α), (β), (γ) vyslovené v článku 26, takže je jím určeno uspořádání množiny $\mathbf{P}_1 - D$, které nazveme *přirozeným uspořádáním* množiny $\mathbf{P}_1 - D$ příslušným dané orientaci přímky $\mathbf{P}_1$. Je patrné, že při změně orientace toto uspořádání přejde v uspořádání k němu opačné.

Všimněme si toho případu, že $\mathbf{P}_1 = \overline{\mathbf{E}}_1$ je projektivní rozšíření eukleidovské přímky $\mathbf{E}_1$ a že $D = \mathbf{u}$ je úběžný bod, takže $\mathbf{P}_1 - D = \mathbf{E}_1$. Víme (viz str. 34), že orientaci $\mathbf{P}_1$ odpovídá určitá orientace $\mathbf{E}_1$, které opět podle článku 27 odpovídá určité přirozené uspořádání přímky $\mathbf{E}_1$. Dokážeme, že toto přirozené uspořádání splývá s přirozeným uspořádáním založeným na symbolu (77.2). Neboť nechť e. bod A leží před e. bodem B v přirozeném uspořádání ve smyslu článku 27. Můžeme předpokládat, že $\mathbf{u}$ je kladný vektor, takže $B = A + x\mathbf{u}$, kde $x > 0$. Avšak A, $\mathbf{u}$ je kladná ar. base pro $\mathbf{E}_1$, takže $\operatorname{sgn}(A\mathbf{u}B) = -1$ a tedy podle (77.4) $\operatorname{sgn}(AB\mathbf{u}) = 1$ neboli $\operatorname{sgn}(ABD) = 1$,

t. j. A leží před B i ve smyslu přirozeného uspořádání definovaného pomocí (77.1).

Budiž nyní dán interval J na přímce $\mathbf{P}_1$. Ježto $\mathbf{P}_1$ je orientována, můžeme rozlišit krajní body intervalu J na *počáteční a koncový bod* tak, aby počáteční bod ležel před koncovým v přirozeném uspořádání množiny $\mathbf{P}_1 - D$, kde bod D zvolíme na přímce $\mathbf{P}_1$ tak, aby nenáležel do intervalu J. K této definici jsme oprávněni, neboť jsou-li D_1, D_2 dva různé body přímky $\mathbf{P}_1$, z nichž žádný nenáleží do intervalu J, a jsou-li A, B krajní body tohoto intervalu, potom podle definice intervalu dvojice A, B neodděluje bod D_1 od bodu D_2, takže podle věty 78.1 dvojpoměr (ABD_1D_2) je kladný, a tudíž podle věty 78.2 je $\operatorname{sgn}(ABD_1) = \operatorname{sgn}(ABD_2)$.

Jsou-li A, B dva různé body na přímce P_1, a jsou-li J_1, J_2 oba intervaly AB, zvolme vnitřní bod D_1 intervalu J_1 a vnitřní bod D_2 intervalu J_2. Podle definice intervalu dvojice A, B odděluje bod D_1 od bodu D_2, takže podle věty 78.1 dvojpoměr (ABD_1D_2) je záporný. Jestliže nyní na př. pro interval J_1 bod A je počátečním a bod B koncovým, je $\operatorname{sgn}(ABD_2) = 1$, ježto D_2 nenáleží do J_1. Podle věty 77.2 je potom $\operatorname{sgn}(ABD_1) = -1$, takže podle (77.3) je $\operatorname{sgn}(ABD) = 1$ a ježto D_1 nenáleží do J_2, je pro interval J_2 bod A koncovým a bod B počátečním. Platí tedy

VĚTA 78.5. *Jsou-li A, B dva různé body orientované projektivní přímky $\mathbf{P}_1$, potom pro jeden z obou intervalů AB je A bodem počátečním, B bodem koncovým, pro druhý pak je obráceně A bodem koncovým, B bodem počátečním.*

Je-li D bod, který nenáleží do intervalu J, potom *přirozeným uspořádáním intervalu* J rozumíme to uspořádání, které je určeno přirozeným uspořádáním množiny $\mathbf{P}_1 - D$, jejíž částí je interval J. Především platí:

VĚTA 78.6. *V přirozeném uspořádání intervalu J je prvním jeho bod počáteční, posledním jeho bod koncový.*

Je ovšem třeba dokázat, že pojem přirozeného uspořádání intervalu J je nezávislý na volbě pomocného bodu D, že tedy smysl výroku „X je před Y“, kde X, Y jsou dva různé body intervalu J, je nezávislý na volbě bodu D. To plyne z věty 78.6 pro ten případ, že aspoň jeden z obou bodů X , Y je krajním bodem pro J ; případ, že oba body X , Y jsou vnitřními body intervalu J , je vyřízen následující větou.

VĚTA 78.7. *Budiž A počáteční, B koncový bod intervalu J na orientované projektivní přímce $\mathbf{P}_1$. Jsou-li C_1 , C_2 dva různé vnitřní body intervalu J , leží C_1 před C_2 v přirozeném uspořádání intervalu J , právě když dvojpoměr (ABC_1C_2)* je menší než 1.

Poznámka. Z věty 78.1 plyne, že dvojpoměr (ABC_1C_2) je kladný; podle (76.4) je $(ABC_1C_2) \neq 1$.

DŮKAZ. Přirozené uspořádání intervalu J je určeno přirozeným uspořádáním množiny $\mathbf{P}_1 - D$, kde D je bod zvolený mimo interval J . Při vhodné volbě ar. zástupců bude

$$D = A - B . \tag{78.2}$$

Ježto $\operatorname{sgn}(ABD) = 1$, je při této volbě A , B kladná ar. base. Pro každý vnitřní bod C intervalu J je $\operatorname{sgn}(ABC) = -1$, takže při vhodné volbě ar. zástupce je $C = A + xB$, $x > 0$. Buďtež nyní

$$C_1 = A + x_1B , \qquad C_2 = A + x_2B \tag{78.3}$$

dva různé vnitřní body intervalu J , takže

$$x_1 > 0 , \qquad x_2 > 0 , \qquad x_1 \neq x_2 . \tag{78.4}$$

Podle definice dvojpoměru je

$$(ABC_1C_2) = x_1 : x_2 . \tag{78.5}$$

Nyní ze (78.2) a (78.3) plyne

$$(x_1 - x_2)D = -(1 + x_2)C_1 + (1 + x_1)C_2 ,$$

takže podle (78.4) číslo $\operatorname{sgn}(C_1C_2D)$ je rovné $+1$ nebo -1 podle toho, zda C_1 , C_2 je kladná či záporná ar. base. Avšak determinant přechodu od kladné ar. base A , B k ar. basi C_1 , C_2 podle (78.3) je $x_2 - x_1$, což podle (78.4) a (78.5) je kladné, právě když $(ABC_1C_2) < 1$. Tedy $\operatorname{sgn}(C_1C_2D) = 1$, právě když $(ABC_1C_2) < 1$, čímž je vše dokázáno.

VĚTA 78.8. *Budiž A počáteční a B koncový bod intervalu J na orientované projektivní přímce $\mathbf{P}_1$. Budiž D bod nenáležející do J . Potom bod C je vnitřním bodem pro J , právě když C leží mezi A a B ve smyslu přirozeného uspořádání množiny $\mathbf{P}_1 - D$.*

DŮKAZ. Volme opět ar. zástupce A, B, D tak, aby platilo (78.2), načež A, B je kladná ar. base, ježto $\operatorname{sgn}(ABD) = 1$. Potom bod C různý od A i od B při vhodné volbě ar. zůstupce má tvar $C = A + xB$, kde $x \neq 0$. Bod C je vnitřním bodem pro J, právě když $\operatorname{sgn}(ABC) = -1$, t. j. právě když $x > 0$. Máme tedy dokázat, že $x > 0$, právě když zároveň $\operatorname{sgn}(ACD) = 1$, $\operatorname{sgn}(CBD) = 1$ neboli [viz (77.5)], právě když zároveň $\operatorname{sgn}(DAC) = 1$, $\operatorname{sgn}(DBC) = -1$. Ježto však $D = A - B$, $C = A + xB$, jsou D, A; D, B kladné ar. base. Mimo to

$$C = -xD + (1 + x)A = D + (1 + x)B,$$

takže skutečně $x > 0$, právě když zároveň $\operatorname{sgn}(DAC) = 1$, $\operatorname{sgn}(DBC) = -1$.

Z věty 78.8 plyne snadno:

VĚTA 78.9. *Budiž C vnitřní bod intervalu J s krajními body A, B na projektivní přímce $\mathbf{P}_1$. Potom existuje interval J_1 s krajními body A, C a interval J_2 s krajními body B, C tak, že J_1, J_2 dohromady tvoří interval J, při čemž je C jediný společný bod intervalů J_1, J_2.*

XI

KOLINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ

79. POJEM KOLINEÁRNÍHO ZOBRAZENÍ. V článku 14 jsme zavedli pojem isomorfismu vektorových prostorů a ukázali jsme, že dva vektorové prostory konečné dimense jsou isomorfní, právě když jejich dimense jsou si rovny. Buďtež nyní $\mathbf{P}_m$, $\mathbf{P}'_m$ dva projektivní prostory téže dimense $m \geq 1$ a buďtež $\mathbf{W}_{m+1}$, $\mathbf{W}'_{m+1}$ jejich aritmetické základy, takže $\mathbf{W}_{m+1}$, $\mathbf{W}'_{m+1}$ jsou dva vektorové prostory téže dimense $m + 1$. Existuje tudíž isomorfní zobrazení L vektorového prostoru $\mathbf{W}_{m+1}$ na vektorový prostor $\mathbf{W}'_{m+1}$. Z definice isomorfního zobrazení je patrné, že L převádí každou lineární soustavu obsaženou ve $\mathbf{W}_{m+1}$ v lineární soustavu téže dimense obsaženou ve $\mathbf{W}'_{m+1}$. Ježto g. body prostoru $\mathbf{P}_m$ můžeme ztotožnit s lineárními soustavami dimense 1 obsaženými ve $\mathbf{W}_{m+1}$ a podobně pro g. body prostoru $\mathbf{P}'_m$, vidíme, že L určuje vzájemně jednoznačný vztah K mezi g. body prostoru $\mathbf{P}_m$ a g. body prostoru $\mathbf{P}'_m$. Pravíme, že K je *kolineární zobrazení* projektivního prostoru $\mathbf{P}'_m$ na projektivní prostor $\mathbf{P}'_m$ *vytvořené* isomorfismem L. Kolineární zobrazení podle této definice je tedy prosté zobrazení projektivního prostoru $\mathbf{P}_m$ na projektivní prostor téže dimense, který může, ale nemusí splynout s $\mathbf{P}_m$.

Následující vlastnosti jsou bezprostředně patrné z definice:

VĚTA 79.1. *Je-li K_1 kolineární zobrazení projektivního prostoru $\mathbf{P}_m$ na projektivní prostor $\mathbf{P}'_m$ a je-li K_2 kolineární zobrazení prostoru $\mathbf{P}'_m$ na projektivní prostor $\mathbf{P}''_m$, potom složené zobrazení $K_1 \circ K_2$ je kolineární zobrazení prostoru $\mathbf{P}_m$ na prostor $\mathbf{P}''_m$.*

VĚTA 79.2. *Je-li K kolineární zobrazení projektivního prostoru $\mathbf{P}_m$ na projektivní prostor $\mathbf{P}'_m$, potom inversní zobrazení K^{-1} je kolineární zobrazení prostoru $\mathbf{P}'_m$ na prostor $\mathbf{P}_m$.*

VĚTA 79.3. *Identické zobrazení projektivního prostoru $\mathbf{P}_m$ je kolineární zobrazení prostoru $\mathbf{P}_m$ na týž prostor $\mathbf{P}_m$.*

VĚTA 79.4. *Je-li K kolineární zobrazení projektivního prostoru $\mathbf{P}_m$ na projektivní prostor $\mathbf{P}'_m$, a je-li $\mathbf{P}_k$ lineární podprostor prostoru $\mathbf{P}_m$, P'_k jeho obraz při K, potom $\mathbf{P}'_k$ je lineární podprostor prostoru $\mathbf{P}'_m$, $\mathbf{P}_k$ a $\mathbf{P}'_k$ mají oba touž dimensi k a parciální zobrazení $K \mid \mathbf{P}_k$ je kolineární zobrazení prostoru $\mathbf{P}_k$ na prostor $\mathbf{P}'_k$.*

Podle definice je kolineární zobrazení K projektivního prostoru $\mathbf{P}_m$ na projektivní prostor $\mathbf{P}'_m$ vytvořeno isomorfním zobrazením L vektorového prostoru $\mathbf{W}_{m+1}$ na vektorový prostor $\mathbf{W}'_{m+1}$. Je-li c reálné číslo různé od nuly, položme $L_1X = c \,.\, LX$ pro každý ar. bod X a označme $L_1 = c \,.\, L$; potom také L_1 je isomorfní zobrazení $\mathbf{W}_{m+1}$ na $\mathbf{W}'_{m+1}$, které zřejmě vytvořuje totéž kolineární zobrazení $\mathbf{P}_m$ na $\mathbf{P}'_m$. Obráceně dokážeme snadno, že je-li L_1 isomorfní zobrazení $\mathbf{W}_{m+1}$ na $\mathbf{W}'_{m+1}$, které vytvořuje totéž kolineární zobrazení K, které vytvořuje L, existuje reálné číslo $c \neq 0$ tak, že $L_1 = cL$. Neboť zvolíme-li libovolně ar. bod $A \neq \mathbf{o}$ vektorového prostoru $\mathbf{W}_{m+1}$, mají ar. body $LA \neq \mathbf{o}$, $L_1A \neq \mathbf{o}$ touž polohu, takže existuje číslo $c \neq 0$ tak, že $L_1A = c \,.\, LA$. Máme dokázat, že také pro kterýkoli jiný ar. bod X prostoru $\mathbf{W}_{m+1}$ je $L_1X = c \,.\, LX$. Jestliže předně ar. body A, X jsou lineárně závislé, existuje číslo m tak, že $X = mA$ a podle definice isomorfismu je $LX = m \,.\, LA$, $L_1X = m \,.\, L_1A$, tedy $L_1X = c \,.\, LX$. Jestliže za druhé ar. body A, X jsou lineárně nezávislé, je $X \neq \mathbf{o}$ a oba ar. body $LX \neq \mathbf{o}$, $L_1X \neq \mathbf{o}$ mají touž polohu, takže existuje číslo a tak, že $L_1X = a \,.\, LX$. Mimo to je však též $A + X \neq \mathbf{o}$ a oba ar. body $L(A + X) \neq \mathbf{o}$, $L_1(A + X) \neq \mathbf{o}$ mají touž polohu, takže existuje číslo b tak, že $L_1(A + X) = b \,.\, L(A + X)$ neboli $c \,.\, LA + a \,.\, LX = b \,.\, LA + b \,.\, LX$, t. j. $(c - b) \,.\, LA + (a - b) \,.\, LX = \mathbf{o}$. Avšak zároveň s ar. body A, X jsou též ar. body LA, LX lineárně nezávislé, tedy $c - b = 0$, $a - b = 0$, takže $a = c$, t. j. $L_1X = c \,.\, LX$.

Podobně jako jsme označili $\{X\}$ g. bod odpovídající ar. bodům cX, kde c probíhá všecka čísla různá od nuly, označíme v důsledku právě dokázané věty $\{L\}$ projektivní zobrazení K vytvořené isomorfismem L, neboť odpovídá všem isomorfismům cL, $c \neq 0$.

Je-li f regulární afinní zobrazení eukleidovského prostoru $\mathbf{E}_m$ na eukleidovský prostor $\mathbf{E}'_m$, definujeme $f(\mathbf{u})$ podle věty 37.2 pro každý vektor $\boldsymbol{u}$ prostoru $\boldsymbol{E}_m$ a tím rozšíříme f v zobrazení množiny $\boldsymbol{W}_{m+1}$ všech vlastních i nevlastních ar. bodů prostoru $\boldsymbol{E}_m$ na množinu $\boldsymbol{W}'_{m+1}$ všech vlastních i nevlastních ar. bodů prostoru $\boldsymbol{E}'_m$. Toto rozšířené zobrazení f je podle výsledků článku 37 isomorfní, takže vytvořuje kolineární zobrazení $\{f\}$ projektivního prostoru $\overline{\boldsymbol{E}}_m$ na projektivní prostor $\overline{\boldsymbol{E}}'_m$, které rovněž je rozšířením původního regulárního afinního zobrazení f. Pravíme, že $\{f\}$ je *projektivním rozšířením* daného afinního zobrazení f. Takové projektivní rozšíření $\{f\}$ zřejmě má tyto dvě vlastnosti:

(a) obrazem každého vlastního bodu prostoru $\overline{\boldsymbol{E}}_m$ je vlastní bod prostoru $\overline{\boldsymbol{E}}'_m$;

(b) obrazem každého nevlastního bodu prostoru $\overline{\boldsymbol{E}}_m$ je nevlastní bod prostoru $\overline{\boldsymbol{E}}'_m$.

Obráceně plyne z článku 37, že každé kolineární zobrazení prostoru $\overline{\boldsymbol{E}}_m$ na prostor $\overline{\boldsymbol{E}}'_m$ je projektivním rozšířením určitého regulárního afinního zobrazení prostoru $\boldsymbol{E}_m$ na $\boldsymbol{E}'_m$. Ostatně je patrné, že je-li splněna jedna z obou vlastností (a), (b), je splněna také druhá a obě se dají stručně shrnout tak, že obrazem úběžné nadroviny prostoru $\overline{\boldsymbol{E}}_m$ je úběžná nadrovina prostoru $\overline{\boldsymbol{E}}'_m$.

Víme, že v prostoru $\boldsymbol{P}_m$ nelze udat více než $m + 1$ lineárně nezávislých g. bodů. Nazveme *geometrickou basí* (zkráceně g. basí) prostoru $\boldsymbol{P}_m$ uspořádanou soustavu

$$\{A_0\}, \{A_1\}, \ldots, \{A_m\}, \{A_{m+1}\} \tag{79.1}$$

$m + 2$ g. bodů s tou vlastností, že vynecháním kteréhokoli z nich vznikne $m + 1$ lineárně nezávislých g. bodů. Je-li (79.1) g. base pro $\boldsymbol{P}_m$, jest $A_0, A_1, \ldots, A_m$ ar. base, takže existují čísla $t_0, t_1, \ldots, t_m$ tak, že

$$A_{m+1} = t_0A_0 + t_1A_1 + \ldots + t_mA_m\,. \tag{79.2}$$

Při tom jsou všecka čísla $t_0, t_1, \ldots, t_m$ různá od nuly, neboť kdyby pro nějaké r $(0 \leq r \leq m)$ bylo $t_r = 0$, plynulo by ze (79.2), že by vynecháním g. bodu $\{A_r\}$ vznikla ze (79.1) soustava $m + 1$ lineárně závislých g. bodů. Obráceně se snadno dokáže, že platí-li (79.2) a jsou-li všecka čísla $t_0, t_1, \ldots, t_m$ různá od nuly, je (79.1) g. base pro $\boldsymbol{P}_m$.

Z předcházejícího je patrné, že je-li (79.1) g. base pro $\mathbf{P}_m$, je možné ar. zástupce daných g. bodů volit takže (79.2) má tvar

$$A_{m+1} = A_0 + A_1 + \ldots + A_m . \tag{79.3}$$

Je-li tomu tak, pravíme, že g. base (79.1) je *vytvořena* ar. basí A_0, $A_1, \ldots, A_m$. Zřejmě každá ar. base vytvořuje g. basi. Obráceně je každá g. base vytvořena nekonečně mnoha ar. basemi; je-li A_0, $A_1, \ldots, A_m$ jedna z nich, potom nejobecnější taková ar. base má tvar $cA_0, cA_1, \ldots, cA_m$, kde číslo c je různé od nuly, jinak je však libovolné.

Zřejmá je

VĚTA 79.5. *Při kolineárním zobrazení projektivního prostoru $\mathbf{P}_m$ na projektivní prostor $\mathbf{P}'_m$ přejde každá g. base prostoru $\mathbf{P}_m$ v g. basi prostoru $\mathbf{P}'_m$.*

Obráceně platí

VĚTA 79.6. *Buďtež $\mathbf{P}_m$, $\mathbf{P}'_m$ projektivní prostory téže dimense m. Budiž* (79.1) *g. base prostoru $\mathbf{P}_m$ a budiž*

$$\{A'_0\}, \{A'_1\}, \ldots, \{A'_m\}, \{A'_{m+1}\} \tag{79.4}$$

g. base prostoru $\mathbf{P}'_m$. Potom existuje právě jedno kolineární zobrazení prostoru $\mathbf{P}_m$ na prostor $\mathbf{P}'_m$, při kterém g. base (79.1) *přejde v g. basi* (79.4).

DŮKAZ. Můžeme předpokládat, že ar. zástupci g. bodů (79.1) jsou voleni tak, že platí (79.3), a že ar. zástupci g. bodů (79.4) jsou voleni tak, že platí

$$A'_{m+1} = A'_0 + A'_1 + \ldots + A'_m . \tag{79.5}$$

Je-li nyní $\{L\}$ žádané kolineární zobrazení, je zřejmé, že existují reálná čísla $c_0, c_1, \ldots, c_m$, vesměs různá od nuly, s tou vlastností, že

$$LA_0 = c_0A'_0 , LA_1 = c_1A'_1 , \ldots , LA_m = c_mA'_m . \tag{79.6}$$

Obráceně rovnice tvaru (79.6), kde čísla $c_0, c_1, \ldots, c_m$ jsou různá od nuly, definují vždy kolineární zobrazení $\{L\}$ prostoru $\mathbf{P}_m$ na prostor $\mathbf{P}'_m$ při kterém g. base (79.1) přejde v g. basi (79.4), právě když je splněna podmínka $\{LA_{m+1}\} = \{A'_{m+1}\}$. Podle (79.3) a (79.5) je však

$$LA_{m+1} = c_0A'_0 + c_1A'_1 + \ldots + c_mA'_m ;$$

porovnání se (79.5) ukazuje, že podmínka je splněna, právě když všecka čísla $c_0, c_1, \dots, c_m$ jsou si rovna. Ježto $\{L\} = \{c_0 L\}$, můžeme předpokládat, že

$$LA_0 = A'_0, \ LA_1 = A'_1, \ \dots, \ LA_m = A'_m.$$

Věta 79.6 je tedy správná s tímto dodatkem: *Je-li g. base* (79.1) *vytvořena ar. basí*

$$A_0, A_1, \dots, A_m \tag{79.7}$$

a je-li g. base (79.4) *vytvořena ar. basí*

$$A'_0, A'_1, \dots, A'_m, \tag{79.8}$$

potom kolineární zobrazení, o kterém je řeč ve větě 79.6, *je vytvořeno tím isomorfním zobrazením ar. základu prostoru* $\mathbf{P}_m$ *na ar. základ prostoru* $\mathbf{P}'_m$, *při kterém ar. base* (79.7) *přejde v ar. basi* (79.8).

80. KONGRUENCE VE VEKTOROVÝCH PROSTORECH. Budiž dán vektorový prostor $\mathbf{V}_m$ dimense m a v něm obsažená lineární soustava $\mathbf{V}_k$ dimense k. Podle věty 13.1 je $k \leq m$, při čemž rovnost $k = m$ nastane pouze v tom případě, že $\mathbf{V}_k$ splyne s celým $\mathbf{V}_m$. Jsou-li nyní $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ dva vektory prostoru $\mathbf{V}_m$, pravíme, že $\mathbf{u}_1$ je *kongruentní* s $\mathbf{u}_2$ *podle modulu* $\mathbf{V}_k$ a píšeme

$$\mathbf{u}_1 \equiv \mathbf{u}_2 \ (\mathrm{mod}\mathbf{V}_k), \tag{80.1}$$

jestliže vektor $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$ náleží do lineární soustavy $\mathbf{V}_k$. Potom platí následující dvě věty:

VĚTA 80.1. *Platí-li* (80.1) *a*

$$\mathbf{v}_1 \equiv \mathbf{v}_2 \ (\mathrm{mod}\mathbf{V}_k), \tag{80.2}$$

platí také

$$\mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_1 \equiv \mathbf{u}_2 + \mathbf{v}_2 \ (\mathrm{mod}\mathbf{V}_k). \tag{80.3}$$

DŮKAZ. Vztah (80.1) znamená, že vektor $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$ náleží do $\mathbf{V}_k$; vztah (80.2) znamená, že vektor $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ náleží do $\mathbf{V}_k$. Jsou-li oba vztahy správné, potom podle definice lineární soustavy náleží do $\mathbf{V}_k$ také

$$(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) + (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = (\mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_1) - (\mathbf{u}_2 + \mathbf{v}_2)$$

a to znamená, že je správný též vztah (80.3).

VĚTA 80.2. *Platí-li* (80.1) *a je-li c reálné číslo, platí také*

$$cu_1 \equiv cu_2 \pmod{V_k}. \tag{80.4}$$

DŮKAZ. Vztah (80.1) znamená, že vektor $u_1 - u_2$ náleží do V_k, načež podle definice lineární soustavy do V_k náleží také

$$c(u_1 - u_2) = cu_1 - cu_2$$

a to znamená, že je správný též vztah (80.4).

Zvolme libovolnou basi

$$w_1, \ldots, w_k \tag{80.5}$$

prostoru V_k. Podle věty 13.1 můžeme připojit další vektory

$$w_{k+1}, \ldots, w_m \tag{80.6}$$

tak, že (80.5) a (80.6) dohromady tvoří basi prostoru V_m. Jsou-li nyní

$$u_1 = a_1 w_1 + \ldots + a_m w_m,$$
$$u_2 = b_1 w_1 + \ldots + b_m w_m$$

libovolné dva vektory prostoru V_m, potom platí (80.1), právě když vektor $u_1 - u_2$ je lineární kombinací vektorů (80.5), t. j. právě když

$$a_r = b_r \quad \text{pro} \quad k + 1 \leqq r \leqq m.$$

Z toho soudíme snadno, že platí:

VĚTA 80.3. *Vektory prostoru V_m můžeme rozdělit na třídy tak, že kongruence* (80.1) *platí, právě když oba vektory* u_1, u_2 jsou v téže třídě.

Množinu všech takových tříd označíme $V_m \bmod V_k$ a třídu, do které patří vektor u, označíme $u \bmod V_k$. Věty 80.1 a 80.2 vedou k následujícím dvěma definicím.

Součtem tříd $u \bmod V_k$, $v \bmod V_k$ rozumíme třídu $u + v \bmod V_k$, která podle věty 80.1 je nezávislá na volbě vektorů u, v uvnitř obou tříd. Součinem třídy $u \bmod V_k$ s reálným číslem c rozumíme třídu $cu \bmod V_k$, která podle věty 80.2 je nezávislá na volbě vektoru u uvnitř jeho třídy. Snadno se zjistí, že v důsledku těchto definic $V_m \bmod V_k$ tvoří nový vektorový prostor. Zřejmě platí:

VĚTA 80.4. *Tvoří-li vektory* (80.5) *basi pro* $\mathbf{V}_k$ *a spolu s vektory* (80.6) *basi pro* $\mathbf{V}_m$, *potom třídy*

$$(80.7) \qquad \mathbf{w}_{k+1} \bmod \mathbf{V}_k\,, \ldots, \mathbf{w}_m \bmod \mathbf{V}_k$$

tvoří basi pro $\mathbf{V}_m \bmod \mathbf{V}_k$. Z toho plyne:

VĚTA 80.5. *Vektorový prostor* $\mathbf{V}_m \bmod \mathbf{V}_k$ *má dimensi* $m - k$. *Je-li* $k = 0$, *t. j. je-li* $\mathbf{V}_k$ *triviální*, splyne prostor $\mathbf{V}_m \bmod \mathbf{V}_k$ s prostorem $\mathbf{V}_m$. Je-li $k = m$, t. j. splyne-li $\mathbf{V}_k$ s $\mathbf{V}_m$, je $\mathbf{V}_m \bmod \mathbf{V}_k$ triviální. Zajímavé jsou tudíž pouze případy $1 \leqq k \leqq m - 1$.

Buďtež nyní $\mathbf{V}_m$, $\tilde{\mathbf{V}}_m$ dva duálně sdružené vektorové prostory dimense m (viz článek 49; místo vodorovného pruhu užijeme vlnitého pruhu). Budiž $\mathbf{V}_k$ lineární soustava dimense k prostoru $\mathbf{V}_m$. Zvolme opět vektory (80.5) a (80.6) tak, že dohromady tvoří basi pro $\mathbf{V}_m$, při čemž (80.5) je base pro $\mathbf{V}_k$. K dané basi pro $\mathbf{V}_m$ utvořme duální basi

$$\tilde{\mathbf{w}}_1, \ldots, \tilde{\mathbf{w}}_m$$

pro $\tilde{\mathbf{V}}_m$. Je-li

$$\mathbf{u} = x_1\mathbf{w}_1 + \ldots + x_m\mathbf{w}_m\,,$$
$$\tilde{\mathbf{v}} = y_1\tilde{\mathbf{w}}_1 + \ldots + y_m\tilde{\mathbf{w}}_m\,,$$

je podle definice duálních basí

$$d(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{v}}) = x_1y_1 + \ldots + x_my_m\,.$$

Budiž $\tilde{\mathbf{V}}_{m-k} = \{\tilde{\mathbf{w}}_{k+1}, \ldots, \tilde{\mathbf{w}}_m\}$. Jestliže $\mathbf{u}$ náleží do $\mathbf{V}_k$, $\tilde{\mathbf{v}}$ do $\tilde{\mathbf{V}}_{m-k}$, je $x_r = 0$ pro $k + 1 \leqq r \leqq m$, $y_s = 0$ pro $1 \leqq s \leqq k$, takže $d(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{v}}) = 0$. Tedy $\tilde{\mathbf{V}}_{m-k}$ je duální obraz lineární soustavy $\mathbf{V}_k$ (viz větu 49.5). Platí-li (80.1), potom $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$ náleží do $\mathbf{V}_k$, takže (stále za předpokladu, že $\tilde{\mathbf{v}}$ náleží do $\tilde{\mathbf{V}}_{m-k}$) $d(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2, \tilde{\mathbf{v}}) = 0$ neboli $d(\mathbf{u}_1, \tilde{\mathbf{v}}) = d(\mathbf{u}_2, \tilde{\mathbf{v}})$. Z toho plyne, že jestliže $\tilde{\mathbf{v}}$ náleží do $\tilde{\mathbf{V}}_{m-k}$, potom výraz $d(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{v}})$ závisí pouze na třídě $\mathbf{u} \bmod \mathbf{V}_k$ vektoru $\mathbf{u}$. Mimo to pro $k + 1 \leqq r, s \leqq m$

$$d(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{v}}) = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad r = s\,, \\ 0 & \text{pro} \quad r \neq s\,, \end{cases}$$

takže platí:

VĚTA 80.5. *Buďtež* $\mathbf{V}_m$, $\tilde{\mathbf{V}}_m$ *duálně sdružené vektorové prostory. Budiž* $\mathbf{V}_k$ *lineární soustava prostoru* $\mathbf{V}_m$, $\tilde{\mathbf{V}}_{m-k}$ *její duální obraz ve* $\tilde{\mathbf{V}}_m$. *Potom vektorové prostory*

$$\mathbf{V}_m \bmod \mathbf{V}_k\,, \quad \tilde{\mathbf{V}}_{m-k}$$

jsou duálně sdružené. Je-li

$$(80.8) \qquad \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m$$

taková base pro $\mathbf{V}_m$, *že* $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k$ *je base pro* $\mathbf{V}_k$ *a je-li* $\tilde{\mathbf{w}}_1, \ldots, \tilde{\mathbf{w}}_m$ *base pro* $\tilde{\mathbf{V}}_m$ *duální k basi* (80.8), *potom k basi* (80.7) *prostoru* $\mathbf{V}_m \operatorname{mod} \mathbf{V}_k$ *je duální base* $\tilde{\mathbf{w}}_{k+1}, \ldots, \tilde{\mathbf{w}}_m$ prostoru $\tilde{\mathbf{V}}_{m-k}$.

81. PERSPEKTIVA PROJEKTIVNÍHO PROSTORU. Budiž dán projektivní prostor $\mathbf{P}_m$ $(m \geqq 1)$. Duální projektivní prostor $\tilde{\mathbf{P}}_m$ se podle definice skládá z nadrovin neboli $(m - 1)$-rozměrných lineárních podprostorů $\mathbf{P}_{m-1}$ prostoru $\mathbf{P}_m$. Jestliže v této definici prostor $\mathbf{P}_m$ nahradíme prostorem $\tilde{\mathbf{P}}_m$, dostaneme, že projektivní prostor $\tilde{\tilde{\mathbf{P}}}_m$ duální k $\tilde{\mathbf{P}}_m$ se skládá z $(m - 1)$-rozměrných lineárních podprostorů $\tilde{\mathbf{P}}_{m-1}$. My jsme však už v článku 74 si uvědomili, že vztah mezi oběma prostory $\mathbf{P}_m$, $\tilde{\mathbf{P}}_m$ se dá formulovat ve tvaru, v němž oba prostory $\mathbf{P}_m$, $\tilde{\mathbf{P}}_m$ vystupují úplně symetricky, že tedy prostor $\tilde{\tilde{\mathbf{P}}}_m$ můžeme ztotožnit s prostorem $\mathbf{P}_m$. Geometrická povaha tohoto ztotožnění vysvítá z článku 75, kde jsme poznali, že lineární podprostor $\tilde{\mathbf{P}}_{m-1}$ není nic jiného než množina všech nadrovin prostoru $\mathbf{P}_m$ procházejících určitým bodem prostoru $\mathbf{P}_m$, který jsme nazvali *vrcholem* příslušného $\tilde{\mathbf{P}}_{m-1}$; ztotožnění $\tilde{\tilde{\mathbf{P}}}_m$ s $\mathbf{P}_m$ pozůstává v tom, že každý $\tilde{\mathbf{P}}_{m-1}$ nahradíme jeho vrcholem.

Právě provedenou úvahu můžeme považovat za zvláštní případ $k = -1$ úvahy, ke které nyní přikročíme. O tom se čtenář snadno přesvědčí; v následujícím textu není případ $k = -1$ výslovně zahrnut.

Budiž dán projektivní prostor $\mathbf{P}_m (m \geqq 2)$ a určitý jeho k-rozměrný lineární podprostor v širším smyslu $(0 \leqq k \leqq m - 2)$, který označíme Q. Dále označíme Q^* množinu všech nadrovin prostoru $\mathbf{P}_m$ obsahujících Q. Podle článku 75 je Q^* $(m - k - 1)$-rozměrným projektivním prostorem vnořeným do $\tilde{\mathbf{P}}_m$. Každý lineární podprostor v širším smyslu prostoru Q^* je tudíž zároveň lineárním podprostorem v širším smyslu prostoru $\tilde{\mathbf{P}}_m$. Nyní ke Q^*, jako ke každému projektivnímu prostoru, existuje duální projektivní prostor $\tilde{Q}^*$ téže dimense $m - k - 1$. Prvky prostoru $\tilde{Q}^*$ podle definice jsou všecky lineární podprostory v širším smyslu dimense $m - k - 2$ prostoru Q^*, neboli ty lineární podprostory

$\tilde{\mathbf{P}}_{m-k-2}$ v širším smyslu prostoru $\tilde{\mathbf{P}}_m$, které jsou obsaženy v Q^*. Nyní každý $\tilde{\mathbf{P}}_{m-k-2}$ podle článku 75 má za vrchol určitý lineární podprostor $\mathbf{P}_{k+1}$ prostoru $\mathbf{P}_m$ a je množinou všech nadrovin (prostoru $\mathbf{P}_m$) procházejících prostorem $\mathbf{P}_{k+1}$. Mimo to náš $\tilde{\mathbf{P}}_{m-k-2}$ náleží do $\tilde{Q}^*$, právě když jeho vrchol $\mathbf{P}_{k+1}$ obsahuje vrchol prostoru Q^*, t. j. právě když $\mathbf{P}_{k+1}$ obsahuje Q. Označme

$$(81.1) \qquad \pi(Q\,;\,\mathbf{P}_m)$$

množinu všech těch $(k+1)$-rozměrných lineárních podprostorů $\mathbf{P}_{k+1}$ projektivního prostoru $\mathbf{P}_m$, které obsahují daný k-rozměrný lineární podprostor (v širším smyslu) Q téhož $\mathbf{P}_m$. Zjistili jsme, že existuje vzájemně jednoznačný vztah mezi prvky množiny $\tilde{Q}^*$ a prvky množiny (81.1) pozůstávající prostě v tom, že prvky množiny $\tilde{Q}^*$ jsou ty duální podprostory prostoru $\mathbf{P}_m$, jejichž vrcholy jsou prvky množiny (81.1). V důsledku toho ztotožníme $\tilde{Q}^*$ s (81.1), t. j. *považujeme* $\pi(Q\,;\,\mathbf{P}_m)$ *za projektivní prostor duální ke* Q^*.

Máme tedy následující výsledek. Budiž $m \geq 2$, $0 \leq k \leq m - 2$. Budiž dán m-rozměrný projektivní prostor $\mathbf{P}_m$ a budiž dán jeho k-rozměrný lineární podprostor Q. Nazveme *perspektivou prostoru* $\mathbf{P}_m$ *z vrcholu* Q a označíme $\pi(Q\,;\,\mathbf{P}_m)$ množinu všech těch $(k+1)$-rozměrných lineárních podprostorů $\mathbf{P}_{k+1}$ prostoru $\mathbf{P}_m$, které procházejí daným Q. Dokázali jsme, že (81.1) je projektivní prostor dimense $m - k - 1$, k němuž duálním je ten duální podprostor prostoru $\mathbf{P}_m$, jehož vrcholem je Q. Tento duální podprostor, v předcházejícím označený Q^*, označíme

$$(81.2) \qquad \tilde{\pi}(Q\,;\,\mathbf{P}_m)\,.$$

Tedy (81.2) je množina všech těch nadrovin prostoru $\mathbf{P}_m$, které procházejí daným Q.

Účelné je výslovně si povšimnout zvláště důležitého případu $k = m - 2$. Zde je $m - k - 1 = 1$, $\pi(Q\,;\,\mathbf{P}_m)$ je jednorozměrný projektivní prostor úplně totožný s duálním prostorem $\tilde{\pi}(Q\,;\,\mathbf{P}_m)$. Pravíme v tomto případě, že $\pi(Q\,;\,\mathbf{P}_m)$ *je svazek nadrovin* v prostoru $\mathbf{P}_m$ a lineární podprostor Q (v širším smyslu) dimense $m - 2$ nazýváme *vrcholem svazku.*

Vraťme se k obecnému případu, kdy o dimensi k lineárního podprostoru Q (v širším smyslu) předpokládáme pouze, že $0 \leq k \leq m - 2$

a aplikujme výsledky článku 80. Zvolme libovolně ar. basi $A_0, A_1, \dots, A_k$ prostoru Q; z věty 13.1 plyne, že lze připojit dalších $m - k$ ar. bodů $A_{k+1}, \dots, A_m$ tak, že vznikne ar. base pro $\mathbf{P}_m$. Potom vektorový prostor $\mathbf{W}_{k+1} = \{A_0, A_1, \dots, A_k\}$ je ar. základem pro Q, vektorový prostor $\mathbf{W}_{m+1} = \{A_0, A_1, \dots, A_m\}$ je ar. základem pro $\mathbf{P}_m$. Ar. základ duálního prostoru $\tilde{\mathbf{P}}_m$ je vektorový prostor $\tilde{\mathbf{W}}_{m+1}$ duálně sdružený s $\mathbf{W}_{m+1}$, a ve $\tilde{\mathbf{W}}_{m+1}$ je obsažen duální obraz $\tilde{\mathbf{W}}_{m-k}$ lineární soustavy $\mathbf{W}_{k+1}$ obsažené ve $\mathbf{W}_{m+1}$. Z definice je patrné, že nadrovina $\{\tilde{Y}\}$ prochází prostorem Q, právě když $d(X, \tilde{Y}) = 0$ pro každý bod $\{X\}$ prostoru Q, t. j. pro každý ar. bod X náležející $\mathbf{W}_{k+1}$; to však znamená, že ar. nadrovina $\tilde{Y}$ náleží do $\tilde{\mathbf{W}}_{m-k}$. Tedy $\tilde{\mathbf{W}}_{m-k}$ je ar. base pro $\tilde{\pi}(Q; \mathbf{P}_m)$; ježto vektorové prostory $\pi(Q; \mathbf{P}_m)$, $\tilde{\pi}(Q; \mathbf{P}_m)$ jsou navzájem duální, plyne z věty 80.5:

VĚTA 81.1. *Budiž Q k-rozměrný ($0 \leqq k \leqq m - 2$) projektivní podprostor* (v širším smyslu) *m-rozměrného projektivního prostoru $\mathbf{P}_m$. Je-li $\mathbf{W}_{k+1}$ ar. základ pro Q, $\mathbf{W}_{m+1}$ ar. základ pro $\mathbf{P}_m$, potom $\mathbf{W}_{m+1}$* mod *$\mathbf{W}_{k+1}$ je ar. základ pro perspektivu $\pi(Q; \mathbf{P}_m)$.*

O správnosti této věty se snadno přesvědčíme přímo. Budiž A_0, $A_1, \dots, A_k$ libovolně daná ar. base pro Q. Je-li $X \bmod \mathbf{W}_{k+1} \neq \mathbf{o}$, jsou ar. body $A_0, A_1, \dots, A_k, X$ lineárně nezávislé a určují $(k + 1)$-rozměrný lineární podprostor

$$\mathbf{P}_{k+1} = \{A_0, A_1, \dots, A_k, X\}_a$$

obsahující Q, t. j. náležející do $\pi(Q; \mathbf{P}_m)$. Bod $\{Y\}$ prostoru $\mathbf{P}_m$ náleží do $\mathbf{P}_{k+1}$, právě když

$$Y = a_0A_0 + a_1A_1 + \dots + a_kA_k + cX$$

neboli $Y \equiv cX \pmod{\mathbf{W}_{k+1}}$. Z toho je patrné, že prvky prostoru $\pi(Q; \mathbf{P}_m)$ jsou ve vzájemně jednoznačném vztahu s jednorozměrnými lineárními soustavami obsaženými ve $\mathbf{W}_{m+1} \bmod \mathbf{W}_{k+1}$, v souhlase s tím, že $\mathbf{W}_{m+1} \bmod \mathbf{W}_{k+1}$ je ar. base pro $\pi(Q; \mathbf{P}_m)$.

82. PERSPEKTIVNÍ ZOBRAZENÍ. Dva lineární podprostory Q_k, R_h projektivního prostoru $\mathbf{P}_m$ nazveme *totálně nezávislé*, jestliže jejich průnik je prázdný a jejich spojení je celý $\mathbf{P}_m$. O dimensích k, h dvou totálně nezávislých lineárních podprostorů Q_k, R_h podle (73.3) platí

$$k + h = m - 1. \tag{82.1}$$

Obráceně, jestliže o dimensích dvou lineárních podprostorů Q_k, R_h platí (82.1) a jestliže jejich průnik je prázdný, plyne ze (73.3), že spojení Q_k s R_h má dimensi m, takže toto spojení je celý $\mathbf{P}_m$, t. j. Q_k, R_h jsou totálně nezávislé. V následujícím předpokládáme, že $m \geqq 2$, $0 \leqq k \leqq m - 2$, takže podle (82.1) je $1 \leqq h \leqq m - 1$. Dále předpokládáme, že jsou dány totálně nezávislé prostory Q_k, R_h.

Je-li dán libovolný bod $\{X\}$ prostoru R_h, potom $\{X\}$ nenáleží do Q_k, ježto Q_k a R_h mají prázdný průnik; tudíž spojení prostoru Q_k s bodem $\{X\}$ je $(k + 1)$-rozměrný lineární podprostor $\mathbf{P}_{k+1}(X)$ prostoru $\mathbf{P}_m$ obsahující Q_k, t. j. $\mathbf{P}_{k+1}(X)$ je prvek prostoru $\pi(Q_k ; \mathbf{P}_m)$. Obráceně, jestliže $\mathbf{P}_{k+1}$ je prvek prostoru $\pi(Q_k ; \mathbf{P}_m)$, t. j. $(k + 1)$-rozměrný lineární podprostor obsahující Q_k, je zřejmé, že spojení $\mathbf{P}_{k+1}$ s R_h je celý $\mathbf{P}_m$, takže podle (73.3) průnik $\mathbf{P}_{k+1}$ s R_h obsahuje právě jeden bod $\{X\}$ a je zřejmé, že náš $\mathbf{P}_{k+1}$ splyne s $\mathbf{P}_{k+1}(X)$. Jestliže tedy každému bodu $\{X\}$ prostoru R_h přiřadíme $(k + 1)$-rozměrný lineární podprostor $\mathbf{P}_{k+1}(X)$, který je spojením bodu $\{X\}$ s prostorem Q_k, dostaneme prosté zobrazení prostoru R_h na prostor $\pi(Q_k ; \mathbf{P}_m)$, které nazveme *perspektivním zobrazením prostoru R_h z vrcholu Q_k* (v prostoru $\mathbf{P}_m$). Z výsledků článku 81 plyne snadno, že *perspektivní zobrazení je kolineární.* Neboť je-li $A_0, A_1, \ldots, A_k$ ar. base pro Q_k a je-li $B_1, \ldots$ $\ldots, B_{m-k}$ ar. base pro $R_h = R_{m-k-1}$, potom — ježto průnik prostorů Q_k, R_h je prázdný — je patrné, že ar. body $A_0, A_1, \ldots, A_k, B_1, \ldots$ $\ldots, B_{m-k}$ dohromady tvoří ar. basi pro spojení Q_k s R_h, t. j. pro celý $\mathbf{P}_m$. Jestliže nyní každé lineární kombinaci X ar. bodů $B_1, \ldots, B_{m-k}$ přiřadíme $X \bmod \mathbf{W}_{k+1}$, kde $\mathbf{W}_{k+1} = \{A_0, A_1, \ldots, A_k\}$ je ar. base pro Q_k, dostaneme isomorfní zobrazení ar. base $B_1, \ldots, B_{m-k}$ prostoru R_h na ar. basi $B_1 \bmod \mathbf{W}_{k+1}, \ldots, B_{m-k} \bmod \mathbf{W}_{k+1}$ prostoru $\pi(Q_k ; \mathbf{P}_m)$, a tímto isomorfním zobrazením vytvořené kolineární zobrazení prostoru R_h na prostor $\pi(Q_k ; \mathbf{P}_m)$ zřejmě splyne s uvažovaným perspektivním zobrazením.

Buďtež nyní dány dva různé lineární podprostory R_h, R'_h téže dimense $h = m - k - 1$, z nichž každý je totálně nezávislý na Q_k. Budiž K_1 perspektivní zobrazení prostoru R_h z vrcholu Q_k a budiž K_2 perspektivní zobrazení prostoru R'_h z téhož vrcholu. Dále budiž K zobrazení složené ze zobrazení K_1 prostoru R_h na prostor $\pi(Q_k ; \mathbf{P}_m)$

a ze zobrazení inversního ke K_2, které tudíž je zobrazením prostoru $\pi(Q_k\,;\,\mathbf{P}_m)$ na prostor R'_h. Podle vět 79.1 a 79.2 je K *kolineární* zobrazení prostoru R_h na prostor R'_h, které nazveme *promítnutím prostoru R_h na prostor R'_h z vrcholu Q_k*. Je-li $\{X\}$ libovolný bod prostoru R_h, dostaneme jeho obraz $\{X'\}$ při K, utvoříme-li nejprve spojení bodu $\{X\}$ s prostorem Q_k (toto spojení je $(k+1)$-rozměrný lineární podprostor) a potom průnik tohoto spojení s prostorem R'_h. Zřejmě *zobrazení inversní k promítnutí prostoru R_h na prostor R'_h z vrcholu Q_k je promítnutím prostoru R'_h na prostor R_h z téhož vrcholu Q_k*. Obraz libovolného bodu $\{X\}$ prostoru R_h při promítnutí na R'_h z vrcholu Q nazveme *průmětem* bodu $\{X\}$ z vrcholu Q na prostor R'_h.

Zvláště důležitý je případ $h = m - 1$, kdy R_{m-1}, R'_{m-1} jsou dvě (navzájem různé) nadroviny. Podle (82.1) je nyní $k = 0$, t. j. vrchol Q_0 je v tomto případě *bod*. Podmínka totální nezávislosti zde prostě znamená, že *bod Q_0 neleží v žádné z obou nadrovin R_{m-1}, R'_{m-1}*. Spojení obou různých nadrovin R_{m-1}, R'_{m-1} je zřejmě celý $\mathbf{P}_m$, takže jejich průnik podle (73.3) je $(m-2)$-rozměrný lineární podprostor (v případě $m = 2$ bod) $\mathbf{P}_{m-2}$. Je-li K promítnutí nadroviny R_{m-1} na nadrovinu R'_{m-1}, je zřejmé, že každý bod průniku $\mathbf{P}_{m-2}$, je *samodružný* při zobrazení K, t. j. že splyne se svým obrazem. Obráceně platí:

Věta 82.1. *Buďtež R_{m-1}, R'_{m-1} dvě různé nadroviny projektivního prostoru $\mathbf{P}_m$, takže jejich průnik $\mathbf{P}_{m-2}$ má dimensi $m-2$. Budiž K kolineární zobrazení nadroviny R_{m-1} na nadrovinu R'_{m-1}, při kterém každý bod průniku $\mathbf{P}_{m-2}$ je samodružný. Potom existuje bod Q_0* (který neleží v žádné z obou daných nadrovin) *tak, že K je promítnutí nadroviny R_{m-1} na nadrovinu R'_{m-1}.*

Důkaz. Budiž $A_0, A_1, \ldots, A_{m-2}$ ar. base pro průnik $\mathbf{P}_{m-2}$. Připojme ar. bod A_{m-1} tak, aby vznikla ar. base pro R_{m-1}. Zvolme isomorfní zobrazení L ar. základu nadroviny R_{m-1} na ar. základ nadroviny R'_{m-1}, které vytvořuje dané kolineární zobrazení K. Je-li $\mathbf{W}_{m-1}$ ar. základ pro $\mathbf{P}_{m-2}$, potom v L je obsaženo parciální zobrazení $L \mid \mathbf{W}_{m-1}$, které vytvořuje *identické* kolineární zobrazení $\mathbf{P}_{m-2}$ na $\mathbf{P}_{m-2}$. Ježto místo L jsme mohli zvolit cL ($c \neq 0$, viz str. 41), je patrné, že můžeme předpokládat, že parciální zobrazení $L \mid \mathbf{W}_{m-1}$ samo je identickým zobrazením vektorového prostoru $\mathbf{W}_{m-1}$. Je tedy

$LA_r = A_r$ pro $0 \leqq r \leqq m - 2$; položme ještě $LA_{m-1} = A_m$. Potom je

$$R_{m-1} = \{A_0 , \dots \; A_{m-2} , A_{m-1}\}_g ;$$
$$R'_{m-1} = \{A_0 \; \dots \; A_{m-2} , A_m\}_g .$$

Ježto nadroviny R_{m-1} , R'_{m-1} jsou navzájem různé, dokáže se snadno, že $S = A'_{m-1} - A_{m-1} \neq \mathbf{o}$ a že bod $\{S\}$ neleží ani v nadrovině R_{m-1} , ani v nadrovině R'_{m-1} . Zřejmě však K převádí libovolný bod $\{X\}$ nadroviny R_{m-1} v bod $\{X'\}$, kde

$$X = x_0A_0 + \dots + x_{m-2}A_{m-2} + x_{m-1}A_{m-1} ,$$
$$X' = x_0A_0 + \dots + x_{m-2}A_{m-2} + x_{m-1}A'_{m-1} .$$

Je tudíž $X' = X + x_{m-1} . S$ a z toho plyne snadno, že K je promítnutí nadroviny R_{m-1} na nadrovinu R'_{m-1} z vrcholu $\{S\}$.

83. KOLINEACE. Isomorfní zobrazení m-rozměrného vektorového prostoru $\mathbf{V}_m$ na týž prostor se nazývá *automorfismus* prostoru $\mathbf{V}_m$.

Je-li

(83.1) $$\mathbf{u}_1 , \dots , \mathbf{u}_m$$

base vektorového prostoru $\mathbf{V}_m$, kterou stručně označíme $\mathbf{B}$, a je-li

(83.2) $$\mathbf{v}_1 , \dots , \mathbf{v}_m$$

jiná (nebo třeba i táž) base prostoru $\mathbf{V}_m$, existují čísla $a_{11} , \dots , a_{mm}$ tak, že

(83.3) $$\mathbf{v}_r = a_{r1}\mathbf{u}_1 + \dots + a_{rm}\mathbf{u}_m \quad \text{pro } 1 \leqq r \leqq m .$$

Determinant

(83.4) $$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix}$$

je vždy *různý od nuly*; označíme jej

$$[\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_m]^{\mathbf{B}}$$

a nazveme jej (viz str. 31) *determinantem přechodu* od base (83.1) k basi (83.2). O determinantech přechodu platí věta:

VĚTA 83.1. *Jsou-li* $\mathbf{B}$, $\mathbf{B}'$, $\mathbf{B}''$ *tři base vektorového prostoru* $\mathbf{V}_m$, *je determinant přechodu od base* $\mathbf{B}$ *k basi* $\mathbf{B}''$ *roven součinu determinantu přechodu od base* $\mathbf{B}$ *k basi* $\mathbf{B}'$ *s determinantem přechodu od base* $\mathbf{B}'$ *k basi* $\mathbf{B}''$.

To vše je obsaženo v článku 29, kde jsme sice předpokládali, že $\mathbf{V}_m$ je zaměření eukleidovského $\mathbf{E}_m$, je však patrné, že tento předpoklad je nepodstatný.

Budiž nyní f automorfismus vektorového prostoru $\mathbf{V}_m$. Je-li (83.1) base prostoru $\mathbf{V}_m$, je

$$f(\mathbf{u}_1), \ldots, f(\mathbf{u}_m) \tag{83.5}$$

nová base téhož $\mathbf{V}_m$; determinant přechodu od base (83.1) k basi (83.5) označme Δ. Jestliže místo base (83.1) uvažujeme jinou basi (83.2), potom místo (83.5) máme basi

$$f(\mathbf{v}_1), \ldots, f(\mathbf{v}_m) \tag{83.6}$$

a můžeme označit Δ' determinant přechodu od (83.2) k (83.6). Z věty 83.1 se však snadno dokáže, že $\Delta = \Delta'$. Je-li totiž D determinant přechodu od base (83.1) k basi (83.2), je D roven determinantu (83.4), kde čísla $a_{11}, \ldots, a_{mm}$ jsou definována vztahy (83.3). Z definice automorfismu je však patrné, že zároveň se vztahy (83.3) platí také vztahy

$$f(\mathbf{v}_r) = a_{r1}f(\mathbf{u}_1) + \ldots + a_{rm}f(\mathbf{u}_m), \quad (1 \leqq r \leqq m);$$

tudíž D je zároveň determinant přechodu od base (83.5) k basi (83.6). Nyní podle věty (83.1) determinant přechodu od base (83.1) k basi (83.6) je jednak roven součinu determinantu přechodu od base (83.1) k basi (83.2) s determinantem přechodu od base (83.2) k basi (83.6), t. j. roven $D\Delta'$, jednak je roven determinantu přechodu od base (83.1) a basi (83.5) s determinantem přechodu od base (83.5) k basi (83.6), t. j. roven ΔD. Je tudíž $D\Delta' = \Delta D$ a ježto $D \neq 0$, je $\Delta = \Delta'$. Pozorný čtenář jistě konstatoval, že jsme zde vlastně znovu provedli úvahu již provedenou v prvém svazku na str. 110, což pro jasnost výkladu bylo žádoucí.

Ježto tedy determinant přechodu Δ od base (83.1) k basi (83.5) je nezávislý na volbě base (83.1), můžeme Δ nazvat *determinantem* *automorfismu* f; poznamenejme výslovně, že je vždy $\Delta \neq 0$. Z věty 83.1 nyní snadno plyne:

VĚTA 83.2. *Jsou-li* f, g *dva automorfismy vektorového prostoru* $\mathbf{V}_m$ *a jsou-li* Δ_1, Δ_2 *jejich determinanty, je také* $f \circ g$ *automorfismus prostoru* $\mathbf{V}_m$ *a jeho determinant je roven součinu* $\Delta_1 \Delta_2$.

Budiž nyní dán m-rozměrný projektivní prostor P_m a budiž $\mathbf{W}_{m+1}$ jeho ar. základ, takže $\mathbf{W}_{m+1}$ je $(m+1)$-rozměrný vektorový prostor. Kolineární zobrazení prostoru $\mathbf{P}_m$ na týž prostor $\mathbf{P}_m$ se nazývá *kolineace* prostoru $\mathbf{P}_m$. Každá kolineace K prostoru $\mathbf{P}_m$ je tedy vytvořena nějakým automorfismem L vektorového prostoru $\mathbf{W}_{m+1}$, při čemž pro každé $c \neq 0$ také automorfismus cL vytvořuje touž kolineaci. Obráceně (viz str. 41), jestliže oba automorfismy L, L_1 vektorového prostoru $\mathbf{W}_{m+1}$ vytvořují touž kolineaci projektivního prostoru $\mathbf{P}_m$, existuje $c \neq 0$ tak, že $L_1 = cL$. Je-li $\Delta \neq 0$ determinant automorfismu L, potom zřejmě determinant automorfismu cL je roven $c^{m+1} . \Delta$. Jestliže číslo m je sudé, lze zvolit $c \neq 0$ tak, aby číslo $c^{m+1} . \Delta$ nabylo libovolně předepsané hodnoty různé od nuly. Je-li však m liché, je $c^{m+1} > 0$ pro všecka $c \neq 0$ a znamení čísla $c^{m+1} . \Delta$ je nezávislé na volbě c. Proto *pro lichá m* zavádíme tuto definici: kolineace K prostoru $\mathbf{P}_m$ (liché m) se jmenuje *přímá*, jestliže vytvořující automorfismus L má determinant $\Delta > 0$, *nepřímá*, jestliže $\Delta < 0$. Potom (viz str. 31) *přímá kolineace převádí každou ar. basi prostoru* $\mathbf{P}_m$ (liché m) *v ar. basi s ní souhlasnou, nepřímá v ar. basi nesouhlasnou.* Tedy *kolineace prostoru* $\mathbf{P}_m$ (liché m) *zachovává orientaci prostoru* $\mathbf{P}_m$, *právě když je přímá.* Z věty 83.2 plyne

VĚTA 83.3. *Buďtež* K_1, K_2 *dvě kolineace projektivního prostoru* $\mathbf{P}_m$, *kde m je liché. Jsou-li* K_1, K_2 *obě přímé nebo obě nepřímé, je složená kolineace* $K_1 \circ K_2$ *přímá, je-li však* K_1 *přímá,* K_2 *nepřímá nebo* K_1 *nepřímá,* K_2 *přímá, je* $K_1 \circ K_2$ *nepřímá.*

Z vět 79.1, 79.2 a 83.3 plyne:

VĚTA 83.4. *Množina všech kolineací projektivního prostoru* $\mathbf{P}_m$ *je transformační grupa. Je-li m liché, potom také množina všech přímých kolineací prostoru* $\mathbf{P}_m$ *je transformační grupa.*

Budiž K kolineární zobrazení projektivního prostoru $\mathbf{P}_m$ na projektivní prostor $\mathbf{P}'_m$ (prozatím nezáleží na tom, zda je $\mathbf{P}_m = \mathbf{P}'_m$ či

$\mathbf{P}_m \neq \mathbf{P}'_m)$. Jestliže bod $\{X\}$ opíše v prostoru $\mathbf{P}_m$ nadrovinu ϱ, potom podle věty 79.4 bod $K\{X\}$ opíše v prostoru $\mathbf{P}'_m$ nadrovinu, kterou označíme $\tilde{K}(\varrho)$. Dokážeme, že $\tilde{K}$ je *kolineární* zobrazení prostoru $\tilde{\mathbf{P}}_m$ duálního k $\mathbf{P}_m$ na prostor $\tilde{\mathbf{P}}'_m$ duální k $\mathbf{P}'_m$ a nazveme $\tilde{K}$ *duálním kolineárním zobrazením* k danému kolineárnímu zobrazení K.

Poznámka. Pro $m = 1$ prostory $\mathbf{P}_1$, $\tilde{\mathbf{P}}_1$ splynou; ježto pro $m = 1$ splyne pojem nadroviny s pojmem bodu, je zřejmé, že *pro $m = 1$ duální kolineace $\tilde{K}$ splyne s původní kolineací K.*

Budiž L isomorfní zobrazení ar. základu $\mathbf{W}_{m+1}$ prostoru $\mathbf{P}_m$ na ar. základ $\mathbf{W}'_{m+1}$ prostoru $\mathbf{P}'_m$, které vytvořuje kolineární zobrazení K. Zvolme ar. basi

$$A_0, A_1, \dots, A_m \tag{83.7}$$

prostoru $\mathbf{P}_m$; (83.7) přejde při L v ar. basi

$$A'_0, A'_1, \dots, A'_m \tag{83.8}$$

prostoru $\mathbf{P}'_m$, kde tedy

$$A'_r = LA_r \quad \text{pro} \quad 0 \leqq r \leqq m\,. \tag{83.9}$$

Budiž $\tilde{\mathbf{W}}_{m+1}$ ar. základ duálního prostoru $\tilde{\mathbf{P}}_m$ a budiž $\tilde{\mathbf{W}}'_{m+1}$ ar. základ duálního prostoru $\tilde{\mathbf{P}}'_m$. Existuje ar. base

$$\tilde{A}_0, \tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_m \tag{83.10}$$

prostoru $\tilde{\mathbf{P}}_m$ a ar. base

$$\tilde{A}'_0, \tilde{A}'_1, \dots, \tilde{A}'_m \tag{83.11}$$

prostoru $\tilde{\mathbf{P}}'_m$ tak, že (83.7) a (83.10), jakož i (83.8) a (83.11), jsou navzájem duální. Nyní existuje isomorfní zobrazení $\tilde{L}$ prostoru $\tilde{\mathbf{W}}_{m+1}$ na prostor $\tilde{\mathbf{W}}'_{m+1}$, pro které

$$\tilde{A}'_r = \tilde{L}\tilde{A}_r \quad \text{pro} \quad 0 \leqq r \leqq m \tag{83.12}$$

a snadno se přesvědčíme, že $\tilde{K} = \{\tilde{L}\}$ je žádané duální kolineární zobrazení k danému kolineárnímu zobrazení. Neboť z definice duálních basí plyne, že je-li X libovolný prvek prostoru $\mathbf{W}_{m+1}$, $\tilde{Y}$ libovolný prvek prostoru $\tilde{\mathbf{W}}_{m+1}$, je

$$d(X, \tilde{Y}) = d(LX, \tilde{L}\tilde{Y})\,. \tag{83.13}$$

Je-li nyní $\varrho = \{\tilde{Y}\}$ libovolná nadrovina prostoru $\mathbf{P}_m$, takže $\tilde{K}\varrho$ je nadrovina prostoru $\mathbf{P}'_m$, potom bod $\{X\}$ prostoru $\mathbf{P}_m$ náleží do ϱ, právě když $d(X, \tilde{Y}) = 0$; bod $\{X'\}$ prostoru $\mathbf{P}'_m$ náleží do $\tilde{K}\varrho$, právě když $d(X', \tilde{L}\tilde{Y}) = 0$. Z (83.13) tudíž plyne, že opíše-li $\{X\}$ nadrovinu ϱ, opíše $\{LX\} = K\{X\}$ nadrovinu $\tilde{K}\varrho$.

V předcházejícím jsme každému isomorfnímu zobrazení L vektorového prostoru $\mathbf{W}_{m+1}$ přiřadili určité isomorfní zobrazení $\tilde{L}$ duálního vektorového prostoru $\tilde{\mathbf{W}}_{m+1}$, které můžeme nazvat *duálním* k původnímu isomorfnímu zobrazení L. Při tom jsme definovali $\tilde{L}$ pomocí zvolené base (83.7) vektorového prostoru $\mathbf{W}_{m+1}$; snadno se však nahlédne, že vztah mezi L a $\tilde{L}$ je úplně popsán v (83.13), že tedy nezáleží na volbě base (83.7). Všimněme si, že ve vztahu (83.13) máme úplnou symetrii mezi $\mathbf{W}_{m+1}$, $\mathbf{W}'_{m+1}$ na jedné straně, $\tilde{\mathbf{W}}_{m+1}$, $\tilde{\mathbf{W}}'_{m+1}$ na straně druhé. Můžeme tedy říci, že L, $\tilde{L}$ jsou *navzájem duální*, takže také K, $\tilde{K}$ jsou *navzájem duální*, což je ovšem patrné i přímo z definice $\tilde{K}$.

Následující dvě věty jsou zřejmé:

VĚTA 83.5. *Budiž L_1 isomorfní zobrazení vektorového prostoru $\mathbf{W}_{m+1}$ na vektorový prostor $\mathbf{W}'_{m+1}$, L_2 isomorfní zobrazení $\mathbf{W}'_{m+1}$ na vektorový prostor $\mathbf{W}''_{m+1}$. Buďtež $\tilde{\mathbf{W}}_{m+1}$, $\tilde{\mathbf{W}}'_{m+1}$, $\tilde{\mathbf{W}}''_{m+1}$, $\tilde{L}_1$, $\tilde{L}_2$ duální k $\mathbf{W}_{m+1}$, $\mathbf{W}'_{m+1}$, $\mathbf{W}''_{m+1}$, L_1, L_2. Potom je také $\tilde{L}_1 \circ \tilde{L}_2$ duální k $L_1 \circ L_2$.*

VĚTA 83.6. *Budiž K_1 kolineární zobrazení projektivního prostoru $\mathbf{P}_m$ na projektivní prostor $\mathbf{P}'_m$, K_2 kolineární zobrazení $\mathbf{P}'_m$ na projektivní prostor $\mathbf{P}''_m$. Buďtež $\tilde{\mathbf{P}}_m$, $\tilde{\mathbf{P}}'_m$, $\tilde{\mathbf{P}}''_m$, $\tilde{K}_1$, $\tilde{K}_2$ duální k $\mathbf{P}_m$, $\mathbf{P}'_m$, $\mathbf{P}''_m$, K_1, K_2. Potom je také $\tilde{K}_1 \circ \tilde{K}_2$ duální k $K_1 \circ K_2$.*

Budiž nyní $\mathbf{P}_m = \mathbf{P}'_m$, tedy také $\tilde{\mathbf{P}}_m = \tilde{\mathbf{P}}'_m$, $\mathbf{W}_{m+1} = \mathbf{W}'_{m+1}$, $\tilde{\mathbf{W}}_{m+1} = \tilde{\mathbf{W}}'_{m+1}$. Potom L je automorfismus vektorového prostoru $\mathbf{W}_{m+1}$, $\tilde{L}$ je k němu duální automorfismus vektorového prostoru $\tilde{\mathbf{W}}_{m+1}$. Nechť platí (83.9) a nechť ar. base (83.10), (83.11) jsou duální k ar. basím (83.7), (83.8), takže platí také (83.12). Nyní existují čísla $a_{00}, \ldots, a_{mm}$, $\alpha_{00}, \ldots, \alpha_{mm}$ tak, že

$$A_r = a_{r0}A'_0 + \ldots + a_{rm}A'_m \quad \text{pro} \quad 0 \leqq r \leqq m, \tag{83.14}$$

$$\tilde{A}'_s = \alpha_{s0}\tilde{A}_0 + \ldots + \alpha_{sm}\tilde{A}_m \quad \text{pro} \quad 0 \leqq s \leqq m. \tag{83.15}$$

Determinant

$$\begin{vmatrix} a_{00} & \ldots & a_{0m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m0} & \ldots & a_{mm} \end{vmatrix} \tag{83.16}$$

je determinant automorfismu L^{-1} inversního k automorfismu L, takže z věty 83.2 plyne (sr. důkaz věty 39.5), že determinant automorfismu L je převrácená hodnota determinantu (83.16). Mimo to ovšem

$$(83.17) \qquad \begin{vmatrix} \alpha_{00} & \dots & \alpha_{0m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m0} & \dots & \alpha_{mm} \end{vmatrix}$$

je determinant automorfismu $\tilde{L}$. Budiž nyní $0 \leqq r \leqq m$, $0 \leqq s \leqq m$. Podle (83.14) je

$$d(A_r, \tilde{A}'_s) = a_{r0}d(A'_0, \tilde{A}'_s) + \dots + a_{rm}d(A'_m, \tilde{A}'_s)$$

a ježto (83.8), (83.11) jsou navzájem duální, je

$$(83.18) \qquad d(A_r, \tilde{A}'_s) = a_{rs}.$$

Avšak podle (83.15) je též

$$d(A_r, \tilde{A}'_s) = \alpha_{s0}d(A_r, \tilde{A}_0) + \dots + \alpha_{sm}d(A_r, \tilde{A}_m)$$

a ježto (83.7), (83.10) jsou navzájem duální, je

$$(83.19) \qquad d(A_r, \tilde{A}'_s) = \alpha_{sr}.$$

Z (83.18) a (83.19) plyne, že $a_{rs} = \alpha_{sr}$ pro $0 \leqq r, s \leqq m$, takže determinanty (83.16) a (83.17) si jsou rovny. Platí tudíž:

VĚTA 83.7. *Budiž L automorfismus vektorového prostoru, a budiž $\tilde{L}$ automorfismus duálního vektorového prostoru duální k automorfismu L. Potom determinant automorfismu $\tilde{L}$ je převrácená hodnota determinantu automorfismu L.*

Z věty 83.7 plyne:

VĚTA 83.8. *Budiž K kolineace projektivního prostoru $\mathbf{P}_m$, kde m je liché. Budiž $\tilde{K}$ duální kolineace prostoru $\tilde{\mathbf{P}}_m$. Je-li K přímá, je také $\tilde{K}$ přímá, je-li K nepřímá, je také $\tilde{K}$ nepřímá.*

84. HOMOLOGIE. V tomto článku předpokládáme, že $m \geqq 2$. Budiž dán projektivní prostor $\mathbf{P}_m$ a budiž $\tilde{\mathbf{P}}_m$ k němu duální.

Je-li K kolineace prostoru $\mathbf{P}_m$, potom bod prostoru $\mathbf{P}_m$ nazveme *samodružným* při K, splyne-li se svým obrazem. Rovněž tak část prostoru $\mathbf{P}_m$ nazveme *samodružnou* při K, splyne-li se svým obrazem. Při tom nikterak nemusí bod samodružné části být samodružným, ba dokonce samodružná část nemusí obsahovat vůbec žádný samodružný bod. Mohli bychom také část C prostoru $\mathbf{P}_m$ nazvat *samodružnou v širším smyslu* při K, jestliže obraz C při K je částí množiny C. Nás však budou vedle samodružných bodů zajímat pouze samodružné lineární podprostory prostoru $\mathbf{P}_m$, a jestliže takový podprostor $\mathbf{P}_k$ $(1 \leqq k \leqq m - 1)$ je samodružný v širším smyslu při K, potom $\mathbf{P}_k$ je samodružný při K. Neboť obraz $\mathbf{P}'_k$ podprostoru $\mathbf{P}_k$ podle věty 79.4 je lineární podprostor téže dimense k jako $\mathbf{P}_k$ a jestliže $\mathbf{P}'_k$ je částí $\mathbf{P}_k$, nutně $\mathbf{P}'_k$ splyne s $\mathbf{P}_k$.

Kolineace H prostoru $\mathbf{P}_m$ se nazývá *homologie* prostoru $\mathbf{P}_m$, jestliže H je různá od identické transformace prostoru $\mathbf{P}_m$ a jestliže existuje g. bod S tak, že každá přímka procházející bodem S je samodružná; g. bod S se jmenuje *středem homologie* H. Bod S je nutně samodružný při H; neboť ježto $m \geqq 2$, můžeme bodem S vést dvě různé přímky p, q, které jsou obě samodružné, takže obrazem průsečíku S přímek p, q je průsečík týchž přímek, t. j. opět bod S. Homologie nemůže mít více než jeden střed. Neboť nechť existují dva různé g. body S_1, S_2 tak, že každá přímka jdoucí některým z nich je samodružná při kolineaci H prostoru P_m; máme dokázat, že potom každý bod prostoru P_m je samodružný. Jestliže předně g. bod X neleží na přímce S_1S_2, potom přímky S_1X, S_2X jsou navzájem různé a obě jsou samodružné, z čehož jako výše plyne, že bod X je samodružný. Jestliže nyní přímka p je různá od přímky S_1S_2, potom p obsahuje dva různé body ležící mimo přímku S_1S_2, tedy dva různé samodružné body, takže p je samodružná přímka. Každým bodem prostoru $\mathbf{P}_m$ procházejí tedy dvě různé samodružné přímky, takže každý bod prostoru $\mathbf{P}_m$ je samodružný.

VĚTA 84.1. *Budiž H homologie prostoru $\mathbf{P}_m$. Potom existuje v prostoru $\mathbf{P}_m$ nadrovina ϱ, jejíž každý bod je samodružný při H.*

Poznámka. Z důkazu věty 84.1 usoudíme, že existuje *jediná* taková nadrovina ϱ; nazveme ji *osovou nadrovinou* (pro $m = 2$ krátce *osou*) homologie H.

DŮKAZ. Zvolme ar. bod S tak, že $\{S\}$ je střed homologie H. Homologii H lze vytvořit takovým automorfismem L ar. základu $\mathbf{W}_{m+1}$ prostoru $\mathbf{P}_m$, že

(84.1) $$LS = S.$$

Připojme další ar. body $B_1, \dots, B_m$ tak, aby $S, B_1, \dots, B_m$ byla ar. base pro P_m. Potom pro $1 \leqq r \leqq m$ existují reálná čísla c_r, b_r tak, že

$$LB_r = c_r B_r + b_r S\,; \tag{84.2}$$

to plyne z toho, že podle definice středu homologie bod $\{LB_r\}$ leží na přímce $B_r S$. Budiž nyní $1 \leqq r < s \leqq m$. Podle (84.2) je

$$L(B_r + B_s) = c_r B_r + c_s B_s + (b_r + b_s) S\,.$$

Podle definice středu homologie je však ar. bod nalevo lineární kombinací ar. bodů $B_r + B_s$, S a ježto ar. body B_r, B_s, S jsou lineárně nezávislé, je to jen tak možné, že $c_r = c_s$. Tím je dokázáno, že všecka čísla $c_1, \dots, c_m$ si jsou rovna, neboli že

$$LB_r = cB_r + b_r S \quad \text{pro} \quad 1 \leqq r \leqq m\,. \tag{84.3}$$

Nyní jsou dvě možnosti. Jestliže předně $c \neq 1$, potom pro $1 \leqq r \leqq m$ lze určit číslo t_r tak, aby bylo $(c - 1)t_r = b_r$, načež podle (84.1) a (84.3) je

$$L(B_r + t_r S) = c(B_r + t_r S) \quad \text{pro} \quad 1 \leqq r \leqq m\,.$$

Položme

$$A_r = B_r + t_r S \quad \text{pro} \quad 1 \leqq r \leqq m\,.$$

Potom $S, A_1, \dots, A_m$ je ar. base pro $\boldsymbol{P}_m$ a jest

$$LS = S\,, \quad LA_r = cA_r \quad \text{pro} \quad 1 \leqq r \leqq m\,, \tag{84.4}$$

při čemž $c \neq 1$ a zřejmě též $c \neq 0$. Z (84.4) snadno odvodíme, že bod $\{X\}$, kde

$$X = xS + x_1 A_1 + \dots + x_m A_m$$

je samodružný bod, právě když buďto splyne s bodem $\{S\}$ nebo leží v nadrovině

$$\varrho = \{A_1, \dots, A_m\}_\varrho\,. \tag{84.5}$$

Je-li ϱ' nadrovina různá od nadroviny ϱ, existuje v ϱ' bod různý od $\{S\}$, který neleží v ϱ a který tudíž není samodružný. Tím jsme hotovi s případem, že v (84.3) je $c \neq 1$. Zbývá případ, že

$$LB_r = B_r + b_r S \quad \text{pro} \quad 1 \leqq r \leqq m\,.$$

Ježto platí (84.1) a ježto $\{L\}$ není identická transformace, nemůže být $b_r = 0$ pro $1 \leqq r \leqq m$, takže můžeme předpokládat, že třeba

$b_m = b \neq 0$. Pro $1 \leqq r \leqq m - 1$ určíme t_r tak, aby bylo $b_r + t_r b = 0$ a položíme $A_r = B_r + t_r A_m$ pro $1 \leqq r \leqq m - 1$, $A_m = B_m$. Potom $S, A_1, \ldots, A_m$ je ar. base pro $\boldsymbol{P}_m$ a je

$$(84.6) \qquad LS = S, \quad LA_r = A_r \quad \text{pro} \quad 1 \leqq r \leqq m - 1, \qquad LA_m = A_m + bS,$$

kde $b \neq 0$. Z (84.6) snadno odvodíme, že bod $\{X\}$ je samodružný, právě když leží v nadrovině

$$(84.7) \qquad \varrho = \{S, A_1, \ldots, A_{m-1}\}_g .$$

Je-li ϱ' nadrovina různá od nadroviny ϱ, existuje v ϱ' bod různý od $\{S\}$, který neleží v ϱ a který tudíž není samodružný.

Tím je dokončen důkaz věty 84.1 a také je zjištěna správnost poznámky vyslovené po znění věty. Zároveň jsme zjistili, že je-li dána homologie H se středem $\{S\}$, je možné určit ar. body $A_1, \ldots, A_m$ tak, aby $S, A_1, \ldots, A_m$ byla ar. base pro P_m a aby bylo $H = \{L\}$, při čemž buďto platí (84.4), při čemž $0 \neq c \neq 1$, nebo platí (84.6), při čemž $b \neq 0$. Obráceně je patrné, že je-li $S, A_1, \ldots, A_m$ ar. base prostoru $\boldsymbol{P}_m$ a definujeme-li kolineaci $H = \{L\}$ prostoru $\boldsymbol{P}_m$ buďto rovnicemi (84.4), ve kterých $0 \neq c \neq 1$, nebo rovnicemi (84.6), ve kterých $b \neq 0$, je H homologie prostoru $\boldsymbol{P}_m$ se středem homologie $\{S\}$, při čemž nadrovina homologie ϱ je dána výrazem (84.5) v případě (84.4), výrazem (84.7) v případě (84.6). Z toho je patrné, že v případě (84.4) nadrovina homologie neobsahuje střed homologie, kdežto v případě (84.6) naopak nadrovina homologie prochází středem homologie. V případě (84.4) číslo c se jmenuje *invariant homologie* H; víme, že $0 \neq c \neq 1$. V případě (84.6) invariant homologie H je roven 1. V případě (84.4) má invariant c význam dvojpoměru. Neboť je-li bod $\{X\}$ různý od $\{S\}$ a neleží-li $\{X\}$ v osové nadrovině (84.5), budiž $\{B\}$ průsečík přímky SX s nadrovinou (84.5) a budiž $\{X'\}$ obraz bodu $\{X\}$; potom je

$$(84.8) \qquad (BSXX') = c .$$

Neboť při vhodné volbě ar. zástupců je $X = S + B$, $X' = S + cB$, načež (84.8) plyne z definice dvojpoměru.

VĚTA 84.2. *Nechť kolineace H projektivního prostoru P_m různá od identické transformace má tu vlastnost, že existuje nadrovina ϱ, jejíž každý bod je samodružným při H. Potom H je homologie prostoru P_m.* Je jasné, že ϱ bude osovou nadrovinou homologie H.

DŮKAZ. Zvolme ar. basi $A_0, A_1, \dots, A_m$ prostoru P_m tak, aby bylo

$$\varrho = \{A_1, \dots, A_m\}_g .$$

Ježto parciální zobrazení $H \mid \varrho$ je identická transformace nadroviny ϱ, je patrné, že $H = \{L\}$, kde $LA_r = A_r$ pro $1 \leqq r \leqq m$. Dále je

$$LA_0 = cA_0 + c_1A_1 + \dots + c_mA_m$$

neboli $LA_0 = cA_0 + B$, kde $B = c_1A_1 + \dots + c_mA_m$, tedy $LB = B$. Ježto $\{L\}$ není identická transformace, je $LA_0 \neq A_0$ neboli $S \neq \mathbf{o}$, kde $S = (c - 1)A_0 + B$. Pro

$$X = x_0A_0 + x_1A_1 + \dots + x_mA_m$$

je $LX = X + x_0S$, speciálně $LS = S$, takže bod $\{S\}$ je samodružný. Je-li $\{X\} \neq \{S\}$, je $\{LX\} \neq \{S\}$ a bod $\{LX\} = \{X + x_0S\}$ leží na přímce SX, takže tato přímka je samodružná. Tudíž H je homologie se středem $\{S\}$.

Homologie H projektivního prostoru P_m se jmenuje *speciální*, jestliže její invariant c je roven jedné, neboli jestliže osová nadrovina prochází středem homologie.

V předcházejícím jsme podali důkazy vět 84.1 a 84.2 tak, že byly nezávislé jeden na druhém. Nyní si však ukážeme, že každá z obou vět 84.1, 84.2 je důsledkem druhé z nich, aplikujeme-li princip duality. Provedeme to m. j. proto, abychom na příkladě prokázali užitečnost principu duality při studiu projektivních prostorů.

Homologie H byla v předcházejícím definována tak, že existuje g. bod S (střed homologie) tak, že každá *přímka* jdoucí bodem S je samodružná při H (a že mimo to H není identická transformace prostoru P_m); je však snadné si rozvážit, že ekvivalentním požadavkem je, aby každá *nadrovina* jsoucí bodem S byla samodružná při H. Jestliže takto upravenou definici aplikujeme na duální kolineaci $\tilde{H}$ duálního prostoru $\tilde{\mathsf{P}}_m$ odvozenou z kolineace H prostoru P_m, vidíme, že $\tilde{H}$ je homologie prostoru $\tilde{\mathsf{P}}_m$, jestliže existuje nadrovina ϱ tak, že každý její bod je samodružný při $\tilde{H}$. Avšak samodružnost bodu (nebo nadroviny) při $\tilde{H}$ je zřejmě totéž jako samodružnost při H. Tedy $\tilde{H}$ je homologie prostoru $\tilde{\mathbf{P}}_m$, právě když existuje nadrovina prostoru $\mathbf{P}_m$, jejíž každý bod je samodružný při H. Nyní věta 84.1 praví, že je-li H homologie prostoru $\mathbf{P}_m$, je $\tilde{H}$ homologie prostoru $\mathbf{P}_m$; věta 84.2 pak praví, že je-li $\tilde{H}$ homologie prostoru $\tilde{\mathbf{P}}_m$, je H homologie prostoru $\mathbf{P}_m$. Tedy každá z obou vět 84.1 a 84.2 plyne z druhé užitím principu duality.

Budiž f regulární afinní transformace eukleidovského prostoru $\mathbf{E}_m$ a budiž $\{f\}$ její projektivní rozšíření na prostor $\overline{\mathbf{E}}_m$. Potom úběžná nadrovina ϱ je samodružná při kolineaci $\{f\}$ prostoru $\overline{\mathbf{E}}_m$ a je nasnadě otázka, kdy $\{f\}$ je homologie s osovou nadrovinou ϱ. Snadno se dokáže, že tomu tak je (s vyloučením případu, že f je identická transformace), právě když f je buďto homothetická transformace nebo translace. Mimo to se lehko dokáže, že invariant homologie $\{f\}$ je roven koeficientu homothetie v případě homothetické transformace, a je roven jedné v případě translace. Homologie $\{S\}$ je speciální, právě když f je translace.

85. DETERMINANT KOLINEACE V SAMODRUŽNÉM BODĚ NEBO NADROVINĚ. Budiž $\mathbf{W}_{m+1}$ ar. základ projektivního prostoru $\mathbf{P}_m$. Automorfismus L vektorového prostoru $\mathbf{W}_{m+1}$ vytvořuje kolineaci $\{L\}$ projektivního prostoru $\mathbf{P}_m$; táž kolineace je však vytvořena také jinými automorfismy, totiž automorfismy tvaru cL, kde číslo c je různé od nuly, jinak je však libovolné. Nyní v článku 83 jsme pro každý automorfismus prostoru $\mathbf{W}_{m+1}$ definovali jeho determinant; je-li Δ determinant automorfismu L, je $c^{m+1}\Delta$ determinant automorfismu cL, a ježto všecky automorfismy cL ($c \neq 0$) vytvořují touž kolineaci $\{L\}$ prostoru $\mathbf{P}_m$, nemůžeme mluvit o určitém determinantu kolineace. Jestliže však se nám v některých případech podaří uvažovaným kolineacím $\{L\}$ *jednoznačně* přiřadit vytvořující automorfismus L, můžeme determinant tohoto automorfismu prohlásit za determinant kolineace $\{L\}$.

Jeden takový případ dostaneme, uvažujeme-li takové kolineace prostoru $\mathbf{P}_m$, které mají daný samodružný bod $\{A\}$. Neboť taková kolineace je vytvořena automorfismem L, který má vlastnost

$$LA = A\,; \tag{85.1}$$

vlastnost (85.1) je zřejmě nezávislá na volbě ar. zástupce A g. bodu $\{A\}$ a určuje jednoznačně automorfismus vytvořující danou kolineaci. Determinant automorfismu L, splňujícího podmínku (85.1), nazveme *determinantem kolineace* $\{L\}$ *v jejím samodružném bodě* $\{A\}$. Z věty 83.2 plyne:

VĚTA 85.1. *Buďtež* K_1, K_2 *dvě kolineace prostoru* $\mathbf{P}_m$ *se společným samodružným bodem. Jsou-li* Δ_1, Δ_2 *determinanty kolineací* K_1, K_2 *v daném samodružném bodě, potom determinant složené kolineace* $K_1 \circ K_2$ *v témž samodružném bodě je roven součinu* $\Delta_1\Delta_2$.

Kolineace prostoru $\mathbf{P}_m$ s daným samodružným bodem tvoří zřejmě transformační grupu prostoru $\mathbf{P}_m$; z věty 85.1 plyne, že ty z nich, jejichž determinant v daném samodružném bodě je roven jedné, tvoří podgrupu uvažované transformační grupy.

VĚTA 85.2. *Budiž* K *kolineace prostoru* $\mathbf{P}_m$ *a budiž* $\mathbf{P}_k$ *lineární podprostor, jehož každý bod je samodružný při* K. *Potom determinant kolineace* K *v samodružném bodě* $\{X\}$ *patřícím do* $\mathbf{P}_k$ *je týž pro všecky body* $\{X\}$ *prostoru* $\mathbf{P}_k$.

DŮKAZ. Buďtež $\{A\}$, $\{B\}$ dva různé body prostoru $\mathbf{P}_k$ a budiž $K = \{L_1\} = \{L_2\}$, při čemž $L_1A = A$, $L_2B = B$. Stačí dokázat, že $L_1 = L_2$. Víme, že existuje číslo c tak, že $L_2 = cL_1$; tudíž $L_1B = cB$ a tedy $L_1(A + B) = A + cB$. Avšak bod $\{A + B\}$ náleží do P_k a je tedy samodružný, t. j. $L_1(A + B) = c'(A + B)$. Tudíž $A + cB = c'(A + B)$ neboli $(1 - c')A + (c - c')B = \mathbf{o}$ a ježto ar. body A, B jsou lineárně nezávislé, je $1 - c' = 0$, $c - c' = 0$, tedy $c = 1$, $L_1 = L_2$.

Obráceně předpokládejme, že kolineace K má týž determinant ve dvou různých samodružných bodech a ptejme se, zda každý bod přímky spojující tyto body musí být samodružný. Uvidíme, že odpověď je kladná pouze v tom případě, že číslo m je sudé. Neboť jsou-li $\{A\}$, $\{B\}$ dané samodružné body, existuje vytvořující automorfismus L tak, že $LA = A$; ježto $\{B\}$ je samodružný, existuje číslo $c \neq 0$ tak, že $LB = cB$. Determinant kolineace K v samodružném bodě $\{A\}$ je roven determinantu Δ automorfismu L; determinant kolineace K v samodružném bodě $\{B\}$ je roven determinantu automorfismu cL, t. j. je roven $c^{m+1}\Delta$. Ježto oba determinanty jsou si rovny a ježto

$\Delta \neq 0$, je $c^{m+1} = 1$ a z toho při sudém m plyne, že $c = 1$, tedy $LA = A$, $LB = B$, $L(xA + yB) = xA + yB$, takže každý bod přímky AB je samodružný. Je-li však m liché, může být rovnice $c^{m+1} = 1$ splněna také tak, že $c = -1$, načež přímka AB obsahuje pouze dva samodružné body.

Z (84.4) a (84.6) se snadno odvodí:

VĚTA 85.3. *Budiž H homologie prostoru P_m $(m \geqq 2)$ se středem homologie S a s osovou nadrovinou ϱ; budiž c invariant homologie H. Determinant homologie H v samodružném bodě S je roven c^m. Je-li A libovolný bod nadroviny ϱ, je determinant homologie H v samodružném bodě A roven* $1 : c$.

Uvažujme nyní takové kolineace K prostoru P_m, které mají danou samodružnou nadrovinu ϱ. Zvolme ar. nadrovinu $\tilde{A}$ tak, že $\varrho = \{\tilde{A}\}$ a ukažme, že je možno udat takový vytvořující automorfismus L kolineace K, že

$$(85.2) \qquad d(LX, \tilde{A}) = d(X, \tilde{A})$$

pro každý ar. bod X. Neboť zvolme ar. bod $A_0 \neq \mathbf{o}$ tak, že $\{A_0\}$ neleží v ϱ; jestliže $A_1, \ldots, A_m$ je ar. base pro ϱ, je zřejmě $A_0, A_1, \ldots$ $\ldots, A_m$ ar. base pro P_m. Ježto nadrovina ϱ je samodružná, body $K\{A_r\}$ $(1 \leqq r \leqq m)$ náležejí do ϱ a tudíž bod $K\{A_0\}$, stejně jako bod $\{A_0\}$, nenáleží do ϱ. Jestliže $K = \{L\}$, je

$$(85.3) \qquad d(A_r, \tilde{A}) = 0 = d(LA_r, \tilde{A}) \quad \text{pro} \quad 1 \leqq r \leqq m,$$

avšak

$$d(A_0, \tilde{A}) \neq 0 \neq d(LA_0, \tilde{A})$$

a L lze zvolit tak, že

$$(85.4) \qquad d(LA_0, \tilde{A}) = d(A_0, \tilde{A}).$$

Pro libovolný ar. bod X máme

$$X = x_0 . A_0 + x_1A_1 + \ldots + x_mA_m,$$
$$LX = x_0 . LA_0 + x_1 . LA_1 + \ldots + x_m . LA_m,$$

takže podle (85.3)

$$d(A, \tilde{A}) = x_0 . d(A_0, \tilde{A}), \quad d(LX, \tilde{A}) = x_0 . d(LA_0, \tilde{A})$$

a z (85.4) plyne (85.2). Je patrné, že podmínka (85.2) jednoznačně určuje automorfismus L a že je nezávislá na volbě ar. zástupce $\tilde{A}$

nadroviny ϱ. Můžeme tudíž determinant automorfismu L nazvat *determinantem kolineace K v samodružné nadrovině ϱ.*

Je-li f regulární afinní transformace eukleidovského prostoru $\mathbf{E}_m$, zvolme v $\mathbf{E}_m$ lineární soustavu souřadnic $\langle P; \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m \rangle$. Budiž

$$f(P) = P + b_1 \mathbf{u}_1 + \ldots + b_m \mathbf{u}_m ,$$
$$f(\mathbf{u}_r) = a_{r1} \mathbf{u}_1 + \ldots + a_{rm} \mathbf{u}_m \quad \text{pro} \quad 1 \leqq r \leqq m .$$

Determinant transformace f (definovaný na str. 110 prvního svazku) je roven

$$(85.5) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mm} \end{vmatrix} .$$

Nyní $P, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m$ je ar. base projektivního rozšíření $\bar{\mathbf{E}}_m$ prostoru $\mathbf{E}_m$. Projektivní rozšíření afinní transformace f (definované na str. 42) je vytvořeno automorfismem L ar. základu prostoru $\bar{\mathbf{E}}_m$, při kterém ar. bod

$$(85.6) \qquad X = x_0 P + x_1 \mathbf{u}_1 + \ldots + x_m \mathbf{u}_m$$

přejde v ar. bod

$$(85.7) \qquad LX = x_0 f(P) + x_1 f(\mathbf{u}_1) + \ldots + x_m f(\mathbf{u}_m) ,$$

takže L má determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & b_1 & \ldots & b_m \\ 0 & a_{11} & \ldots & a_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & a_{m1} & \ldots & a_{mm} \end{vmatrix} ,$$

který je roven determinantu (85.5). Je-li $\tilde{A}, \tilde{B}_1, \ldots, \tilde{B}_m$ ar. base projektivního prostoru duálního k $\bar{\mathbf{E}}_m$ duální k ar. basi $P, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m$ prostoru $\bar{\mathbf{E}}_m$, je $\{\tilde{A}\}$ úběžná nadrovina a pro každý ar. bod X je číslo $d(X, \tilde{A})$ rovno koeficientu ar. bodu X a ježto ar. body (85.6), (85.7) mají týž koeficient x_0, je splněna podmínka (85.2). Platí tedy:

VĚTA 85.4. *Budiž f regulární afinní transformace eukleidovského prostoru $\mathbf{E}_m$ a budiž $\{f\}$ její projektivní rozšíření na prostor $\bar{\mathbf{E}}_m$. Determinant kolineace $\{f\}$ v úběžné nadrovině, která je samodružná při $\{f\}$, je roven determinantu afinní transformace f.*

Budiž $\{\tilde{A}\}$ samodružná nadrovina kolineace $\{L\}$ prostoru P_m a předpokládejme, že automorfismus L ar. základu $\mathbf{W}_{m+1}$ prostoru $\mathbf{P}_m$ splňuje podmínku (85.2). K automorfismu L jsme definovali na str. 55 duální automorfismus $\tilde{L}$ ar. základu $\tilde{\mathbf{W}}_{m+1}$ duálního prostoru $\tilde{\mathbf{P}}_m$ tak, že kolineace $\{\tilde{L}\}$ prostoru $\tilde{\mathbf{P}}_m$ je duální ke kolineaci $\{L\}$ prostoru $\mathbf{P}_m$. Podle (83.13) je pro každý ar. bod X : $d(X, \tilde{A}) = d(LX, L\tilde{A})$, takže podle (85.2) je $d(Y, \tilde{L}\tilde{A} - \tilde{A}) = 0$ pro $Y = LX$. Avšak Y je zcela libovolný ar. bod, takže $\tilde{L}\tilde{A} = \tilde{A}$, t. j. $\tilde{L}$ splňuje vzhledem k samodružné nadrovině $\{\tilde{A}\}$, která je bodem duálního prostoru $\tilde{\mathbf{P}}_m$, podmínku typu (85.1). Z věty 83.7 tudíž plyne:

VĚTA 85.5. *Budiž ϱ samodružná nadrovina kolineace K projektivního prostoru $\mathbf{P}_m$ a budiž $\tilde{K}$ duální kolineace prostoru $\tilde{\mathbf{P}}_m$. Potom determinant kolineace $\tilde{K}$ v samodružné nadrovině ϱ je roven převrácené hodnotě determinantu kolineace K v téže nadrovině ϱ.*

Z věty 85.5 plyne podle principu duality:

VĚTA 85.6. *Budiž S samodružný bod kolineace K projektivního prostoru $\mathbf{P}_m$ a budiž $\tilde{K}$ duální kolineace prostoru $\tilde{\mathbf{P}}_m$. Potom determinant kolineace $\tilde{K}$ v samodružném bodě S je roven převrácené hodnotě determinantu kolineace K v témž bodě S.* Při tom ovšem determinant kolineace $\tilde{K}$ v samodružném bodě S prostoru $\mathbf{P}_m$ znamená determinant kolineace $\tilde{K}$ v duální nadrovině, jejímž vrcholem je S.

86. PROJEKTIVNÍ ZOBRAZENÍ PŘÍMKY. Název kolineární vznikl z vlastnosti (obsažené ve větě 79.4), že obrazem každé přímky je přímka. Dá se dokázat (ale v této knize nebudeme důkaz provádět), že pro $m \geq 2$ každé zobrazení prostoru $\mathbf{P}_m$ na prostor $\mathbf{P}'_m$, při kterém obrazem každé přímky je přímka, je kolineární. Pro $m = 1$ celý prostor $\mathbf{P}_1$ je přímka a každé zobrazení $\mathbf{P}_1$ na $\mathbf{P}'_1$ má samozřejmě tu vlastnost, že obrazem přímky je přímka, a přes to ovšem nemusí být kolineárním. Pro $m = 1$ je zvykem slovo kolineární nahrazovat slovem projektivní; řídíce se tímto zvykem, budeme mluvit o *projektivním zobrazení* (projektivní) *přímky* $\mathbf{P}_1$ na (projektivní) přímku $\mathbf{P}'_1$, čímž míníme zobrazení $\mathbf{P}_1$ na $\mathbf{P}'_1$, které je kolineární ve smyslu definovaném v článku 79. Je-li $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}'_1$, máme kolineaci (projektivní) přímky $\mathbf{P}_1$, kterou budeme nazývat *projektivitou na přímce* $\mathbf{P}_1$.

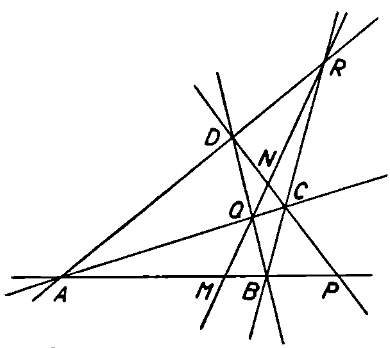
Poznámka. V klasické literatuře projektivní geometrie se mluví o „dvou projektivních bodových řadách", čímž se míní projektivní zobrazení přímky na přímku, o dvou „soumístných projektivních bodových řadách", čímž se míní projektivita na přímce. Taková a podobná terminologie je velmi běžná v projektivní geometrii, málo však zdůrazňuje logickou strukturu studovaných pojmů a výrazně se liší od terminologie, která je dnes běžná ve všech hlavních partiích matematiky. Nebudeme proto takové terminologie v této knize užívat.

Jsou-li dány dvě projektivní přímky $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}'_1$, při čemž může, ale nemusí být $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}'_1$, a jsou-li na každé z obou přímek dány tři různé body (v určitém pořadí), potom podle vět 79.5 a 79.6 existuje právě jedno projektivní zobrazení přímky $\mathbf{P}_1$ na přímku $\mathbf{P}'_1$, které převede prvé tři body ve druhé tři. Jak tomu je, jestliže místo tří bodů máme čtyři, o tom nás poučuje

VĚTA 86.1. *Jsou-li dány čtyři různé body A, B, C, D na přímce $\mathbf{P}_1$, a čtyři různé body A', B', C', D' na přímce $\mathbf{P}'_1$, potom projektivní zobrazení přímky $\mathbf{P}_1$ na přímku $\mathbf{P}'_1$, které převádí A, B, C, D po řadě v A', B', C', D', existuje, právě když dvojpoměr* $(ABCD)$ je roven dvojpoměru $(A'B'C'D')$.

DŮKAZ. Existuje-li takové projektivní zobrazení $K = \{L\}$, potom při vhodné volbě ar. zástupců bude $LA = A'$, $LB = B'$, $LC = C'$, $LD = D'$. Existují čísla u_1, u_2, v_1, v_2 tak, že $C = u_1A + u_2B$, $D = v_1A + v_2B$. Ježto zobrazení L je isomorfní, je také $C' = u_1A' + u_2B'$, $D' = v_1A' + v_2B'$, takže podle definice dvojpoměru je $(ABCD) = (A'B'C'D')$. Obráceně předpokládejme, že $(ABCD) = (A'B'C'D') = \lambda$, tedy $0 \neq \lambda \neq 1$ podle (76.4). Podle věty (79.6) existuje projektivní zobrazení K přímky $\mathbf{P}_1$ na přímku $\mathbf{P}'_1$, které převádí body A, B, C v body A', B', C'; K převádí bod D v jakýsi bod E přímky $\mathbf{P}'_1$ a podle již dokázaného je $(ABCD) = (A'B'C'E)$, tedy $(A'B'C'E) = (A'B'C'D')$, takže podle věty 76.1 je $E = D'$.

V projektivním prostoru $\mathbf{P}_m$ $(m \geqq 2)$ budiž dán $(m - 2)$-rozměrný lineární podprostor v širším smyslu Q. V článku 81 jsme nazvali svazkem nadrovin o vrcholu Q a označili $\pi(Q; \mathbf{P}_m)$ množinu všech nadrovin prostoru $\mathbf{P}_m$, které procházejí podprostorem Q. Poznali jsme, že svazek nadrovin tvoří projektivní přímku, takže můžeme mluvit o dvojpoměru čtveřice (navzájem různých) nadrovin svazku. Jestliže nyní je v prostoru $\mathbf{P}_m$ mimo podprostor Q ještě dána přímka $\mathbf{P}_1$, která nemá s Q společného bodu, jsou podprostory Q, $\mathbf{P}_1$ totálně nezávislé a jestliže každému bodu $\{X\}$ přímky $\mathbf{P}_1$ přiřadíme jím procházející (jednoznačně určenou) nadrovinu svazku, obdržíme perspektivní zobrazení $\mathbf{P}_1$ na $\pi(Q\,;\,\mathbf{P}_m)$, které podle článku 82 je kolineární (projektivní). Jsou-li tedy A, B, C, D čtyři různé body přímky $\mathbf{P}_1$ a jsou-li α, β, γ, δ jimi procházející nadroviny svazku $\pi(Q\,;\,\mathbf{P}_m)$, je $(ABCD) = (\alpha\beta\gamma\delta)$. Máme-li v $\mathbf{P}_m$ vedle Q dány dvě různé přímky $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_1'$, z nichž žádná neprotne Q, potom podle článku 82 promítnutí přímky $\mathbf{P}_1$ na přímku $\mathbf{P}_1'$ z vrcholu Q je projektivní zobrazení $\mathbf{P}_1$ na $\mathbf{P}_1'$. Jsou-li tedy A, B, C, D čtyři různé body přímky $\mathbf{P}_1$ a jsou-li A', B', C', D' jejich průměty z vrcholu Q na přímku $\mathbf{P}_1'$, je $(ABCD) = (A'B'C'D')$.



Obr. 1.

Věta 86.2 (viz obr. 1). *V projektivní rovině buďtež dány čtyři body A, B, C, D, z nichž žádné tři neleží v téže přímce.* (Body A, B, C, D jsou tudíž navzájem různé.) *Budiž: P průsečík přímek AB, CD; Q průsečík přímek AC, BD; R průsečík přímek AD, BC; M průsečík přímek AB, QR. Potom bod M je harmonicky sdružen s bodem P vzhledem k bodům A, B.*

Důkaz. Podáme napřed neúplný geometrický důkaz založený na právě odvozených vlastnostech dvojpoměru. Budiž N průsečík přímek CD, QR. Při promítnutí přímky AB na přímku CD z vrcholu Q mají body A, B, P, M průměty C, D, P, N, takže

$$(ABPM) = (CDPN)\,. \tag{86.1}$$

Při promítnutí přímky AB na přímku CD z vrcholu R mají body B, A, P, M průměty C, D, P, N, takže

$$(BAPM) = (CDPN)\,. \tag{86.2}$$

Porovnáme-li (86.1) s (86.2), máme $(ABPM) = (BAPM)$, takže podle (76.10) dvojpoměr $(ABPM) = \lambda$ vyhovuje rovnici $\lambda^2 = 1$ a ježto dvojpoměr není nikdy roven jedné, je $(ABPM) = -1$. Tento důkaz má tu mezeru, že není odůvodněno, proč body A, B, P, M jsou navzájem různé, specielně proč $M \neq P$. Nebudeme tuto mezeru vyplňovat, nýbrž místo toho podáme jednoduchý početní důkaz věty 86.2, opřený o vhodnou volbu ar. zástupců uvažovaných g. bodů. Ar. bod Q zvolíme libovolně. Potom zvolíme ar. body A, B tak, aby bylo $C = A + Q$, $D = B + Q$. Potom je $B - A = D - C$, $A + D = B + C$. Ježto bod $B - A$ leží na přímce AB, bod $D - C$ na přímce CD, je $B - A = D - C = P$ a podobně je též $A + D = B + C = R$. Nyní je $A + B = R - Q$ a z toho soudíme, že $A + B = M$. Ježto $P = B - A$, $M = A + B$, je $(ABPM) = -1$.

87. PROJEKTIVITY NA PŘÍMCE. Budiž K projektivita na přímce $\mathbf{P}_1$. Není-li K identická transformace přímky $\mathbf{P}_1$, plyne z věty 79.6, že existují nejvýš dva samodružné body při K. Projektivita K se nazývá: *hyperbolická*, má-li dva různé samodružné body, *eliptická*, nemá-li žádný samodružný bod, *parabolická*, má-li jediný samodružný bod. Zvolíme-li libovolně ar. basi A, B přímky $\mathbf{P}_1$, je $K = \{L\}$, kde

(87.1)
$$LA = \alpha A + \beta B, \quad LB = \gamma B + \delta B,$$

při čemž

(87.2)
$$\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0.$$

Bod $\{xA + yB\}$ je samodružný při K, právě když ar. bod $L(xA + yB)$ je lineárně závislý na ar. bodě $xA + yB$, t. j. právě když

$$\begin{vmatrix} x & \alpha x + \gamma y \\ y & \beta x + \delta y \end{vmatrix} = 0$$

neboli

(87.3)
$$\beta x^2 + (\delta - \alpha)xy - \gamma y^2 = 0.$$

Je-li

(87.4)
$$D = (\delta - \alpha)^2 + 4\beta\gamma = (\alpha + \delta)^2 - 4\Delta,$$

je tedy: $D > 0$ *pro hyperbolické projektivity,* $D < 0$ *pro eliptické projektivity,* $D = 0$ *jednak pro parabolické projektivity, jednak pro identickou transformaci* charakterisovanou vztahy:

$$(87.3) \qquad \beta = \gamma = 0\,, \qquad \alpha = \delta \neq 0\,.$$

Ježto číslo $m = 1$ je liché, můžeme podle článku 83 rozdělit projektivity na přímce na *přímé,* u kterých je $\Delta > 0$, a *nepřímé,* u kterých je $\Delta < 0$. Je-li přímka $\mathbf{P}_1$ orientována, potom orientace, geometricky popsaná v článku 77 vlastnostmi symbolu (77.2), zůstává beze změny po provedení přímé projektivity, přejde však v orientaci opačnou po provedení nepřímé projektivity.

VĚTA 87.1. *Nepřímá projektivita na přímce je vždy hyperbolická.* Neboť je-li $\Delta < 0$, potom podle (87.4) je $D > 0$. Podle dokázané věty každá eliptická i každá parabolická projektivita je přímá, kdežto hyperbolická projektivita může být přímá nebo nepřímá.

VĚTA 87.2. *Jsou-li A, B samodružné body hyperbolické projektivity na přímce $\mathbf{P}_1$, existuje číslo λ tak, že*

$$(87.4) \qquad 0 \neq \lambda \neq 1$$

a že, je-li X kterýkoli nesamodružný bod přímky $\mathbf{P}_1$, X' obraz bodu X, potom dvojpoměr $(ABXX') = \lambda$. Obráceně, jsou-li dány na přímce $\mathbf{P}_1$ dva různé body A, B a je-li dáno reálné číslo λ splňující (87.4), *přiřaďme bodu A bod A, bodu B bod B a každému jinému bodu X přímky $\mathbf{P}_1$ ten bod X'* (jednoznačně určený podle věty 76.1), *pro který platí* $(ABXX') = \lambda$; *dostaneme na přímce $\mathbf{P}_1$ hyperbolickou projektivitu se samodružnými body A, B. Naše projektivita je přímá pro kladné λ, nepřímá pro záporné λ.*

DŮKAZ. Jsou-li A, B samodružné body dané hyperbolické projektivity $\{L\}$, potom v (87.1) je $\beta = \gamma = 0$, takže podle (87.2) je $\alpha \neq 0$, $\delta \neq 0$ a ježto $\{L\}$ není identická transformace, je $\alpha \neq \delta$. Je-li $X = xA + yB$, je $LX = \alpha xA + \delta yB$, takže pro $x \neq 0$, $y \neq 0$ je $(A, B, X, LX) = \lambda$, kde $\lambda = \alpha : \delta$, takže platí (87.4). Podle (87.2) je $\Delta = \alpha\delta$, takže pro $\lambda > 0$ je $\Delta > 0$ a projektivita je přímá, pro $\lambda < 0$ je $\Delta < 0$ a projektivita je nepřímá. Obráceně, je-li dáno λ tak, že platí (87.4) a je-li $(ABXX') = \lambda$, potom $\{X'\} = \{LX\}$, položíme-li $LA = \lambda A$, $LB = B$; $\{L\}$ je žádaná projektivita.

VĚTA 87.3. *Buďtež dány tři různé body A, B, C na přímce P_1. Potom existuje na P_1 právě jedna parabolická projektivita K se samodružným bodem A, při které obrazem bodu B* je bod C.

DŮKAZ. Zvolme libovolně ar. zástupce A, B, C a budiž $C = uA + vB$, tedy $uv \neq 0$. Existuje-li K, je vytvořena isomorfismem L, pro který

$$LA = A, \qquad LB = x(uA + vB),$$

kde $x \neq 0$. Běží pouze o to, že lze určit x právě jedním způsobem tak, aby pro $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = xu$, $\delta = xv$ výraz D [viz (87.4)] byl roven nule. To je však zřejmé, neboť $D = (xv - 1)^2$.

VĚTA 87.4. *Budiž K taková projektivita na přímce P_1, že existují dva různé body, z nichž každý je obrazem druhého při K. Je-li potom X libovolný bod přímky P_1 a je-li X' jeho obraz při K, je také obráceně bod X obrazem bodu X' při K.*

DŮKAZ. Budiž $K = \{L\}$ a volme v (87.1) za A, B dané dva body, z nichž každý je obrazem druhého. Potom je $\alpha = \delta = 0$ a je-li $X = xA + yB$, $X' = LX$, je $X' = \gamma yA + \beta xB$, tedy $LX' = \beta\gamma \,.\, (xA + yB)$, takže $K\{X'\} = \{X\}$.

Projektivita K na přímce P_1, která má tu vlastnost, že je-li X' obraz libovolného bodu X, je také obráceně X obrazem bodu X', se nazývá *involuce na přímce* P_1, není-li identickou transformací přímky P_1. Věta 87.4 praví, že existují-li dva různé body, z nichž každý je obrazem druhého při projektivitě K, potom K je involuce a je-li X' obrazem bodu X, pravíme, že dvojice

$$X, X' \tag{87.5}$$

je *dvojice involuce* K. Místo abychom na involuci K nazírali jako na transformaci přímky P_1, je účelné nazírat na involuci jako na množinu bodových dvojic (87.5). Také na libovolnou projektivitu K bychom mohli nazírat jako na množinu dvojic (87.5), kde $KX = X'$, ale v obecném případě bychom musili přihlížet k pořadí obou bodů, ze kterých se skládá dvojice (87.5), kdežto v případě involuce *nezáleží na pořadí bodů, ze kterých se skládá dvojice involuce.* Je-li S samodružný bod involuce K, potom dvojice S, S je jednou dvojicí involuce a obráceně, jestliže dvojice S, S složená ze dvou splývajících bodů je dvojicí involuce, je S samodružný bod. Proto u involucí se místo názvu samodružný bod užívá zpravidla názvu *dvojný bod*. Tedy *hyperbolická involuce má dva dvojné body, eliptická involuce nemá žádný dvojný bod.* Jiného případu není, neboť z následující věty plyne, že *involuce nemůže být parabolická*. Napřed však ještě poznamenejme, že z definice involuce plyne, že je-li K involuce na přímce $\mathbf{P}_1$ a je-li X libovolný bod přímky $\mathbf{P}_1$, existuje právě jedna dvojice involuce K, do které náleží bod X. Jsou-li tedy X_1, X_1'; X_2, X_2' dvě různé dvojice téže involuce, potom žádný z g. bodů X_2, X_2' nemůže splynout s žádným z bodů X_1, X_1'. Splynou-li X_1 a X_1', je X_1 dvojný bod; splynou-li X_2 a X_2', je X_2 dvojný bod. Ježto involuce nemůže mít více než dva dvojné body, je ve všech nekonečně mnoha dvojicích (87.5) involuce K, s výjimkou nejvýš dvou dvojic, g. bod X různý od g. bodu X'.

VĚTA 87.5. *Buďtež A, B, C, D čtyři různé g. body na projektivní přímce $\mathbf{P}_1$. Potom existuje na přímce $\mathbf{P}_1$ právě jedna involuce obsahující obě dvojice A, B; C, D. Tato involuce je hyperbolická, je-li dvojpoměr $(ABCD) > 0$, eliptická, je-li $(ABCD) < 0$.*

DŮKAZ. Ježto $\{A\} \neq \{B\}$, bude při vhodné volbě ar. zástupců uvažovaných g. bodů

$$C = A + B, \qquad D = \lambda A + B,$$

kde $0 \neq \lambda \neq 1$. Podle definice dvojpoměru je $(ABCD) = \lambda$. Nyní involuce, do níž náleží dvojice A, B, je vytvořena isomorfismem L ar. základu přímky $\mathbf{P}_1$, při kterém $LA = B$, $LB = \mu A$, $\mu \neq 0$. Z věty 87.4 plyne, že $\{L\}$ je involuce při každé volbě čísla $\mu \neq 0$. Nyní $L(A + B) = \mu A + B$, takže C, D je dvojice involuce $\{L\}$, právě když $\mu = \lambda$. Existuje tudíž právě jedna involuce $\{L\}$ s žádanou vlastností, pro niž v (87.1) je $\alpha = \delta = 0$, $\beta = 1$, $\gamma = \lambda$, takže podle (87.4) je $D = 4\lambda$ a tudíž pro $\lambda > 0$ je $D > 0$ a involuce je hyperbolická, pro $\lambda < 0$ je $D < 0$ a involuce je eliptická; případ $D = 0$ je vyloučen.

VĚTA 87.6. *Buďtež A, B dva různé body na projektivní přímce $\mathbf{P}_1$. Existuje právě jedna hyperbolická involuce s dvojnými body A, B. Mimo své dvojné body* (z nichž každý dává jednu dvojici) *obsahuje tato involuce ještě právě ty dvojice X, X', pro které A, B, X, X' je harmonická čtveřice.*

Důkaz. Ve větě 87.2 jsou popsány všecky hyperbolické projektivity se samodružnými body A, B; každá z nich odpovídá určité volbě čísla λ, kde $0 \neq \lambda \neq 1$ a zřejmě máme dokázat, že involuci dostaneme, právě když $\lambda = -1$. Je-li však bod X různý od bodů A, B a je-li X' jeho obraz při uvažované projektivitě, je $(ABXX') = \lambda$ a tedy $(ABX'X) = 1 : \lambda$ podle (76.14). Involuci tudíž máme, právě když $1 : \lambda = \lambda$, t. j. právě když $\lambda = -1$, ježto $\lambda = 1$ je vyloučeno.

Věta 87.7. *Eliptická involuce je přímá projektivní transformace. Hyperbolická involuce je nepřímá projektivní transformace.*

Důkaz. Případ eliptické involuce je obsažen ve větě 87.1. Případ hyperbolické involuce je obsažen ve větě 87.2, ježto podle důkazu věty 87.6 v uvažovaném případě je $\lambda = -1$.

Všimněme si ještě, jaký tvar mají involuce v tom případě, když $\mathbf{P}_1 = \bar{\mathbf{E}}_1$ je projektivní uzávěr eukleidovské přímky $\mathbf{E}_1$. Zde máme především hyperbolické involuce s jedním dvojným bodem v nekonečnu a ovšem druhým v konečnu, který označíme S. Taková involuce podle vět 76.3 a 87.6 obsahuje mimo své dvojné body ještě právě ty dvojice e. bodů A, B, jejichž středem je e. bod S.

Ponecháme-li tento případ stranou, potom existuje e. bod P, který spolu s úběžným bodem $\{\mathbf{u}\}$ tvoří dvojici dané involuce K; můžeme předpokládat, že $|\mathbf{u}| = 1$. Bod P se nazývá *střed involuce* K. Potom každý z obou g. bodů $\{P\}$, $\{\mathbf{u}\}$ je obrazem druhého při K, takže K je vytvořena automorfismem L, při kterém $LP = c\mathbf{u}$, $L\mathbf{u} = P$, kde $c \neq 0$. Tedy $L(P + x\mathbf{u}) = xP + c\mathbf{u}$, takže obrazem e. bodu $X = P + x\mathbf{u}$, $x \neq 0$ je e. bod $X' = P + x'\mathbf{u}$, kde $xx' = c$. Ježto $|\mathbf{u}| = 1$, je $x = \overrightarrow{PX}$, $x' = \overrightarrow{PX'}$. Tedy *involuce K vedle dvojice složené z jejího středu P a z úběžného bodu obsahuje právě ještě ty dvojice e. bodů X, X', pro něž*

$$\overrightarrow{PX} \,.\, \overrightarrow{PX'} = c\,, \tag{87.6}$$

kde $c \neq 0$ je konstanta, která spolu se středem P jednoznačně určuje involuci K. Snadno se dokáže, že je-li $c > 0$, je K hyperbolická a má dvojné body

$$P \pm \sqrt{c}\,.\,\mathbf{u}\,;$$

je-li $c < 0$, je K eliptická.

XII

IMAGINÁRNÍ ELEMENTY

88. KOMPLEXNÍ ČÍSLA. V této knize jsme dosud užívali skoro výhradně (až na články 42, 43, 64 až 68 prvého svazku) pouze *reálných* čísel. V algebře se však, jak známo, velmi často užívá obecnějších *komplexních* čísel. Hlavním důvodem toho je ta okolnost, že algebraická rovnice s reálnými koeficienty (na př. rovnice $x^2 + 1 = 0$) nemusí v oboru reálných čísel mít žádný kořen, kdežto v oboru komplexních čísel platí t. zv. *základní věta algebry*, podle níž každá algebraická rovnice má aspoň jeden kořen.

Nyní bude účelné shrnout si známé základní definice z nauky o komplexních číslech. V následujícím bude někdy účelné označit $\mathfrak{R}$ množinu všech reálných čísel, $\mathfrak{R}(i)$ množinu všech komplexních čísel. Při výkladu základních definic bude účelné značit reálná čísla latinskými písmeny, komplexní čísla pak zpravidla řeckými písmeny.

Komplexní číslo α je podle definice uspořádaná dvojice (a_1, a_2) reálných čísel, z nichž prvé a_1 se jmenuje *reálná část*, druhé a_2 *imaginární část* komplexního čísla α; označení:

$$a_1 = \mathrm{Re}.\alpha\,, \qquad a_2 = \mathrm{Im}.\alpha\,.$$

Při tom se činí dohoda, že komplexní číslo $(a_1, 0)$, jehož imaginární část je rovna nule, se *ztotožňuje s reálným číslem* a_1. Naproti tomu komplexní číslo $\alpha = (a_1, a_2)$, jehož imaginární část a_2 je různá od nuly, se jmenuje *imaginární číslo*. Tedy v naší terminologii množina komplexních čísel se rozpadá na dvě množiny bez společného prvku: na množinu čísel reálných a na množinu čísel imaginárních. Budiž pro jasnost připomenuto, že výše definovaná imaginární část a_2 komplexního čísla $\alpha = (a_1, a_2)$ není imaginárním číslem, nýbrž právě naopak reálným číslem.

Komplexní číslo $(0, a_2)$, jehož reálná část je rovna nule, se azývá často *ryze imaginárním číslem*, avšak většina autorů se vzpírá tomu, počítat mezi ryze imaginární čísla také dvojici (0, 0), kterou podle předcházejícího je třeba ztotožnit s reálným číslem 0. Nezáleží na tom mnoho, protože pojem ryze imaginárního čísla nemá žádnou zásadní důležitost.

Tak jako u reálných čísel, máme i u komplexních čísel dva *základní početní výkony*: sčítání a násobení. Podle staré tradice je zvykem mluvit o čtyřech základních početních výkonech: sčítání, odčítání, násobení a dělení. Toto stanovisko, stále ještě velmi účelné pro národní školu, málo vyhovuje dnešnímu stavu algebry jakožto vědy, ježto odčítání je definovatelné pomocí sčítání, dělení je definovatelné pomocí násobení, a je trochu archaické počítat odčítání a dělení mezi *základní* početní výkony.

Připomeňme si formální definice sčítání a násobení. Jsou-li

$$\alpha = (a_1, a_2); \qquad \beta = (b_1, b_2)$$

dvě komplexní čísla, je jejich *součtem* komplexní číslo

(88.1) $$\alpha + \beta = (a_1 + b_1, a_2 + b_2),$$

jejich součinem pak je komplexní číslo

(88.2) $$\alpha\beta = (a_1 b_1 - a_2 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1).$$

Uvědomme si, že jestliže α, β jsou reálná čísla, t. j. jestliže $a_2 = 0$, $b_2 = 0$, je součet $\alpha + \beta$ nově definovaný nalevo v (88.1) totožný se součtem napravo známým z theorie reálných čísel a že stejná situace je i se součinem $\alpha\beta$ v (88.2) v případě, že obě čísla α, β jsou reálná.

Základní vlastnosti sčítání a násobení komplexních čísel se dají shrnout v následující pravidla:

Sčítání komplexních čísel je výkon *asociativní*, t. j.

(88.3) $$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$$

a výkon *komutativní*, t. j.

(88.4) $$\alpha + \beta = \beta + \alpha.$$

Rovněž tak i násobení komplexních čísel je výkon *asociativní*, t. j.

(88.5) $$(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$$

a výkon *komutativní*, t. j.

$$\alpha\beta = \beta\alpha \,. \tag{88.6}$$

Dále je reálné číslo $0 = (0\,,\,0)$ *neutrálním při sčítání*, t. j.

$$\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha \,; \tag{88.7}$$

podobně je reálné číslo $1 = (1\,,\,0)$ *neutrálním při násobení*, t. j.

$$\alpha 1 = 1\alpha = \alpha \,. \tag{88.8.}$$

Další vlastnost sčítání je, že ke každému komplexnímu číslu $\alpha = (a_1\,,\,a_2)$ máme právě jedno *opačné číslo* $-\alpha$ charakterisované tím, že

$$\alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = 0\,,$$

totiž číslo $-\alpha = (-a_1\,,\,-a_2)$. Příslušná vlastnost násobení je, že ke každému komplexnímu číslu $\alpha = (a_1\,,\,a_2)$ s jedinou výjimkou čísla 0 máme právě jedno *převrácené číslo* α^{-1} charakterisované tím, že

$$\alpha\,.\,\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\,.\,\alpha = 1\,,$$

totiž číslo

$$\alpha^{-1} = \left(\frac{a_1}{a_1^2 + a_2^2}\,,\; -\frac{a_2}{a_1^2 + a_2^2}\right).$$

Dosud připomenuté vlastnosti se týkaly zvlášť sčítání a zvlášť násobení. T. zv. *distributivní* zákon praví, že

$$(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma \tag{88.9}$$

jakož i že

$$\gamma(\alpha + \beta) = \gamma\alpha + \gamma\beta\,; \tag{88.9'}$$

oba tvary (88.9) a (88.9′) distributivního zákona jsou ovšem navzájem ekvivalentní v důsledku (88.6).

Právě vyjmenované vlastnosti sčítání a násobení komplexních čísel se v algebře vyjadřují tím, že souhrn všech komplexních čísel tvoří *těleso*. Rovněž tak souhrn všech reálných čísel tvoří těleso.

U tělesa reálných čísel máme přirozené uspořádání definované vztahem „menší než“ $(a < b)$. Tento vztah má, jak známo, následující dvě vlastnosti:

1. *Zákon monotonie sčítání.* Jsou-li $a\,,\,b\,,\,c$ reálná čísla a je-li $a < b$, je také $a + c < b + c$.

2. *Zákon monotonie násobení.* Jsou-li a, b, c reálná čísla a je-li $a < b$, $c > 0$, je také $ac < bc$.

Vzhledem k těmto dvěma vlastnostem se v algebře říká, že reálná čísla tvoří *uspořádané těleso.* Naproti tomu komplexní čísla netvoří uspořádané těleso. Nicméně důležitý pojem *absolutní velikosti* (nebo absolutní hodnoty) se dá rozšířit i na čísla komplexní. Absolutní velikostí komplexního čísla $\alpha = (a_1, a_2)$ rozumíme reálné číslo $\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, které značíme $|\alpha|$. Je-li $a_2 = 0$, t. j. je-li α reálné, je ovšem $|\alpha| = a_1$ pro $a_1 \geqq 0$, $|\alpha| = -a_1$ pro $a_1 < 0$.

Základní vlastnosti absolutní velikosti jsou, jak známo, tyto:

1. $|0| = 0$, ale pro $\alpha \neq 0$ je $|\alpha| > 0$.
2. $|\alpha + \beta| \leqq |\alpha| + |\beta|$.
3. $|\alpha\beta| = |\alpha| . |\beta|$.

Velkou důležitost má pojem *komplexně sdruženého čísla* ke komplexnímu číslu $\alpha = (a_1, a_2)$, které označíme α^*. Jak známo, je $\alpha^* = (a_1, -a_2)$, takže:

$$\alpha = \alpha^*, \textit{ právě když } \alpha \textit{ je reálné.}$$

Základní vlastnosti tohoto pojmu jsou, jak známo:

$$(\alpha + \beta)^* = \alpha^* + \beta^*, \tag{88.10}$$

$$(\alpha\beta)^* = \alpha^*\beta^*, \tag{88.11}$$

$$(\alpha^*)^* = \alpha . \tag{88.12}$$

Vlastnosti (88.10) a (88.11) je v algebře zvykem vyjadřovat tak, že pravíme, že přechod od komplexního čísla α ke komplexně sdruženému číslu α^* je *automorfismus* tělesa komplexních čísel. Důsledkem rovnic (88.10) a (88.11) jsou rovnice

$$(-\alpha)^* = -(\alpha^*), \tag{88.13}$$

$$(\alpha^{-1})^* = (\alpha^*)^{-1}, \tag{88.14}$$

kde v (88.14) ovšem $\alpha \neq 0$.

Zbývá přejít k obvyklému způsobu psaní komplexních čísel. Je zvykem psát

$$(0, 1) = \mathrm{i}, \tag{88.15}$$

takže podle (88.2) je $\mathrm{i}^2 = -1$. V důsledku (88.1), (88.2) a (88.15) můžeme komplexní číslo $\alpha = (a_1, a_2)$ psát v obvyklém tvaru $a_1 + a_2\mathrm{i}$.

89. KOMPLEXNÍ VEKTORY. Budiž nyní dán vektorový prostor $\mathbf{V}$ ve smyslu článku 10; jeho vektory, které budeme jako dosud značit $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ a pod., nazveme *reálné vektory* a zavedeme nový pojem *komplexního vektoru* (který při výkladě základních definic pro jasnost vyznačíme vodorovným pruhem nahoře) takto. Komplexní vektor $\bar{\mathbf{u}}$ je uspořádaná dvojice $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ reálných vektorů, z nichž prvý $\mathbf{u}_1$ se jmenuje *reálná část*, druhý $\mathbf{u}_2$ *imaginární část* komplexního vektoru $\bar{\mathbf{u}}$; označení:

$$\mathbf{u}_1 = \mathrm{Re}.\bar{\mathbf{u}}\,; \qquad \mathbf{u}_2 = \mathrm{Im}.\bar{\mathbf{u}}\,.$$

Při tom se činí dohoda, že komplexní vektor $(\mathbf{u}_1, \mathbf{o})$, jehož imaginární částí je nulový vektor, se ztotožňuje s reálným vektorem $\mathbf{u}_1$. Naproti tomu komplexní vektor $\bar{\mathbf{u}} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$, jehož imaginární část $\mathbf{u}_2$ je nenulový vektor, se jmenuje *imaginární vektor*. Tedy množina všech komplexních vektorů, kterou označíme $\mathbf{V}(\mathrm{i})$, se rozpadá na množinu všech reálných vektorů a na množinu všech imaginárních vektorů.

Jsou-li

$$\bar{\mathbf{u}} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)\,, \qquad \bar{\mathbf{v}} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$$

dva komplexní vektory, nazveme jejich *součtem* a označíme $\bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{v}}$ komplexní vektor

$$\bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{v}} = (\mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2 + \mathbf{v}_2)\,. \tag{89.1}$$

Jestliže $\bar{\mathbf{u}}$, $\bar{\mathbf{v}}$ jsou reálné vektory, t. j. jestliže $\mathbf{u}_2 = \mathbf{o}$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{o}$, je součet $\bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{v}}$ nově definovaný nalevo v (89.1) totožný se součtem ve smyslu sčítání v prostoru $\mathbf{V}$.

Je-li $\bar{\mathbf{u}} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ komplexní vektor a je-li $\alpha = (a_1, a_2)$ komplexní číslo, nazveme jejich *součinem* a označíme $\alpha\bar{\mathbf{u}}$ nebo $\alpha\,.\,\bar{\mathbf{u}}$ komplexní vektor

$$\alpha\bar{\mathbf{u}} = (a_1\mathbf{u}_1 - a_2\mathbf{u}_2, a_1\mathbf{u}_2 + a_2\mathbf{u}_1)\,. \tag{89.2}$$

Je-li $\bar{\mathbf{u}}$ reálný vektor a je-li α reálné číslo, t. j. je-li $\mathbf{u}_2 = \mathbf{o}$, $a_2 = 0$, je součin $\alpha\mathbf{u}$ nově definovaný nalevo v (89.2) totožný se součinem původně definovaným ve $\mathbf{V}$.

V důsledku (89.1), (89.2) a (88.15) můžeme komplexní vektor $\bar{\mathbf{u}} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ psát v obvyklém tvaru $\mathbf{u}_1 + \mathrm{i}\mathbf{u}_2$, neboť $\mathbf{u}_1 = (\mathbf{u}_1, \mathbf{o})$, $\mathbf{u}_2 = (\mathbf{u}_2, \mathbf{o})$.

Ke komplexnímu vektoru $\bar{\mathbf{u}} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ neboli $\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u}_1 + \mathrm{i}\mathbf{u}_2$ je *komplexně sdruženým* komplexní vektor $(\mathbf{u}_1, -\mathbf{u}_2)$ neboli $\mathbf{u}_1 - i\mathbf{u}_2$, který označíme $\bar{\mathbf{u}}^*$. Je $\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}}^*$, *právě když $\bar{\mathbf{u}}$ je reálný vektor.* Mimo to

$$(\bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{v}})^* = \bar{\mathbf{u}}^* + \bar{\mathbf{v}}^*, \tag{89.3}$$

$$(\alpha\bar{\mathbf{u}})^* = \alpha^* . \bar{\mathbf{u}}^*, \tag{89.4}$$

$$(\bar{\mathbf{u}}^*)^* = \bar{\mathbf{u}} . \tag{89.5}$$

Jsou-li $\bar{\mathbf{u}}$, $\bar{\mathbf{v}}$, $\bar{\mathbf{w}}$ komplexní vektory a jsou-li α, β komplexní čísla, potom podle předcházejících definic je:

$$\bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{v}} + \bar{\mathbf{u}} ; \tag{89.6}$$

$$(\bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{v}}) + \bar{\mathbf{w}} = \bar{\mathbf{u}} + (\bar{\mathbf{v}} + \bar{\mathbf{w}}) ; \tag{89.7}$$

$$0 . \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{o} ; \tag{89.8}$$

$$\alpha(\bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{v}}) = \alpha\bar{\mathbf{u}} + \alpha\bar{\mathbf{v}} ; \tag{89.9}$$

$$(\alpha + \beta)\bar{\mathbf{u}} = \alpha\bar{\mathbf{u}} + \beta\bar{\mathbf{u}} ; \tag{89.10}$$

$$\alpha(\beta\bar{\mathbf{u}}) = (\alpha\beta)\bar{\mathbf{u}} ; \tag{89.11}$$

$$1 . \bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}} . \tag{89.12}$$

Vlastnosti (89.6) až (89.12) se liší od vlastností (10.1) až (10.7) pouze tím, že místo *reálných* čísel a, b máme nyní *komplexní* čísla α, β.

V článku 10 jsme nazvali vektorovým prostorem množinu jakýchkoli matematických objektů (zvaných vektory), je-li definováno sčítání vektorů (součet je vektor) a násobení reálného čísla s vektorem (součin je vektor) tak, že platí pravidla (10.1) až (10.7); místo názvu vektorový prostor užijme nyní určitějšího názvu *vektorový prostor nad* $\mathfrak{R}$, kde $\mathfrak{R}$, jak jsme se dohodli na str. 74, znamená množinu všech reálných čísel. Budeme mluvit o *vektorovém prostoru nad* $\mathfrak{R}(i)$ v případě, že vedle sčítání vektorů je definováno násobení komplexního čísla vektorem (součin je zase vektor) tak, že platí pravidla (10.1) až (10.7), při čemž však nyní písmena a, b v (10.4) až (10.6) znamenají komplexní čísla. Ježto reálná čísla jsou zvláštním případem komplexních čísel, je patrné, že *každý vektorový prostor nad* $\mathfrak{R}(i)$ *je zároveň též vektorovým prostorem nad* $\mathfrak{R}$.

Z předcházejícího je patrné, že je-li $\mathbf{V}$ libovolný vektorový prostor nad $\mathfrak{R}$ (jehož prvky jsme nazvali reálnými vektory), potom množina $\mathbf{V}(i)$ komplexních vektorů (které jsme definovali jako dvojice reálných vektorů) tvoří vektorový prostor nad $\mathfrak{R}(i)$. Pravíme, že $\boldsymbol{V}(i)$ je *komplexní rozšíření* prostoru $\boldsymbol{V}$.

O vektorových prostorech nad $\mathfrak{R}$ jsme v prvém svazku odvodili řadu vět, z nichž většina se opírá pouze o to, že $\mathfrak{R}$ je těleso, takže zůstává v platnosti (při záměně reálných čísel komplexními) i pro vektorové prostory nad $\mathfrak{R}(i)$. Je především zcela jasné, že (10.8) až (10.18) platí i pro vektorové prostory nad $\mathfrak{R}(i)$, jestliže a, b, $a_1, \ldots, a_k$ jsou čísla komplexní.

Je-li $\boldsymbol{V}$ vektorový prostor nad $\mathfrak{R}$, definovali jsme v článku 11 pojem lineární soustavy $\boldsymbol{W}$ obsažené ve $\boldsymbol{V}$, kterou můžeme nazvat určitěji *lineární soustavou nad* $\mathfrak{R}$. Je-li $\boldsymbol{V}$ vektorový prostor nad $\mathfrak{R}(i)$, máme vedle tohoto pojmu ještě další pojem *lineární soustavy nad* $\mathfrak{R}(i)$ charakterisované opět vlastnostmi (a) a (b) ze str. 31 prvého svazku s tím rozdílem, že v (b) znamená x libovolné *komplexní* číslo. Zcela stejně je tomu i s dalšími pojmy zavedenými v článku 11; mluvme nyní určitěji o *lineárních kombinacích nad* $\mathfrak{R}$ a o *lineární závislosti nad* $\mathfrak{R}$; je zřejmé, co je rozumět pod *lineárními kombinacemi nad* $\mathfrak{R}(i)$ a pod *lineární závislostí nad* $\mathfrak{R}(i)$. I pro tyto nové pojmy platí věty 11.1 až 11.5. Jako v článku 11 budiž

(89.13) $$\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k\}$$

množina všech lineárních kombinací nad $\mathfrak{R}$ vektorů

(89.14) $$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k,$$

kdežto množinu všech lineárních kombinací nad $\mathfrak{R}(i)$ týchž vektorů (89.14) označíme

(89.15) $$\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k\}_i .$$

Jsou-li (89.14) reálné vektory a znamená-li $\boldsymbol{W}$ lineární soustavu nad $\mathfrak{R}$ (89.13), potom zřejmě (89.15) je její komplexní rozšíření $\boldsymbol{W}(i)$.

Jestliže vektory (89.14) jsou lineárně nezávislé nad $\mathfrak{R}(i)$, jsou zřejmě též lineárně nezávislé nad $\mathfrak{R}$. Opak neplatí, neboť je-li $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{o}$, dokáže se snadno, že vektory $\boldsymbol{u}$, $i\boldsymbol{u}$ jsou lineárně nezávislé nad $\mathfrak{R}$, avšak lineárně závislé nad $\mathfrak{R}(i)$. Jestliže však (89.14) jsou reálné vektory, které jsou lineárně nezávislé nad $\mathfrak{R}$, potom (89.14) jsou také lineárně nezávislé nad $\mathfrak{R}(i)$. Neboť je-li

$$(a_1 + ib_1)\boldsymbol{u}_1 + \ldots + (a_k + ib_k)\boldsymbol{u}_k = \boldsymbol{o},$$

dostaneme porovnáním reálných a imaginárních částí

$$a_1 \boldsymbol{u}_1 + \ldots + a_k \boldsymbol{u}_k = \boldsymbol{o} \, ; \qquad b_1 \boldsymbol{u}_1 + \ldots + b_k \boldsymbol{u}_k = \boldsymbol{o} \, .$$

Je tudíž $a_1 = \ldots = a_k = 0$, $b_1 = \ldots = b_k = 0$ a tedy též $a_1 + ib_1 = \ldots = a_k + ib_k = 0$.

Čtenář sám už si podrobně promyslí podobné změny definic a vět z článků 12 až 14. U lineární soustavy $\boldsymbol{W}$ nad $\mathfrak{R}(\mathrm{i})$ musíme rozlišovat mezi basí nad $\mathfrak{R}$ a basí nad $\mathfrak{R}(\mathrm{i})$; je-li (89.14) base nad $\mathfrak{R}(\mathrm{i})$ pro $\boldsymbol{W}$, potom

$$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k, \qquad \mathrm{i}\boldsymbol{u}_1, \ldots, \mathrm{i}\boldsymbol{u}_k$$

je base nad $\mathfrak{R}$. Jestliže tedy $\boldsymbol{W}$ má dimensi nad $\mathfrak{R}(\mathrm{i})$ rovnou m, potom $\boldsymbol{W}$ má dimensi nad $\mathfrak{R}$ rovnou $2m$.

Je-li $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ base (nad $\mathfrak{R}$) lineární soustavy $\boldsymbol{V}$ nad $\mathfrak{R}$, je zároveň $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ base nad $\mathfrak{R}(\mathrm{i})$ lineární soustavy $\boldsymbol{V}(\mathrm{i})$ nad $\mathfrak{R}(\mathrm{i})$, takže dimense $\boldsymbol{V}$ nad $\mathfrak{R}$ je rovna dimensi $\boldsymbol{V}(\mathrm{i})$ nad $\mathfrak{R}(\mathrm{i})$.

Pokud se týče pojmu isomorfismu, poznamenejme toto: Jsou-li $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{V}'$ vektorové prostory nad $\mathfrak{R}(\mathrm{i})$, potom isomorfismus mezi $\boldsymbol{V}$ a $\boldsymbol{V}'$ nad $\mathfrak{R}(\mathrm{i})$ je zároveň isomorfismem nad $\mathfrak{R}$; opak ovšem neplatí. Jsou-li však $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{V}'$ isomorfní vektorové prostory nad $\mathfrak{R}$ a je-li dán určitý isomorfismus f nad $\mathfrak{R}$ mezi $\boldsymbol{V}$ a $\boldsymbol{V}'$, lze f rozšířit, a to právě jedním způsobem, v isomorfismus φ nad $\mathfrak{R}(\mathrm{i})$ mezi $\boldsymbol{V}(\mathrm{i})$ a $\boldsymbol{V}'(\mathrm{i})$. Takový isomorfismus φ nad $\mathfrak{R}(\mathrm{i})$ mezi $\boldsymbol{V}(\mathrm{i})$ a $\boldsymbol{V}'(\mathrm{i})$, při kterém $\boldsymbol{V}$ přejde ve $\boldsymbol{V}'$, nazveme *reálným isomorfismem* mezi $\boldsymbol{V}(\mathrm{i})$ a $\boldsymbol{V}'(\mathrm{i})$. Pro každý komplexní vektor $\boldsymbol{u}$ je potom zřejmě

$$\varphi(\boldsymbol{u}^*) = [\varphi(\boldsymbol{u})]^*,$$

kde * znamená komplexně sdružený vektor.

Vzpomeňme ještě pojmu dvojice duálně sdružených vektorových prostorů $\boldsymbol{V}$, $\tilde{\boldsymbol{V}}$ zavedeného v článku 49[1]) pomocí vlastností (49.1) až (49.6), při čemž a ve (49.3) a (49.4) znamená libovolné reálné číslo. To byla *duální sdruženost nad* $\mathfrak{R}$. Jestliže $\boldsymbol{V}$, $\tilde{\boldsymbol{V}}$ jsou vektorové prostory nad $\mathfrak{R}(\mathrm{i})$, definujeme jejich *duální sdruženost nad* $\mathfrak{R}(\mathrm{i})$ docela stejně až na to, že nyní a znamená libovolné komplexní číslo. Věty 49.1 až 49.6 se týkaly duální sdruženosti nad $\mathfrak{R}$; stejně znějící věty platí také nad $\mathfrak{R}(\mathrm{i})$.

---

[1]) Stejně jako v článku 74 a v řadě dalších článků užijeme i zde vlnitého pruhu místo vodorovného pruhu, kterého jsme užili v článku 49.

Buďtež $\mathbf{V}$, $\tilde{\mathbf{V}}$ dva vektorové prostory nad $\Re$, duálně sdružené nad $\Re$ pomocí relace $d(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}})$. Zřejmě lze relaci d právě jedním způsobem rozšířit v duální sdruženost nad $\Re(\mathrm{i})$ mezi $\mathbf{V}(\mathrm{i})$ a $\tilde{\mathbf{V}}(\mathrm{i})$: stačí položit

$$d(\mathbf{u}_1 + \mathrm{i}\mathbf{u}_2, \tilde{\mathbf{u}}_1 + \mathrm{i}\tilde{\mathbf{u}}_2) =$$
$$= d(\mathbf{u}_1, \tilde{\mathbf{u}}_1) - d(\mathbf{u}_2, \tilde{\mathbf{u}}_2) + \mathrm{i}[d(\mathbf{u}_1, \tilde{\mathbf{u}}_2) + d(\mathbf{u}_2, \tilde{\mathbf{u}}_1)].$$

Pro takto vzniklou duální sdruženost nad $\Re(\mathrm{i})$ máme zřejmě

(89.16) $$d(\mathbf{u}^*, \tilde{\mathbf{u}}^*) = [d(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}})]^*.$$

Dále platí v tomto případě: Je-li $\mathbf{W}$ *lineární soustava nad* $\Re$ *obsažená ve* $\mathbf{V}$ *a je-li* $\tilde{\mathbf{W}}$ *její duální obraz nad* $\Re$ *ve* $\tilde{\mathbf{V}}$, *potom duální soustava* $\mathbf{W}(\mathrm{i})$ nad $\Re(\mathrm{i})$ *obsažená ve* $\mathbf{V}(\mathrm{i})$ má $\tilde{\mathbf{W}}(\mathrm{i})$ za duální obraz nad $\Re(\mathrm{i})$ ve $\tilde{\mathbf{V}}(\mathrm{i})$.

90. KOMPLEXNÍ BODY. Budiž dán eukleidovský prostor $\mathbf{E}_m$ dimense m, který nazveme určitěji *eukleidovský prostor nad* $\Re$; jeho body nazveme *reálné body*. Budiž $\mathbf{V}_m$ zaměření prostoru $\mathbf{E}_m$, t. j. množina všech vektorů prostoru $\mathbf{E}_m$, které budeme nazývat *reálnými vektory*. Komplexní vektor je potom podle článku 89 dvojice $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ reálných vektorů, při čemž dvojici $(\mathbf{u}_1, \mathbf{o})$ považujeme za totožnou s reálným vektorem $\mathbf{u}_1$.

Zavedeme nyní pojem *komplexního bodu* takto. Komplexní bod je uspořádaná dvojice $(A, \mathbf{u})$ složená z reálného bodu A a z reálného vektoru $\mathbf{u}$. Je-li $\mathbf{u} = \mathbf{o}$, považujeme komplexní bod $(A, \mathbf{u})$ za totožný s reálným bodem A. Je-li však $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$, máme *imaginární bod* $(A, \mathbf{u})$, který není totožný s žádným reálným bodem. Množinu všech komplexních bodů označíme $\mathbf{E}_m(\mathrm{i})$ a nazveme ji *komplexním rozšířením* prostoru $\mathbf{E}_m$; pravíme, že $\mathbf{E}_m(\mathrm{i})$ je eukleidovský prostor nad $\Re(\mathrm{i})$. Prostor $\mathbf{E}_m(\mathrm{i})$ obsahuje jednak reálné body, které tvoří reálný prostor $\mathbf{E}_m$, jednak imaginární body. Stejně jako u čísel a u vektorů v naší terminologii i u bodů název komplexní je shrnutím obou názvů: reálný a imaginární.

Reálný bod A nazveme *reálnou částí* a reálný vektor $\mathbf{u}$ *imaginární částí* komplexního bodu $(A, \mathbf{u})$; označení:

$$A = \mathrm{Re.}(A, \mathbf{u}) ; \qquad \mathbf{u} = \mathrm{Im.}(A, \mathbf{u}).$$

Tedy imaginární část komplexního bodu není bod, nýbrž vektor.

Jsou-li $(A, \mathbf{u})$; $(B, \mathbf{v})$ dva komplexní body, nazveme jejich *rozdílem* a označíme

(90.1) $$(B, \mathbf{v}) - (A, \mathbf{u})$$

komplexní vektor

(90.2) $$(B - A, \mathbf{v} - \mathbf{u}).$$

Jsou-li dané body reálné, t. j. je-li $\mathbf{u} = \mathbf{o}$, $\mathbf{v} = \mathbf{o}$, jsou komplexní body $(A, \mathbf{u})$, $(B, \mathbf{v})$ podle dohody učiněné v tomto článku totožné s reálnými body A, B; to je v souhlase s tím, že ježto nyní $\mathbf{v} - \mathbf{u} = \mathbf{o}$, podle dohody učiněné v článku 89 komplexní vektor (90.2) je v uvažovaném případě totožný s reálným vektorem $B - A$.

Součtem komplexního bodu $(A, \mathbf{u})$ a komplexního vektoru $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ nazveme komplexní bod

(90.3) $$(A + \mathbf{w}_1, \mathbf{u} + \mathbf{w}_2).$$

Je-li bod $(A, \mathbf{u})$ reálný a je-li také vektor $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ reálný, t. j. je-li $\mathbf{u} = \mathbf{o}$, $\mathbf{w}_2 = \mathbf{o}$, potom podle učiněných dohod je bod $(A, \mathbf{u})$ totožný s reálným bodem A, vektor $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ totožný s reálným vektorem $\mathbf{w}_1$ v souhlase s tím, že ježto $\mathbf{u} + \mathbf{w}_2 = \mathbf{o}$, je v uvažovaném případě součet (90.3) totožný s dříve definovaným součtem $A + \mathbf{w}_1$.

Z právě vyslovených definic plyne, že jsou-li $(A, \mathbf{u})$, $(B, \mathbf{v})$ komplexní body a je-li $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ komplexní vektor, potom rovnice

(90.4) $$(B, \mathbf{v}) - (A, \mathbf{u}) = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$$

znamená totéž jako rovnice

(90.5) $$(A, \mathbf{u}) + (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = (B, \mathbf{v}).$$

Zobecněme na komplexní body pojem *středu dvojice bodů,* zavedený pro reálné body už v článku 4. Jsou-li $(A, \mathbf{u})$, $(B, \mathbf{v})$ libovolné dva komplexní body, nazveme středem dvojice $(A, \mathbf{u})$; $(B, \mathbf{v})$ komplexní bod

$$[\tfrac{1}{2}(A + B), \tfrac{1}{2}(\mathbf{u} + \mathbf{v})],$$

což v případě reálných bodů, t. j. pro $\mathbf{u} = \mathbf{o}$, $\mathbf{v} = \mathbf{o}$ je v souhlase s definicí článku 4. Dále přeneseme na komplexní případ pojem *umístění vektoru,* zavedený pro reálný případ v článku 5. O uspořádané dvojici komplexních bodů

(90.6) $$(A, \mathbf{u}); \quad (B, \mathbf{v})$$

pravíme, že *určuje* komplexní vektor (90.4); také pravíme, že dvojice (90.6) je *umístěním* tohoto vektoru; bod $(A, \mathbf{u})$ se jmenuje *počáteční bod*, $(B, \mathbf{v})$ *koncový bod* tohoto umístění. Libovolně daný komplexní vektor $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ má právě jedno umístění, při kterém libovolně daný komplexní bod $(A, \mathbf{u})$ je počátečním bodem; koncový bod tohoto umístění je (90.5). Jako v reálném případě platí, že dvojice komplexních bodů (90.6) určuje týž komplexní vektor jako dvojice

$$(A', \mathbf{u}')\,; \qquad (B', \mathbf{v}')\,,$$

právě když dvojice

$$(A, \mathbf{u})\,; \qquad (B', \mathbf{v}')$$

má týž střed jako dvojice

$$(A', \mathbf{u}')\,; \qquad (B, \mathbf{v})\,.$$

Ke komplexnímu bodu $(A, \mathbf{u})$ *komplexně sdruženým bodem* je bod $(A, -\mathbf{u})$, který označíme $(A, \mathbf{u})^*$. Je

$$(A, \mathbf{u}) = (A, \mathbf{u})^*,$$

právě když $\mathbf{u} = \mathbf{o}$, t. j. právě když $(A, \mathbf{u})$ je reálný bod. Vždy je

$$(A, \mathbf{u})^{**} = (A, \mathbf{u})\,.$$

K rozdílu (90.4) dvou komplexních bodů $(A, \mathbf{u})\,; (B, \mathbf{v})$ je komplexně sdružený rozdíl

$$(A, \mathbf{u})^* - (B, \mathbf{v})^*.$$

K součtu (90.5) komplexního bodu $(A, \mathbf{u})$ a komplexního vektoru $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ je komplexně sdružený součet

$$(A, \mathbf{u})^* + (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)^*.$$

Ke středu dvojice komplexních bodů $(A, \mathbf{u})\,; (B, \mathbf{v})$ je komplexně sdružený střed dvojice $(A, \mathbf{u})^*; (B, \mathbf{v})^*$.

Zbývá provést přechod k obvyklému tvaru zápisu komplexního bodu. Podle definice součtu komplexního bodu s komplexním vektorem je

$$(A, \mathbf{u}) = (A, \mathbf{o}) + (\mathbf{o}, \mathbf{u})\,,$$

avšak podle předcházejícího je $(A, \mathbf{o}) = A\,; (\mathbf{o}, \mathbf{u}) = \mathrm{i}\mathbf{u}$. Tedy

$$(A, \mathbf{u}) = A + \mathrm{i}\mathbf{u}\,. \tag{90.7}$$

Definice součtu komplexního bodu s komplexním vektorem a definice rozdílu dvou komplexních bodů mají v obvyklém označení tvar:

$$(90.8)\quad (A + i\mathbf{u}) + (\mathbf{w}_1 + i\mathbf{w}_2) = (A + \mathbf{w}_1) + i(\mathbf{u} + \mathbf{w}_2)\,,$$

$$(90.9)\quad (B + i\mathbf{v}) - (A + i\mathbf{u}) = (B - A) + i(\mathbf{v} - \mathbf{u})\,.$$

Dosavadní definice podávají exaktní základ k přenesení *affiní geometrie* eukleidovského prostoru z reálného případu, podrobně studovaného v prvém svazku, na příklad komplexní. Důkazy v komplexním případě jsou skoro doslova stejné jako v reálném případě, takže stačí jenom stručně shrnout hlavní výsledky, což bude provedeno v následujícím článku. K přenesení *metrické geometrie* eukleidovského prostoru na komplexní případ je třeba především definovat v komplexním oboru pojem skalárního součinu. To odložíme až do kapitoly XIII.

V tomto článku si ještě přeneseme na komplexní případ pojem *lineární soustavy souřadnic*; ježto metrické úvahy zatím odkládáme, nebudeme si na tomto místě všímat kartézské soustavy. Víme z článku 16, že lineární soustava souřadnic

$$(90.10)\qquad \langle P; \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m \rangle$$

v prostoru $\mathbf{E}_m$ je dána, zvolíme-li libovolně v prostoru $\mathbf{E}_m$ jednak bod P, zvaný *počátkem* soustavy, jednak *basi* $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$ prostoru $\mathbf{E}_m$, t. j. basi pro zaměření $\mathbf{V}_m$ prostoru $\mathbf{E}_m$. Víme, že každý vektor $\mathbf{u}$ prostoru $\mathbf{E}_m$ lze právě jedním způsobem psát ve tvaru

$$(90.11)\qquad \mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + \dots + u_m\mathbf{e}_m\,;$$

reálná čísla $u_1, \dots, u_m$ jsou souřadnicemi vektoru $\mathbf{u}$ a píšeme

$$(90.12)\qquad \mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m)\,.$$

Podobně každý bod X prostoru $\mathbf{E}_m$ lze psát právě jedním způsobem ve tvaru

$$(90.13)\qquad X = P + x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_m\mathbf{e}_m\,;$$

reálná čísla $x_1, \dots, x_m$ jsou souřadnicemi bodu X a píšeme

$$(90.14)\qquad X = [x_1, \dots, x_m]\,.$$

Zřejmě však obecněji každý komplexní vektor $\mathbf{u}$ lze psát právě jedním způsobem ve tvaru (90.11) a každý komplexní bod X ve tvaru (90.13), při čemž ovšem koeficienty $u_1, \dots, u_m$ v (90.11) a koeficienty $x_1, \dots$ $\dots, x_m$ v (90.13) budou komplexní čísla; rozšíříme proto označení (90.12) a (90.14) i na komplexní případ. Základní početní výkony s vektory a body jsou vyjádřeny formulemi

$$\begin{aligned} &(u_1, \bullet) + (v_1, \bullet) = (u_1 + v_1, \bullet), \\ &a \,.\, (u_1, \bullet) = (au_1, \bullet), \\ &[x_1, \bullet] + (u_1, \bullet) = [x_1 + u_1, \bullet] \\ &[y_1, \bullet] - [x_1, \bullet] = (y_1 - x_1, \bullet). \end{aligned}$$

Uveďme ještě, že střed dvojice bodů $[x_1, \bullet]$; $[y_1, \bullet]$ je dán výrazem $[\frac{1}{2}(x_1 + y_1), \bullet]$.

Všecky tyto formule zůstávají správné i v komplexním případě. K nim přistupují ještě formule

$$\begin{aligned} (u_1, \bullet)^* &= (u_1^*, \bullet), \\ [x_1, \bullet]^* &= (x_1^*, \bullet], \end{aligned}$$

vyjadřující přechod ke komplexně sdruženým elementům.

91. LINEÁRNÍ PODPROSTORY PROSTORU $\mathbf{E}_m(\mathrm{i})$. Budiž dán m-rozměrný eukleidovský prostor $\mathbf{E}_m$ nad $\mathfrak{R}$. V článku 18 jsme zkoumali, které k-rozměrné eukleidovské prostory $\mathbf{E}_k$ nad $\mathfrak{R}$ jsou vnořeny do $\mathbf{E}_m$, t. j. jsou obsaženy v $\mathbf{E}_m$ jako část, při čemž vzdálenost kterýchkoli dvou bodů prostoru $\mathbf{E}_k$ v tomto prostoru je rovna vzdálenosti týchž dvou bodů, počítané v prostoru $\mathbf{E}_m$. Poznali jsme především, že musí být $k \leqq m$, při čemž pro $k = m$ máme pouze tu možnost, že $\mathbf{E}_k$ splyne s celým $\mathbf{E}_m$.

Eukleidovské prostory $\mathbf{E}_k$ vnořené do $\mathbf{E}_m$ jsme také nazvali lineárními podprostory prostoru $\mathbf{E}_m$. Na citovaném místě jsme poznali, že je-li $\mathbf{E}_k$ vnořen do $\mathbf{E}_m$, potom zaměření prostoru $\mathbf{E}_k$, t. j. množina všech vektorů ležících v $\mathbf{E}_k$, tvoří k-směr $\mathbf{V}_k$, t. j. lineární soustavu dimense k obsaženou v zaměření $\mathbf{V}_m$ prostoru $\mathbf{E}_m$. Obráceně, je-li dán v prostoru $\mathbf{E}_m$ libovolný bod A a libovolný k-směr $\mathbf{V}_k$, potom bodem A prochází právě jeden $\mathbf{E}_k$ se zaměřením $\mathbf{V}_k$, který jsme označili

$$\mathbf{E}_k = \{A; \mathbf{V}_k\} \tag{91.1}$$

nebo

$$\mathbf{E}_k = \{A\,;\, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}, \tag{91.2}$$

je-li $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ kterákoli base k-směru $\mathbf{V}_k$.

Budiž nyní $\mathbf{E}_m(\mathrm{i})$ komplexní rozšíření prostoru $\mathbf{E}_m$, $\mathbf{E}_k(\mathrm{i})$ komplexní rozšíření prostoru $\mathbf{E}_k$. Platí-li (91.2), potom zřejmě $\mathbf{E}_k(\mathrm{i})$ je množina všech bodů tvaru

$$A + x_1\mathbf{u}_1 + \ldots + x_k\mathbf{u}_k \,, \tag{91.3}$$

kde $x_1 , \ldots , x_k$ jsou libovolná komplexní čísla. Platí-li (91.1) nebo (91.2), pišme

$$\mathbf{E}_k(\mathrm{i}) = \{A \,;\, \mathbf{V}_k(\mathrm{i})\}_1 \,,$$
$$\mathbf{E}_k(\mathrm{i}) = \{A \,;\, \mathbf{u}_1 , \ldots , \mathbf{u}_k\}_1 \,.$$

Pravíme, že $\mathbf{E}_k(\mathrm{i})$ je *reálný lineární podprostor dimense k* prostoru $\mathbf{E}_m(\mathrm{i})$. Takový reálný lineární podprostor eukleidovského prostoru $\mathbf{E}_m(\mathrm{i})$ nad $\mathfrak{R}(\mathrm{i})$ se tedy skládá jednak z reálných bodů, které tvoří lineární podprostor $\mathbf{E}_k$ téže dimense k prostoru $\mathbf{E}_m$, jednak z dalších imaginárních bodů.

Obecněji nazveme *lineárním podprostorem* dimense k prostoru $\mathbf{E}_m(\mathrm{i})$ množinu, kterou označíme

$$\{A \,;\, \mathbf{W}_k\}_1 \,. \tag{91.4}$$

Při tom je A libovolně zvolený (reálný nebo imaginární) bod prostoru $\mathbf{E}_m(\mathrm{i})$, $\mathbf{W}_k$ je libovolná lineární soustava dimense k nad $\mathfrak{R}(\mathrm{i})$ obsažená ve $\mathbf{V}_m(\mathrm{i})$, při čemž se může, ale nemusí stát, že existuje lineární soustava $\mathbf{V}_k$ nad $\mathfrak{R}$ obsažená ve $\mathbf{V}_m$, pro kterou $\mathbf{W}_k = \mathbf{V}_k(\mathrm{i})$. Množina (91.4) se skládá ze všech komplexních bodů tvaru $A + \mathbf{w}$, kde $\mathbf{w}$ probíhá všecky komplexní vektory obsažené ve $\mathbf{W}_k$. Je-li $\mathbf{u}_1 , \ldots , \mathbf{u}_k$ libovolná base nad $\mathfrak{R}(\mathrm{i})$ pro $\mathbf{W}_k$, potom (91.4) se skládá ze všech bodů tvaru (91.3), kde $x_1 , \ldots , x_k$ jsou libovolná komplexní čísla a místo (91.4) píšeme též

$$\{A \,;\, \mathbf{u}_1 , \ldots , \mathbf{u}_k\}_1 \,. \tag{91.5}$$

Všimněme si, že je-li B libovolný komplexní bod náležející do (91.4), je

$$\{A \,;\, \mathbf{W}_k\}_1 = \{B \,;\, \mathbf{W}_k\}_1 \,.$$

Existuje-li lineární podprostor $\mathbf{E}_k$ dimense k prostoru $\mathbf{E}_m$, pro který platí

$$\{A \,;\, \mathbf{W}_k\}_1 = \mathbf{E}_k(\mathrm{i}) \,,$$

pravíme, že (91.4) je *reálný*; v opačném případě (91.4) je *imaginární*. *Zaměřením* podprostoru (91.4) rozumíme $\mathbf{W}_k$; je to množina všech komplexních vektorů tvaru $Y - X$, kde X, Y jsou libovolné dva body podprostoru (91.4); zaměření $\mathbf{W}_k$ se jmenují *reálné*, existuje-li k-směr $\mathbf{V}_k$ prostoru $\mathbf{E}_m$ tak, že $\mathbf{W}_k = \mathbf{V}_k(\mathrm{i})$; v opačném případě se $\mathbf{W}_k$ jmenuje *imaginární*. Zaměření reálného podprostoru (91.4) je reálné; obráceně, jestliže zaměření podprostoru (91.4) je reálné, potom podprostor (91.4) buďto je reálný nebo neobsahuje žádný reálný bod.

Pro $k = 1$ nazýváme (91.4) *přímkou* prostoru $\mathbf{E}_m(\mathrm{i})$, pro $k = 2$ *rovinou* prostoru $\mathbf{E}_m(\mathrm{i})$. Přímka nebo rovina prostoru $\mathbf{E}_m(\mathrm{i})$ je buďto reálná nebo imaginární; je-li reálná, je komplexním rozšířením přímky nebo roviny prostoru $\mathbf{E}_m$. Dvěma různými body A, B prostoru $\mathbf{E}_m(\mathrm{i})$ prochází právě jedna přímka prostoru $\mathbf{E}_m(\mathrm{i})$, totiž přímka $\{A ; B—A\}_\mathrm{i}$; stručně mluvíme často prostě o přímce AB. Jsou-li body A, B reálné, může arci vzniknout pochybnost, zda „přímka AB“ znamená přímku prostoru $\mathbf{E}_m$ či přímku prostoru $\mathbf{E}_m(\mathrm{i})$; často na tom mnoho nezáleží, protože obě přímky určují jedna druhou jednoznačně: přímka prostoru $\mathbf{E}_m$ je množinou všech reálných bodů uvažované přímky prostoru $\mathbf{E}_m(\mathrm{i})$, přímka prostoru $\mathbf{E}_m(\mathrm{i})$ je komplexním rozšířením přímky prostoru $\mathbf{E}_m$.

Budiž A imaginární bod, tedy $A = A_0 + \mathrm{i}\mathbf{u}$, kde $A_0 = \mathrm{Re}.\,A$ je reálný bod, $\mathbf{u} = \mathrm{Im}.\,A$ je nenulový reálný vektor. Bodem A prochází reálná přímka $\{A_0 ; \mathbf{u}\}_\mathrm{i}$ a je to *jediná* reálná přímka procházející bodem A, neboť jestliže reálná přímka obsahuje imaginární bod A, obsahuje také komplexně sdružený bod A^* a tedy splyne s přímkou AA^*. Tedy *imaginárním bodem A prochází právě jedna reálná přímka, totiž přímka AA^** neboli přímka $\{\mathrm{Re}.\,A ; \mathrm{Im}.A\}_\mathrm{i}$.

Pojem rovnoběžnosti zavedený v článku 19 se přenese beze změny na lineární podprostory prostoru $\mathbf{E}_m(\mathrm{i})$; rovněž tak i úvahy o vzájemné poloze dvou lineárních podprostorů provedené v článcích 20 až 25. To platí i o úvahách článku 24, které se přenesou beze změny na lineární soustavy nad $\mathfrak{R}(\mathrm{i})$.

Budiž $\mathbf{W}_k$ lineární soustava dimense k nad $\mathfrak{R}(\mathrm{i})$ obsažená ve $\mathbf{V}_m(\mathrm{i})$; $\mathbf{W}_k$ je *reálná* v případě, že $\mathbf{W}_k = \mathbf{V}_k(\mathrm{i})$, kde $\mathbf{V}_k$ je lineární soustava dimense k nad $\mathfrak{R}$ obsažená ve $\mathbf{V}_m$; neexistuje-li taková $\mathbf{V}_k$, je $\mathbf{W}_k$ *imaginární*. V každém případě množina všech vektorů komplexně sdružených s jednotlivými vektory náležejícími do $\mathbf{W}_k$ tvoří opět lineární soustavu dimense k nad $\mathfrak{R}(\mathrm{i})$ obsaženou ve $\mathbf{V}_m(\mathrm{i})$, kterou nazveme *komplexně sdruženou* s $\mathbf{W}_k$ a označíme $\mathbf{W}_k^*$. Zřejmě $\mathbf{W}_k^{**} = \mathbf{W}_k$. Jestliže $\mathbf{W}_k$ je reálná, je $\mathbf{W}_k^* = \mathbf{W}_k$. Obráceně předpokládejme, že $\mathbf{W}_k^* = \mathbf{W}_k$; dokážeme, že $\mathbf{W}_k$ je reálná. Uvažme nejprve, že jestliže $\mathbf{W}_k$ obsahuje komplexní vektor $\mathbf{u} + \mathrm{i}\mathbf{v}$, potom $\mathbf{W}_k$ obsahuje také komplexně sdružený vektor $\mathbf{u} - \mathrm{i}\mathbf{v}$, a tudíž i oba reálné vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, neboť $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ jsou nad $\mathfrak{R}(\mathrm{i})$ lineárně závislé na $\mathbf{u} + \mathrm{i}\mathbf{v}$, $\mathbf{u} - \mathrm{i}\mathbf{v}$. Z toho plyne nejprve, že $\mathbf{W}_k$ obsahuje aspoň jeden nenulový reálný vektor. Obecněji nechť už víme, že $\mathbf{W}_k$ obsahuje s mezi sebou lineárně nezávislých reálných vektorů

$$\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_s. \tag{91.6}$$

Je-li $s < k$, obsahuje $\mathbf{W}_k$ vektor $\mathbf{u} + \mathrm{i}\mathbf{v}$, který není lineární kombinací nad $\mathfrak{R}(\mathrm{i})$ vektorů (91.6). Podle předcházejícího $\mathbf{W}_k$ obsahuje oba reálné vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, z nichž jistě (aspoň) jeden není lineární kombinací vektorů (91.6); připojíme-li jej k (91.6), dostaneme $s + 1$ mezi sebou lineárně nezávislých reálných vektorů. Z toho plyne indukcí, že $\mathbf{W}_k$ obsahuje k mezi sebou lineárně nezávislých reálných vektorů $\mathbf{u}_1, \dots$ $\dots, \mathbf{u}_k$, takže $\mathbf{W}_k = \mathbf{V}_k(\mathrm{i})$, je-li $\mathbf{V}_k = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$.

Je-li (91.4) lineární podprostor dimense k prostoru $\mathbf{E}_m(\mathrm{i})$, potom také množina $\{A^*; \mathbf{W}_k^*\}_\mathrm{i}$, kterou označíme též $\{A; \mathbf{W}_k\}_\mathrm{i}^*$ a která se skládá ze všech bodů komplexně sdružených s jednotlivými body z (91.4), tvoří lineární podprostor dimense k prostoru $\mathbf{E}_m(\mathrm{i})$; nazveme jej *komplexně sdruženým* s (91.4). Zřejmě $\{A; \mathbf{W}_k\}_\mathrm{i}^{**} = \{A; \mathbf{W}_k\}$. Jestliže podprostor (91.4) je reálný, zřejmě splyne s podprostorem komplexně sdruženým. Obráceně předpokládejme, že (91.4) splyne s podprostorem komplexně sdruženým. Potom je především $\mathbf{W}_k = \mathbf{W}_k^*$, takže podle předchozího je $\mathbf{W}_k = \mathbf{V}_k(\mathrm{i})$, kde $\mathbf{V}_k$ je lineární soustava dimense k nad $\mathfrak{R}$ obsažená ve $\mathbf{V}_m$. Dále však (91.4) vedle bodu $A = A_0 + \mathrm{i}\mathbf{u}$ obsahuje též bod $A^* = A_0 - \mathrm{i}\mathbf{u}$, a tudíž vektor $A - A^* = 2\mathrm{i}\mathbf{u}$ náleží do $\mathbf{W}_k$, takže (91.4) obsahuje reálný bod $A = A_0 - \mathrm{i}\mathbf{u}$; tudíž (91.4) se rovná

$$\{A_0; \mathbf{W}_k\}_\mathrm{i} = \mathbf{E}_k(\mathrm{i}), \quad \text{kde} \quad \mathbf{E}_k = \{A_0; \mathbf{V}_k\}.$$

Imaginární lineární podprostory můžeme klasifikovat podle vzájemné polohy ke komplexně sdruženému podprostoru. Nejprve máme (viz článek 20) *trojí druh imaginárních přímek*: předně přímky reálného směru bez reálných bodů (rovnoběžné s přímkou komplexně sdruženou), za druhé přímky imaginárního směru s jediným reálným bodem (různoběžné s přímkou komplexně sdruženou), za třetí přímky imaginárního směru bez reálných bodů (mimoběžné s přímkou komplexně sdruženou). Poslední druh imaginárních přímek existuje pouze pro $m \geqq 3$. U prvých dvou druhů existuje jednoznačně určená reálná rovina obsahující obě navzájem komplexně sdružené přímky, u třetího druhu jsou obě obsaženy v jednoznačně určeném trojrozměrném reálném lineárním podprostoru. Dále si všimněme případu $k = m - 1$ *imaginární nadroviny*. Z článku 25 snadno plyne, že jsou *dva druhy imaginárních nadrovin*. Předně imaginární nadroviny bez reálných bodů, které mají vždy reálné zaměření. Za druhé imaginární nadroviny, jejichž reálné body vyplní $(m - 2)$-rozměrný lineární podprostor prostoru $\boldsymbol{E}_m$; zaměření takové imaginární nadroviny je vždy imaginární. Případ $1 < k < m - 1$ nechť vyšetří čtenář sám na základě výsledků článku 25.

Úvahy o lineárních funkcích vektoru z článku 46 a úvahy o lineárních funkcích bodu z článku 47 se snadno přenesou na komplexní případ. Je-li v $\boldsymbol{E}_m$ zavedena lineární soustava souřadnic

$$\langle P\,;\, \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m \rangle ,$$

potom lineární funkce *vektoru* přiřazuje vektoru

$$\boldsymbol{v} = x_1\boldsymbol{u}_1 + \ldots + x_m\boldsymbol{u}_m$$

číslo

$$f(\boldsymbol{v}) = a_1x_1 + \ldots + a_mx_m .$$

Jestliže čísla $a_1, \ldots, a_m$ jsou reálná, je $f(\boldsymbol{v})$ reálné pro každý reálný vektor $\boldsymbol{v}$ a pravíme, že f je *reálná* lineární funkce vektoru; v opačném případě je f *imaginární*. Lineární funkce *bodu* přiřazuje bodu

$$X = P + x_1\boldsymbol{u}_1 + \ldots + x_m\boldsymbol{u}_m$$

číslo

$$\varphi(X) = a_1x_1 + \ldots + a_mx_m + a_0 .$$

Jestliže čísla $a_1, \ldots, a_m, a_0$ jsou reálná, je $\varphi(X)$ reálné pro každý reálný bod X a pravíme, že φ je reálná lineární funkce bodu; v opačném případě je φ imaginární. Podrobné přenesení úvah z článků 46, 47 a 48 na komplexní případ budiž přenecháno čtenáři.

92. KOMPLEXNÍ PROJEKTIVNÍ PROSTOR. V předcházejícím článku jsme sledovali, jak se značná část afinní geometrie eukleidovského prostoru, studované v reálném případě, bez valných změn dá přenést na komplexní případ. Podobně tomu je i s projektivní geometrií, jejíž základy byly vyloženy v tomto svazku v kapitolách X a XI. Zde opět je přenesení značné části výsledků z reálného případu na případ komplexní tak jednoduché, že se můžeme omezit na stručný přehled. Pokud se týče kapitoly X, tu výsledky článků 69 až 75 se přenesou na komplexní případ bez jakékoli změny, kdežto v článku 76 na jednom místě je komplexní případ odlišný od reálného, jak o tom bude řeč v dalším. Naproti tomu v článcích 77 a 78 hrají důležitou roli nerovnosti, a přenesení výsledků těchto článků na komplexní případ je nemožné.

V článku 69 jsme uvažovali lineární kombinace (69.1) bodů eukleidovského prostoru $\mathbf{E}_m$ v případech (69.3) a (69.4), při čemž v případě (69.3) lineární kombinace znamenala vektor, v případě (69.3) pak bod. Přechod k prostoru $\mathbf{E}_m(\mathrm{i})$ je tak zřejmý, že jej můžeme plně přenechat čtenáři; koeficienty $c, c', \ldots$ lineární kombinace (69.1) jsou potom ovšem komplexní čísla. Totéž platí ovšem i o lineárních kombinacích (69.13) bodů a vektorů, splňujících opět podmínku (69.3) nebo (69.4).

Přenesení výsledků článku 70 na komplexní případ je rovněž velmi nasnadě. Stejně jako v prostoru $\mathbf{E}_m$ uvažujeme i v prostoru $\mathbf{E}_m(\mathrm{i})$ *vlastní a nevlastní ar. body*, při čemž nevlastní ar. bod je prostě nový název pro vektor, takže stačí odkaz na článek 89. Vlastní ar. bod prostoru $\mathbf{E}_m(\mathrm{i})$ je ovšem dvojice (A, k) složená z bodů A prostoru $\mathbf{E}_m(\mathrm{i})$, zvaného *polohou* ar. bodu (A, k) a z komplexního čísla $k \neq 0$, zvaného *koeficientem* ar. bodu. Vl. ar. bod (A, k) prostoru $\mathbf{E}_m(\mathrm{i})$ je reálný, je-li reálná jak jeho poloha A, tak i jeho koeficient k, jinak je imaginární. Pro imaginární vl. ar. body (A, k) jsou tedy tři možnosti: (1) poloha A reálná, ale koeficient k imaginární; (2) koeficient k reálný, ale poloha A imaginární; (3) i poloha A i koeficient k imaginární. N. ar. bod $\mathbf{u}$ prostoru $\mathbf{E}_m(\mathrm{i})$ má koeficient rovný nule, tedy reálný; poloha $\{\mathbf{u}\}$ však může být reálná i tehdy, je-li $\mathbf{u}$ imaginární; to nastane v případě $\mathbf{u} = c\mathbf{v}$, kde číslo c je imaginární a vektor $\mathbf{v}$ je reálný.

V článku 71 jsme definovali m-rozměrný projektivní prostor $\mathbf{P}_m$, který můžeme určitěji nazvat *m-rozměrným projektivním prostorem nad* $\mathfrak{R}$. Obdobně se definuje *m-rozměrný projektivní prostor nad* $\mathfrak{R}(\mathrm{i})$, který označíme $\mathbf{P}_m(\mathrm{i})$; jeho ar. základem je $(m+1)$-rozměrný vektorový prostor nad $\mathfrak{R}(\mathrm{i})$: $\mathbf{W}_{m+1}(\mathrm{i})$. Prvky $\mathbf{W}_{m+1}(\mathrm{i})$ jsou ar. body prostoru $\mathbf{P}_m(\mathrm{i})$ a dělí se na reálné a imaginární. Prvky prostoru $\mathbf{P}_m(\mathrm{i})$, zvané *komplexní g. body*, jsou totožné s jednorozměrnými lineárními soustavami nad $\mathfrak{R}(\mathrm{i})$ obsaženými ve $\mathbf{W}_{m+1}(\mathrm{i})$; opět se dělí na *reálné a imaginární*. G. bod je reálný, má-li reálného ar. zástupce, ale každý reálný g. bod má vedle reálných ar. zástupců také imaginární; naproti tomu u imaginárního g. bodu každý jeho ar. zástupce je imaginární. Reálný g. bod $\{A\}_\mathrm{i}$ s reálným zástupcem A považujeme za totožný s bodem $\{A\}$ prostoru $\mathbf{P}_m$, takže $\mathbf{P}_m$ je částí $\mathbf{P}_m(\mathrm{i})$. Prostor $\mathbf{P}_m(\mathrm{i})$ se jmenuje *komplexní rozšíření* prostoru $\mathbf{P}_m$. U komplexního g. bodu (na rozdíl od ar. bodů) nemá smysl pojem reálné a imaginární části. Ke každému komplexnímu bodu existuje s ním komplexně sdružený g. bod, který splyne s původním, právě když tento je reálný a jehož ar. zástupci jsou ar. body komplexně sdružené s ar. zástupci původního g. bodu. Je-li dán eukleidovský prostor nad $\mathfrak{R}$: $\mathbf{E}_m$, potom komplexní rozšíření $\bar{\mathbf{E}}_m(\mathrm{i})$ projektivního rozšíření $\bar{\mathbf{E}}_m$ prostoru $\mathbf{E}_m$ je projektivní prostor nad $\mathfrak{R}(\mathrm{i})$, který nazveme také *projektivním rozšířením komplexního rozšíření* $\mathbf{E}_m(\mathrm{i})$ prostoru $\mathbf{E}_m$. Úběžná nadrovina prostoru $\bar{\mathbf{E}}_m(\mathrm{i})$ je komplexním rozšířením úběžné nadroviny prostoru $\bar{\mathbf{E}}_m$.

Úvahy článků 72 a 73 o lineárních podprostorech projektivního prostoru $\mathbf{P}_m$ se přenesou beze změny na prostor $\mathbf{P}_m(\mathrm{i})$. Lineární podprostor prostoru $\mathbf{P}_m(\mathrm{i})$ je buďto *reálný* nebo je *imaginární*; je reálným, právě když je komplexním rozšířením lineárního podprostoru prostoru $\mathbf{P}_m$. Každý imaginární bod prostoru $\mathbf{P}_m(\mathrm{i})$ leží na jediné reálné přímce tohoto prostoru, která obsahuje také bod komplexně sdružený. Ke každému lineárními podprostoru prostoru $\mathbf{P}_m(\mathrm{i})$ existuje s ním *komplexně sdružený lineární podprostor*, který splyne s původním, právě když tento je reálný. (Viz obdobnou větu o $\mathbf{E}_m(\mathrm{i})$, podrobně odůvodněnou v článku 91 na str. 89). Imaginární lineární podprostory můžeme klasifikovat podle jejich vzájemné polohy s komplexně sdruženým podprostorem; množina reálných bodů imaginárního lineárního podprostoru je totožná s průnikem tohoto podprostoru a podprostoru s ním komplexně sdruženého. Zejména máme v komplexním projektivním prostoru dva druhy imaginárních přímek: imaginární přímka má buďto jediný nebo nemá žádný reálný bod, při čemž prvý případ nastane, právě když uvažovaná imaginární přímka spolu s komplexně sdruženou přímkou leží v téže rovině.

Princip duality uvažovaný v článku 74 pro reálný případ se přenese na komplexní případ bez jakékoli změny. Ke komplexnímu rozšíření $\boldsymbol{P}_m(\mathrm{i})$ projektivního prostoru $\boldsymbol{P}_m$ je *duální* komplexní rozšíření $\tilde{\boldsymbol{P}}_m(\mathrm{i})$ duálního prostoru $\tilde{\boldsymbol{P}}_m$. Rovněž tak výsledky článku 75 o lineárních podprostorech duálního prostoru platí pro $\boldsymbol{P}_m(\mathrm{i})$ úplně stejně jako pro $\boldsymbol{P}_m$.

Stejně i pojem dvojpoměru čtveřice bodů na reálné projektivní přímce $\boldsymbol{P}_1$ se přenese zřejmým způsobem na čtveřice bodů na $\boldsymbol{P}_1(\mathrm{i})$ a též na čtveřice bodů na imaginární projektivní přímce. Vzorce (76.23) a (76.24), ve kterých se vyskytují orientované vzdálenosti, nemají ovšem smyslu v komplexním případě. Mimo to zde máme ještě ten rozdíl, že rovnice (76.21), která nemá reálné kořeny, má dva kořeny imaginární:

$$\lambda_1 = \tfrac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\,, \qquad \lambda_2 = \tfrac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\,. \tag{92.1}$$

V důsledku toho v komplexním oboru vedle harmonických čtveřic jsou ještě jiné čtveřice s tou vlastností, že 24 různým pořadím bodů, ze kterých se skládá čtveřice, odpovídá méně než 6 různých hodnot dvojpoměru. Jsou to t. zv. *ekvianharmonické čtveřice*, u kterých je dvojpoměr při 12 pořadích roven jednomu a při zbylých dvanácti pořadích druhému z obou čísel (92.1). Jakmile dvojpoměr je při jednom pořadí roven některému z obou čísel (92.1), je čtveřice nutně ekvianharmonická. Snadno se dokáže, že je-li na př. $(ABCD) = \lambda_1$, je každý z 12 dvojpoměrů

$$\begin{array}{lll} (ABCD)\,, & (ACDB)\,, & (ADBC)\,, \\ (BADC)\,, & (BCAD)\,, & (BDCA)\,, \\ (CABD)\,, & (CBDA)\,, & (CDAB)\,, \\ (DACB)\,, & (DBAC)\,, & (DCBA) \end{array}$$

roven λ_1 a každý z 12 dvojpoměrů odpovídajících ostatním možných pořadím roven λ_2.

93. KOLINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ V KOMPLEXNÍM OBORU. V předcházejícím článku jsme stručně nastínili, jak se obsah kapitoly X přenese z reálného případu na komplexní. Úkolem tohoto článku je stručná diskuse obdobného přenosu obsahu kapitoly XI. Značná část takto formulovaného úkolu je tak nasnadě, že úplně postačí několik stručných poznámek. Kolineární zobrazení K prostoru $\mathbf{P}_m(\mathrm{i})$ na prostor $\mathbf{P}'_m(\mathrm{i})$ vznikne z isomorfního zobrazení L ar. základu $\mathbf{W}_{m+1}(\mathrm{i})$ prvého prostoru na ar. základ $\mathbf{W}'_{m+1}(\mathrm{i})$ druhého stejně, jak tomu bylo v reálném případě. Takové kolineární zobrazení se jmenuje *reálné*, jestliže obraz každého reálného bodu je reálný, a v opačném případě se jmenuje *imaginární*. Každé reálné kolineární zobrazení K se dá vytvořit reálným isomorfismem L, je však zároveň vytvořeno též imaginárními isomorfismy tvaru cL, kde c je imaginární. Reálné kolineární zobrazení K prostoru $\mathbf{P}_m(\mathrm{i})$ na prostor $\mathbf{P}'_m(\mathrm{i})$ obsahuje kolineární zobrazení K_0 prostoru $\mathbf{P}_m$ na prostor $\mathbf{P}'_m$, a obráceně se dá každé kolineární zobrazení $\mathbf{P}_m$ na $\mathbf{P}'_m$ rozšířit, a to jediným způsobem, na kolineární zobrazení K prostoru $\mathbf{P}_m(\mathrm{i})$ na $\mathbf{P}'_m(\mathrm{i})$, při čemž K je nutně reálné. Vzhledem k této fundamentální vzájemně jednoznačné relaci mezi reálnými kolineárními zobrazeními K prostoru $\mathbf{P}_m(\mathrm{i})$ na prostor $\mathbf{P}'_m(\mathrm{i})$ a kolineárními zobrazeními K_0 prostoru $\mathbf{P}_m$ na prostor $\mathbf{P}'_m$ budeme identifikovat K s příslušným K_0 a budeme proto mluvit na př. o imaginárním samodružném bodě kolineace prostoru $\mathbf{P}_m$, čímž míníme ovšem samodružný bod příslušné kolineace prostoru $\mathbf{P}_m(\mathrm{i})$.

Výsledky článků 79 až 82 se přenesou na komplexní případ bezprostředně. V článku 83 v komplexním případě odpadne rozlišování přímých a nepřímých kolineací, které jsme měli v reálném případě pro lichá m. Články 84 až 86 se přenesou na komplexní případ v celém rozsahu.

V článku 87 se při přechodu ke komplexnímu oboru jeví především ten rozdíl, že rovnice (87.3) má v komplexním oboru vždycky řešení. Je-li tedy K projektivita na přímce $\mathbf{P}_1(\mathrm{i})$, kterou opět předpokládejme různou od identické transformace, má K vždy buďto jeden samodružný bod nebo dva; v prvém případě K se jmenuje *parabolická*, ve druhém *neparabolická*. Toto rozlišování má platnost jak pro reálné, tak i pro imaginární projektivity. Jestliže projektivita K je reálná, potom v parabolickém případě její samodružný bod je nutně reálný; neparabolický případ pak se štěpí u reálných projektivit na dva: hyperbolická projektivita má dva reálné samodružné body, eliptická projektivita má dva imaginární samodružné body, které jsou komplexně sdružené. K větě 87.2 o hyperbolických projektivitách můžeme nyní připojit obdobnou větu o eliptických projektivitách:

Věta 93.1. *Jsou-li* A , A^* (komplexně sdružené) *samodružné body eliptické projektivity na přímce* P_1 , *existuje komplexní číslo* λ *tak, že*

$$(93.1) \qquad |\lambda| = 1 \,, \qquad \lambda \neq 1$$

a že, je-li X *kterýkoli nesamodružný bod přímky* P_1 , X' *obraz bodu* X , *potom dvojpoměr* $(AA^*XX') = \lambda$. *Obráceně, jsou-li dány na* P_1(i) *dva imaginární komplexně sdružené body* A , A^* *a je-li dáno komplexní číslo* λ *splňující* (93.1), *potom ke každému bodu* X *přímky* P_1 *existuje na* P_1 *právě jeden bod* X' *tak, že* $(AA^*XX') = \lambda$. *Bod* X' *je obrazem bodu* X *při eliptické projektivitě na přímce* P_1 , *jejíž samodružné body jsou* A , A^*.

Důkaz. Nehledě na část týkající se znamení čísla λ , dá se důkaz věty 87.2 přenést do komplexního oboru s tím výsledkem, že jestliže neparabolická (reálná nebo imaginární) projektivita na P_1(i) má samodružné body A , B , potom existuje komplexní číslo λ tak, že $0 \neq \lambda \neq 1$ a že mezi libovolným (reálným nebo komplexním) nesamodružným bodem X a jeho obrazem X' platí vztah $(ABXX') = \lambda$; že také obráceně, jsou-li dány dva různé komplexní body A , B a komplexní číslo $\lambda(0 \neq \lambda \neq 1)$, relace $(ABXX') = \lambda$ definuje na P_1(i) neparabolickou projektivitu se samodružnými body A , B . Jestliže nyní běží o eliptickou projektivitu, je samodružný bod $B = A^*$ komplexně sdružený k samodružnému bodu A . Mimo to, je-li bod X reálný, je také jeho obraz X' reálný; jestliže ve vztahu $(AA^*XX') = \lambda$ každý bod nahradíme bodem s ním komplexně sdruženým, dostaneme vztah $(A^*AXX') = \lambda^*$, kde λ^* je číslo komplexně sdružené s číslem λ . Na druhé straně podle (76.10) je $(A^*AXX') = 1 : \lambda$. Tedy $\lambda\lambda^* = 1$ neboli $|\lambda| = 1$. Obráceně buďtež A , A^* dva (imaginární tedy různé) komplexně sdružené body a budiž $|\lambda| = 1'$. Máme dokázat, že projektivita určená vztahem $(AA^*XX') = \lambda$ je reálná, t. j., že je-li $X = X^*$, je také $X' = X'^*$. Avšak přechodem ke komplexně sdruženým bodům z relace $(AA^*XX') = \lambda$ dostaneme relaci $(A^*AXX'^*) = \lambda^*$, z níž podle (76.10) plyne $(AA^*XX'^*) = 1 : \lambda^*$. Ježto však $|\lambda| = 1$, je $1 : \lambda^* = \lambda$, tedy $(AA^*XX') = (AA^*XX'^*)$, takže $X' = X'^*$ podle věty 76.1 (vlastně podle její komplexní úpravy).

Věta 87.4 i se svým důkazem zůstává v platnosti v komplexním oboru a vede k definici involuce na $\mathbf{P}_1(\mathrm{i})$, která může být reálná nebo imaginární; při tom reálná involuce na $\mathbf{P}_1(\mathrm{i})$ je rozšířením involuce na $\mathbf{P}_1$ a je účelné ji ztotožnit s touto involucí na $\mathbf{P}_1$. Reálné involuce se dělí na hyperbolické a eliptické, při čemž nyní *každá* involuce má dva dvojné body, které u reálné involuce jsou buďto oba reálné (hyperbolické involuce) nebo jsou imaginární a komplexně sdružené (eliptická involuce).

Prvá část věty 87.5 platí i v komplexním oboru: Jsou-li A, B, C, D čtyři různé komplexní body na $\mathbf{P}_1(\mathrm{i})$, existuje na $\mathbf{P}_1(\mathrm{i})$ právě jedna involuce (reálná nebo imaginární) obsahující obě dvojice A, B; C, D. Rovněž i věta 87.6 platí v komplexním oboru: Jsou-li A, B dva různé body na $\mathbf{P}_1(\mathrm{i})$, existuje na $\mathbf{P}_1(\mathrm{i})$ právě jedna involuce (reálná nebo imaginární) s dvojnými body A, B, která vedle svých dvojných bodů obsahuje ještě právě ty dvojice X, X', pro které A, B, X, X' je harmonická čtveřice.

VĚTA 93.2. *Buďtež A, A^* dva imaginární komplexně sdružené body na $\mathbf{P}_1(\mathrm{i})$ a budiž K reálná projektivita na $\mathbf{P}_1(\mathrm{i})$, při které obrazem bodu A* je bod A^*. *Potom K je hyperbolická involuce.*

DŮKAZ. Ježto projektivita K je reálná a ježto body A, A^* jsou komplexně sdružené, je nejenom bod A^* obrazem bodu A, nýbrž také obráceně bod A je obrazem bodu A^*. Ježto $A \neq A^*$, plyne z věty 87.4, že K je involuce a zbývá dokázat, že K nemůže být eliptická. Předpokládejme opak. Potom K má dva imaginární komplexně sdružené dvojné body B, B^* a podle věty 87.6 (vlastně jejího komplexního zobecnění formulovaného výše) je $(BB^*AA^*) = -1$. Můžeme volit ar. zástupce A, A^*, B, B^* tak, že ar. body A, A^* jsou komplexně sdružené a stejně i B, B^*. Ježto B, B^* jsou imaginární, je $B \neq B^*$, takže existují komplexní čísla α, β tak, že $A = \alpha B + \beta B^*$. Potom je však také $A^* = (\alpha B + \beta B^*)^* = \beta^* B + \alpha^* B^*$ a podle definice dvojpoměru je

$$(BB^*AA^*) = \frac{\beta\beta^*}{\alpha\alpha^*} = \left|\frac{\beta}{\alpha}\right|^2 > 0\,.$$

Ježto

$$(BB^*AA^*) = -1,$$

je to nemožné.

VĚTA 93.3. *Dvě různé involuce mají právě jednu společnou dvojici, která však nemusí být reálná ani tehdy, jestliže obě dané involuce jsou reálné. Jestliže však ze dvou daných různých reálných involucí je aspoň jedna eliptická, potom obě involuce mají společnou dvojici složenou ze dvou reálných a navzájem různých bodů.*

DŮKAZ. I. Buďtež K_1, K_2 dvě dané (reálné nebo imaginární) involuce, při čemž $K_1 \neq K_2$. Všimněme si nejprve toho případu, že K_1 a K_2 mají společný dvojný bod A. Potom dvojice A, A je společná oběma involucím a není možné, aby měly ještě jinou společnou dvojici. Neboť je-li $B_1 \neq A$ dvojný bod involuce K_1 a je-li $B_2 \neq A$ dvojný bod involuce K_2, je $B_1 \neq B_2$, ježto oběma dvojnými body je involuce (podle komplexního zobecnění věty 87.6) jednoznačně určena. Mají-li tedy involuce K_1, K_2 mimo A, A další společnou dvojici X, X', jsou body A, B_1, X, X' navzájem různé a stejně i body A, B_2, X, X' a podle komplexního zobecnění věty 87.6 je

$(AB_1XX') = (AB_2XX') = -1$, takže podle (76.12) je
$(XX'AB_1) = -1 = (XX'AB_2)$ a tudíž podle věty 76.1 je
$B_1 = B_2$, což je nemožné.

II. Všimněme si dále toho případu, že involuce K_1, K_2 nemají společný dvojný bod. Buďtež A_1, B_1 dvojné body involuce K_1; A_2, B_2 buďtež dvojné body involuce K_2. Potom jsou A_1, B_1, A_2, B_2 čtyři různé body na $\mathbf{P}_1(\mathrm{i})$ a podle komplexního zobecnění věty 87.5 existuje na $\mathbf{P}_1(\mathrm{i})$ involuce K_0 s dvojnými body A_0, B_0, do které náležejí obě dvojice A_1, B_1; A_2, B_2. Podle věty 87.6 je potom $(A_0B_0A_1B_1) = -1 = (A_0B_0A_2B_2)$, takže podle (76.12) je také $(A_1B_1A_0B_0) = -1 = (A_2B_2A_0B_0)$ a podle věty 87.6 je tudíž A_0, B_0 společná dvojice obou involucí K_1, K_2. Mimo dvojici A_0, B_0 nemohou involuce K_1, K_2 mít jinou společnou dvojici A_0', B_0', neboť ježto K_1, K_2 nemají společný dvojný bod, byly by A_0, B_0, A_0', B_0' čtyři různé body a přes to by měly obě navzájem různé involuce K_1, K_2 společné dvě dvojice A_0, B_0; A_0', B_0'; to však je v rozporu s větou 87.5.

III. Zbývá doplnit důkaz pro ten případ, že obě involuce K_1, K_2 jsou reálné. Mají-li K_1, K_2 společný dvojný bod A, potom dvojný bod $B_1 \neq A$ involuce K_1 musí být různý od dvojného bodu $B_2 \neq A$ involuce K_2, a proto bod A musí být reálný, neboť jinak by také komplexně sdružený bod $A^* \neq A$ byl společným dvojným bodem obou involucí. Z toho plyne, že v uvažovaném případě obě involuce K_1, K_2 jsou hyperbolické. Jestliže však reálné involuce K_1, K_2 nemají žádný společný dvojný bod a jestliže A_0, B_0 je jejich společná dvojice, plyne z reality obou involucí, že také A_0^*, B_0^* je společná dvojice, která podle II musí splynout s dvojicí A_0, B_0. Je tudíž buďto $A_0 = A_0^*$, $B_0 = B_0^*$, t. j. společná dvojice je reálná, nebo je $A_0 = B^*$, $B_0 = A_0^*$, t. j. obě involuce mají společnou dvojici tvaru A_0, A_0^*, kde $A_0^* \neq A_0$; tento druhý případ je podle věty 93.2 možný pouze tehdy, jestliže obě involuce jsou hyperbolické.

XIII

KVADRIKY A JEJICH PROJEKTIVNÍ VLASTNOSTI

94. KORELACE. Kolineární zobrazení K projektivního prostoru $\mathbf{P}_m$ na projektivní prostor $\tilde{\mathbf{P}}_m$ duální k $\mathbf{P}_m$ se jmenuje *korelace* prostoru $\mathbf{P}_m$; tedy korelace prostoru $\mathbf{P}_m$ přiřazuje každému bodu tohoto prostoru nadrovinu téhož prostoru. *Pro $m = 1$ není rozdílu mezi kolineací a korelací.*

Ježto k prostoru $\tilde{\mathbf{P}}_m$ je duálním původní prostor $\mathbf{P}_m$, korelace prostoru $\tilde{\mathbf{P}}_m$ přiřazuje každé nadrovině prostoru $\mathbf{P}_m$ bod téhož prostoru. K dané korelaci K prostoru $\mathbf{P}_m$ je podle věty 79.2 inversní korelace K^{-1} prostoru $\tilde{\mathbf{P}}_m$. Avšak dané korelaci K prostoru $\mathbf{P}_m$ přísluší ještě jiná korelace prostoru $\tilde{\mathbf{P}}_m$, totiž *duální korelace* $\tilde{K}$, jejíž definice je obsažena v článku 83 (str. 55). Je-li ϱ libovolná nadrovina prostoru $\mathbf{P}_m$, potom jejím obrazem $K^{-1}\varrho$ při inversní korelaci K^{-1} je ten bod A prostoru $\mathbf{P}_m$, jehož obrazem KA při původní korelaci K je daná nadrovina ϱ ; obrazem $\tilde{K}\varrho$ nadroviny ϱ při duální korelaci $\tilde{K}$ je ten bod B prostoru $\mathbf{P}_m$, jímž procházejí ty nadroviny KX , které jsou obrazy jednotlivých bodů X nadroviny ϱ při původní korelaci K . Korelace K se nazývá *involutorní*, jestliže inversní korelace K^{-1} splyne s duální korelací $\tilde{K}$. Snadno se nahlédne, že *korelace K prostoru $\mathbf{P}_m$ je involutorní, právě když má tuto vlastnost: jsou-li A , B dva body prostoru $\mathbf{P}_m$ a jestliže nadrovina KA prochází bodem B , potom také nadrovina KB prochází bodem A* . V každém případě původní korelace K je inversní k inversní korelaci K^{-1}, a zároveň K je duální k duální korelaci $\tilde{K}$. Z toho plyne: *Je-li K involutorní korelace prostoru $\mathbf{P}_m$, je $K^{-1} = \tilde{K}$ involutorní korelace prostoru $\tilde{\mathbf{P}}_m$.*

Pro $m = 1$ je K involutorní, právě když pro $KA = B$ je vždy zároveň také $KB = A$; to nastane jednak, jestliže K je identická transformace přímky $\mathbf{P}_1$, jednak, jestliže K je involuce na přímce $\mathbf{P}_1$.

Nazveme *bilineární formou* v prostoru $\mathbf{P}_m$ (nebo ve $\mathbf{W}_{m+1}$, je-li

W_{m+1} ar. základ prostoru P_m) pravidlo f, které každé dvojici X, Y ar. bodů (při čemž záleží na pořadí bodů ve dvojici) přiřazuje reálné číslo $f(X, Y)$ tak, že jsou splněny následující čtyři vlastnosti:

$$f(X_1 + X_2, Y) = f(X_1, Y) + f(X_2, Y); \tag{94.1}$$
$$f(X, Y_1 + Y_2) = f(X, Y_1) + f(X, Y_2); \tag{94.2}$$
$$f(cX, Y) = c \,.\, f(X \,.\, Y); \tag{94.3}$$
$$f(X, cY) = c \,.\, f(X, Y). \tag{94.4}$$

Je-li dána ar. base

$$A_0, A_1, \ldots, A_m, \tag{94.5}$$

položme

$$f(A_r, A_s) = a_{rs} \tag{94.6}$$

pro $0 \leqq r \leqq m$, $0 \leqq s \leqq m$. Je-li potom

$$X = x_0A_0 + \ldots + x_mA_m, \qquad Y = y_0A_0 + \ldots + y_mA_m, \tag{94.7}$$

je

$$f(X, Y) = \sum_{r=0}^{m} \sum_{s=0}^{m} a_{rs}x_ry_s. \tag{94.8}$$

Obráceně, jestliže při určité volbě ar. base (94.5) zvolíme libovolně reálná čísla a_{rs} $(0 \leqq r, s \leqq m)$ a definujeme $f(X, Y)$ pomocí (94.7) a (94.8), platí (94.6) a (94.1) až (94.4), takže f je bilineární forma v P_m. Položme

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{00} & \ldots & a_{0m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m0} & \ldots & a_{mm} \end{vmatrix}. \tag{94.9}$$

Číslo Δ je závislé na volbě ar. base (94.5), neboť jestliže tuto ar. basi změníme na př. tak, že jeden její element A_r nahradíme elementem cA_r, kde ovšem musí být $c \neq 0$, je patrné, že Δ se změní v $c^2\Delta$. V dalším však uvidíme, že platnost rovnice $\Delta = 0$ je nezávislá na volbě ar. base (94.5).

Jestliže při libovolně daném ar. bodě A přiřadíme každému ar. bodu Y číslo $f(A, Y)$, plyne z (94.2) a (94.4), že vznikne lineární forma ve W_{m+1}, kterou označíme LA. Budiž $\tilde{W}_{m+1}$ množina všech lineárních forem ve W_{m+1}, takže podle článku 74 $\tilde{W}_{m+1}$ je ar. základ projektivního prostoru $\tilde{\mathbf{P}}_m$ duálního k prostoru $\mathbf{P}_m$. Tedy L je zobrazení prostoru $\mathbf{W}_{m+1}$ do prostoru $\tilde{\mathbf{W}}_{m+1}$, které podle (94.1) a (94.3) má vlastnosti:

$$L(X_1 + X_2) = LX_1 + LX_2 , \qquad L(cX) = c \, . \, LX \, .$$

Zřejmě $L\mathbf{o} = \tilde{\mathbf{o}}$. Jestliže $LX = \tilde{\mathbf{o}}$ *pouze* pro $X = \mathbf{o}$, je patrné, že L je isomorfní zobrazení $\mathbf{W}_{m+1}$ na $\tilde{\mathbf{W}}_{m+1}$. V tomto případě řekneme, že bilineární forma f je *regulární*; naproti tomu nazveme f *singulární*, existuje-li $A \neq \mathbf{o}$ tak, že $LA = \mathbf{o}$. Mezi singulární bilineární formy patří mimo jiné *nulová bilineární forma* f, pro kterou je identicky $f(X, Y) = 0$. Jestliže při určité volbě ar. base (94.5) platí (94.6), je patrné, že f je regulární, právě když soustava $m + 1$ lineárních rovnic

$$a_{0s}x_0 + a_{1s}x_1 + \ldots + a_{ms}x_m = 0$$
$$(0 \leqq s \leqq m)$$

má pouze triviální řešení $x_0 = x_1 = \ldots = x_m = 0$. Tedy: *regulární bilineární forma má determinant* $\Delta \neq 0$, *singulární bilineární forma má determinant* $\Delta = 0$. Tím je zjištěna správnost ohlášeného již fakta, že platnost rovnice $\Delta = 0$ je nezávislá na volbě ar. base (94.5).

Podle předcházejícího regulární bilineární forma f určuje isomorfní zobrazení L vektorového prostoru $\mathbf{W}_{m+1}$ na vektorový prostor $\tilde{\mathbf{W}}_{m+1}$, které opět podle článku 79 vytvořuje kolineární zobrazení $K = \{L\}$ projektivního prostoru $\mathbf{P}_m$ na duální projektivní prostor $\tilde{\mathbf{P}}_m$ neboli korelaci prostoru $\mathbf{P}_m$, o které řekneme stručně také, že je *vytvořena* bilineární formou f. Tímto způsobem vznikne nejobecnější korelace prostoru $\mathbf{P}_m$, neboť je-li L jakékoli isomorfní zobrazení $\mathbf{W}_{m+1}$ na $\tilde{\mathbf{W}}_{m+1}$, zvolme libovolně ar. basi (94.5) prostoru $\mathbf{P}_m$. Potom pro $0 \leqq r \leqq m$ je LA_r element prostoru $\tilde{\mathbf{W}}_{m+1}$, t. j. lineární forma ve $\mathbf{W}_{m+1}$, která ar. bodu

$$Y = y_0A_0 + y_1A_1 + \ldots + y_mA_m$$

přiřazuje číslo

$$a_{r0}y_0 + a_{r1}y_1 + \ldots + a_{rm}y_m \, ;$$

při tom lineární formy LA_r $(0 \leqq r \leqq m)$ jsou mezi sebou lineárně nezávislé, takže determinant (94.9) je různý od nuly a bilineární forma (94.8) je regulární. Je patrné, že tato bilineární forma vytvořuje danou korelaci K. Mimo to je zřejmé, že jestliže regulární bilineární forma f vytvořuje korelaci K prostoru $\mathbf{P}_m$, potom při každém $c \neq 0$ také bilineární forma cf je regulární a vytvořuje touž korelaci K, při čemž také obráceně *pouze* takové formy cf vytvořují danou korelaci K.

Singulární bilineární formy nebudeme v obecném případě probírat.

Ze souvislosti mezi pojmem ar. nadroviny a pojmem rovnice nadroviny (viz str. 21) plyne, že je-li K korelace prostoru $\mathbf{P}_m$ vytvořená regulární bilineární formou f a je-li $\{X\}$ libovolný bod prostoru $\mathbf{P}_m$, potom nadrovina $K\{X\}$ je totožná s množinou těch bodů $\{Y\}$, pro něž je $f(X, Y) = 0$.

K dané bilineární formě f můžeme určit druhou bilineární formu g tak, aby bylo identicky $g(X, Y) = f(Y, X)$; řekneme, že formy f, g jsou navzájem *transponované*. Při přechodu od f ke g podle (94.6) se v determinantu (94.9) pouze vymění řádky se sloupci, což nemá vlivu na hodnotu determinantu. Je-li tedy f regulární, je také g regulární. Předpokládejme, že f je regulární a označme K příslušnou korelaci prostoru $\mathbf{P}_m$; dále pak označme K_0 korelaci příslušnou transponované formě g. Potom je

$$K_0 = \tilde{K}^{-1} \quad \text{neboli} \quad K_0^{-1} = \tilde{K}. \tag{94.10}$$

Neboť je-li $\{Y\}$ libovolně daný bod prostoru $\mathbf{P}_m$, budiž $\varrho = K_0\{Y\}$; tedy ϱ je množina těch bodů $\{X\}$, pro něž platí $g(X, Y) = 0$ neboli $f(X, Y) = 0$. To však znamená, že bod $\{X\}$ náleží do ϱ, právě když nadrovina $K\{X\}$ obsahuje bod $\{Y\}$; tudíž $\tilde{K}\varrho = \{Y\}$, z čehož plyne (94.10).

Podle (94.10) korelace K je involutorní, právě když splyne s K_0, t. j. jestliže obě transponované bilineární formy f, g vytvořují touž korelaci. To však znamená, že existuje číslo $c \neq 0$ tak, že je identicky $g(X, Y) = c \, . \, f(X, Y)$ neboli $f(Y, X) = c \, . \, f(X, Y)$. Potom je však též $f(X, Y) = c \, . \, f(Y, X)$ a tudíž

$$f(X . Y) = c^2 \, . \, f(X, Y) \, . \tag{94.11}$$

Forma f je regulární a tudíž není nulová, takže z (94.11) plyne, že $c^2 = 1$ neboli $c = \pm 1$. Zavedeme nyní tyto definice (ať už f je regulární či singulární): Bilineární forma f se jmenuje *symetrická*, je-li identicky

$$(94.12) \qquad f(Y, X) = f(X, Y);$$

jmenuje se *alternující*, je-li identicky

$$(94.13) \qquad f(Y, X) = -f(X, Y).$$

Dokázali jsme tedy, že korelace K vytvořená regulární bilineární formou f je involutorní, právě když forma f je buďto symetrická nebo alternující. Nyní korelace vytvořená bilineární formou f je vytvořena také každou bilineární formou tvaru cf $(c \neq 0)$ a není vytvořena žádnou jinou bilineární formou. Jsou tudíž dva druhy involutorních korelací: korelace vytvořené regulární symetrickou bilineární formou, které se jmenují *polární korelace* a jejichž studium tvoří hlavní obsah této kapitoly; za druhé pak korelace vytvořené regulární alternující bilineární formou, které se jmenují *nulové korelace* a jež probereme v kapitole XIV hlavně pro $m = 3$. Uvidíme ostatně, že nulové korelace existují pouze pro lichá m.

Pro $m = 1$ jsme již na str. 99 konstatovali, že involutorní korelace je buďto identická transformace přímky $\boldsymbol{P}_1$ nebo je to involuce na $\boldsymbol{P}_1$. Snadno si uvědomíme, že identická transformace přímky $\boldsymbol{P}_1$ je (jediná) nulová korelace na $\boldsymbol{P}_1$, a že involuce na $\boldsymbol{P}_1$ jsou totožné s polárními korelacemi na $\boldsymbol{P}_1$.

Poznámka. V předcházejícím textu tohoto článku jsme měli na zřeteli *reálný* projektivní prostor $\boldsymbol{P}_m$. Je však zřejmé, že celý obsah tohoto článku se ve všech podrobnostech přenese na $\boldsymbol{P}_m(\mathrm{i})$, jestliže všude reálná čísla nahradíme čísly komplexními. Korelace prostoru $\boldsymbol{P}_m(\mathrm{i})$ je buďto reálná nebo imaginární, při čemž reálná korelace prostoru $\boldsymbol{P}_m(\mathrm{i})$ je komplexním rozšířením určité korelace prostoru $\boldsymbol{P}_m$. Také v textu následujících článků této kapitoly si budeme všímat v podstatě pouze reálného prostoru $\boldsymbol{P}_m$, při čemž opět značná část výsledků bude platná i pro $\boldsymbol{P}_m(\mathrm{i})$ a budeme v případě potřeby užívat přenesení na $\boldsymbol{P}_m(\mathrm{i})$ některých výsledků v textu odvozených pro $\boldsymbol{P}_m$, pokud takové přenesení je nasnadě.

95. KVADRATICKÉ FORMY. Budiž $\boldsymbol{W}_{m+1}$ ar. základ projektivního prostoru $\boldsymbol{P}_m$. Budiž dána symetrická bilineární forma f v $\boldsymbol{P}_m$, regulární nebo singulární, ne však nulová. Zvolíme-li určitou ar. basi (94.5) a zavedeme-li označení (94.6), platí opět (94.8). Ježto f je symetrická, máme nyní

$$(95.1) \qquad a_{rs} = a_{sr} \quad \text{pro} \quad 0 \leqq r, s \leqq m .$$

Položme

$$(95.2) \qquad f_2(X) = f(X, X)$$

a nazvěme f_2 *kvadratickou formou* v P_m nebo ve W_{m+1} . Je tedy

$$(95.3) \qquad f_2(X) = \sum_{r=0}^{m} \sum_{s=0}^{m} a_{rs} x_r x_s .$$

Při dané volbě ar. base je tedy kvadratická forma (95.3) homogenní mnohočlen druhého stupně v $m + 1$ proměnných $x_0, x_1, \ldots, x_m$, který má při x_r^2 $(0 \leqq r \leqq m)$ koeficient a_{rr}, ale při $x_r x_s$ $(0 \leqq r < s \leqq m)$ koeficient $2a_{rs}$, nikoli a_{rs}. Je to zcela libovolný homogenní mnohočlen druhého stupně v proměnných $x_0, x_1, \ldots, x_m$ až na to, že nejsou všecky koeficienty současně rovny nule.

Kvadratická forma f_2 je jednoznačně určena symetrickou bilineární formou f, ale také obráceně kvadratická forma f_2 jednoznačně určuje výchozí symetrickou bilineární formu f, kterou nazveme *polární formou* příslušnou kvadratické formě f_2. Neboť z (94.1) a (94.2) plyne, že

$$f(X_1 + X_2, X_1 + X_2) = f(X_1, X_1) + f(X_2, X_2) + \\ + f(X_1, X_2) + f(X_2, X_1) ,$$

takže podle (94.12) a (95.2) je

$$(95.4) \qquad f_2(X_1 + X_2) = f_2(X_1) + f_2(X_2) + 2f(X_1, X_2)$$

neboli

$$2f(X_1, X_2) = f_2(X_1 + X_2) - f_2(X_1) - f_2(X_2) ,$$

takže forma f_2 skutečně jednoznačně určuje formu f. Ježto f není nulová, *není $f_2(X)$ identicky rovné nule.* Poznamenejme ještě, že podle (94.3), (94.4) a (95.2) je

$$(95.5) \qquad f_2(cX) = c^2 . f_2(X) .$$

Kvadratická forma f_2 se jmenuje *regulární* nebo *singulární* podle toho, zda příslušná bilineární forma f je regulární či singulární. Uvidíme však, že studium singulárních kvadratických forem se dá v podstatě převést na studium regulárních kvadratických forem.

Předpokládejme, že daná kvadratická forma f_2 a tudíž i příslušná polární symetrická bilineární forma je singulární. Označme $\mathbf{W}_{k+1}$ množinu všech těch ar. bodů X, pro něž je $f(X, Y) = 0$ identicky pro všechny ar. body Y. Z (94.1) a (94.3) plyne, že $\mathbf{W}_{k+1}$ je lineární soustava obsažená ve $\mathbf{W}_{m+1}$, jejíž dimense budiž $k + 1$. Ježto f není nulová, je $k < m$; ježto f je singulární, je $k \geqq 0$; tedy $0 \leqq k \leqq \leqq m - 1$. Vektorový prostor $\mathbf{W}_{k+1}$ je ar. základem k-rozměrného lineárního podprostoru v širším smyslu S_k prostoru $\mathbf{P}_m$, který nazveme *vrcholem* singulární kvadratické formy f_2. Podle věty 13.1 můžeme zvolit ar. basi (94.5) prostoru $\mathbf{P}_m$ tak, aby $A_0, A_1, \ldots, A_k$ byla ar. base prostoru S_k. Z definice prostoru S_k a ze symetrie bilineární formy f plyne potom, že v (94.6) je $a_{rs} = 0$, jakmile aspoň jeden z obou indexů r, s je $\leqq k$. Tudíž (94.8) v našem případě zní

$$(95.6) \qquad f(X, Y) = \sum_{r=k+1}^{m} \sum_{s=k+1}^{m} a_{rs} x_r y_s ,$$

z čehož

$$(95.7) \qquad f_2(X) = \sum_{r=k+1}^{m} \sum_{s=k+1}^{m} a_{rs} x_r x_s .$$

Při tom je

$$(95.8) \qquad \begin{vmatrix} a_{k+1, k+1} & \ldots & a_{k+1, m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m, k+1} & \ldots & a_{mm} \end{vmatrix} \neq 0$$

(pro $k = m - 1$ levá strana znamená číslo a_{mm}), neboť v opačném případě by bylo možné určit čísla $x_{k+1}, \ldots, x_m$ tak, aby nebyla všecka rovna nule a aby bylo

$$a_{k+1, s} x_{k+1} + \ldots + a_{ms} x_m = 0 \quad \text{pro} \quad k + 1 \leqq s \leqq m ;$$

pro $X = \sum_{r=k+1}^{m} x_r A_r$ by potom podle (95.6) bylo $f(X, Y) = 0$ identicky v Y, což je nemožné, ježto X nenáleží do $\mathbf{W}_{k+1}$.

V případě $k = m - 1$ zní (95.6) jednoduše $f(X, Y) = a x_m^2$, kde $a \neq 0$. Položme $x_m = \varphi(X)$, takže

$$(95.9) \qquad f(X, Y) = a\varphi(X)\,\varphi(Y) , \quad f_2(X) = a[\varphi(X)]^2,$$

kde φ je lineární forma ve $\mathbf{W}_{m+1}$ neboli ar. nadrovina v $\mathbf{P}_m$.

Budiž za druhé $0 \leq k \leq m - 2$, takže vektorový prostor $\mathbf{W}_{m+1}$ mod $\mathbf{W}_{k+1}$ je ar. základem perspektivy $\pi(S_k ; \mathbf{P}_m)$, která je projektivním prostorem dimense $m - k - 1$; je $1 \leq m - k - 1 \leq \leq m - 1$. Z (95.6) plyne, že jestliže $X_1 \equiv X_2 \bmod \mathbf{W}_{k+1}$, $Y_1 \equiv Y_2 \bmod \mathbf{W}_{k+1}$, je $f(X_1, Y_1) = f(X_2, Y_2)$. Jestliže pro každý element X vektorového prostoru $\mathbf{W}_{m+1}$ označíme stručně $[X]$ element $X \bmod \mathbf{W}_{k+1}$ prostoru $\mathbf{W}_{m+1} \bmod \mathbf{W}_{k+1}$, existuje bilineární forma F ve $\mathbf{W}_{m+1} \bmod \mathbf{W}_{k+1}$ taková, že je identicky

$$F([X], [Y]) = f(X, Y) . \tag{95.10}$$

Zároveň s formou f je také forma F symetrická; mimo to z (95.8) plyne, že F je regulární. Obráceně, zvolíme-li libovolně regulární symetrickou bilineární formu F, ve $\mathbf{W}_{m+1} \bmod \mathbf{W}_{k+1}$ a definujeme-li f pomocí (95.10), je f singulární symetrická bilineární forma ve $\mathbf{W}_{m+1}$ a vrcholem příslušné kvadratické formy je S_k. Bylo by ostatně snadné odvodit tyto výsledky bez užití speciální ar. base.

96. REGULÁRNÍ A SINGULÁRNÍ KVADRIKY. Budiž opět $\mathbf{W}_{m+1}$ ar. základ projektivního prostoru $\mathbf{P}_m$. Nazveme *kvadrikou prostoru* $\mathbf{P}_m$ neboli $(m - 1)$-*rozměrnou kvadrikou* a označíme $\mathbf{Q}_{m-1}$ množinu všech těch bodů $\{X\}$ prostoru $\mathbf{P}_m$, pro něž je $f_2(X) = 0$, kde f_2 je daná kvadratická forma v $\mathbf{P}_m$. Týmž způsobem definujeme kvadriky prostoru $\mathbf{P}_m(\mathrm{i})$, které dělíme na *reálné* a *imaginární*, při čemž reálná kvadrika prostoru $\mathbf{P}_m(\mathrm{i})$ je vytvořena takovou kvadratickou formou prostoru $\mathbf{P}_m(\mathrm{i})$, která je (ve zřejmém smyslu) *komplexním rozšířením* kvadratické formy prostoru $\mathbf{P}_m$. Ukazuje se, že komplexní theorie kvadrik je snadným přenosem části reálné theorie, že však v reálné theorii jsou další důležité momenty, které nelze přenést na komplexní theorii. Abychom zachytili všecky podstatné prvky theorie a při tom se vyhnuli nudným opakováním týchž úsudků, soustředíme se na theorii reálných kvadrik prostoru $\mathbf{P}_m(\mathrm{i})$, t. j. budeme vycházet od *reálné* kvadratické formy f_2, ale budeme do příslušné kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$ počítat nejen *reálné*, nýbrž i *imaginární* body $\{X\}$, pro které $f_2(X) = 0$. To je potřebné mimo jiné proto, že reálná kvadrika nemusí obsahovat vůbec žádný reálný bod.

Kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$ dělíme na *regulární* a *singulární* podle toho, zda je reálná nebo singulární vytvořující kvadratická forma f_2. Zároveň s kvadratickou formou f_2 také každá kvadratická forma cf_2 (kde c je číslo různé od nuly, jinak však libovolné) vytvořuje touž kvadriku $\mathbf{Q}_{m-1}$. Na otázku, jak dalece znalost kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$ obráceně určuje kvadratickou formu f_2, odpovíme později; forma f_2 nemůže ovšem být určena kvadrikou $\mathbf{Q}_{m-1}$ než až na libovolný konstantní faktor $c \neq 0$. Ukáže se, že znalost všech *reálných i imaginárních* bodů kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$ ve všech případech vystačí k určenosti kvadratické formy f_2 až na konstantní faktor $c \neq 0$, že však znalost všech *reálných* bodů kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$ k tomuto cíli postačí sice v některých případech, ne však ve všech.

Budiž nejprve dána *singulární* kvadrika $\mathbf{Q}_{m-1}$. Jejím *vrcholem* rozumíme vrchol S_k příslušné kvadratické formy f_2. S_k je tedy lineární podprostor v širším smyslu dimense k prostoru $\mathbf{P}_m$, $0 \leqq k \leqq m - 1$. Budiž nejprve $k = m - 1$, takže $S_k = S_{m-1}$ je nadrovina; z (95.9) plyne, že bod $\{X\}$ náleží do $\mathbf{Q}_{m-1}$, právě když náleží do S_{m-1}, takže kvadrika $\mathbf{Q}_{m-1}$ je v tomto případě vlastně totožná s nadrovinou S_{m-1}, která je jejím vrcholem; je zvykem naši $\mathbf{Q}_{m-1}$ nazývat *dvojnásobnou nadrovinou.* Budiž dále $0 \leqq k \leqq m - 2$. V prostoru $\mathbf{P}_m$ můžeme zvolit $(m - k - 1)$-rozměrný lineární podprostor R_h ($h = m - k - 1$, tedy $1 \leqq h \leqq m - 1$) tak, aby S_k a R_h byly totálně nezávislé (viz článek 82). Je-li $A_0, A_1, \dots, A_k$ ar. base pro S_k a je-li $A_{k+1}, \dots, A_m$ ar. base pro R_h, je $A_0, A_1, \dots, A_m$ ar. base pro $\mathbf{P}_m$ a platí (95.6) až (95.8). Z toho plyne, že průnik naší kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$ s prostorem R_h je regulární kvadrika $\mathbf{Q}_{h-1}$ prostoru R_h a dále: *kvadrika $\mathbf{Q}_{m-1}$ se skládá ze všech těch $(k + 1)$-rozměrných lineárních podprostorů prostoru $\mathbf{P}_m$, které jsou spojením jednotlivých bodů kvadriky $\mathbf{Q}_{h-1}$ s vrcholem S_m.* Kvadrika $\mathbf{Q}_{m-1}$ je tedy v uvažovaném případě v podstatě totožná s regulární kvadrikou $(m - k - 1)$-rozměrného projektivního prostoru $\pi(S_k, \mathbf{P}_m)$; tuto regulární kvadriku označíme $\pi(\mathbf{Q}_{m-1})$ a nazveme ji *perspektivou singulární kvadriky* $\mathbf{Q}_{m-1}$. Je-li $\mathbf{Q}_{m-1}$ vytvořena singulární kvadratickou formou f_2, které přísluší bilineární forma f, je $\pi(\mathbf{Q}_{m-1})$ vytvořena regulární kvadratickou formou F_2, které přísluší bilineární forma F definovaná v (95.10). Pravíme, že regulární kvadratická forma F_2 prostoru $\pi(S_k; \mathbf{P}_m)$ je *perspektivou singulární kvadratické formy* f_2 prostoru $\mathbf{P}_m$.

Z předcházejícího je patrné, že studium singulárních kvadrik se v podstatě redukuje na studium regulárních kvadrik v méněrozměrných prostorech. Proto si v následujícím budeme všímat hlavně regulárních kvadrik.

Pokud se týče regulárních kvadrik, všimněme si nejprve případu $m = 1$. Je-li pro $m = 1$ dána regulární kvadratická forma f_2 a je-li f její polární forma, můžeme nejprve zvolit $A_0 \neq \mathbf{o}$ tak, že $f_2(A_0) \neq 0$ neboli $f(A_0, A_0) \neq 0$; snadno se zjistí, že existuje $A_1 \neq \mathbf{o}$ tak, že $f(A_0, A_1) = 0$; ar. body A_0, A_1 jsou zřejmě lineárně nezávislé a je $f(A_1, A_1) \neq 0$, neboť jinak by bylo identicky $f(X, A_1) = 0$ a f by byla singulární. Tedy

$$(96.1) \qquad f_2(A_0) = a_0 \neq 0\,, \quad f_2(A_1) = a_1 \neq 0\,, \quad f(A_0, A_1) = 0\,.$$

Z toho však plyne [viz (94.6) až (94.8)], že pro $X = x_0A_0 + x_1A_1$ je

$$(96.2) \qquad f_2(X) = a_0x_0^2 + a_1x_1^2\,.$$

Tedy (reálná) *regulární kvadrika* $\mathbf{Q}_0$ *na přímce* $\mathbf{P}_1$ *se skládá ze dvou různých komplexních bodů*, které jsou reálné v případě $a_0a_1 < 0$, imaginární a komplexně sdružené v případě $a_0a_1 > 0$.

Tento výsledek můžeme podle předcházejícího aplikovat na singulární kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$ prostoru $\mathbf{P}_m$ $(m \geq 2)$ s $(m - 2)$-rozměrným vrcholem S_{m-2}. Vidíme, že taková $\mathbf{Q}_{m-1}$ se skládá ze dvou různých nadrovin ϱ_1, ϱ_2 protínajících se ve vrcholu S_{m-2}, při čemž nadroviny ϱ_1, ϱ_2 buďto jsou reálné nebo jsou imaginární a komplexně sdružené.

Poznali jsme, že singulární kvadrika $\mathbf{Q}_{m-1}$ s $(m - 1)$-rozměrným vrcholem je (dvojnásobná) nadrovina a že singulární kvadrika $\mathbf{Q}_{m-1}$ s $(m - 2)$-rozměrným vrcholem se skládá ze dvou (reálných nebo imaginárních) nadrovin. Snadno se nahlédne, že v obou uvažovaných případech je

$$(96.3) \qquad f_2(X) = \varphi_1(X) \,.\, \varphi_2(X)\,,$$

kde φ_1, φ_2 jsou lineární formy (které mohou být imaginární, i když $\mathbf{Q}_{m-1}$ je reálná). Předpokládejme obráceně, že kvadrika $\mathbf{Q}_{m-1}$ má tu vlastnost, že obsahuje jako část nadrovinu ϱ a dokažme, že $\mathbf{Q}_{m-1}$ je singulární s $(m - 1)$-rozměrným nebo $(m - 2)$-rozměrným vrcholem. Mají-li f, f_2 obvyklý význam, je $f_2(X) = 0$, kdykoli $\{X\}$ náleží do ϱ, takže podle (95.4) také $f(X_1, X_2) = 0$, kdykoli $\{X_1\}$ i $\{X_2\}$ náležejí do ϱ. Zvolme A tak, že $f_2(A) \neq 0$, takže $A \neq \mathbf{o}$ a $\{A\}$ nenáleží do ϱ. Ježto $f_2(A) = f(A, A) \neq 0$, není $f(A, X) = 0$ identicky; zřejmě $f(A, X) = 0$ je rovnice nadroviny σ. Může být $\sigma = \varrho$ nebo $\sigma \neq \varrho$; v každém případě však existuje $(m - 2)$-rozměrný lineární podprostor S_{m-2}, který je částí obou nadrovin ϱ, σ. Budiž $\{B\}$ libovolný bod prostoru S_{m-2}. Ježto $\{B\}$ náleží do ϱ, je $f(B, Y) = 0$ pro každý bod Y nadroviny ϱ; ježto B náleží do σ, je také $f(B, A) = 0$. Avšak každý ar. bod X má tvar $X = \lambda A + \mu Z$, kde buďto $Z = \mathbf{o}$ nebo $\{Z\}$ náleží do ϱ; ježto $f(B, X) = \lambda f(B, A) + \mu f(B, Z)$, je tudíž $f(B, X) = 0$ pro každý ar. bod X. To však znamená, že kvadrika $\mathbf{Q}_{m-1}$ je singulární a že její vrchol obsahuje všecky body prostoru S_{m-2}, takže dimense vrcholu buďto je rovna $m - 2$ nebo je rovna $m - 1$.

Často jsou užitečné tyto názvy. Každý bod regulární kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$ se nazývá jejím *regulárním bodem.* Je-li kvadrika $\mathbf{Q}_{m-1}$ singulární, potom každý bod jejího vrcholu se jmenuje *singulárním bodem* kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$, kdežto každý jiný bod náležející do $\mathbf{Q}_{m-1}$ se opět jmenuje jejím *regulárním bodem.* Je-li $\mathbf{Q}_{m-1}$ dvojnásobná nadrovina (neboli je-li $\mathbf{Q}_{m-1}$ singulární a má-li její vrchol dimensi $m - 1$), je *každý* bod na $\mathbf{Q}_{m-1}$ jejím singulárním bodem, kdežto v každém jiném případě má $\mathbf{Q}_{m-1}$ *v komplexním oboru* také regulární body, nemusí však vždy mít *reálné* regulární body.

97. POLÁRNÍ VLASTNOSTI KVADRIK. Budiž zase $\mathbf{W}_{m+1}$ ar. základ prostoru $\mathbf{P}_m$. Je-li f symetrická bilineární forma a je-li $f(A, B) = 0$, řekneme, že body A, B jsou *konjugovány* vzhledem k f; podle (94.3) a (94.4) nezáleží na volbě ar. zástupců A, B. Ježto forma f je symetrická, je konjugovanost dvou bodů *vzájemným* vztahem. Je-li f nulová, jsou každé dva body konjugovány a obráceně; v dalším budiž f nenulová. Bilineární forma f určuje kvadratickou formu f_2 a kvadriku $\mathbf{Q}_{m-1}$. Konjugovanost vzhledem k f, vzhledem k f_2 a vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-1}$ nechť znamená jedno a totéž.

Budiž $\mathbf{P}_k$ lineární podprostor dimense k $(1 \leqq k \leqq m - 1)$ prostoru $\mathbf{P}_m$ a budiž $\mathbf{W}_{k+1}$ ar. základ prostoru $\mathbf{P}_k$. Bilineární forma f v $\mathbf{P}_m$ určuje bilineární formu F v $\mathbf{P}_k$: pro X, Y z $\mathbf{W}_{k+1}$ je $F(X, Y) =$

$= f(X, Y)$, avšak $F(X, Y)$ je definováno pouze pro případ, že X, Y náležejí do $\mathbf{W}_{k+1}$; při tom může být F nulová, i když f není nulová. Stejně jako z f vznikne F, vznikne z kvadratické formy f_2 kvadratická forma F_2. Jestliže F je nulová, je prostor $\mathbf{P}_k$ částí kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$ a obráceně, je-li $\mathbf{P}_k$ částí $\mathbf{Q}_{m-1}$, je F nulová. Otázkou, které lineární podprostory leží na kvadrice $\mathbf{Q}_{m-1}$, budeme se později podrobně zabývat. Jestliže F není nulová, protne prostor $\mathbf{P}_k$ kvadriku $\mathbf{Q}_{m-1}$ v $(k - 1)$-rozměrné kvadrice $\mathbf{Q}_{k-1}$. Dva body prostoru $\mathbf{P}_k$ jsou konjugovány vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-1}$, právě když jsou konjugovány vzhledem ke $\mathbf{Q}_{k-1}$; jestliže $\mathbf{P}_k$ je částí $\mathbf{Q}_{m-1}$, jsou každé dva body prostoru $\mathbf{P}_k$ vzájemně konjugovány vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-1}$.

Z definice je zřejmé: Bod $\{A\}$ leží na kvadrice $\mathbf{Q}_{m-1}$, právě když je sám k sobě konjugován. Bod $\{A\}$ je singulárním bodem kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$, právě když je konjugován s *každým* bodem prostoru $\mathbf{P}_m$. Jestliže bod $\{A\}$ není singulárním bodem pro $\mathbf{Q}_{m-1}$, potom ať už $\{A\}$ leží či neleží na $\mathbf{Q}_{m-1}$, množina všech bodů konjugovaných s bodem $\{A\}$ tvoří nadrovinu, která se jmenuje *polární nadrovinou* bodu $\{A\}$ vzhledem ke kvadrice $\mathbf{Q}_{m-1}$; při tom bod $\{A\}$ leží ve své polární nadrovině, právě když leží na kvadrice $\mathbf{Q}_{m-1}$ (a je ovšem jejím regulárním bodem). O singulárním bodě kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$ pravíme, že *nemá určitou polární nadrovinu* vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-1}$. Jestliže $\{A\}$ má určitou polární nadrovinu, potom v případě singulární $\mathbf{Q}_{m-1}$ tato nadrovina obsahuje všechny singulární body, t. j. prochází vrcholem kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$.

Jestliže kvadrika $\mathbf{Q}_{m-1}$ je regulární, potom také příslušná bilineární forma f je regulární. Ježto f je symetrická, vytvořuje polární korelaci K, ve které právě obrazem každého bodu je jeho polární nadrovina vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-1}$; K se nazývá *polarita vzhledem ke* $\mathbf{Q}_{m-1}$. Ježto korelace prostoru $\mathbf{P}_m$ je vzájemně jednoznačný vztah mezi prvky prostoru $\mathbf{P}_m$ a duálního prostoru $\tilde{\mathbf{P}}_m$, je každá nadrovina ϱ prostoru $\mathbf{P}_m$ polární nadrovinou právě jednoho bodu, který se nazývá *pólem* nadroviny ϱ vzhledem k regulární kvadrice $\mathbf{Q}_{m-1}$.

Jinak tomu je v případě, že $\mathbf{Q}_{m-1}$ je singulární kvadrika s k-rozměrným vrcholem S_k $(0 \leqq k \leqq m - 1)$. Je-li nejprve $k = m - 1$, je $\mathbf{Q}_{m-1}$ dvojnásobnou nadrovinou S_{m-1}; bod, který leží v S_{m-1}, nemá určitou polární nadrovinu, kdežto polární nadrovina všech jiných bodů je jedna a táž, totiž nadrovina S_{m-1}. Je-li $0 \leqq k \leqq m - 2$, potom podle článku 96 kvadrika $\mathbf{Q}_{m-1}$ se skládá z $(k + 1)$-rozměrných lineárních podprostorů, které v prostoru $\pi(S_k ; \mathbf{P}_m)$ tvoří $(m - k - 2)$-rozměrnou regulární kvadriku $\pi(\mathbf{Q}_{m-1})$, kterou jsme nazvali perspektivou singulární kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$. Body prostoru S_k nemají určitou polární nadrovinu vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-1}$. Polární nadrovina každého jiného bodu prochází prostorem S_k, je tedy prvkem prostoru, který jsme v (81.2) označili $\tilde{\pi}(S_k ; \mathbf{P}_m)$ a který je duální k prostoru $\pi(S_k ; \mathbf{P}_m)$. Dva mimo S_k ležící body mají touž polární nadrovinu ϱ vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-1}$, právě když přímka je spojující protne S_k; oba body leží potom v témž $\mathbf{P}_{k+1}$ obsahujícím S_k; tento $\mathbf{P}_{k+1}$ je prvkem („bodem") prostoru $\pi(S_k ; \mathbf{P}_m)$ a jeho polární nadrovinou vzhledem k perspektivě $\pi(\mathbf{Q}_{m-1})$ je právě nadrovina ϱ. Můžeme také postupovat tak, že v $\mathbf{P}_m$ zvolíme $(m - k - 1)$-rozměrný lineární podprostor R_{m-k-1} totálně nezávislý na S_k, který protne $\mathbf{Q}_{m-1}$ v $(m - k - 2)$-rozměrné regulární kvadrice $\mathbf{Q}_{m-k-2}$. Je-li nyní $\{A\}$ libovolný bod prostoru $\mathbf{P}_m$, který neleží v S_k, potom spojení bodu $\{A\}$ s prostorem S_k je $(k + 1)$-rozměrný lineární podprostor, jenž protne R_{m-k-1} v bodě $\{B\}$; v prostoru R_{m-k-1} je polární nadrovinou bodu $\{B\}$ vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-k-2}$ určitý $(m - k - 2)$-rozměrný lineární podprostor, jehož spojením s prostorem S_k je právě polární nadrovina bodu $\{A\}$ vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-1}$.

Pro $m = 2$ nadrovina je přímkou a místo polární nadrovina se pro $m = 2$ často říká prostě *polára.* Pro $m = 1$ nadrovina je bodem a pojem polární nadroviny daného bodu splývá s pojmem bodu konjugovaného s tímto bodem.

Jestliže kvadrika $\mathbf{Q}_0$ prostoru $\mathbf{P}_1$ je singulární, je jejím vrcholem bod S_0 a $\mathbf{Q}_0$ se skládá z tohoto jediného bodu (dvojnásobný bod); dva body přímky $\mathbf{P}_1$ jsou navzájem konjugované vzhledem k singulární $\mathbf{Q}_0$, právě když jeden z nich splyne s vrcholem S_0. Jestliže kvadrika $\mathbf{Q}_0$ prostoru $\mathbf{P}_1$ je regulární, potom se $\mathbf{Q}_0$ skládá ze dvou různých komplexních bodů A, B, které jsou buďto oba reálné nebo jsou imaginární a komplexně sdružené. V obou případech jsou A, B dvojnými body involuce na $\mathbf{P}_1$ (hyperbolické nebo eliptické) a polarita vzhledem ke $\mathbf{Q}_0$ je totožná s touto involucí.

Dva body C_1, C_2 přímky $\mathbf{P}_1$ jsou konjugované vzhledem k naší regulární $\mathbf{Q}_0$, právě když nastane jeden z těchto tří případů: (1) $C_1 =$

$= C_2 = A$; (2) $C_1 = C_2 = B$; (3) všecky čtyři body A , B , C_1 , C_2 jsou navzájem různé a tvoří harmonickou čtveřici.

Budiž nyní v prostoru $\mathbf{P}_m$ ($m \geqq 2$) dána jednak kvadrika $\mathbf{Q}_{m-1}$, jednak přímka $\mathbf{P}_1$. Budeme zkoumat, jakou vzájemnou polohu mají $\mathbf{Q}_{m-1}$ a $\mathbf{P}_1$. Může se stát, že přímka $\mathbf{P}_1$ je částí kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$; není-li tomu tak, protne $\mathbf{P}_1$ kvadriku $\mathbf{Q}_{m-1}$ v kvadrice $\mathbf{Q}_0$; to znamená, že $\mathbf{P}_1$ a $\mathbf{Q}_{m-1}$ mají buďto jediný (reálný) společný bod, nebo právě dva komplexní společné body, buďto oba reálné nebo oba imaginární. Přímku, která má s kvadrikou $\mathbf{Q}_{m-1}$ právě dva společné *reálné* body, nazveme *sečnou* kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$; přímku, která nemá s kvadrikou $\mathbf{Q}_{m-1}$ žádný reálný společný bod (která tedy protne $\mathbf{Q}_{m-1}$ ve dvou imaginárních komplexně sdružených bodech), nazveme *nesečnou*[1]) kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$; přímku, která má s $\mathbf{Q}_{m-1}$ společný jediný (reálný) bod A , nazveme *tečnou* kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$ v tomto bodě A (a v žádném jiném bodě); posléze přímku, která leží celá na $\mathbf{Q}_{m-1}$, považujeme za *tečnu* kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$ v každém bodě takové přímky.

Připomeňme si nyní, že dva body přímky $\mathbf{P}_1$ jsou konjugované vzhledem ke kvadrice $\mathbf{Q}_{m-1}$, právě když buďto celá přímka $\mathbf{P}_1$ je částí $\mathbf{Q}_{m-1}$ nebo uvažované body jsou konjugované vzhledem ke $\mathbf{Q}_0$, která je průnikem $\mathbf{P}_1$ s $\mathbf{Q}_{m-1}$. Z toho plyne především, že jestliže bod A kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$ leží na přímce $\mathbf{P}_1$, je $\mathbf{P}_1$ tečnou kvadriky, právě když A je vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-1}$ konjugován s každým bodem přímky $\mathbf{P}_1$. V důsledku toho, je-li A singulárním bodem kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$, je *každá* přímka jdoucí bodem A tečnou pro $\mathbf{Q}_{m-1}$; je-li však A regulárním bodem kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$, má bod A vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-1}$ určitou polární nadrovinu ϱ , která prochází bodem A a jmenuje se *tečná nadrovina* kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$ v bodě A ; přímka jdoucí regulárním bodem A kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$ je tečnou pro $\mathbf{Q}_{m-1}$ v bodě A , právě když leží v tečné nadrovině ϱ . Uvědomëme si též, že přímka $\mathbf{P}_1$ procházející bodem A na kvadrice $\mathbf{Q}_{m-1}$ může být tečnou pro $\mathbf{Q}_{m-1}$ v bodě různém od bodu A pouze tehdy, když celá přímka $\mathbf{P}_1$ je částí kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$.

Pro $m = 2$ pojem nadroviny splývá s pojmem přímky; kvadrika $\mathbf{Q}_1$ má v každém svém regulárním bodě A jedinou tečnu, která je zároveň polárou bodu A vzhledem ke $\mathbf{Q}_1$.

---

[1]) Název „nesečna" pochází od J. Vyšína.

Dále platí: Bod A je sám k sobě konjugován vzhledem ke kvadrice $\mathbf{Q}_{m-1}$, právě když leží na $\mathbf{Q}_{m-1}$. Dva *různé* body A, B jsou navzájem konjugované vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-1}$, právě když nastane jeden z následujících tří případů: (1) celá přímka AB je částí kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$; (2) přímka AB má s $\mathbf{Q}_{m-1}$ společný jediný bod, který je totožný s jedním z obou daných bodů A, B; (3) žádný z obou bodů A, B neleží na kvadrice $\mathbf{Q}_{m-1}$, která má s přímkou AB společné dva různé reálné nebo imaginární body H, K, při čemž A, B, H, K je harmonická čtveřice. Z toho plyne, že známe-li všecky *reálné i imaginární* body kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$, je tím určena též polarita vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-1}$. Potom je však (viz počátek článku 101) až na konstantní faktor určena také příslušná kvadratická forma f_2 i bilineární symetrická forma f. V kterých případech postačí znalost všech *reálných bodů* kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$, o tom si promluvíme až v článku 101.

98. DUÁLNÍ KVADRIKY. K danému projektivnímu prostoru $\mathbf{P}_m$ jsme zavedli v článku 74 duální projektivní prostor $\tilde{\mathbf{P}}_m$. Kvadriku prostoru $\tilde{\mathbf{P}}_m$ označme $\tilde{\mathbf{Q}}_{m-1}$ a nazveme ji *duální kvadrikou* prostoru $\mathbf{P}_m$. Tak jako vzhledem ke kvadrice $\mathbf{Q}_{m-1}$ prostoru $\mathbf{P}_m$ máme pojem dvojice konjugovaných bodů tohoto prostoru, máme vzhledem k duální kvadrice $\tilde{\mathbf{Q}}_{m-1}$ pojem (konjugovaných bodů duálního prostoru, t. j.) konjugovaných nadrovin prostoru $\mathbf{P}_m$. Jako $\mathbf{Q}_{m-1}$ může být i $\tilde{\mathbf{Q}}_{m-1}$ buďto regulární nebo singulární. Je-li $\tilde{\mathbf{Q}}_{m-1}$ regulární, potom pro libovolně danou nadrovinu ϱ prostoru $\mathbf{P}_m$ množina všech nadrovin konjugovaných s ϱ tvoří duální nadrovinu, t. j. skládá se ze všech nadrovin procházejících určitým bodem B prostoru $\mathbf{P}_m$, který nazveme *pólem* nadroviny ϱ vzhledem k duální kvadrice $\tilde{\mathbf{Q}}_{m-1}$; přechodu od $\mathbf{P}_m$ k $\tilde{\mathbf{P}}_m$ a tedy od $\mathbf{Q}_{m-1}$ ke $\tilde{\mathbf{Q}}_{m-1}$ tedy odpovídá přechod od polární nadroviny bodu k pólu nadroviny. Jestliže nadrovina ϱ náleží do $\tilde{\mathbf{Q}}_{m-1}$, potom její pól nazýváme jejím *bodem dotyku*; přechodu od $\mathbf{P}_m$ k $\tilde{\mathbf{P}}_m$ a tedy od $\mathbf{Q}_{m-1}$ ke $\tilde{\mathbf{Q}}_{m-1}$ tedy odpovídá přechod od tečné nadroviny bodu na $\mathbf{Q}_{m-1}$ k bodu dotyku nadroviny náležející do $\tilde{\mathbf{Q}}_{m-1}$. Dosud jsme předpokládali, že $\tilde{\mathbf{Q}}_{m-1}$ je regulární. Budiž nyní $\tilde{\mathbf{Q}}_{m-1}$ singulární. Potom existuje aspoň jedna taková nadrovina σ prostoru $\mathbf{P}_m$, k níž je vzhledem ke $\tilde{\mathbf{Q}}_{m-1}$ konjugována *každá* nadrovina prostoru $\mathbf{P}_m$; taková nadrovina σ nutně náleží do $\tilde{\mathbf{Q}}_{m-1}$ a nazývá se singulární nadrovinou duální kvadriky $\tilde{Q}_{m-1}$; každá jiná nadrovina náležející do $\tilde{Q}_{m-1}$ se jmenuje regulární nadrovina duální kvadriky $\tilde{Q}_{m-1}$. (Je-li $\tilde{Q}_{m-1}$ regulární, potom ovšem každá nadrovina náležející do $\tilde{Q}_{m-1}$ je její regulární nadrovinou.) Je-li $\tilde{Q}_{m-1}$ singulární, potom k nadrovině ϱ *zpravidla* existuje opět určitý pól B vzhledem ke $\tilde{Q}_{m-1}$, což je bod té vlastnosti, že nadrovina je konjugována s ϱ vzhledem ke $\tilde{Q}_{m-1}$, právě když obsahuje bod B; výjimku tvoří singulární nadroviny duální kvadriky, které nemají určitý pól. Je-li $\tilde{Q}_{m-1}$ singulární, potom pojem, který při přechodu od P_m, Q_{m-1} k $\tilde{P}_m$, $\tilde{Q}_{m-1}$ odpovídá pojmu vrcholu singulární kvadriky Q_{m-1}, je pojem množiny všech singulárních nadrovin duální kvadriky $\tilde{Q}_{m-1}$. Tato množina tvoří duální podprostor v širším smyslu dimense k $(0 \leq k \leq \leq m-1)$ prostoru P_m a tedy podle článku 75 se skládá ze všech nadrovin procházejících určitým lineárním podprostorem v širším smyslu dimense $m-k-1$, který označíme Σ_{m-k-1} a který podle terminologie článku 75 je vrcholem výše zmíněného duálního podprostoru; nazveme Σ_{m-k-1} *duálním vrcholem* singulární duální kvadriky $\tilde{Q}_{m-1}$.

Nyní je účelné vsunout tuto poznámku, která je snadným důsledkem našich definic. Je-li K kolineární zobrazení prostoru P_m na prostor P'_m a je-li v P_m dána kvadrika Q_{m-1}, je její obraz Q'_{m-1} při K opět kvadrikou prostoru Q_{m-1}. Obrazy dvou bodů konjugovaných vzhledem ke Q_{m-1} jsou dva body konjugované vzhledem ke Q'_{m-1}; je-li Q_{m-1} regulární nebo singulární, platí totéž o Q'_{m-1}; obrazem vrcholu singulární Q_{m-1} je vrchol obrazu Q'_{m-1} atd. atd. Tuto poznámku můžeme zejména aplikovat na ten případ, že prostor P'_m je totožný s duálním prostorem $\tilde{P}_m$, že tedy K je korelace prostoru P_m. Zvláště důležitý je následující speciální případ.

Budiž v prostoru P_m dána *regulární* kvadrika Q_{m-1}. Jestliže každému bodu prostoru P_m přiřadíme jeho polární nadrovinu vzhledem ke Q_{m-1}, dostaneme (viz str. 110) korelaci K prostoru P_m, kterou jsme nazvali polaritou vzhledem ke Q_{m-1}. Obrazem při K každého bodu kvadriky Q_{m-1} samotné je, jak víme, jeho tečná nadrovina. Tedy *množina všech tečných nadrovin regulární kvadriky* Q_{m-1} *tvoří regulární duální kvadriku* téhož prostoru, kterou nazveme *dualisací* původní regulární kvadriky Q_{m-1}.

Budiž $\mathbf{Q}_{m-1}$ regulární kvadrika prostoru $\mathbf{P}_m$ a budiž $\tilde{\mathbf{Q}}_{m-1}$ její dualisace. Budiž A libovolný bod prostoru $\mathbf{P}_m$ a budiž $\varrho = KA$. Ježto polarita vzhledem ke $\tilde{\mathbf{Q}}_{m-1}$ vznikne z polarity vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-1}$ provedením zobrazení K, je pólem nadroviny ϱ vzhledem ke $\tilde{\mathbf{Q}}_{m-1}$ ten bod B, jímž procházejí obrazy při K jednotlivých bodů polární nadroviny bodu A vzhledem ke $\tilde{\mathbf{Q}}_{m-1}$, t. j. nadroviny ϱ. To však znamená, že $B = \tilde{K}\varrho$, kde $\tilde{K}$ je duální korelace ke K. Ježto však korelace K je involutorní, je $\tilde{K} = K^{-1}$, tedy $B = K^{-1}\varrho$, t. j. $B = A$. Tudíž *pól nadroviny ϱ vzhledem k regulární kvadrice $\mathbf{Q}_{m-1}$ je zároveň pólem téže nadroviny vzhledem k její dualisaci $\tilde{\mathbf{Q}}_{m-1}$*.

V článku 96 jsme poznali, že singulární kvadrika $\mathbf{Q}_{m-1}$ s k-rozměrným vrcholem S_k $(0 \leqq k \leqq m - 1)$ pro $k = m - 1$ splyne s nadrovinou S_{m-1} (a nazývá se dvojnásobnou nadrovinou), a v případě $0 \leqq k \leqq m - 2$ se skládá z $(k + 1)$-rozměrných lineárních podprostorů procházejících prostorem S_k, které tvoří regulární kvadriku prostoru $\pi(S_k; \mathbf{P}_m)$. Aplikujeme-li na tento výsledek princip duality, dostaneme, že singulární duální kvadrika $\tilde{\mathbf{Q}}_{m-1}$ s $(m - k - 1)$-rozměrným duálním vrcholem Σ_{m-k-1} $(0 \leqq k \leqq m - 1)$ pro $k = m - 1$ splyne s množinou všech nadrovin procházejících bodem Σ_0 (takovou $\tilde{\mathbf{Q}}_{m-1}$ můžeme nazvat *dvojnásobným bodem*); v případě $0 \leqq k \leqq m - 2$ se $\tilde{\mathbf{Q}}_{m-1}$ skládá ze všech těch nadrovin prostoru $\mathbf{P}_m$, které procházejí některým $(m - k - 2)$-rozměrným tečným prostorem určité regulární duální kvadriky projektivního prostoru Σ_{m-k-1}, t. j. $\tilde{\mathbf{Q}}_{m-1}$ je množinou všech nadrovin prostoru $\mathbf{P}_m$ procházejících těmi nadrovinami prostoru Σ_{m-k-1}, které jsou v tomto Σ_{m-k-1} tečnými nadrovinami určité regulární $\mathbf{Q}_{m-k-2}$. V případě $k = m - 2$ se naše $\tilde{\mathbf{Q}}_{m-1}$ skládá ze všech nadrovin procházejících jedním ze dvou daných komplexních bodů, jež jsou buďto reálné nebo jsou imaginární a komplexně sdružené.

Vraťme se k *regulární* kvadrice $\mathbf{Q}_{m-1}$ prostoru $\mathbf{P}_m$ a předpokládejme, že $\mathbf{Q}_{m-1}$ je vytvořena regulární symetrickou bilineární formou f prostoru $\mathbf{P}_m$. Ukážeme, jak lze vypočíst regulární symetrickou bilineární formu φ duálního prostoru $\tilde{\mathbf{P}}_m$, která vytvořuje dualisaci $\tilde{\mathbf{Q}}_{m-1}$ kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$. Zvolme v $\mathbf{P}_m$ ar. basi

$$(98.1) \qquad A_0, A_1, \ldots, A_m.$$

a budiž

$$(98.2) \qquad \tilde{A}_0, \tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_m$$

duální ar. base prostoru $\tilde{\mathbf{P}}_m$. Existují čísla a_{rs} $(0 \leqq r, s \leqq m)$ tak, že $a_{rs} = a_{sr}$ a že pro

$$(98.3) \qquad X = x_0 A_0 + \dots + x_m A_m, \qquad Y = y_0 A_0 + \dots + y_m A_m$$

je

$$(98.4) \qquad f(X, Y) = \sum_{r=0}^{m} \sum_{s=0}^{m} a_{rs} x_r y_s .$$

Ježto f je regulární, je

$$(98.5) \qquad \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0m} \\ a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m0} & a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Nyní pro

$$(98.6) \qquad \tilde{X} = \xi_0 \tilde{A}_0 + \dots + \xi_m \tilde{A}_m, \qquad \tilde{Y} = \eta_0 \tilde{A}_0 + \dots + \eta_m \tilde{A}_m$$

položme

$$(98.7) \qquad \varphi(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0m} & \xi_0 \\ a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1m} & \xi_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m0} & a_{m1} & \dots & a_{mm} & \xi_m \\ \eta_0 & \eta_1 & \dots & \eta_m & 0 \end{vmatrix} .$$

Ukážeme, že φ je žádaná bilineární forma v $\tilde{\mathbf{P}}_m$. Máme tedy dokázat, že za předpokladu $\tilde{X} \neq \mathbf{o}$, $\tilde{Y} \neq \mathbf{o}$ je $\varphi(\tilde{X}, \tilde{Y}) = 0$, právě když nadroviny $\{\tilde{X}\}$, $\{\tilde{Y}\}$ jsou konjugované vzhledem ke $\tilde{\mathbf{Q}}_{m-1}$. Předpokládejme tedy nejprve, že $\{\tilde{X}\}$, $\{\tilde{Y}\}$ jsou konjugované vzhledem ke $\tilde{\mathbf{Q}}_{m-1}$. Budiž $\{Z\}$ pól nadroviny $\{\tilde{X}\}$ vzhledem ke $\tilde{\mathbf{Q}}_{m-1}$, t. j. podle předcházejícího vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-1}$; potom nadrovina $\{\tilde{Y}\}$ prochází bodem $\{Z\}$. Je-li

$$(98.8) \qquad Z = z_0 A_0 + z_1 A_1 + \dots + z_m A_m ,$$

je aspoň jedno z čísel $z_0, z_1, \dots, z_m$ různé od nuly a je jednak

$$(98.9) \qquad z_0 \eta_0 + z_1 \eta_1 + \dots + z_m \eta_m = 0 ,$$

jednak

$$(98.10) \qquad a_{r0} z_0 + a_{r1} z_1 + \dots + a_{rm} z_m + b \xi_r = 0 \quad \text{pro} \quad 0 \leqq r \leqq m ,$$

kde $b \neq 0$. Avšak (98.9) a (98.10) je soustava $m + 1$ lineárních homogenních rovnic o $m + 1$ neznámých $z_0, z_1, \dots, z_m, b$ s netriviálním řešením, takže determinant soustavy je roven nule a tedy podle (98.7) je $\varphi(\tilde{X}, \tilde{Y}) = 0$. Za druhé předpokládejme, že $\varphi(\tilde{X}, \tilde{Y}) = 0$, při čemž opět $\tilde{X} \neq \mathbf{o}$, $\tilde{Y} \neq \mathbf{o}$. Soustava rovnic (98.9) a (98.10) má tedy determinant rovný nule a tudíž má netriviální řešení $z_0, z_1, \dots, z_m, b$. Není možné, aby bylo $Z = \mathbf{o}$, kde Z má význam (98.8), neboť potom by bylo $b \neq 0$ a rovnice (98.10) by daly $\tilde{X} = \mathbf{o}$. Také není možné, aby bylo $b = 0$, neboť potom by bylo $Z \neq \mathbf{o}$ a z rovnic (98.10) by plynulo, že determinant nalevo v (98.5) by byl roven nule. Je tudíž $Z \neq \mathbf{o}$, $b \neq 0$, načež z (98.10) plyne, že $\{\tilde{X}\}$ je polární nadrovina bodu $\{Z\}$, t. j. že $\{Z\}$ je pól nadroviny $\{\tilde{X}\}$ vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-1}$ a tudíž i vzhledem ke $\tilde{\mathbf{Q}}_{m-1}$. Avšak podle (98.9) bod $\{Z\}$ leží v nadrovině $\{\tilde{Y}\}$, takže $\{\tilde{X}\}$ a $\{\tilde{Y}\}$ jsou konjugovány vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-1}$.

Můžeme se ptát, jaký význam má forma (98.7), je-li $\mathbf{Q}_{m-1}$ singulární kvadrika s k-rozměrným vrcholem S_k, tedy $0 \leqq k \leqq m - 1$. Je-li především $k = 0$, t. j. je-li S_0 bod, je $\varphi(\tilde{X}, \tilde{Y}) = 0$ pro $\tilde{X} \neq \mathbf{o}$, $Y \neq \mathbf{o}$, právě když aspoň jedna z obou nadrovin $\{\tilde{X}\}$, $\{\tilde{Y}\}$ prochází bodem S_0. Neboť $\varphi(\tilde{X}, \tilde{Y}) = 0$ podle (98.7) znamená, že soustava rovnic (98.9) a (98.10) má netriviální řešení $z_0, z_1, \dots, z_m, b$, ve kterém je buďto $b = 0$ nebo $b \neq 0$. Je-li však $b = 0$, potom v (98.8) je $Z \neq \mathbf{o}$, (98.9) znamená, že nadrovina $\{\tilde{Y}\}$ prochází bodem $\{Z\}$, a (98.10), kde $b = 0$, znamená, že bod $\{Z\}$ je singulární, t. j. že $\{Z\} = S_0$, takže nadrovina $\{\tilde{Y}\}$ prochází bodem S_0. Jestliže za druhé je $b \neq 0$, je opět $Z \neq \mathbf{o}$, a (98.10) znamená, že nadrovina $\{\tilde{X}\}$ je polární nadrovinou bodu $\{Z\}$, takže $\{\tilde{X}\}$, jako každá polární nadrovina, prochází singulárním bodem S_0. Je-li nyní $1 \leqq k \leqq m - 1$, je $\varphi(\tilde{X}, \tilde{Y}) = 0$ identicky. Neboť ježto singulární body tvoří nyní celý prostor S_k, obsahuje každá nadrovina $\{\tilde{Y}\}$ aspoň jeden singulární bod $\{Z\}$, takže soustava (98.9) a (98.10) má netriviální řešení (ve kterém $b = 0$, ale na tom nezáleží) a determinant napravo v (98.7) je roven nule, t. j. $\varphi(\tilde{X}, \tilde{Y}) = 0$.

99. FORMÁLNĚ A BODOVĚ REÁLNÉ KVADRIKY. Kvadratickou formu f_2 nazveme *kladnou*, jestliže $f_2(X) \geqq 0$ pro každý ar. bod X; nazveme f_2 *zápornou*, jestliže $f_2(X) \leqq 0$ pro každý ar. bod X. Ježto f_2

není identicky rovna nule, není možné, aby jedna a táž f_2 byla zároveň kladná i záporná; naproti tomu se může stát, ža daná f_2 není ani kladná, ani záporná.

Kvadratickou formu f_2 nazveme *definitně kladnou*, je-li $f_2(X) > 0$ pro každý ar. bod $X \neq \mathbf{o}$; *definitně zápornou*, je-li $f_2(X) < 0$ pro každý ar. bod $X \neq \mathbf{o}$, *definitní*, je-li f_2 buďto definitně kladná nebo definitně záporná. Zřejmě každá definitně kladná f_2 je zároveň kladná, každá definitně záporná f_2 je zároveň záporná. Na otázku, do jaké míry je tomu také tak obráceně, dává odpověď:

VĚTA 99.1. *Budiž f_2 kladná nebo záporná kvadratická forma. Potom f_2 je definitní, právě když je regulární.*

DŮKAZ. Je-li f_2 singulární, má reálný singulární bod $\{X\}$ a je $f_2(X) = 0$, $X \neq \mathbf{o}$, takže f_2 nemůže být definitní. Obráceně nechť f_2 není definitní a pro určitost nechť f_2 je kladná. Ježto f_2 není definitní, existuje bod $\{A\}$ tak, že $f_2(A) = 0$. Stačí dokázat, že $\{A\}$ je singulární. Nechť naopak $\{A\}$ je regulární. Potom existuje bod $\{B\}$ tak, že $f(A, B) = c \neq 0$; ježto $f_2(A) = f(A, A) = 0$, je $\{B\} \neq \{A\}$. Pro libovolné t je podle (94.4) a (95.4), ježto $f_2(A) = 0$,

$$f_2(A + tB) = 2t \, . \, f(A, B) + t^2 \, . \, f(B) = t(2c + dt) \,,$$

kde $d = f_2(B)$. Zřejmě lze zvolit reálné číslo t tak, aby bylo $t(2c + dt) < 0$, t. j. $f_2(A + tB) < 0$; to je však nemožné, ježto f_2 je kladná.

Kvadratickou formu f_2 nazveme *semidefinitní*, je-li kladná nebo záporná, není-li však definitní; f_2 nazveme *indefinitní*, není-li ani kladná, ani záporná. Každá kvadratická forma f_2 náleží tudíž do právě jedné ze tří kategorií: definitní, semidefinitní, indefinitní. Podle věty 99.1 prvá kategorie obsahuje pouze regulární a druhá pouze singulární formy; třetí kategorie obsahuje jak regulární, tak i singulární formy.

VĚTA 99.2. *Je-li kvadrika $\mathbf{Q}_{m-1}$ vytvořena kvadratickou formou f_2, potom $\mathbf{Q}_{m-1}$ obsahuje aspoň jeden regulární reálný bod, právě když f_2 je indefinitní.*

DŮKAZ. Je-li f_2 definitní, potom $\mathbf{Q}_{m-1}$ zřejmě neobsahuje vůbec žádný reálný bod. Je-li f_2 semidefinitní, plyne z důkazu věty 99.1, že každý reálný bod kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$ je singulární. Budiž posléze f_2 indefinitní. Potom existují body $\{A\}$, $\{B\}$ tak, že

$$(99.1) \qquad f_2(A) > 0\,, \qquad f_2(B) < 0\,.$$

Podle 95.4 je

$$f_2(A + tB) = f_2(A) + 2t\,.\,\dot{f}_2(B) + t^2\,.\,f_2(B)\,.$$

Z toho plyne podle (99.1), že přímka AB protne $\mathbf{Q}_{m-1}$ v právě dvou reálných bodech $\{C_1\}$, $\{C_2\}$. Bod $\{C_1\}$ je *regulárním* bodem kvadriky Q_{m-1}, neboť každá přímka procházející singulárním bodem podle str. 112 je tečnou kvadriky, má tedy s $\mathbf{Q}_{m-1}$ buďto jediný společný bod nebo je celá částí kvadriky.

Kvadriku $\mathbf{Q}_{m-1}$ prostoru $\mathbf{P}_m$ nazveme: (1) *formálně reálnou*, neobsahuje-li žádný reálný regulární bod; (2) *bodově reálnou*, obsahuje-li nějaký reálný regulární bod. Regulární formálně reálná kvadrika neobsahuje tedy vůbec žádný reálný bod; množina všech reálných bodů singulární formálně reálné kvadriky není prázdná a je totožná s vrcholem kvadriky. Z toho plyne snadno, že polarita vzhledem k formálně reálné $\mathbf{Q}_{m-1}$, která není dvojnásobnou nadrovinou, nikterak není určena znalostí množiny všech reálných bodů kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$. V článku 101 poznáme, že u bodově reálné $\mathbf{Q}_{m-1}$ je tomu naopak.

Z vět 99.1 a 99.2 plyne

VĚTA 99.3. *Kvadrika $\mathbf{Q}_{m-1}$ prostoru $\mathbf{P}_m$ budiž vytvořena kvadratickou formou f_2. Potom $\mathbf{Q}_{m-1}$ je bodově reálná, právě když f_2 je indefinitní; $\mathbf{Q}_{m-1}$ je regulární a formálně reálná, právě když f_2 je definitní; $\mathbf{Q}_{m-1}$ je singulární a formálně reálná, právě když f_2 je semidefinitní.*

VĚTA 99.4. *Singulární kvadrika $\mathbf{Q}_{m-1}$ prostoru $\mathbf{P}_m$, jejíž vrchol má dimensi $m - 1$, je formálně reálná.* Neboť taková kvadrika podle článku 96 neobsahuje vůbec žádné (ani reálné, ani imaginární) regulární body.

Všimněme si specielně kvadriky $\mathbf{Q}_0$ prostoru $\mathbf{P}_1$ vytvořené kvadratickou formou f_2. Jestliže $\mathbf{Q}_0$ je singulární, potom podle věty 99.4 je $\mathbf{Q}_0$ formálně reálná, takže podle věty 99.3 je f_2 semidefinitní. Jestliže $\mathbf{Q}_0$ je regulární, skládá se $\mathbf{Q}_0$ ze dvou různých komplexních bodů C_1, C_2, které jsou buďto oba reálné ($\mathbf{Q}_0$ je bodově reálná) nebo jsou imaginární a komplexně sdružené ($\mathbf{Q}_0$ je formálně reálná); v prvém případě je $\mathbf{Q}_0$ indefinitní, ve druhém definitní.

Budiž nyní dána kvadrika $\mathbf{Q}_{m-1}$ prostoru $\mathbf{P}_m$ vytvořená kvadratickou formou f_2 a tudíž také každou kvadratickou formou tvaru cf_2, kde $c \neq 0$ je libovolná konstanta. Při dané volbě formy f_2 můžeme ty body $\{X\}$ prostoru $\mathbf{P}_m$, které neleží na $\mathbf{Q}_{m-1}$, rozdělit na dvě třídy podle toho, zda je $f_2(X) > 0$ či $f_2(X) < 0$; z (95.5) plyne, že nezáleží na volbě ar. zástupce g. bodu $\{X\}$. Nazveme *kladnými vzhledem ke* $\mathbf{Q}_{m-1}$ ty body $\{X\}$, pro něž je $f_2(X) > 0$, *zápornými vzhledem ke* $\mathbf{Q}_{m-1}$ ty body $\{X\}$, pro něž je $f_2(X) < 0$; řekneme potom, že kvadrika $\mathbf{Q}_{m-1}$ je *orientována*, čímž míníme právě rozlišení bodů $\{X\}$ ležících mimo $\mathbf{Q}_{m-1}$ na kladné a záporné. Určitěji mluvíme o orientaci *vytvořené* formou f_2; jsou zřejmě právě dvě různé orientace kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$, při čemž pro $c > 0$ orientace vytvořená formou cf_2 je táž jako orientace vytvořená formou f_2, kdežto pro $c < 0$ dostáváme *opačnou orientaci*.

Je-li $\mathbf{P}_k$ lineární podprostor prostoru $\mathbf{P}_m$, který není celý obsažen v $\mathbf{Q}_{m-1}$, potom $\mathbf{P}_k$ protne $\mathbf{Q}_{m-1}$ v kvadrice $\mathbf{Q}_{k-1}$. Je-li $\mathbf{Q}_{m-1}$ vytvořena kvadratickou formou f_2, je $\mathbf{Q}_{k-1}$ vytvořena kvadratickou formou F_2, pro kterou je $F_2(X) = f_2(X)$ při všech $\{X\}$ prostoru $\mathbf{P}_k$ a F_2 se liší od f_2 pouze tím, že $f_2(X)$ je definováno i tam, kde $F_2(X)$ definováno není. Proto forma f_2, která orientuje kvadriku $\mathbf{Q}_{m-1}$, orientuje zároveň také kvadriku $\mathbf{Q}_{k-1}$; pravíme potom, že $\mathbf{Q}_{k-1}$ je *souhlasně orientována* s $\mathbf{Q}_{m-1}$. Je-li dána určitá orientace pro $\mathbf{Q}_{m-1}$, potom pro každý $\mathbf{P}_k$ vnořený do $\mathbf{P}_m$, který není částí $\mathbf{Q}_{m-1}$ a který tudíž protne $\mathbf{P}_k$ v kvadrice $\mathbf{Q}_{k-1}$, uvažujeme vždy takovou $\mathbf{Q}_{k-1}$ v orientaci souhlasné s orientací danou pro $\mathbf{Q}_{m-1}$. Poznamenejme ještě, že je-li forma f_2 definitní, je zřejmě také F_2 definitní; je-li f_2 semidefinitní, je buďto definitní nebo semidefinitní; je-li však f_2 indefinitní, může F_2 náležet do kterékoli z našich tří kategorií.

Je-li kvadrika $\mathbf{Q}_{m-1}$ formálně reálná, potom podle věty 99.3 buďto množina bodů kladných vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-1}$ nebo množina bodů záporných vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-1}$ je prázdná, kdežto u bodově reálné $\mathbf{Q}_{m-1}$ není prázdnou žádná z obou množin. Je-li zejména $m = 1$, potom $\mathbf{Q}_0$ je bodově reálná, právě když se skládá ze dvou různých reálných bodů; jestliže tedy na přímce $\mathbf{P}_1$, jejíž částí je $\mathbf{Q}_0$, máme dva body A_0, A_1, z nichž jeden je kladný a druhý záporný vzhledem ke $\mathbf{Q}_0$, skládá se $\mathbf{Q}_0$ ze dvou různých reálných bodů. Předpokládejme nyní, že na $\mathbf{P}_1$ jsou dány dva body A_0, A_1 konjugované vzhledem ke $\mathbf{Q}_0$, z nichž žádný neleží na $\mathbf{Q}_0$. Potom jsou body A_0, A_1 různé a vzhledem k ar. basi A_0, A_1 má vytvořující kvadratická forma f_2 tvar (96.2). Jestliže f_2 je indefinitní, plyne z (96.2) snadno, že jeden z bodů A_0, A_1 je kladný a druhý záporný vzhledem ke $\mathbf{Q}_0$; mimo to je f_2 jistě regulární, takže f_2, není-li indefinitní, je nutně definitní a $\mathbf{Q}_0$ neobsahuje žádný reálný bod.

Z předcházejících úvah snadno plyne správnost následujících dvou vět.

VĚTA 99.5. *Jestliže ze dvou různých bodů A, B prostoru $\mathbf{P}_m$ jeden je kladný a druhý záporný vzhledem ke kvadrice $\mathbf{Q}_{m-1}$, je přímka AB sečnou kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$.*

VĚTA 99.6. *Jestliže dva různé body A, B prostoru $\mathbf{P}_m$ jsou konjugovány vzhledem ke kvadrice $\mathbf{Q}_{m-1}$, ale žádný z nich neleží na $\mathbf{Q}_{m-1}$, je přímka AB buďto sečnou nebo nesečnou kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$* (tedy není tečnou); *v prvém případě je jeden z bodů A, B kladný a druhý záporný vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-1}$, ve druhém jsou buďto oba kladné nebo oba záporné vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-1}$.*

Poznámka. Bodově reálná $\mathbf{Q}_0$ se skládá ze dvou různých reálných bodů A_0, A_1 a obráceně libovolná dvojice různých reálných bodů tvoří bodově reálnou kvadriku $\mathbf{Q}_0$. Je-li $X = x_0A_0 + x_1A_1$ a položíme-li $f_2(X) = x_0x_1$, potom kvadratická forma f_2 vytvořuje $\mathbf{Q}_0$. Tvar formy f_2 ukazuje bezprostředně, že z obou intervalů A_0A_1 (viz článek 78) jeden obsahuje mimo A_0, A_1 právě ještě všecky body kladné vzhledem ke $\mathbf{Q}_0$, druhý pak právě ještě všecky body záporné vzhledem ke $\mathbf{Q}_0$. Změna orientace $\mathbf{Q}_0$ má pouze ten vliv, že oba intervaly A_0A_1 se mezi sebou vymění.

100. SIGNATURA KVADRATICKÉ FORMY. Budiž dána kvadrika $\mathbf{Q}_{m-1}$ prostoru $\mathbf{P}_m$ vytvořená kvadratickou formou f_2. Budeme se zabývat takovými ar. basemi

$$A_0, A_1, \ldots, A_m \tag{100.1}$$

prostoru $\mathbf{P}_m$, které dávají kvadratické formě f_2 a tudíž i příslušné bilineární formě f jednoduchý tvar, který nás povede k důležitým důsledkům. Pravíme, že *ar. base* (100.1) je *polární* vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-1}$ (nebo vzhledem k f_2, nebo vzhledem k f), jestliže

$$(100.2)\qquad f(A_r, A_s) = 0 \quad \text{pro} \quad 0 \leqq r, s \leqq m\,;\ r \neq s$$

neboli jestliže každé dva body $\{A_r\}$, $\{A_s\}$, $r \neq s$ jsou konjugovány vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-1}$. Je-li (100.1) polární base, položme

$$(100.3)\qquad \varepsilon_r = f_2(A_r) \quad \text{pro} \quad 0 \leqq r \leqq m\,.$$

Potom pro

$$X = x_0A_0 + \ldots + x_mA_m\,, \qquad Y = y_0A_0 + \ldots + y_mA_m$$

podle (94.6) až (94.8) a (100.2), (100.3) je

$$(100.4)\qquad f_2(X) = \varepsilon_0x_0^2 + \varepsilon_1x_1^2 + \ldots + \varepsilon_mx_m^2\,,$$

$$(100.5)\qquad f(X, Y) = \varepsilon_0x_0y_0 + \varepsilon_1x_1y_1 + \ldots + \varepsilon_mx_my_m\,.$$

Označme: n počet těch r $(0 \leqq r \leqq m)$, pro něž je $\varepsilon_r = 0$; p počet těch r, pro něž je $\varepsilon_r > 0$; q počet těch r, pro něž je $\varepsilon_r < 0$. Číslo n nazveme *nulitou* a dvojici (p, q) *signaturou*[1]) kvadratické formy f_2 vzhledem k polární basi (100.1). Zřejmě

$$(100.6)\qquad n + p + q = m + 1\,.$$

Jestliže místo formy f_2 vezmeme formu cf_2, kde $c \neq 0$, potom místo ε_r dostaneme $c\varepsilon_r$, takže nulita zůstane beze změny a můžeme mluvit o *nulitě kvadriky* $\mathbf{Q}_{m-1}$. Signatura (p, q) zůstane beze změny pro $c > 0$, kdežto pro $c < 0$ přejde v signaturu (q, p); můžeme tedy mluvit o *signatuře* (p, q) *orientované kvadriky* $\mathbf{Q}^{\bullet}_{m-1}$, která při přechodu k opačné orientaci přejde v signaturu (q, p).

Věta 100.1. *Je-li* (100.1) *polární ar. base pro kvadriku* $\mathbf{Q}_{m-1}$, *potom pro* $0 \leqq r \leqq m$ *bod* $\{A_r\}$ *buďto neleží na kvadrice* $\mathbf{Q}_{m-1}$ *nebo je jejím singulárním bodem.*

Důkaz. Podle (100.4) je $f_2(A_r) = \varepsilon_r$, takže $\{A_r\}$ leží na $\mathbf{Q}_{m-1}$, právě když $\varepsilon_r = 0$; potom však pro $Y = y_0A_0 + y_1A_1 + \ldots + y_mA_m$ podle (100.5) je $f_2(A_r, Y) = \varepsilon_ry_r$, takže v případě $\varepsilon_r = 0$ bod A_r je singulární.

---

[1]) Obvykle se v literatuře dává název signatura číslu $p - q$.

VĚTA 100.2. *Zvolme ar. bod A_0 tak, že $\{A_0\}$ buďto neleží na kvadrice $\mathbf{Q}_{m-1}$ nebo je jejím singulárním bodem. Potom existuje ar. base* (100.1) *polární vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-1}$ a obsahující daný A_0.*

DŮKAZ. Pro $m = 1$ je to správné, neboť je-li $\{A_0\}$ singulární bod pro Q_0, je $f(A_0, A_1) = 0$ pro každou volbu ar. bodu A_1 (lineárně nezávislého na A_0, aby vznikla ar. base), a je-li $f_2(A_0) \neq 0$, existuje právě jeden bod $\{A_1\}$ tak, že $f(A_0, A_1) = 0$, při čemž zřejmě $\{A_0\} \neq \{A_1\}$. Ježto tedy věta platí pro $m = 1$, můžeme při obecném důkaze předpokládat, že $m \geqq 2$ a že obdobná věta pro $(m - 1)$-rozměrný projektivní prostor je dokázána. Jestliže nyní $\{A_0\}$ neleží na $\mathbf{Q}_{m-1}$, budiž ϱ jeho polární nadrovina, která, jak víme, neprochází daným bodem; jestliže však $\{A_0\}$ je singulárním bodem pro $\mathbf{Q}_{m-1}$, zvolme nadrovinu ϱ libovolně až na podmínku, aby neprocházela bodem $\{A_0\}$. Je-li nyní

$$A_1, \ldots, A_m \tag{100.7}$$

libovolná ar. base pro ϱ, potom A_0 spolu se (100.7) tvoří ar. basi pro $\mathbf{P}_m$ a jistě je $f(A_0, A_r) = f(A_r, A_0) = 0$ pro $1 \leqq r \leqq m$. Jestliže nyní ϱ je částí kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$, jsou každé dva body nadroviny ϱ konjugovány vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-1}$, takže platí (100.2). Jestliže však ϱ není částí $\mathbf{Q}_{m-1}$, potom ϱ protne $\mathbf{Q}_{m-1}$ v kvadrice $\mathbf{Q}_{m-2}$ a ježto dva body nadroviny ϱ jsou podle článku 97 konjugovány vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-1}$, právě když jsou konjugovány vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-2}$, bude platit (100.2), zvolíme-li za (100.7) ar. basi pro ϱ polární vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-2}$, která podle předpokladu existuje.

Následující věta má za následek, že nulita kvadratické formy f_2 vzhledem k polární ar. basi (100.1) je nezávislá na volbě této ar. base. Při formulaci věty je už přihlédnuto k této nezávislosti.

VĚTA 100.3. *Nulita n kvadratické formy f_2 je rovna nule, je-li f_2 regulární. Je-li však f_2 singulární, je $n > 0$ a dimense vrcholu formy f_2 je rovna $n - 1$.*

DŮKAZ. Ze (100.5) plyne, že pro

$$X = x_0A_0 + x_1A_1 + \ldots + x_mA_m$$

bod $\{X\}$ je singulární, právě když

$$\varepsilon_0 x_0 = \varepsilon_1 x_1 = \ldots = \varepsilon_m x_m = 0,$$

t. j. právě když $x_r = 0$ pro každý takový index r $(0 \leqq r \leqq m)$, pro který je $\varepsilon_r \neq 0$. Je-li $n = 0$, je $\varepsilon_r = 0$ pro všecka r $(0 \leqq r \leqq m)$, takže f_2 nemá žádný singulární bod, t. j. f_2 je regulární. Je-li $n > 0$, existuje právě n takových indexů r, pro něž $\varepsilon_r = 0$; pro určitost budiž $\varepsilon_r = 0$ pro $0 \leqq r \leqq n - 1$; $\varepsilon_r \neq 0$ pro $n \leqq r \leqq m$. Potom $\{X\}$ je singulární, právě když X je lineárně závislý na $A_0, A_1, \ldots$ $\ldots, A_{n-1}$; f_2 je tudíž singulární a dimense vrcholu je rovna $n - 1$. Tím je důkaz skončen; z něho plyne, že platí:

VĚTA 100.4. Je-li (100.1) *polární ar. base pro singulární kvadratickou formu* f_2, *potom* (100.1) *obsahuje jako část ar. basi vrcholu formy* f_2. Jestliže nulita n je rovna jedné, má f_2 jediný singulární bod a smysl věty v tomto případě je ten, že existuje index r $(0 \leqq r \leqq m)$ tak, že $\{A_r\}$ je singulárním bodem pro f_2.

Ze (100.4) plyne bezprostředně:

VĚTA 100.5. *Budiž* (p, q) *signatura kvadratické formy* f_2 *prostoru* $\mathbf{P}_m$. *Forma* f_2 *je: kladná, právě když* $q = 0$, *záporná, právě když* $p = 0$; *definitní kladná, právě když* $p = m + 1$; *definitní záporná, právě když* $q = m + 1$.

Poznámka. Všimněme si případu $m = 1$. Podle věty 100.3 je $n = 0$ pro regulární f_2, $n = 1$ pro singulární f_2. Je-li f_2 singulární, potom podle (100.6) je $p + q = 1$ a máme dvě možné signatury (1,0); (0,1), z nichž podle věty 100.5 nastane prvá pro kladnou f_2, druhá pro zápornou f_2. Je-li f_2 regulární, potom podle (100.6) je $p + q = 2$ a máme tři možné signatury (2,0); (1,1); (0,2). Podle věty 100.5 signatura je (2,0), právě když f_2 je definitní kladná; signatura je (0,2), právě když f_2 je definitní záporná. Tudíž (viz větu 99.1) signatura je (1,1), právě když f_2 je indefinitní.

Nyní vyslovíme základní větu.

VĚTA 100.6. *Signatura* (p, q) *kvadratické formy* f_2 *prostoru* $\mathbf{P}_m$ *je nezávislá na volbě polární ar. base* (100.1).

DŮKAZ provedeme zatím pouze pro regulární f_2. Ježto pro $m = 1$ správnost naší věty (ať už f_2 je regulární či singulární) plyne z předcházející poznámky, můžeme při důkaze předpokládat, že $m \geqq 2$

a že pro dimensi $m - 1$ je (aspoň pro regulární formy) věta už dokázána. Důkaz potom rozdělíme na čtyři části.

I. Především je zřejmé, že signatura zůstane beze změny při změně pořadí ar. bodů, ze kterých se skládá polární ar. base.

II. Z věty 100.3 plyne, že f_2 je regulární, právě když ve (100.4) je $\varepsilon_r \neq 0$ pro všecka r $(0 \leqq r \leqq m)$.

III. Při dané ar. basi (100.1) polární vzhledem k f_2 označme ϱ polární nadrovinu bodu $\{A_0\}$ vzhledem k f_2. Označme F_2 kvadratickou formu prostoru ϱ, která vznikne z f_2, omezíme-li se na ty ar. body X, pro něž $\{X\}$ leží v ϱ; z vyjádření (100.4) formy f_2 vzhledem k její polární ar. basi (100.1) zřejmě vznikne vyjádření formy F_2 vzhledem k její polární ar. basi (100.7), položíme-li $x_0 = 0$. Z II plyne, že zároveň s formou f_2 také forma F_2 je regulární a ježto ϱ je projektivní prostor dimense $m - 1$, je signatura formy F_2 nezávislá na volbě její polární ar. base (100.7). Z toho plyne snadno, že signatura formy f_2 zůstane beze změny, jestliže polární ar. basi (100.1) změníme tak, aby se nezměnil g. bod $\{A_0\}$. Můžeme tedy beze změny signatury formy f_2 nahradit ar. body (100.7) kterýmikoli jinými ar. body

$$(100.8) \qquad A'_1, \ldots, A'_m,$$

pokud jen (100.8) je opět polární ar. base pro F_2. Při tom podle věty (100.2) můžeme docílit toho, aby bod $\{A'_m\}$ splynul s libovolně daným bodem $\{C\}$ nadroviny ϱ, pro který $F_2(C) \neq 0$ neboli $f_2(C) \neq 0$.

IV. Buďtež nyní (100.1) a

$$(100.9) \qquad B_0, B_1, \ldots, B_m$$

libovolné dvě ar. base polární vzhledem k f_2. Máme dokázat, že f_2 má touž signaturu jak vzhledem ke (100.1), tak i vzhledem ke (100.9). To plyne ze III, je-li $\{A_0\} = \{B_0\}$. Budiž tedy $\{A_0\} \neq \{B_0\}$ a označme ϱ, σ polární nadroviny bodů $\{A_0\}$, $\{B_0\}$ vzhledem k f_2; ježto f_2 je regulární, je $\varrho \neq \sigma$ a průnik φ nadrovin ϱ, σ je lineární podprostor v širším smyslu dimense $m - 2$ základního prostoru $\boldsymbol{P}_m$; φ je tedy nadrovinou $(m - 1)$-rozměrného projektivního prostoru ϱ. Má-li však F_2 týž význam jako ve III, víme, že F_2 je regulární forma v ϱ, takže (viz str. 104) existuje ve φ bod $\{C\}$ tak, že $F_2(C) \neq 0$, t. j. že $f_2(C) \neq 0$. Ježto bod $\{C\}$ náleží do obou nadrovin ϱ, σ a ježto $f_2(C) \neq 0$, podle závěru části III signatura f_2 se nezmění ani při přechodu od polární ar. base (100.1) k polární ar. basi tvaru

$$A_0 , A'_1 , \dots , A'_m , \tag{100.10}$$

ve které $\{A'_1\} = \{C\}$, ani při přechodu od ar. base (100.9) k ar. basi

$$B_0 , B'_1 , \dots , B'_m , \tag{100.11}$$

ve které $\{B'_1\} = \{C\}$. Ježto však $\{A'_1\} = \{B'_1\}$, plyne z I a III, že signatura f_2 se nezmění při přechodu od (100.10) ke (100.11), čímž je důkaz hotov.

Že věta 100.6, kterou jsme právě dokázali pro regulární f_2 , platí též pro singulární f_2 , je zřejmým důsledkem následující věty.

VĚTA 100.7. *Budiž f_2 singulární kvadratická forma prostoru $\mathbf{P}_m$ s k-rozměrným vrcholem S_k , tedy $0 \leqq k \leqq m - 1$. Je-li $k = m - 1$, je forma f_2 semidefinitní a její signatura je rovna* (1,0) *nebo* (0,1) *podle toho, zda f_2 je kladná či záporná. Je-li $0 \leqq k \leqq m - 2$, takže* (viz str. 107) *v $(m - k - 1)$-rozměrném projektivním prostoru $\pi(S_k ; \mathbf{P}_m)$ existuje regulární kvadratická forma F_2 , která je perspektivou formy f_2 , je signatura singulární formy f_2 rovna signatuře regulární formy F_2 .*

DŮKAZ. Pro $k = m - 1$ je $n = m$ podle věty 100.3, tedy $p + q = 1$ podle (100.6) a správnost našeho tvrzení plyne z vět 99.3, 99.4 a 100.5. Budiž tedy $0 \leqq k \leqq m - 2$. Je-li (100.1) polární ar. base vzhledem k f_2 , potom, ježto signatura zřejmě nezávisí na pořadí ar. bodů (100.1), můžeme podle věty 100.3 předpokládat, že $\varepsilon_r = 0$, právě když $0 \leqq r \leqq k - 1$, takže pro $X = x_0A_0 + x_1A_1 + \dots + x_mA_m$ je $f_2(X) = \varepsilon_kx_k + \dots + \varepsilon_mx_m$ a $f_2(X) = F_2([X])$, kde $[X] = X \bmod \mathbf{W}_{k+1}$, je-li $\mathbf{W}_{k+1}$ ar. base pro S_k . Zřejmě F_2 je perspektivou formy f_2 a signatura formy f_2 vzhledem k ar. basi (100.1) prostoru $\mathbf{P}_m$ je rovna signatuře formy F_2 nejprve vzhledem k ar. basi

$$A_{k+1} \bmod \mathbf{W}_{k+1} , \dots , A_m \bmod \mathbf{W}_{k+1} ;$$

ale ježto F_2 je regulární forma ve $\mathbf{W}_{m+1} \bmod \mathbf{W}_{k+1}$, víme, že její signatura je na této ar. basi nezávislá.

Poznamenejme ještě, že základní věta 100.6 se v algebře nazývá *zákon setrvačnosti kvadratických forem.*

101. PROJEKTIVNÍ KLASIFIKACE KVADRIK. Budiž dána kvadrika $\mathbf{Q}_{m-1}$ prostoru $\mathbf{P}_m$. Víme (viz str. 113), že znalost všech reálných i imaginárních bodů kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$ stačí k jednoznačnému určení polarity vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-1}$ a všimli jsme si také (viz str. 119), že jestliže $\mathbf{Q}_{m-1}$ je formálně reálná a není dvojnásobnou nadrovinou, znalost všech reálných bodů kvadriky k tomu cíli nestačí. Jestliže však $\mathbf{Q}_{m-1}$ je bodově reálná, potom už znalost všech jejích reálných bodů stačí k určení polarity. Neboť budiž nejprve A bod, který leží na $\mathbf{Q}_{m-1}$ a je tedy sám k sobě konjugován. Bod $X \neq A$ je konjugován k A, právě když přímka AX je tečnou kvadriky, t. j. právě když tato přímka je buďto celá částí kvadriky nebo s ní má společný pouze bod A. Za druhé nechť bod A prostoru $\mathbf{P}_m$ neleží na $\mathbf{Q}_{m-1}$. Je-li $\mathbf{Q}_{m-1}$ vytvořena kvadratickou formou f_2, je tato forma podle věty 99.2 indefinitní, takže existuje bod B tak, že z čísel $f_2(A)$, $f_2(B)$ jedno je kladné a druhé záporné. Podle věty 99.5 protne přímka AB kvadriku $\mathbf{Q}_{m-1}$ ve dvou různých reálných bodech H, K. Je-li C bod přímky AB harmonicky sdružený s bodem A vzhledem k bodům H, K, je C konjugován s bodem A vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-1}$. Body H, K jsou regulární body kvadriky (ježto přímka AB, která je obsahuje, není tečnou) a mají tudíž určité tečné nadroviny ϱ, σ a je $\varrho \neq \sigma$, neboť na př. bod H leží v ϱ, ale neleží v σ; znalost všech reálných bodů kvadriky podle předcházejícího stačí k určení nadrovin ϱ, σ. Ježto H je jediný bod přímky AB konjugovaný s H a ježto H neleží v σ, nemá $(m - 2)$-rozměrný lineární podprostor v širším smyslu $\mathbf{P}_{m-2}$, který je průnikem nadrovin ϱ a σ, společného bodu s přímkou AB, a spojení $\mathbf{P}_{m-2}$ s bodem C je nadrovina, která je patrně polární nadrovinou uvažovaného bodu A.

Známe-li polaritu vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-1}$, je tím určena jednoznačně až na libovolný číselný faktor $c \neq 0$ vytvořující kvadratická forma f_2 a tedy i příslušná bilineární forma f. Neboť především je polaritou určen pojem ar. base polární vzhledem k f_2. Je-li (100.1) taková ar. base, platí (100.5), takže rovnice polární nadroviny bodu $\{A + A_1 + \ldots + A_m\}$ je $\varepsilon_0 x_0 + \varepsilon_1 x_1 + \ldots + \varepsilon_m x_m = 0$, z čehož plyne podle (100.4), že skutečně je f_2 určena až na číselný faktor.

Je-li kvadrika $\mathbf{Q}_{m-1}$ prostoru $\mathbf{P}_m$ vytvořena kvadratickou formou f_2 a je-li $K = \{L\}$ kolineární zobrazení prostoru $\mathbf{P}_m$ na prostor $\mathbf{P}'_m$, potom existuje kvadratická forma g_2 tak, že pro každý ar. bod X prostoru $\mathbf{P}_m$ je $g_2(LX) = f_2(X)$; píšeme stručně $g_2 = Lf_2$. Kvadratická forma g_2 vytvořuje kvadriku $\mathbf{Q}'_{m-1}$ prostoru $\mathbf{P}'_m$. Je-li dána pouze kvadrika $\mathbf{Q}_{m-1}$ a kolineární zobrazení K, jsou kvadratické formy f_2, g_2 a isomorfismus L určeny pouze až na číselný faktor $c \neq 0$, kvadrika $\mathbf{Q}'_{m-1}$ je však určena jednoznačně a je-li $\mathbf{Q}_{m-1}$ orientována, potom této orientaci odpovídá zcela určitá orientace kvadriky $\mathbf{Q}'_{m-1}$. Pravíme, že $\mathbf{Q}_{m-1}$ *přejde při kolineárním zobrazení K* v $\mathbf{Q}'_{m-1}$, což tedy znamená, že nejen obrazy všech reálných bodů kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$ při kolineárním zobrazení K vyplní množinu všech reálných bodů kvadriky $\mathbf{Q}'_{m-1}$, nýbrž, že také obrazy všech reálných i imaginárních bodů kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$ při komplexním rozšíření kolineárního zobrazení K vyplní množinu všech reálných i imaginárních bodů kvadriky $\mathbf{Q}'_{m-1}$. Víme-li pouze, že množina všech reálných bodů kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$ má při kolineárním zobrazení K za obraz množinu všech reálných bodů kvadriky $\mathbf{Q}'_{m-1}$, můžeme podle předcházejícího tvrdit, že $\mathbf{Q}_{m-1}$ přejde v $\mathbf{Q}'_{m-1}$ v tom případě, že $\mathbf{Q}_{m-1}$ (a tudíž také $\mathbf{Q}'_{m-1}$) je bodově reálná.

V článku 100 jsme definovali pojem nulity a signatury kvadratické formy f_2 nejprve vzhledem k určité polární ar. basi, ale ve větách 100.3 a 100.6 jsme poznali, že pojmy nulity a signatury jsou nezávislé na volbě polární ar. base. Dále víme, že při přechodu od formy f_2 k formě cf_2 ($c \neq 0$) nulita se nemění, a signatura (p, q) se nemění při $c > 0$ a přejde v signaturu (q, p) při $c < 0$. Proto jsme již na str. 122 zavedli výrazy *nulita kvadriky* a *signatura orientované kvadriky.* Je účelné rozumět *signaturou neorientované kvadriky* obvyklou dvojici (p, q) s tou dohodou, že tentokrát nezáleží na pořadí obou čísel, ze kterých se dvojice skládá; můžeme také pro jasnost mluvit o *neorientované signatuře.*

VĚTA 101.1. *Jestliže (orientovaná) kvadrika $\mathbf{Q}_{m-1}$ prostoru $\mathbf{P}_m$ při kolineárním zobrazení K přejde v (orientovanou) kvadriku $\mathbf{Q}'_{m-1}$ prostoru $\mathbf{P}'_m$, mají $\mathbf{Q}_{m-1}$ a $\mathbf{Q}'_{m-1}$ obě touž nulitu a touž signaturu.* Běží tu (a stejně i v následující větě) vlastně o dvě věty, z nichž v prvé uzávorkovaná slova se čtou, ve druhé se vynechají. Správnost obou vět je zřejmá.

VĚTA 101.2. *Jestliže nulita i signatura jsou stejné jak pro (orientovanou) kvadriku $\mathbf{Q}_{m-1}$ prostoru $\mathbf{P}_m$, tak i pro (orientovanou) kvadriku $\mathbf{Q}'_{m-1}$ prostoru $\mathbf{P}'_m$, existuje kolineární zobrazení K prostoru $\mathbf{P}_m$, při kterém $\mathbf{Q}_{m-1}$ přejde v $\mathbf{Q}'_{m-1}$.*

DŮKAZ. Budiž $\mathbf{Q}_{m-1}$ vytvořena kvadratickou formou f_2, $\mathbf{Q}'_{m-1}$ kvadratickou formou g_2. (Je-li $\mathbf{Q}_{m-1}$ orientována, volíme ovšem f_2 tak, aby bylo $f_2(X) > 0$ pro body $\{X\}$ kladné vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-1}$ a podobně volíme též g_2; není-li $\mathbf{Q}_{m-1}$ orientována, volíme f_2, g_2 tak, aby jejich signatury (p, q) byly stejné i co do pořadí čísel p, q. Zvolme ar. basi (100.1) prostoru $\mathbf{P}_m$ polární vzhledem k f_2 a budiž

$$(101.1) \qquad B_0, B_1, \dots, B_m$$

ar. base prostoru $\mathbf{P}'_m$ polární vzhledem ke g_2. Budiž

$$\varepsilon_r = f_2(A_r), \qquad \eta_r = g_2(B_r) \quad \text{pro} \quad 0 \leqq r \leqq m.$$

Ježto f_2 a g_2 mají podle předpokladu obě touž nulitu i touž signaturu, potom po případné změně pořadí ar. bodů (100.1), kterou nebudeme explicitně vyznačovat[1]), bude $\eta_r = 0$ pro právě ty indexy r, pro které $\varepsilon_r = 0$, a $\varepsilon_r \eta_r > 0$ pro ostatní indexy r $(0 \leqq r \leqq m)$. Budou tedy existovat čísla $t_r \neq 0$ tak, že

$$(101.2) \qquad \varepsilon_r = t_r^2 \eta_r \quad \text{pro} \quad 0 \leqq r \leqq m.$$

Nyní pro

$$X = x_0 A_0 + \dots + x_m A_m, \qquad Y = y_0 B_0 + \dots + y_m B_m$$

je

$$f_2(X) = \varepsilon_0 x_r^2 + \dots + \varepsilon_m x_m^2, \qquad g_2(Y) = \eta_0 y_0^2 + \dots + \eta_m y_m^2$$

a podle (101.2) rovnice

$$(101.3) \qquad LA_0 = t_0 B_0, \quad LA_1 = t_1 B_1, \dots, LA_m = t_m B_m$$

určují isomorfismus L, při kterém $Lf_2 = g_2$, takže kolineární zobrazení $K = \{L\}$ má žádanou vlastnost.

Z vět 100.3 a 101.1 plyne, že jestliže kvadrika $\mathbf{Q}_{m-1}$ při kolineárním zobrazení přejde v kvadriku $\mathbf{Q}'_{m-1}$, potom je-li $\mathbf{Q}_{m-1}$ regulární, je také $\mathbf{Q}'_{m-1}$ regulární; je-li $\mathbf{Q}_{m-1}$ singulární, je také $\mathbf{Q}'_{m-1}$ singulární

[1]) Je účelné si zde všimnout, že je-li na př. $f_2(A_0) \cdot g_2(B_0) > 0$, můžeme ponechat A_0 v pořadí prvním.

a dimense vrcholů obou kvadrik jsou si rovny. Mimo to je zřejmé, že obrazem regulárního bodu kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$ je regulární bod kvadriky $\mathbf{Q}'_{m-1}$, obrazem singulárního bodu singulární bod.

Signaturou kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$ *vzhledem k bodu* A, který neleží na $\mathbf{Q}_{m-1}$, rozumíme signaturu (p, q), která odpovídá té orientaci kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$, při které bod A je kladný. Jestliže $p = q$, má $\mathbf{Q}_{m-1}$ stejnou orientaci vzhledem ke všem bodům X, které neleží na $\mathbf{Q}_{m-1}$, jestliže však $p \neq q$, je signatura vzhledem k některým X rovna (p, q), vzhledem k ostatním X rovna (q, p). Jestliže při kolineárním zobrazení K přejde kvadrika $\mathbf{Q}_{m-1}$ prostoru $\mathbf{P}_m$ v kvadriku $\mathbf{Q}'_{m-1}$ prostoru $\mathbf{P}'_m$ a jestliže $KA = B$, při čemž bod A neleží na $\mathbf{Q}_{m-1}$ (a tedy B neleží na $\mathbf{Q}'_{m-1}$) potom podle věty 101 je signatura kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$ vzhledem k bodu A rovna signatuře kvadriky $\mathbf{Q}'_{m-1}$ vzhledem k bodu B. Obráceně platí

VĚTA 101.3. *Nechť bod* A *prostoru* $\mathbf{P}_m$ *leží mimo kvadriku* $\mathbf{Q}_{m-1}$ *tohoto prostoru; nechť bod* B *prostoru* $\mathbf{P}'_m$ *leží mimo kvadriku* $\mathbf{Q}_{m-1}$ *prostoru* $\mathbf{P}'_m$; *nechť obě kvadriky mají touž nulitu a nechť signatura kvadriky* $\mathbf{Q}_{m-1}$ *vzhledem k bodu* A *je rovna signatuře kvadriky* $\mathbf{Q}'_{m-1}$ *vzhledem k bodu* B. *Potom existuje kolineární zobrazení* K *prostoru* $\mathbf{P}_m$ *na prostor* $\mathbf{P}'_m$, *při kterém* $\mathbf{Q}_{m-1}$ *přejde v* $\mathbf{Q}'_{m-1}$ *a obrazem bodu* A *je bod* B.

DŮKAZ plyne z důkazu věty 101.2, přihlédneme-li k poznámce pod čarou u tohoto důkazu.

VĚTA 101.4. *Nechť kvadrika* $\mathbf{Q}_{m-1}$ *prostoru* $\mathbf{P}_m$ *a kvadrika* $\mathbf{Q}'_{m-1}$ *prostoru* $\mathbf{P}'_m$ *mají obě touž nulitu a touž signaturu. Je-li* H *regulární bod kvadriky* $\mathbf{Q}_{m-1}$ *a je-li* H' *regulární bod kvadriky* $\mathbf{Q}'_{m-1}$, *existuje kolineární zobrazení prostoru* $\mathbf{P}_m$ *na prostor* $\mathbf{P}'_m$, *při kterém* $\mathbf{Q}_{m-1}$ *přejde v* $\mathbf{Q}'_{m-1}$ *a obrazem bodu* H *je bod* H'.

DŮKAZ rozdělíme na dvě části. I. Ježto H je regulární bod pro $\mathbf{Q}_{m-1}$, lze jím vést sečnu kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$, jejíž druhý průsečík s $\mathbf{Q}_{m-1}$ označme K. Zvolme na přímce HK další dva body A_0, A_1 tak, aby H, K, A_0, A_1 byla harmonická čtveřice. Potom ani A_0, ani A_1 neleží na $\mathbf{Q}_{m-1}$ a bod A_1 leží v polární nadrovině bodu A_0 vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-1}$. Ar. zástupce můžeme volit tak, že

$$H = A_0 + A_1, K = A_0 - A_1. \tag{101.4}$$

Je-li nejprve $m \geqq 2$, leží A_1 v polární nadrovině ϱ bodu A_0 vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-1}$, neleží však na kvadrice $\mathbf{Q}_{m-2}$, která je průnikem ϱ s $\mathbf{Q}_{m-1}$. Proto podle věty 100.2 aplikované na $\mathbf{Q}_{m-2}$ lze udat polární ar. basi pro $\mathbf{Q}_{m-2}$ obsahující A_1 a připojíme-li A_0, dostaneme polární ar. basi

$$A_0, A_1, \ldots, A_m \tag{101.5}$$

pro $\mathbf{Q}_{m-1}$. Je-li snad $m = 1$, potom ovšem ar. body A_0, A_1 samy tvoří už polární basi (101.5). Je-li $\mathbf{Q}_{m-1}$ vytvořena kvadratickou formou f_2 a je-li

$$\varepsilon_r = f_2(A_r) \quad \text{pro} \quad 0 \leqq r \leqq m\,,$$

potom pro

$$X = x_0A_0 + x_1A_1 + \ldots + x_mA_m$$

je

$$f_2(X) = \varepsilon_0x_0^2 + \varepsilon_1x_1^2 + \ldots + \varepsilon_mx_m^2\,. \tag{101.6}$$

Ježto průsečíky přímky A_0A_1 s kvadrikou $\mathbf{Q}_{m-1}$ jsou (101.4), je

$$\varepsilon_0 = -\varepsilon_1 \neq 0\,. \tag{101.7}$$

II. Podobně je-li $\mathbf{Q}'_{m-1}$ vytvořena kvadratickou formou g_2, existuje polární ar. base

$$B_0, B_1, \ldots, B_m$$

pro $\mathbf{Q}'_{m-1}$ tak, že

$$H' = B_0 + B_1 \tag{101.8}$$

a že pro

$$Y = y_0B_0 + y_1B_1 + \ldots + y_mB_m$$

je

$$g_2(Y) = \eta_0y_0^2 + \eta_1y_1^2 + \ldots + \eta_my_m^2\,.$$

Při tom mají f_2, g_2 obě touž nulitu a (jestliže v případě potřeby g_2 zaměníme za $-g_2$) také touž signaturu. Mimo to

$$\eta_0 = -\eta_1 \neq 0 \tag{101.9}$$

a jestliže v případě potřeby vyměníme B_0 a B_1, což nemá vlivu na platnost rovnice (101.8), je

$$\varepsilon_0\eta_0 > 0\,, \qquad \varepsilon_1\eta_1 > 0\,.$$

Po případné změně pořadí ar. bodů $B_2, \dots, B_m$ bude potom pro každé r $(0 \leqq r \leqq m)$ buďto $\varepsilon_r \eta_r > 0$ nebo $\varepsilon_r = \eta_r = 0$, takže existují čísla $t_r \neq 0$ tak, že platí (101.2), načež rovnice (101.3) určují isomorfismus L, při kterém $Lf_2 = g_2$, takže kolineace $K = \{L\}$ převádí $\mathbf{Q}_{m-1}$ v $\mathbf{Q}'_{m-1}$. Mimo to podle (101.7) a (101.9) můžeme předpokládat, že $t_0 = t_1$, takže podle (101.4) a (101.8) je $K\{H\} = \{H'\}$.

V dosavadních úvahách tohoto článku byly $\mathbf{P}_m$ a $\mathbf{P}'_m$ dva zcela libovolné m-rozměrné projektivní prostory. Může se ovšem stát, že $\mathbf{P}_m = \mathbf{P}'_m$. V tomto případě může zejména být také $\mathbf{Q}_{m-1} = \mathbf{Q}'_{m-1}$, načež věta 101.4 praví, že jsou-li H, H' kterékoli dva body kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$, existuje kolineace K prostoru $\mathbf{P}_m$ převádějící $\mathbf{Q}_{m-1}$ v samu sebe, při které obrazem bodu H je bod H'. Věta 101.3 nás vede k této definici. Jestliže v signatuře (p, q) je $p \neq q$, nazveme *kladnou* tu orientaci kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$, při které je $p > q$; nazveme *vnějškem* kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$ množinu všech bodů kladných a *vnitřkem* množinu bodů záporných při kladné orientaci. Potom věta 101.3 praví, že jestliže oba body A, B leží mimo kvadriku $\mathbf{Q}_{m-1}$, potom existuje kolineace K prostoru $\mathbf{P}_m$ převádějící $\mathbf{Q}_{m-1}$ v samu sebe, při které obrazem bodu A je bod B, právě když buďto oba body A, B leží vně nebo oba leží uvnitř $\mathbf{Q}_{m-1}$. Jestliže však v signatuře je $p = q$, potom taková definice vnitřku a vnějšku kvadriky selže a jsou-li A, B dva zcela libovolné body prostoru $\mathbf{P}_m$ mimo $\mathbf{Q}_{m-1}$, vždy existuje kolineace K prostoru $\mathbf{P}_m$ převádějící $\mathbf{Q}_{m-1}$ v sebe samu, při které obrazem bodu A je bod B.

Může se také státi, že prostor $\mathbf{P}'_m = \tilde{\mathbf{P}}_m$ je duální k prostoru $\mathbf{P}_m$. Zde je zvláště důležitý případ, že $\mathbf{Q}_{m-1}$ je *regulární* kvadrika a že K je polarita vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-1}$, takže $\mathbf{Q}'_{m-1} = \tilde{\mathbf{Q}}_{m-1}$ je dualisace kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$. Z věty 101.1 plyne, že *regulární kvadrika* $\mathbf{Q}_{m-1}$ *a její dualisace* $\tilde{\mathbf{Q}}_{m-1}$ *mají obě touž signaturu.* Jestliže $\mathbf{Q}_{m-1}$ je orientována, potom právě vyslovená věta platí s tou dohodou, že je třeba $\tilde{\mathbf{Q}}_{m-1}$ orientovat *souhlasně* s $\mathbf{Q}_{m-1}$, t. j. tak, aby polární nadrovina ϱ bodu A ležícího mimo $\mathbf{Q}_{m-1}$ byla kladná, právě když bod A je kladný. Taková dohoda je ostatně účelná pouze pro $m \geqq 2$. Je-li $m = 1$ a je-li $\mathbf{Q}_0$ bodově reálná a regulární, skládá se $\mathbf{Q}_0$ ze dvou různých reálných bodů, dualisace $\tilde{\mathbf{Q}}_0$ se skládá z týchž dvou bodů a přes to orientace $\tilde{\mathbf{Q}}_0$, která by podle vyslovené definice byla souhlasná s danou orientací pro $\mathbf{Q}_0$, je jak se snadno zjistí, k ní *opačná.*

102. PRŮNIK KVADRIKY S NADROVINOU; ELIPTICKÉ KVADRIKY. Tento článek obsahuje pouze některé doplňky k obsahu předcházejícího článku, v podstatě dvojího druhu. Nejprve si položíme otázku, jaký je průnik kvadriky s nadrovinou, při čemž se v textu omezíme na regulární kvadriky. Případ singulárních kvadrik nechť probere čtenář sám opíraje se o pojem perspektivy $\pi(\mathbf{Q}_{m-1})$ singulární kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$.

VĚTA 102.1. *Nechť nadrovina ϱ není tečnou nadrovinou regulární kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$ $(m \geqq 2)$. Potom ϱ protne $\mathbf{Q}_{m-1}$ v regulární $\mathbf{Q}_{m-2}$. Orientujeme-li $\mathbf{Q}_{m-1}$ tak, aby pól A nadroviny ϱ byl kladný a je-li (p, q) signatura kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$, je $p > 0$ a signatura kvadriky $\mathbf{Q}_{m-2}$ je rovna $(p - 1, q)$.*

DŮKAZ. Ježto ϱ není tečnou nadrovinou, leží její pól mimo $\mathbf{Q}_{m-1}$, takže podle věty 100.2 existuje polární ar. base (100.1) tak, že $\{A_0\}$ je pól nadroviny ϱ. Z vytvořující formy (100.4) kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$ vznikne potom vytvořující forma kvadriky $\mathbf{Q}_{m-2}$, položíme-li $x_0 = 0$. Z toho plyne správnost věty podle definice signatury.

VĚTA 102.2. *Budiž H bod regulární kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$ $(m \geqq 2)$.* (H předpokládáme reálný, takže $\mathbf{Q}_{m-1}$ je bodově reálná.) *Tečná nadrovina ϱ v bodě H protne $\mathbf{Q}_{m-1}$ v kvadrice $\mathbf{Q}_{m-2}$, která má H za jediný singulární bod. Je-li (p, q) signatura kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$, je $p > 0$, $q > 0$ a signatura kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$ je rovna $(p - 1, q - 1)$.*

DŮKAZ. Podle části I důkazu věty 101.4 existuje polární ar. base (100.1) pro $\mathbf{Q}_{m-1}$ tak, že $H = A_0 + A_1$. Podle (101.6) je potom $x_0 \mp x_1 = 0$ rovnice nadroviny ϱ a podle (101.6) a (101.7) pro $x_0 + x_1 = 0$ je $f_2(X) = \varepsilon_2 x_2^2 + \ldots + \varepsilon_m x_m^2$, z čehož plyne správnost věty podle definice signatury.

Eliptickou kvadrikou nazveme takovou kvadriku $\mathbf{Q}_{m-1}$, jejíž neorientovaná signatura má tvar $(p, 1)$, kde $p > 1$. Podle vět 99.3 a 100.5 eliptická kvadrika je bodově reálná; podle (100.6) je $m \geqq 2$. Orientovaná signatura je rovna $(p, 1)$, je-li $\mathbf{Q}_{m-1}$ kladně orientována.

Poznámka 1. Podle věty 100.7 singulární $\mathbf{Q}_{m-1}$ je eliptická, právě když její perspektiva $\pi(\mathbf{Q}_{m-1})$, která je regulární kvadrikou, je eliptická. V důsledku toho vlastnosti singulárních eliptických kvadrik jsou snadným důsledkem vlastností regulárních eliptických kvadrik, na které se proto můžeme omezit.

Poznámka 2. Je-li $\mathbf{Q}_{m-1}$ regulární eliptická kvadrika, je také její dualisace $\bar{\mathbf{Q}}_{m-1}$ eliptická, ježto, jak víme, $\mathbf{Q}_{m-1}$ a $\bar{\mathbf{Q}}_{m-1}$ mají obě touž signaturu.

VĚTA 102.3. *Tečná nadrovina ϱ regulární kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$ $(m \geqq 2)$ v jejím bodě H nemá s kvadrikou mimo H žádný jiný reálný bod společný, právě když $\mathbf{Q}_{m-1}$ je eliptická.*

DŮKAZ. Je-li $\mathbf{Q}_{m-2}$ průnik ϱ s $\mathbf{Q}_{m-1}$ a má-li $\mathbf{Q}_{m-1}$ signaturu (p, q), kde $p \geqq q$, potom podle věty 102.2 je $q \geqq 1$ a $\mathbf{Q}_{m-2}$ má signaturu $(p - 1, q - 1)$. Není-li $\mathbf{Q}_{m-1}$ eliptická, je $\mathbf{Q}_{m-2}$ bodově reálná podle vět 99.3 a 100.5; je-li $\mathbf{Q}_{m-1}$ eliptická, je $\mathbf{Q}_{m-2}$ podle týchž vět formálně reálná. Z toho plyne správnost naší věty, ježto $\mathbf{Q}_{m-2}$ má podle věty 102.2 jediný singulární bod H.

VĚTA 102.4. *V prostoru $\mathbf{P}_m$ $(m \geqq 2)$ budiž dána regulární kvadrika $\mathbf{Q}_{m-1}$ a mimo ni bod A. Je-li $\mathbf{Q}_{m-1}$ eliptická a je-li A jejím vnitřním bodem, je každá přímka jdoucí bodem A sečnou kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$. Obráceně, jestliže každá přímka jdoucí bodem A je sečnou kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$, je $\mathbf{Q}_{m-1}$ eliptická a A je jejím vnitřním bodem.*

DŮKAZ. Budiž (p, q) signatura $\mathbf{Q}_{m-1}$ vzhledem k bodu A, takže A je kladný vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-1}$, a budiž ϱ polární nadrovina bodu A, která neprochází bodem A, takže každá přímka jdoucí bodem A má s ϱ právě jeden společný bod. Podle věty 102.1 je $p > 0$, $\mathbf{Q}_{m-1}$ protne ϱ v regulární $\mathbf{Q}_{m-2}$ a signatura $\mathbf{Q}_{m-2}$ (v orientaci souhlasné s orientací zvolenou pro $\mathbf{Q}_{m-1}$) je rovna $(p - 1, q)$. Je-li nyní $p = 1$, je každý bod X nadroviny ϱ záporný vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-1}$ a podle věty 99.5 je přímka AX sečnou kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$. Je-li však $p \geqq 2$, existuje v ϱ bod X kladný vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-1}$, a ježto A a X jsou konjugovány vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-1}$, je přímka AX podle věty 99.6 nesečnou kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$. Snadno se však dokáže, že je $p = 1$, právě když $\mathbf{Q}_{m-1}$ je eliptická a zároveň A je jejím vnitřním bodem.

VĚTA 102.5. *Budiž $\mathbf{Q}_{m-1}$ eliptická kvadrika prostoru $\mathbf{P}_m$ $(m \geqq 3)$ a budiž ϱ nadrovina, která není tečnou nadrovinou pro $\mathbf{Q}_{m-1}$. Jestliže pól A nadroviny ϱ leží uvnitř $\mathbf{Q}_{m-1}$, leží všecky body nadroviny ϱ vně $\mathbf{Q}_{m-1}$,* *takže* $\mathbf{Q}_{m-1}$ *nemá s* ϱ *žádný společný bod. Jestliže však* A *leží vně* $\mathbf{Q}_{m-1}$, *protne* ϱ *kvadriku* $\mathbf{Q}_{m-1}$ *v eliptické* $\mathbf{Q}_{m-2}$. Správnost této věty je bezprostředním důsledkem úvah provedených v předcházejícím důkaze.

103. KUŽELOSEČKY. Název *kuželosečka* dáme bodově reálné regulární kvadrice $\mathbf{Q}_1$ projektivní roviny $\mathbf{P}_2$. Obecně, je-li $\mathbf{Q}_1$ kvadrika roviny $\mathbf{P}_2$ s nulitou n a signaturou (p, q), při čemž můžeme (není-li pro $\mathbf{Q}_1$ předepsána orientace) předpokládat, že $p \geqq q$, je podle (100.6) $n + p + q = 3$ a ježto $n \leqq 2$, máme celkem pět možných případů:

(1)	$n = 2$,	$p = 1$,	$q = 0$;
(2)	$n = 1$,	$p = 2$,	$q = 0$;
(3)	$n = 1$,	$p = 1$,	$q = 1$;
(4)	$n = 0$,	$p = 3$,	$q = 0$;
(5)	$n = 0$,	$p = 2$,	$q = 1$.

Z předcházejících výkladů je patrné: v případě (1) je $\mathbf{Q}_1$ dvojnásobná přímka; v případě (2) se $\mathbf{Q}_1$ skládá ze dvou komplexně sdružených imaginárních přímek, které se protnou v jediném reálném bodě kvadriky $\mathbf{Q}_1$; v případě (3) se $\mathbf{Q}_1$ skládá ze dvou různých reálných přímek; v případě (4) je $\mathbf{Q}_1$ regulární a formálně reálná, nemá tudíž vůbec žádný reálný bod; v případě (5) je $\mathbf{Q}_1$ kuželosečka. Tedy kuželosečky jsou totožné s eliptickými kvadrikami dvojrozměrného prostoru $\mathbf{P}_2$ a bod roviny $\mathbf{P}_2$, který neleží na kuželosečce $\mathbf{Q}_1$, leží buďto uvnitř nebo vně $\mathbf{Q}_1$. Z věty 102.4 plyne, že *přímka, která obsahuje bod ležící uvnitř kuželosečky* $\mathbf{Q}_1$, je její sečnou. Z toho plyne jednak, že *každý bod tečny s jedinou výjimkou bodu dotyku leží vně kuželosečky* a že *každá nesečna leží celá vně kuželosečky.* O sečnách plyne z poznámky na konci článku 99, že *jsou-li* H, K *průsečíky sečny* $\mathbf{P}_1$ *s kuželosečkou* $\mathbf{Q}_1$, *leží z obou intervalů* HK *až na body* H, K *samy jeden uvnitř a druhý vně kuželosečky.* Ježto signatura kuželosečky $\mathbf{Q}_1$ při kladné orientaci je (2,1), je patrné, že je-li A_0, A_1, A_2 ar. base polární vzhledem ke $\mathbf{Q}_1$, leží jeden ze tří bodů A_0, A_1, A_2 uvnitř $\mathbf{Q}_1$, ostatní dva vně $\mathbf{Q}_1$. Z toho plyne podle vět 99.6 a 100.2, že *pól sečny vzhledem ke kuželosečce* $\mathbf{Q}_1$ *leží vně* $\mathbf{Q}_1$, *pól nesečny uvnitř* $\mathbf{Q}_1$.

Viděli jsme, že bodem daným uvnitř kuželosečky neprochází žádná reálná tečna kuželosečky. Naproti tomu bodem A daným vně kuželosečky $\mathbf{Q}_1$ procházejí dvě různé reálné tečny t_1, t_2 (jejich body dotyku jsou průsečíky $\mathbf{Q}_1$ s polárou bodu A); tyto dvě tečny rozdělí svazek přímek $\pi(A\,;\,\mathbf{P}_2)$ na dva intervaly t_1t_2, z nichž prvý obsahuje sečny a druhý nesečny kuželosečky.

VĚTA 103.1. *Buďtež A_1, A_2 dva různé body na kuželosečce $\mathbf{Q}_1$ a buďtež t_1, t_2 tečny ke $\mathbf{Q}_1$ v těchto bodech. Libovolná přímka p svazku $\pi(A_1\,,\,\mathbf{P}_2)$ různá od t_1 i od A_1A_2 protne $\mathbf{Q}_1$ v určitém bodě X různém od A_1 i od A_2; budiž potom $\varphi(p)$ přímka A_2X svazku $\pi(A_2\,;\,\mathbf{P}_2)$; mimo to budiž ještě $\varphi(t_1) = A_1A_2$, $\varphi(A_1A_2) = t_2$. Potom je φ projektivní zobrazení svazku $\pi(A_1\,;\,\mathbf{P}_2)$ na svazek $\pi(A_2\,;\,\mathbf{P}_2)$.*

DŮKAZ. Budiž A_0 průsečík tečen t_1, t_2. Je-li $\mathbf{Q}_1$ vytvořena kvadratickou formou f_2 a je-li f příslušná bilineární forma, je zřejmě $f_2(A_1) = f_2(A_2) = 0$, $f(A_0\,,\,A_1) = f(A_0\,,\,A_2) = 0$, ale $f(A_1\,,\,A_2) \neq 0$, $f_2(A_0) \neq 0$ a můžeme předpokládat, že $f(A_1\,,\,A_2) = \frac{1}{2}$, načež pro $X = x_0A_0 + x_1A_1 + x_2A_2$ je $f_2(X) = x_1x_2 - cx_0^2$, kde $c \neq 0$. Stačí dokázat, že jestliže přímka p spojuje bod A_1 s bodem $sA_0 + tA_2$, potom přímka $\varphi(p)$ spojuje bod A_2 s bodem $tA_0 + csA_1$; což se snadno verifikuje jak pro $s = 0$, tak i pro $t = 0$ a pro $st \neq 0$ plyne z toho, že obě přímky p, $\varphi(p)$ obsahují bod $X = stA_0 + cs^2A_1 + t^2A_2$, který leží na $\mathbf{Q}_1$, ježto $f_2(X) = 0$.

Obráceně platí:

VĚTA 103.2. *Buďtež A_1, A_2 dva různé body v rovině $\mathbf{P}_2$ a budiž dáno projektivní zobrazení φ svazku přímek $\pi(A_1\,;\,\mathbf{P}_2)$ na svazek přímek $\pi(A_2\,;\,\mathbf{P}_2)$, při kterém společná přímka A_1A_2 není svým vlastním obrazem. Potom existuje kuželosečka $\mathbf{Q}_1$, která obsahuje bod A_1, bod A_2 a mimo to ještě právě ty body, které jsou průsečíky přímek p, $\varphi(p)$, kde $p \neq A_1A_2$, $\varphi(p) \neq A_1A_2$. Jsou-li t_1, t_2 tečny kuželosečky $\mathbf{Q}_1$ v bodech A_1, A_2, je $\varphi(t_1) = A_1A_2$, $\varphi(A_1A_2) = t_2$.*

DŮKAZ. Existuje bod A_0 tak, že A_0 neleží na přímce A_1A_2 a že $\varphi(A_0A_1) = A_1A_2$, $\varphi(A_1A_2) = A_0A_2$. Dále je patrné, že existuje číslo $c \neq 0$ tak, že jestliže přímka p spojuje bod A_1 s bodem $sA_0 + tA_2$, potom přímka $\varphi(p)$ spojuje bod A_2 s bodem $tA_0 + csA_1$. Snadno se nahlédne, že kvadratická forma f_2, pro kterou při $X = x_0A_0 + x_1A_1 + x_2A_2$ je $f_2(X) = x_1x_2 - cx_0^2$, vytvořuje kuželosečku $\mathbf{Q}_1$, která má všecky žádané vlastnosti.

Je-li nyní dána kuželosečka $\mathbf{Q}_1$ v rovině $\mathbf{P}_2$ a kuželosečka $\mathbf{Q}_1'$ v rovině $\mathbf{P}_2'$ a zobrazení ψ kuželosečky $\mathbf{Q}_1$ na kuželosečku $\mathbf{Q}_1'$, zvolme libovolně bod A_1 na $\mathbf{Q}_1$ a bod A_1' na $\mathbf{Q}_1'$ a označme φ to (zřejmě při dané volbě bodů A_1, A_1' jednoznačně určené) zobrazení svazku $\pi(A_1\,;\,\mathbf{P}_2)$ na svazek $\pi(A_1'\,;\,\mathbf{P}_2)$, při kterém pro každou polohu bodu X na $\mathbf{Q}_1$ pro $X' = \psi(X)$ je $\varphi(A_1X) = A_1'X'$, kde pro $X = A_1$ znamená A_1X tečnu ke $\mathbf{Q}_1$ v bodě A_1, pro $X' = A_1'$ znamená $A_1'X'$ tečnu ke $\mathbf{Q}_1'$. Je-li zobrazení φ projektivní, pravíme, že ψ je *projektivní zobrazení kuželosečky* $\mathbf{Q}_1$ *na kuželosečku* $\mathbf{Q}_1'$. Že při tom nezáleží na volbě pomocných bodů A_1, A_1' plyne z věty 103.1. Následující tři věty jsou zřejmé:

VĚTA 103.3. *Je-li ψ_1 projektivní zobrazení kuželosečky $\mathbf{Q}_1$ na kuželosečku $\mathbf{Q}_1'$ a je-li ψ_2 projektivní zobrazení kuželosečky $\mathbf{Q}_1'$ na kuželosečku $\mathbf{Q}_1''$, potom složené zobrazení $\psi_1 \circ \psi_2$ je projektivní zobrazení kuželosečky $\mathbf{Q}_1$ na kuželosečku $\mathbf{Q}_1''$.*

VĚTA 103.4. *Zobrazení inversní k projektivnímu zobrazení kuželosečky na kuželosečku je rovněž projektivní.*

VĚTA 103.5. *Nechť při kolineárním zobrazení K roviny $\mathbf{P}_2$ na rovinu $\mathbf{P}_2'$ přejde kuželosečka $\mathbf{Q}_1$ v kuželosečku $\mathbf{Q}_1'$. Potom parciální zobrazení $K \mid \mathbf{Q}_1$ kuželosečky $\mathbf{Q}_1$ na kuželosečku $\mathbf{Q}_1'$ je projektivní.*

Zvláštním případem věty 103.5 je

VĚTA 103.6. *Jestliže každému bodu X na kuželosečce $\mathbf{Q}_1$ přiřadíme tečnu ke $\mathbf{Q}_1$ v bodě X, vznikne projektivní zobrazení kuželosečky $\mathbf{Q}_1$ na její dualisaci.*

VĚTA 103.7. *Jsou-li A_1, A_2, A_3 tři různé body na kuželosečce $\mathbf{Q}_1$ a jsou-li B_1, B_2, B_3 tři různé body na kuželosečce $\mathbf{Q}_1'$, existuje právě jedno projektivní zobrazení ψ kuželosečky $\mathbf{Q}_1$ na kuželosečku $\mathbf{Q}_1'$, při kterém $\psi(A_r) = B_r$ pro $r = 1, 2, 3$.* Tato věta je snadným důsledkem obdobné věty o projektivním zobrazení přímky na přímku, která je zvláštním případem ($m = 1$) věty 79.6.

VĚTA 103.8. *Budiž ψ projektivní zobrazení kuželosečky $\mathbf{Q}_1$ v rovině $\mathbf{P}_2$ na kuželosečku $\mathbf{Q}_1'$ v rovině $\mathbf{P}_2'$. Potom existuje právě jedno kolineární zobrazení K roviny $\mathbf{P}_2$ na rovinu $\mathbf{P}_2'$ tak, že parciální zobrazení $K \mid \mathbf{Q}_1$ splyne s daným zobrazením ψ.*

DŮKAZ. Předpokládejme nejprve, že kolineární zobrazení K existuje a dokažme, že je jednoznačně určeno. Za tím účelem zvolme na $\mathbf{Q}_1$ tři různé body A_1, A_2, A_3 a položme $B_1 = \psi(A_1)$, $B_2 = \psi(A_2)$, $B_3 = \psi(A_3)$, takže B_1, B_2, B_3 jsou tři různé body na $\mathbf{Q}_1'$. Dále budiž A_0 průsečík tečen ke $\mathbf{Q}_1$ v bodech A_1, A_2; B_0 budiž průsečík tečen ke $\mathbf{Q}_1'$ v bodech B_1, B_2. Je patrné, že existuje-li K, je $B_r = KA_r$ $(0 \leqq r \leqq 3)$. Dále je však patrné, že body A_0, A_1, A_2, A_3 tvoří g. basi pro $\mathbf{P}_2$ a že body B_0, B_1, B_2, B_3 tvoří g. basi pro $\mathbf{P}_2'$. Jednoznačnost K plyne nyní z věty 79.6. Z téže věty však plyne také, že existuje kolineární zobrazení K roviny $\mathbf{P}_2$, při kterém $B_r = KA_r$ $(0 \leqq r \leqq 3)$. Je třeba ukázat, že potom parciální zobrazení $K \mid \mathbf{Q}_1$ splyne se zobrazením ψ. K tomu cíli však stačí odvodit, že $\mathbf{Q}_1$ při K přejde v $\mathbf{Q}_1'$, neboť potom $K \mid \mathbf{Q}_1$ je projektivní zobrazení $\mathbf{Q}_1$ na $\mathbf{Q}_1'$, které splyne s ψ podle věty 103.7. Avšak [viz (79.3)] ar. zástupce uvažovaných g. bodů lze volit tak, aby bylo

$$(103.1) \qquad A_3 = A_0 + A_1 + A_2\,; \qquad B_3 = B_0 + B_1 + B_2\,,$$

načež $K = \{L\}$, kde

$$(103.2) \qquad LA_r = B_r \quad \text{pro} \quad 0 \leqq r \leqq 3\,.$$

Avšak jako při důkazu věty 103.1 vidíme, že existují čísla $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$ tak, že $\mathbf{Q}_1$ je vytvořena kvadratickou formou f_2 a $\mathbf{Q}_1'$ kvadratickou formou g_2, jestliže pro $X = x_0A_0 + x_1A_1 + x_2A_2$ je $f_2(X) = x_1x_2 - c_1x_0^2$ a pro $Y = y_0B_0 + y_1B_1 + y_2B_2$ je $g_2(Y) = y_1y_2 - c_2y_0^2$. Ježto však A_3 leží na $\mathbf{Q}_1$ a B_3 leží na $\mathbf{Q}_1'$, plyne ze (103.1), že $c_1 = c_2 = 1$, takže $f_2(X) = x_1x_2 - x_0^2$, $g_2(X) = y_1y_2 - y_0^2$ a ze (103.2) plyne, že obrazem $\mathbf{Q}_1$ při K je $\mathbf{Q}_1'$.

Jsou-li A_1, A_2, A_3, A_4 čtyři různé body na kuželosečce $\mathbf{Q}_1$, definujeme jejich *dvojpoměr*

$$(103.3) \qquad (A_1, A_2, A_3, A_4\,;\, \mathbf{Q}_1)$$

tak, že zvolíme libovolně pomocný bod C na $\mathbf{Q}_1$ a definujeme (103.3) jako dvojpoměr čtyř (zřejmě navzájem různých) přímek CA_1, CA_2, CA_3, CA_4 svazku $\pi(C\,;\,\mathbf{P}_2)$. Jestliže snad $C = A_r$ pro některé r $(1 \leqq r \leqq 4)$, znamená CA_r tečnu ke $\mathbf{Q}_1$ v bodě C. Na volbě pomocného bodu C při tom nezáleží, jak plyne z vět 86.1 a 103.1. Z týchž vět je patrné, že platí

VĚTA 103.9. *Jsou-li* A_1, A_2, A_3, A_4 *čtyři různé body na kuželosečce* $\mathbf{Q}_1$ *a jsou-li* B_1, B_2, B_3, B_4 *čtyři různé body na kuželosečce* $\mathbf{Q}'_1$, *potom existuje projektivní zobrazení* $\mathbf{Q}_1$ *na* $\mathbf{Q}'_1$, *při kterém* A_1, A_2, A_3, A_4 *v daném pořadí mají obrazy* B_1, B_2, B_3, B_4, *právě když*

$$(A_1, A_2, A_3, A_4; \mathbf{Q}_1) = (B_1, B_2, B_3, B_4; \mathbf{Q}'_1).$$

Stejně jako pojem dvojpoměru se dá přenést z přímky na kuželosečku pojem *intervalu*. Jsou-li A, B dva různé body na kuželosečce $\mathbf{Q}_1$, potom intervalem AB na Q_1 rozumíme množinu těch bodů X na $\mathbf{Q}_1$, pro které při libovolně zvoleném C na $\mathbf{Q}_1$ přímky CX tvoří ve svazku $\pi(C; \mathbf{P}_2)$ interval s krajními přímkami CA, CB; pro $C = X$ opět přímkou CX rozumíme tečnu ke $\mathbf{Q}_1$ v bodě C. Zase je jasné, že nezáleží na volbě pomocného bodu C a že při daných A, B kuželosečka $\mathbf{Q}_1$ se skládá z právě dvou intervalů AB, které mají společné pouze body A, B, při čemž (viz větu 78.1), jsou-li C_1; C_2 dva body na $\mathbf{Q}_1$ různé navzájem a různé od A i od B, náležejí oba body C_1, C_2 do téhož intervalu na $\mathbf{Q}_1$, právě když dvojpoměr $(A, B, C_1, C_2; \mathbf{Q}_1)$ je kladný. V důsledku toho je možné užít následující věty ke geometrické interpretaci pojmu intervalu na kuželosečce.

VĚTA 103.10. *Jsou-li* A, B, C, D *čtyři různé body na kuželosečce* $\mathbf{Q}_1$, *leží průsečík* H *přímek* AB, CD *mimo* $\mathbf{Q}_1$. *Leží-li* H *vně* $\mathbf{Q}_1$, *je dvojpoměr* $(A, B, C, D; \mathbf{Q}_1)$ *kladný; leží-li* H *uvnitř* $\mathbf{Q}_1$, *je tento dvojpoměr záporný.*

DŮKAZ věty 103.10 provedeme až v následujícím článku (str. 142).

104. PROJEKTIVITY A INVOLUCE NA KUŽELOSEČCE. *Projektivitou na kuželosečce* $\mathbf{Q}_1$ rozumíme projektivní zobrazení kuželosečky $\mathbf{Q}_1$ na touž kuželosečku $\mathbf{Q}_1$. Z definice je patrné, že theorie projektivit na kuželosečce je v podstatě totožná s theorií projektivit na přímce v tom smyslu, že každá věta jedné theorie vede takřka automaticky k příslušné větě theorie druhé. Avšak ačkoli jsme theorii projektivit na přímce už probírali, je nicméně účelné zdržet se trochu i u theorie projektivit na kuželosečce, ježto některé pojmy této theorie (zejména pojem involuce) jsou geometricky názornější než příslušné věty z theorie projektivit na přímce.

V celém článku předpokládáme, že v rovině $\mathbf{P}_2$ je dána určitá kuželosečka $\mathbf{Q}_1$. Podle vět 103.5 a 103.8 máme vzájemně jednoznačný vztah mezi projektivitami ψ na $\mathbf{Q}_1$ na jedné straně a kolineacemi K v $\mathbf{P}_2$ na straně druhé, při čemž kolineaci K se předpokládá, že převádí kuželosečku $\mathbf{Q}_1$ v touž kuželosečku $\mathbf{Q}_1$. Předpokládejme nejprve, že je dána určitá ψ a tedy i určitá K. Je účelné nazírat na obě transformace tak, že se vztahují nejen na reálné, nýbrž i na imaginární body. Je zřejmé, že transformace ψ je identická, právě když K je identická. Vyloučíme-li tento případ, máme dvě možnosti: projektivita ψ je buďto *parabolická* s jediným (nutně reálným) samodružným bodem, nebo ψ je *neparabolická* se dvěma různými (reálnými nebo imaginárními) samodružnými body; neparabolická projektivita ψ pak je buďto *hyperbolická* (s reálnými samodružnými body) nebo *eliptická* (s imaginárními komplexně sdruženými samodružnými body).

Předpokládejme nejprve, že projektivita ψ na kuželosečce $\mathbf{Q}_1$ je parabolická se samodružným bodem H. Zřejmě je bod H samodružným i pro příslušnou kolineaci K roviny $\mathbf{P}_2$. Dokážeme, že H je *jediným* samodružným bodem pro kolineaci K. Za tím účelem předpokládejme, že existuje bod $H' \neq H$ samodružný při K a nejprve učiňme předpoklad, že přímka HH' je různá od tečny t ke $\mathbf{Q}_1$ v bodě H. Potom však přímka HH' je samodružná při K a protne $\mathbf{Q}_1$ v bodě různém od H a opět samodružném při K, tedy samodružném i při ψ, což je však nemožné. Jestliže bod H' leží na tečně t, potom jeho polára vzhledem ke $\mathbf{Q}_1$ je samodružná při K, je různá od t a prochází bodem H, což se právě už ukázalo nemožným.

Předpokládejme za druhé, že projektivita ψ na kuželosečce $\mathbf{Q}_1$ je neparabolická se dvěma různými (reálnými nebo imaginárními) samodružnými body H_1, H_2. Zřejmě jsou body H_1, H_2 samodružné i pro příslušnou kolineaci K. Dále je při K samodružná také přímka $h = H_1H_2$ a samodružný při K je i pól H_0 přímky h vzhledem ke $\mathbf{Q}_1$. Částí kolineace K je projektivita $\varphi = K \mid h$ na přímce h, která má samodružné body H_1, H_2. Jsou nyní dvě možnosti. Buďto projektivita φ je identita, načež *každý* bod přímky h je samodružný při kolineaci K; nebo φ není identita, načež mimo body H_1, H_2 *žádný* bod přímky h není samodružný při K. V každém případě pak platí, že jestliže bod $C \neq H$ neleží na přímce h, nemůže C být samodružný při K. Neboť je-li $C \neq H$ samodružný bod při K, nemůže C ležet zároveň na obou přímkách HH_1, HH_2; pro určitost nechť C neleží na přímce HH_1. Potom přímka H_1C je samodružná při K a protne $\mathbf{Q}_1$ v bodě $C_0 \neq H_1$, který je zřejmě samodružný při K. Jestliže nyní C neleží na přímce h, je také $C_0 \neq H_2$. Máme tedy na kuželosečce Q_1 tři různé body H_1, H_2, C_0 samodružné při K a tudíž také samodružné při ψ, z čehož plyne podle věty 103.7, že ψ je identická transformace kuželosečky K, což jsme však vyloučili.

Je-li ψ parabolická projektivita se samodružným bodem H, nazveme *středem projektivity* ψ bod H a *osou projektivity* ψ tečnu h ke $\mathbf{Q}_1$ v bodě H. Je-li ψ neparabolická projektivita se samodružnými body H_1, H_2, nazveme *osou projektivity* ψ přímku H_1H_2 a *středem projektivity* ψ její pól vzhledem ke $\mathbf{Q}_1$. Podle těchto definic má každá neidentická projektivita ψ na kuželosečce $\mathbf{Q}_1$ určitý střed H a určitou osu h, při čemž přímka h je polárou bodu H vzhledem ke $\mathbf{Q}_1$. Dále je patrné: *střed parabolické projektivity na* $\mathbf{Q}_1$ *leží na* $\mathbf{Q}_1$ *a její osa je tečnou ke* $\mathbf{Q}_1$; *střed hyperbolické projektivity na* $\mathbf{Q}_1$ *leží vně* $\mathbf{Q}_1$ *a její osa je sečnou* $\mathbf{Q}_1$; *střed eliptické projektivity na* $\mathbf{Q}_1$ *leží uvnitř* $\mathbf{Q}_1$ *a její osa je nesečnou* $\mathbf{Q}_1$. Mimo to *osa parabolické projektivity na* $\mathbf{Q}_1$ *je tečnou ke* $\mathbf{Q}_1$ *ve svém jediném samodružném bodě; osa neparabolické projektivity na* $\mathbf{Q}_1$ *protne* $\mathbf{Q}_1$ *ve svých dvou samodružných bodech.*

Je-li ψ neparabolická projektivita na $\mathbf{Q}_1$ se samodružnými body H_1, H_2 (reálnými nebo imaginárními), může se stát, jak jsme si všimli, že každý bod přímky $h = H_1H_2$ je samodružný při kolineaci K, takže K je homologie, osa projektivity h je osou homologie, střed projektivity H je středem homologie. Nastane-li tento případ a je-li A libovolný bod na h různý od H_1 i od H_2, A' jeho obraz při ψ a tudíž i při K, potom podle článku 84 přímka HA je samodružná, t. j. obraz A' bodu A leží na přímce HA a na téže přímce musí ležet také obraz bodu A', který tudíž splyne s A, t. j. ψ je involuce. Obráceně, je-li ψ involuce a je-li opět A' obraz bodu A ($H_1 \neq A \neq H_2$), je A obrazem bodu A' (oboje nejen při ψ, nýbrž i při K), takže přímka AA' je samodružná při K a protne přímku h, která je rovněž samodružná při K, v bodě C samodružném při K, a ježto $H_1 \neq C \neq H_2$, je každý bod přímky h samodružný při K a ψ je involuce. Vidíme tedy, že pojem *involuce na kuželosečce* má velmi názorný smysl, zachycený v následující větě.

VĚTA 104.1. *Leží-li bod H mimo kuželosečku* $\mathbf{Q}_1$, *je bod H středem* *involuce ψ na $\mathbf{Q}_1$, jejíž dvojné body* (reálné nebo imaginární) *jsou body dotyku tečen ke $\mathbf{Q}_1$ procházejících bodem H. Tyto dvojné body leží tedy na poláře h bodu H vzhledem ke $\mathbf{Q}_1$, která je osou involuce ψ. Každá sečna kuželosečky $\mathbf{Q}_1$ procházející bodem H protne $\mathbf{Q}_1$ v dvojici bodů A, A' involuce ψ. Obráceně, je-li A, A' dvojice bodů involuce ψ a je-li $A \neq A'$, prochází přímka AA' bodem H. Involuce ψ je hyperbolická, leží-li H uvnitř $\mathbf{Q}_1$, eliptická, leží-li H vně $\mathbf{Q}_1$.*

Z každé věty o involucích na přímce plyne bezprostředně příslušná věta o involucích na kuželosečce a obráceně. Při tom, jak bylo již poznamenáno, pro involuce na kuželosečce mívají tyto věty názornější smysl. Tak na př. víme (viz větu 87.5), že jsou-li A, B, C, D čtyři různé body, existuje právě jedna involuce obsahující obě dvojice A, B; C, D. Na kuželosečce je to bezprostředně patrné z věty 104.1; je patrné též, že průsečík H přímek AB, CD je středem naší involuce, takže tato je hyperbolická, leží-li H vně $\mathbf{Q}_1$, eliptická, leží-li H uvnitř $\mathbf{Q}_1$. Na druhé straně víme z věty 87.5, že dvojpoměr $(ABCD)$ je v hyperbolickém případě kladný, v eliptickém záporný. Porovnáme-li oba výsledky a všimneme-li si věty 78.1, dostaneme důkaz správnosti věty 103.10. Takřka samozřejmou se nyní jeví věta 93.3, jejíž dřívější důkaz byl dosti složitý. Jsou-li H, H' středy dvou daných involucí ψ, ψ' na kuželosečce $\mathbf{Q}_1$ a je-li $\psi \neq \psi'$, je také $H \neq H'$. Přímka HH' protne $\mathbf{Q}_1$, není-li tečnou, ve dvou (reálných nebo imaginárních) bodech A, B; a je-li HH' tečnou pro $\mathbf{Q}_1$, budiž $A = B$ její bod dotyku. V každém případě je A, B společná dvojice obou involucí ψ, ψ', které ani v komplexním oboru nemají žádnou jinou společnou dvojici. Jestliže na př. involuce ψ je eliptická, leží bod H uvnitř $\mathbf{Q}_1$, takže přímka HH' jistě je sečnou, body A, B jsou reálné a navzájem různé.

VĚTA 104.2. *Buďtež φ_1, φ_2 dvě různé involuce na kuželosečce $\mathbf{Q}_1$, takže $\psi = \varphi_1 \circ \varphi_2$ je projektivita na $\mathbf{Q}_1$. Jsou-li C_1, C_2 středy involucí φ_1, φ_2, je přímka C_1C_2 osou projektivity ψ.*

DŮKAZ. Předpokládejme nejprve, že přímka C_1C_2 není tečnou ke $\mathbf{Q}_1$, že tedy má s $\mathbf{Q}_1$ společné dva různé (reálné nebo imaginární) body H_1, H_2. Podle věty 104.1 (případně přenesené na komplexní obor) je každý z obou bodů H_1, H_2 obrazem druhého jak při φ_1, tak i při φ_2, takže oba body H_1, H_2 jsou samodružné při ψ, a přímka

H_1H_2 neboli přímka C_1C_2 je tedy osou projektivity ψ. Jestliže přímka C_1C_2 je tečnou ke $\mathbf{Q}_1$ a H je její bod dotyku, soudíme opět podle věty 104.1, že H je samodružným bodem při ψ a je třeba pouze ještě dokázat, že bod $A \neq H$ kuželosečky $\mathbf{Q}_1$ nemůže být samodružným při ψ. To však plyne podle věty 104.1 ze zřejmého faktu, že obraz bodu A při φ_1 nemůže splynout s obrazem bodu A při φ_2.

Ukážeme nyní, že dokázanou větu 104.2 lze obrátit.

Věta 104.3. *Budiž h osa projektivity ψ na kuželosečce $\mathbf{Q}_1$. Zvolme libovolně bod C_1 na přímce h s tou podmínkou, aby C_1 neležel na $\mathbf{Q}_1$. Potom existuje na přímce h právě jeden bod C_2, ležící rovněž mimo $\mathbf{Q}_1$, pro který je $\psi = \varphi_1 \circ \varphi_2$, kde φ_1, φ_2 jsou involuce na $\mathbf{Q}_1$ se středy C_1, C_2.*

Důkaz. Tím, že mluvíme o ose projektivity ψ, předpokládáme už, že ψ není identická transformace kuželosečky $\mathbf{Q}_1$. Mimo to involuce φ_1 je totožná s inversní transformací φ_1^{-1} a z toho plyne snadno, že je-li φ_2 projektivita na $\mathbf{Q}_1$, platí $\psi = \varphi_1 \circ \varphi_2$, právě když $\varphi_2 = \varphi_1 \circ \psi$. Stačí tedy dokázat, že projektivita φ_2 definovaná rovnicí $\varphi_2 = \varphi_1 \circ \psi$ je involuce, jejíž střed C_2 leží na přímce h. Jestliže projektivita ψ je neparabolická, je to zřejmé. Neboť potom h protne $\mathbf{Q}_1$ ve dvou různých (reálných nebo imaginárních) bodech H_1, H_2, jež jsou samodružné při ψ. Ježto střed C_1 involuce φ_1 leží na přímce h, je každý z obou bodů H_1, H_2 podle věty 104.1 obrazem druhého při involuci φ_1 a ježto H_1, H_2 jsou samodružné při ψ, platí to, co bylo právě vysloveno pro φ_1, také pro projektivitu $\varphi_2 = \varphi_1 \circ \psi$, která tudíž podle věty 87.4 přenesené na kuželosečku je rovněž involucí; z věty 104.1 pak plyne, že střed C_2 involuce φ_2 leží na h. Jestliže však projektivita ψ je parabolická, potom užití věty 87.4 selže. V tomto případě přímka h je tečnou kuželosečky $\mathbf{Q}_1$ a označíme H její bod dotyku, který je (jediným) samodružným bodem parabolické projektivity ψ. Zvolme nyní na $\mathbf{Q}_1$ libovolně bod $A \neq H$ a označme B jeho obraz při ψ, takže $A \neq B \neq H$. Přímka AC_1 protne kuželosečku vedle bodu A ještě v bodě $A' \neq A$ a ovšem je též $A' \neq H$. Je-li $A' \neq B$, budiž C_2 průsečík přímky $A'B$ s přímkou h; je-li však $A' = B$, budiž C_2 průsečík přímky h s tečnou ke $\mathbf{Q}_1$ v bodě B. V každém případě je $C_1 \neq C_2 = H$ a z věty 104.1 plyne, že bod C_2 je středem involuce na $\mathbf{Q}_1$, pro kterou je H dvojným bodem a která obsahuje dvojici

A', B. Označíme-li φ_2 involuci se středem C_2, plyne z věty 104.2, že projektivita $\varphi_1 \circ \varphi_2$ má osu h, je tedy parabolická se samodružným bodem H. Mimo to však bod $A \neq X$ má při $\varphi_1 \circ \varphi_2$ zřejmě týž obraz B jako při ψ, takže podle věty 87.3 (přenesené na kuželosečku) je $\psi = \varphi_1 \circ \varphi_2$.

VĚTA 104.4. *Nechť A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 leží na kuželosečce $\mathbf{Q}_1$. Některé z těchto bodů mohou také splynout; splyne-li bod A_r s bodem A_s ($1 \leqq r \leqq s \leqq 6$), rozumějme přímkou A_rA_s tečnu ke $\mathbf{Q}_1$ v bodě A_r. Předpokládejme však, že jsou navzájem různé jak body A_1, A_3, A_5, tak i body A_2, A_4, A_6, dále pak, že je $A_1 \neq A_4$, $A_2 \neq A_5$, $A_3 \neq A_6$. Potom jsou navzájem různé jak přímky*

$$(104.1) \qquad A_1A_2\,; \quad A_4A_5\,,$$

tak přímky

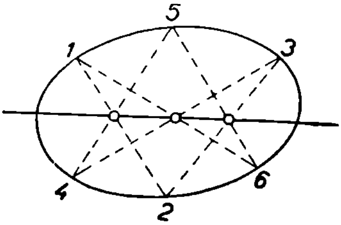
$$(104.2) \qquad A_2A_3\,; \quad A_5A_6$$

a tak posléze i přímky

$$(104.3) \qquad A_3A_4\,; \quad A_1A_6\,.$$

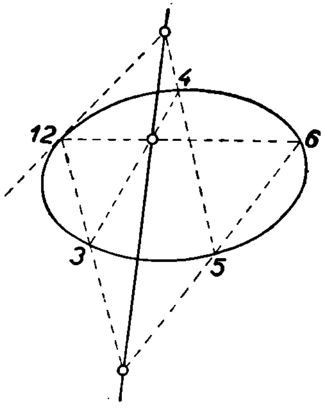
Je-li B_1 průsečík přímek (104.1), *B_2 průsečík přímek* (104.2), *B_3 průsečík přímek* (104.3), *jsou body B_1, B_2, B_3 navzájem různé a leží všecky tři na téže přímce.*

DŮKAZ. Přímky (104.1) jsou navzájem různé, ježto podle předpokladu je jak $A_1 \neq A_4$, tak i $A_1 \neq A_5$ a přímka A_4A_5 nemůže mít s kuželosečkou společný bod různý jak od A_4, tak i od A_5; stejně se dokáže, že jsou navzájem různé také obě přímky (104.2) a rovněž i obě přímky (104.3). Existují tudíž všecky tři body B_1, B_2, B_3 a je patrné, že žádný z nich neleží na kuželosečce $\mathbf{Q}_1$. Mimo to, kdyby na př. bod B_1 splynul s bodem B_2, splynuly by navzájem obě přímky A_1A_2, A_2A_3 a tudíž i oba body A_1, A_3; stejně jako $B_1 \neq B_2$ se dokáže též $B_1 \neq B_3$, $B_2 \neq B_3$. Nyní podle věty 103.7 existuje na $\mathbf{Q}_1$ projektivita ψ, při které $\psi(A_1) = A_4$, $\psi(A_5) = A_2$, $\psi(A_3) = A_6$. Protože je na př. $A_1 \neq A_4$, není ψ identická transformace kuželosečky $\mathbf{Q}_1$. Dokážeme-li, že všecky tři body B_1, B_2, B_3 leží na ose h projektivity ψ, budeme hotovi. Stačí, provedeme-li důkaz pro bod B_1. Za tím účelem uvažujme na $\mathbf{Q}_1$ involuci φ_1 se středem B_1 a položme $\varphi_2 = \varphi_1 \circ \psi$, takže $\psi = \varphi_1 \circ \varphi_2$ (ježto $\varphi_1 = \varphi_1^{-1}$). Ježto B_1 je průsečík přímek (104.1), je $\varphi_1(A_2) = A_1$, $\varphi_1(A_4) = A_5$; ježto $\psi(A_1) = A_4$, $\psi(A_5) = A_2$ a ježto $\varphi_2 = \varphi_1 \circ \psi$, je $\varphi_2(A_2) = A_4$, $\varphi_2(A_4) = A_2$ a podle věty 87.4 (přenesené na kuželosečku) je φ_2 involuce. Ježto φ_1, φ_2 jsou involuce a ježto $\psi = \varphi_1 \circ \varphi_2$, plyne z věty 104.2, že střed B_1 involuce φ_1 leží na ose h projektivity ψ, což jsme právě měli dokázat.

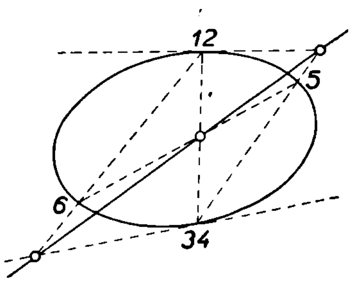


Obr. 2.

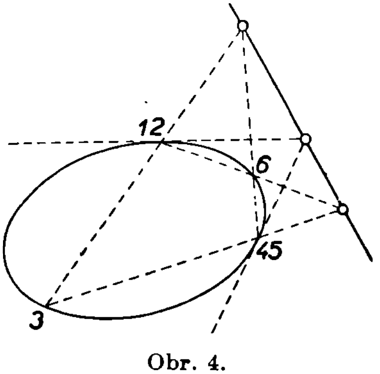
Věta 104.4 byla objevena r. 1640 B. Pascalem (tehdy šestnáctiletým) a je jednou z nejstarších vět projektivní geometrie; nazývá se *Pascalova věta.* Příslušná věta o duálních kuželosečkách $\tilde{Q}_1$ byla formulována teprve r. 1806 Ch. J. Brianchonem



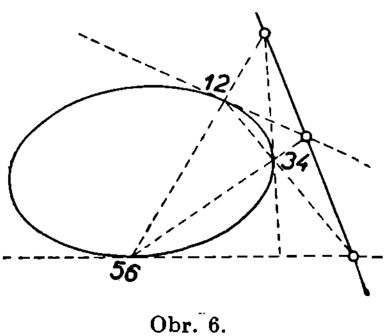
Obr. 3.



Obr. 5.



Obr. 4.



Obr. 6.

a říká se jí někdy *Brianchonova věta.* Obrazce na předcházející straně ilustrují Pascalovu větu; body $A_1, \dots, A_6$ jsou stručně označeny číslicemi 1, ..., 6; (12 na př. znamená, že bod A_1 splývá s bodem A_2); body B_1, B_2, B_3 jsou vyznačeny kroužky.

105. KVADRIKY V TROJROZMĚRNÉM PROSTORU. Je-li n nulita a (p, q) signatura kvadriky $\mathbf{Q}_2$ prostoru $\mathbf{P}_3$, je podle (100.6) $n + p + q = 4$; mimo to $n \leqq 3$; není-li předepsána orientace kvadriky $\mathbf{Q}_2$, můžeme předpokládat, že $p \geqq q$. Pro $n = 3$ je $(p, q) = (1,0)$ a $\mathbf{Q}_2$ je dvojnásobná rovina. Pro $n = 2$ má $\mathbf{Q}_2$ za vrchol přímku p; signatura je buďto (1,1), načež $\mathbf{Q}_2$ se skládá ze dvou různých reálných rovin s průsečnicí p, nebo (2,0), načež $\mathbf{Q}_2$ se skládá ze dvou imaginárních komplexně sdružených rovin, jejichž průsečnicí je opět p. Pro $n = 1$ má $\mathbf{Q}_2$ za vrchol bod V; taková $\mathbf{Q}_2$ se jmenuje *kužel*; průnik kužele s rovinou ϱ neprocházející vrcholem V je regulární $\mathbf{Q}_1$ a kužel se skládá ze všech přímek spojujících V s jednotlivými body na $\mathbf{Q}_1$; signatura je buďto (3,0), načež $\mathbf{Q}_1$ a $\mathbf{Q}_2$ jsou formálně reálné a V je jediným reálným bodem na $\mathbf{Q}_2$, nebo signatura je (2,1), načež $\mathbf{Q}_1$ a $\mathbf{Q}_2$ jsou bodově reálné. V případě signatury (2,1) dělí kužel $\mathbf{Q}_2$ prostor $\mathbf{P}_3$ na vnějšek a vnitřek; $\mathbf{Q}_2$ je v tomto případě singulární eliptická kvadrika.

Zbývají *regulární* $\mathbf{Q}_2$, na které se omezíme v dalším průběhu tohoto článku. Pro signaturu máme tři možnosti: (4,0), (3,1), (2,2). Signatura (4,0) dává formálně reálnou regulární $\mathbf{Q}_2$, která nemá žádný reálný bod. Signatura (3,1) dává eliptickou regulární $\mathbf{Q}_2$, která, jak víme, dělí prostor $\mathbf{P}_3$ na vnitřek a vnějšek. Víme (viz větu 102.3), že tečná rovina takové $\mathbf{Q}_2$ v libovolném jejím bodě H nemá mimo H jiný reálný bod společný s $\mathbf{Q}_2$, takže na $\mathbf{Q}_2$ nejsou žádné reálné přímky. Dále víme (viz větu 102.5), že jestliže rovina ϱ není tečnou rovinou pro $\mathbf{Q}_2$, potom buďto celá ϱ leží vně $\mathbf{Q}_2$ nebo ϱ protne $\mathbf{Q}_2$ v kuželosečce; pól roviny ϱ vzhledem ke $\mathbf{Q}_2$ leží v prvém případě uvnitř a ve druhém vně $\mathbf{Q}_2$. Leží-li bod A uvnitř $\mathbf{Q}_2$, víme, že každá přímka jdoucí bodem A je sečnou kvadriky. Leží-li však A vně $\mathbf{Q}_2$, všimli jsme si už, že jeho polární rovina ϱ protne $\mathbf{Q}_2$ v kuželosečce $\mathbf{Q}_1$. Spojnice bodu A s jednotlivými body na $\mathbf{Q}_2$ jsou tečny ke $\mathbf{Q}_2$ vedené bodem A, které tedy vyplní bodově reálný *kužel tečen* $\mathbf{Q}_2'$ s vrcholem

A . Leží-li bod X mimo kužel tečen $\mathbf{Q}_2'$, nahlédneme snadno, že přímka AX je pro $\mathbf{Q}_2$ sečnou nebo nesečnou podle toho, zda bod X leží uvnitř či vně kužele tečen $\mathbf{Q}_2'$.

Zbývají regulární $\mathbf{Q}_2$ se signaturou (2,2). Z věty 102.2 plyne, že tečná rovina ke $\mathbf{Q}_2$ v libovolném jejím bodě H protne $\mathbf{Q}_2$ ve dvou reálných přímkách s průsečíkem H , t. j. každým bodem na uvažované $\mathbf{Q}_2$ procházejí právě dvě přímky obsažené v $\mathbf{Q}_2$, proto $\mathbf{Q}_2$ se signaturou (2,2) se jmenuje *regulární přímková* $\mathbf{Q}_2$. U takové $\mathbf{Q}_2$ nelze mluvit o vnitřku a vnějšku; z věty 102.1 plyne, že každá rovina ϱ , která není pro $\mathbf{Q}_2$ rovinou tečnou, protne $\mathbf{Q}_2$ v kuželosečce. Z toho plyne dále, že pro každou polohu bodu A mimo $\mathbf{Q}_2$ tvoří tečny ke $\mathbf{Q}_2$ vedené bodem A bodově reálný kužel tečen s vrcholem A . Jestliže přímka AX není tečnou, je sečnou nebo nesečnou podle toho, zda bod X leží vně či uvnitř kužele tečen s vrcholem A . (Opačně než u eliptické $\mathbf{Q}_2$!) Neboť orientujme $\mathbf{Q}_2$ tak, že A je kladný; souhlasně orientovaný průnik $\mathbf{Q}_2$ s polární rovinou ϱ bodu A má podle věty 102.1 signaturu (1,2) a můžeme předpokládat, že bod X leží v ϱ; je-li X uvnitř kužele tečen, je bod X kladný [ježto signatura je (1,2)] a podle věty 99.6 přímka AX je nesečnou pro $\mathbf{Q}_2$. Podobně soudíme v případě, že X je vně kužele tečen.

VĚTA 105.1. *Nechť přímka p leží na regulární přímkové $\mathbf{Q}_2$ prostoru $\mathbf{P}_3$. Jestliže každému bodu X na přímce p přiřadíme tečnou rovinu kvadriky $\mathbf{Q}_2$ v bodě X , dostaneme projektivní zobrazení přímky p na svazek rovin $\pi(p\ ;\ \mathbf{P}_3)$* . Neboť naše přiřazení je částí polarity vzhledem ke $\mathbf{Q}_2$.

VĚTA 105.2. *Všecky přímky ležící na regulární přímkové $\mathbf{Q}_2$ je možné rozdělit na dvě soustavy tak, že dvě různé přímky na $\mathbf{Q}_2$ náležejí do různých soustav, právě když se protnou.* Je zřejmé, že takové rozdělení je možné jen jediným způsobem. Mluvíme-li o *soustavách přímek* na regulární přímkové $\mathbf{Q}_2$, míníme vždy soustavy, o kterých je řeč ve větě 105.2.

DŮKAZ. Víme, že každým bodem H na $\mathbf{Q}_2$ procházejí právě dvě přímky této kvadriky, které dohromady tvoří průnik $\mathbf{Q}_2$ s tečnou rovinou bodu H . Zvolme nyní libovolně bod H_0 na $\mathbf{Q}_2$ a označme p_0 , q_0 obě jím procházející přímky naší kvadriky. Přímku p_0 dejme do prvé soustavy, přímku q_0 do druhé. Každým od H_0 různým bodem přímky

p_0 prochází mimo p_0 ještě právě jedna přímka kvadriky $\mathbf{Q}_2$; dejme ji do druhé soustavy. Každým od H_0 různým bodem přímky q_0 prochází mimo q_0 ještě právě jedna přímka kvadriky $\mathbf{Q}_2$: dejme ji do prvé soustavy. Všimněme si, že jsme jistě nedali žádnou přímku zároveň do obou soustav, neboť taková přímka by nutně ležela v tečné rovině τ_0 bodu H_0 , která však protne $\mathbf{Q}_2$ pouze v přímkách p_0 , q_0 . Na druhé straně jsme umístili každou přímku ležící na $\mathbf{Q}_2$ do jedné z obou soustav. Neboť budiž H libovolný bod na $\mathbf{Q}_2$ a budiž τ jeho tečná rovina. Jestliže H leží mimo p_0 i mimo q_0 , nemůže H ležet v τ_0 , t. j. H není konjugován s H_0 vzhledem ke $\mathbf{Q}_2$ a tudíž ani H_0 neleží v τ . Tedy roviny τ_0 , τ se protnou v přímce r , která neprochází žádným z bodů H_0 , H a protne $\mathbf{Q}_2$ ve dvou bodech, z nichž jeden leží na p_0 a druhý na q_0 . Spojnice těchto dvou bodů s bodem H jsou však právě obě přímky kvadriky $\mathbf{Q}_2$ jdoucí bodem H , z nichž tedy jedna protne p_0 a druhá protne q_0 . Máme tedy skutečně všecky přímky kvadriky $\mathbf{Q}_2$ rozděleny do dvou soustav a je patrné, že jestliže dvě různé přímky kvadriky $\mathbf{Q}_2$ se protnou, potom náleží každá z nich do jiné soustavy, ať již průsečíkem je bod H_0 , či některý jiný bod jedné z obou přímek p_0 , q_0 , či posléze bod H ležící mimo p_0 i mimo q_0 . Zbývá dokázat, že naopak, jestliže máme na $\mathbf{Q}_2$ přímku p prvé soustavy a přímku q druhé soustavy, potom p a q se protnou. To je zřejmé, je-li $p = p_0$ nebo $q = q_0$. Není-li tomu tak, usuzujeme takto. Přímka p neprotne přímku p_0 vůbec, přímka q pak protne p_0 v nějakém bodě $A \neq H_0$. Spojením přímky p s bodem A je rovina ϱ , jejíž průnik s $\mathbf{Q}_2$ obsahuje přímku p a mimo to ještě bod A , takže se snadno nahlédne, že uvažovaný průnik se skládá z přímky p a z nějaké přímky jdoucí bodem A , která musí splynout s přímkou q , neboť bodem A procházejí na $\mathbf{Q}_2$ pouze dvě přímky p_0 , q a prvá z nich neleží spolu s p v téže rovině. Tedy přímky p , q leží obě v rovině ϱ , tudíž se protnou.

VĚTA 105.3. *Buďtež p_1 , p_2 dvě různé přímky téže soustavy na regulární přímkové kvadrice* $\mathbf{Q}_2$. (Podle věty 105.2 nemají tedy přímky p_1 , p_2 žádný společný bod.) *Potom existuje takové projektivní zobrazení φ přímky p_1 na přímku p_2 , že bod X_2 přímky p_2 je obrazem bodu X_1 přímky p_1 , právě když přímka X_1X_2 leží na* $\mathbf{Q}_2$. Zřejmě tyto přímky X_1X_2 vyplní na $\mathbf{Q}_2$ tu soustavu, do které nenáležejí dané přímky p_1 , p_2 .

DŮKAZ. Je snadné sestavit geometrický důkaz; to přenecháme čtenáři a podáme početní důkaz. Existuje ar. base A_0, A_1, A_2, A_3 prostoru $\boldsymbol{P}_3$ tak, že A_0, A_1 je ar. base přímky p_1 a A_2, A_3 je ar. base přímky p_2. Snadno se nahlédne, že v kvadratické formě f_2, která vytvořuje $\mathbf{Q}_2$, jsou pro $X = x_0A_0 + x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3$ všecky koeficienty rovny nule až na koeficienty při $x_0x_2, x_1x_2, x_0x_3, x_1x_3$, t. j.

$$f_2(X) = ax_0x_2 + bx_1x_2 + cx_0x_3 + dx_1x_3 .$$

Podmínky pro singulární bod jsou

$$\begin{aligned} ax_2 + cx_3 &= 0 , \quad bx_2 + dx_3 = 0 , \\ ax_0 + bx_1 &= 0 , \quad cx_0 + dx_1 = 0 ; \end{aligned}$$

ježto $\mathbf{Q}_2$ je regulární, lze jím vyhovět pouze triviálně, t. j. $ad - bc \neq 0$. Položíme-li nyní

$$LA_0 = cA_2 - aA_3 , \qquad LA_1 = dA_2 - bA_3 ,$$

je $\varphi = \{L\}$ projektivní zobrazení přímky p_1 na přímku p_2, které má žádanou vlastnost, ježto se snadno verifikuje, že pro $X_1 = x_0A_0 + x_1A_1 \neq \mathbf{o}$, $X_2 = LX_1$ celá přímka X_1X_2 leží na $\mathbf{Q}_2$.

VĚTA 105.4. *Nechť přímky p_1, p_2 prostoru $\boldsymbol{P}_3$ nemají společný bod. Budiž dáno projektivní zobrazení φ přímky p_1 na přímku p_2. Potom existuje v $\boldsymbol{P}_3$ regulární přímková kvadrika $\mathbf{Q}_2$* (obsahující obě dané přímky), *vzhledem k níž má φ vlastnost uvažovanou ve větě* 105.3.

DŮKAZ. Můžeme zvolit ar. basi A_0, A_1, A_2, A_3 prostoru $\boldsymbol{P}_3$ tak, že A_0, A_1 je ar. base pro p_1, že A_2, A_3 je ar. base pro p_2 a že obrazem bodu $\{x_0A_0 + x_1A_1\}$ při φ je bod $\{x_0A_2 + x_1A_3\}$. Potom se však snadno verifikuje, že je-li $f_2(X) = x_0x_3 - x_1x_2$, vytvořuje f_2 žádanou kvadriku $\mathbf{Q}_2$.

106. LINEÁRNÍ PROSTORY NA KVADRIKÁCH. Budeme se zabývat v tomto článku pouze regulárními kvadrikami; výsledky se snadno přenesou na singulární kvadriky užitím článku 96, což přenecháváme čtenáři. Budiž tedy dána regulární kvadrika $\mathbf{Q}_{m-1}$ prostoru $\boldsymbol{P}_m$ a budiž $\boldsymbol{P}_k$ lineární podprostor, který celý leží na $\mathbf{Q}_{m-1}$. Dokážeme, že

$$(106.1) \qquad k \leqq \frac{m-1}{2} .$$

Ježto Q_{m-1} je regulární, převede polarita vzhledem ke Q_{m-1} lineární podprostor P_k v duální podprostor $\tilde{P}_k$ téže dimense k, t. j. (viz článek 75), ve množinu všech těch nadrovin prostoru P_m, které procházejí všemi body určitého $(m - k - 1)$-rozměrného lineárního podprostoru v širším smyslu P'_{m-k-1}. Snadno se nahlédne, že do P'_{m-k-1} náležejí všecky ty body prostoru P_m, které jsou vzhledem ke Q_{m-1} konjugovány s každým bodem prostoru P_k. Ježto však P_k je částí kvadriky Q_{m-1}, jsou každé dva body prostoru P_k mezi sebou konjugovány vzhledem ke Q_{m-1} a z toho plyne, že prostor P_k je částí prostoru P'_{m-k-1}, že tedy $k \leqq m - k - 1$, z čehož následuje nerovnost (106.1). Pro $m = 1$ a pro $m = 2$ ze (106.1) plyne $k = 0$, t. j. regulární Q_0 a regulární Q_1 neobsahuje žádné přímky, což jsme ostatně již věděli. Pro $m \geqq 3$ ze (106.1) plyne, že *dimense lineárního podprostoru obsaženého v regulární* Q_{m-1} *je při lichém* m *nejvýš rovna* $\frac{1}{2}(m - 1)$, *při sudém* m *nejvýš rovna* $\frac{1}{2}m - 1$.

Na otázku, zdali obráceně regulární Q_{m-1} obsahuje lineární podprostory právě udané maximální dimense, je *v komplexním oboru* odpověď kladná, a dokonce platí, že každý bod na Q_{m-1} a každý v Q_{m-1} obsažený lineární podprostor nižší dimense je obsažen v nějakém lineárním podprostoru výše vyčíslené maximální dimense. Ježto pro $m = 1$ a $m = 2$ je věta správná (počítáme-li body za lineární podprostory dimense 0), můžeme ji dokázat indukcí. Je-li H libovolně daný bod na Q_{m-1}, kde $m \geqq 3$, potom podle té části věty 102.2, ve které se nemluví o signatuře a která zřejmě platí i v komplexním oboru, tečná nadrovina τ bodu H protne Q_{m-1} v Q_{m-2} s jediným singulárním bodem H; zvolíme-li v τ lineární podprostor P_{m-2}, protne jej Q_{m-1} v regulární Q_{m-2} a Q_{m-1} se skládá ze všech přímek spojujících H s jednotlivými body na Q_{m-2}. Nyní podle předpokladu na Q_{m-2} leží lineární podprostor dimense $\frac{1}{2}(m - 3)$ při lichém m (pro $m = 3$ prostě bod), dimense $\frac{1}{2}m - 2$ při sudém m (pro $m = 4$ opět prostě bod). Spojení tohoto lineárního podprostoru s bodem H je žádaný ve Q_{m-1} obsažený lineární podprostor P_k, kde $k = \frac{1}{2}(m - 1)$ při lichém m, $k = \frac{1}{2}m - 1$ při sudém m. Je-li původně dán ve Q_{m-1} obsažený s bodem H procházející lineární podprostor P_h, $h < k$, dokáže se snadno (opět indukcí), že P_k lze volit tak, aby obsahoval daný P_h. Také je patrné, že Q_{m-1} obsahuje nekonečně mnoho lineárních podprostorů $\mathbf{P}_k$ maximální dimense, a pro $m \geqq 4$ jich libovolně daným bodem H kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$ prochází nekonečně mnoho, kdežto pro $m = 3$ jenom dva.

V reálném oboru závisí maximální dimense k lineárního podprostoru regulární kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$ na její signatuře (p, q). Ježto nezáleží na orientaci, můžeme předpokládat, že $p \geqq q$. Podle (100.6) a podle věty 100.3 je

$$p + q = m + 1 . \tag{106.2}$$

Pro $q = 0$ je $\mathbf{Q}_{m-1}$ formálně reálná a neobsahuje žádné reálné body. Pro $q = 1$ je $\mathbf{Q}_{m-1}$ eliptická a podle věty 102.3 neobsahuje žádné reálné přímky. Pro $q \geqq 2$ však $\mathbf{Q}_{m-1}$ obsahuje lineární podprostory a jejich maximální dimense je rovna $k = q - 1$. Důkaz se opět provede indukcí na základě věty 102.2, kde si tentokrát musíme všimnout i části týkající se signatury; důkaz je tak podobný výše provedenému důkazu pro komplexní obor, že jej můžeme přenechat čtenáři. I v reálném oboru platí, že každý bod na $\mathbf{Q}_{m-1}$ a každý v $\mathbf{Q}_{m-1}$ obsažený lineární podprostor nižší dimense je obsažen v lineárním prostoru maximální dimense obsaženém v $\mathbf{Q}_{m-1}$.

Ježto $k = q - 1$, můžeme ze (106.2) vypočíst signaturu, známe-li k. Je-li tedy $\mathbf{Q}_{m-1}$ bodově reálná regulární kvadrika prostoru $\mathbf{P}_m$ a je-li $\mathbf{Q}'_{m-1}$ bodově reálná regulární kvadrika prostoru $\mathbf{P}'_m$, potom v důsledku vět 100.3, 101.1 a 101.2 existuje kolineární zobrazení prostoru $\mathbf{P}_m$ na prostor $\mathbf{P}'_m$ převádějící $\mathbf{Q}_{m-1}$ v $\mathbf{Q}'_{m-1}$, právě když maximální dimense lineárního podprostoru je táž u kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$ jako u kvadriky $\mathbf{Q}'_{m-1}$.

XIV

RŮZNÉ DOPLŇKY.

107. AFINNÍ KLASIFIKACE REGULÁRNÍCH KVADRIK. Budiž dán eukleidovský prostor $\mathbf{E}_m$, jehož úběžnou nadrovinou označíme N. *Kvadrikou prostoru* $\mathbf{E}_m$ rozumíme kvadriku projektivního rozšíření $\bar{\mathbf{E}}_m$, která neobsahuje jako část celou nadrovinu N; všímáme si zpravidla pouze bodů v konečnu takové kvadriky. V následujícím si všimneme pouze *regulárních* $\mathbf{Q}_{m-1}$ v prostoru $\mathbf{E}_m$ $(m \geqq 2)$. Dělíme je na středové a na paraboloidy podle toho, zda úběžná nadrovina N není či je tečnou nadrovinou pro $\mathbf{Q}_{m-1}$.

Vyšetřujme nejprve *středové* $\mathbf{Q}_{m-1}$. *Středem* takové $\mathbf{Q}_{m-1}$ nazveme pól S nadroviny N vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-1}$; je to e. bod, který neleží na $\mathbf{Q}_{m-1}$. Přímka procházející středem S se jmenuje *průměr* kvadriky. Průměr, jehož úběžný bod leží na $\mathbf{Q}_{m-1}$, se jmenuje *asymptota* kvadriky. Z věty 76.3 soudíme, že průměr, který není asymptotou, má s $\mathbf{Q}_{m-1}$ společné dva (reálné nebo imaginární) e. body A, A' tak, že S je středem dvojice A, A'; naproti tomu asymptota nemá s $\mathbf{Q}_{m-1}$ v konečnu žádný společný bod. Asymptoty jsou tečny pro $\mathbf{Q}_{m-1}$ (s úběžným bodem dotyku); každý jiný reálný průměr je pro $\mathbf{Q}_{m-1}$ buďto sečnou nebo nesečnou.

Mezi středové kvadriky patří všecky formálně reálné kvadriky; u nich každý reálný průměr je nesečnou. Dále si všimněme středových eliptických (regulárních) kvadrik. Ty jsou dvojího druhu podle toho, zda střed S leží uvnitř nebo vně $\mathbf{Q}_{m-1}$; leží-li S uvnitř, nazveme $\mathbf{Q}_{m-1}$ *elipsoidem* (pro $m = 2$ *elipsou*); leží-li S vně, nazveme $\mathbf{Q}_{m-1}$ *dvojdílnou kvadrikou* z důvodu, který v dalším vyložíme; dvojdílná $\mathbf{Q}_1$ se jmenuje *hyperbola*.

Každá přímka procházející nějakým vnitřním bodem elipsoidu, zejména tedy také každý jeho průměr, je sečnou elipsoidu (viz větu 102.4). Každá nesečna elipsoidu leží vně elipsoidu a totéž platí i o každé tečně s výjimkou jejího bodu dotyku. Jsou-li H, K průsečíky sečny s elipsoidem $\mathbf{Q}_{m-1}$, potom, jelikož při kladné orientaci elipsoidu úběžný bod je kladný a vnitřní body jsou záporné vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-1}$, podle poznámky na konci článku 99 úsečka HK leží (až na své krajní body) uvnitř $\mathbf{Q}_{m-1}$ a ostatek přímky HK leží vně elipsoidu. Vnitřek elipsoidu $\mathbf{Q}_{m-1}$ je tedy možné definovat jako množinu všech vnitřních bodů všech úseček, které mají své krajní body na $\mathbf{Q}_{m-1}$. Tečná nadrovina elipsoidu $\mathbf{Q}_{m-1}$ leží až na svůj bod dotyku celá vně $\mathbf{Q}_{m-1}$. Nadrovina ϱ, která není tečnou nadrovinou pro $\mathbf{Q}_{m-1}$, buďto nemá s $\mathbf{Q}_{m-1}$ žádný společný bod a leží celá vně $\mathbf{Q}_{m-1}$, nebo protne $\mathbf{Q}_{m-1}$ v elipsoidu $\mathbf{Q}_{m-2}$ (pro $m = 3$ v elipse, pro $m = 2$ ve dvou reálných bodech); prvý případ nastane na př. pro úběžnou nadrovinu, druhý pak pro každou nadrovinu obsahující bod uvnitř $\mathbf{Q}_{m-1}$, zejména tedy pro každou *diametrální nadrovinu*, t. j. nadrovinu jdoucí středem S. Je-li $\{u\}$ libovolný směr a $\mathbf{E}_{m-1}$ jeho polární nadrovina, je $\mathbf{E}_{m-1}$ diametrální nadrovinou; z věty 76.3 plyne, že $\mathbf{E}_{m-1}$ obsahuje pro každou sečnu vedenou směrem $\{\mathbf{u}\}$ a protínající $\mathbf{Q}_{m-1}$ v bodech H, K střed dvojice H, K. Je-li $\mathbf{Q}_{m-2}$ průnik $\mathbf{E}_{m-1}$ s $\mathbf{Q}_{m-1}$, potom přímka směru $\{\mathbf{u}\}$ vedená bodem na $\mathbf{Q}_{m-2}$ je tečnou elipsoidu, přímka směru $\{\mathbf{u}\}$ vedená bodem uvnitř $\mathbf{Q}_{m-2}$ je sečnou a přímka směru $\{\mathbf{u}\}$ vedená bodem vně $\mathbf{Q}_{m-2}$ je nesečnou; pro $m = 2$ se $\mathbf{Q}_0$ skládá ze dvou bodů A, B a vnitřkem zde musíme rozumět vnitřek úsečky AB, vnějškem část přímky AB mimo úsečku AB.

Budiž nyní $\mathbf{Q}_{m-1}$ dvojdílná kvadrika. Ježto pól S úběžné nadroviny N leží vně $\mathbf{Q}_{m-1}$, podle věty 102.5 N protne $\mathbf{Q}_{m-1}$ v regulární eliptické $\mathbf{Q}_{m-2}$ (pro $m = 2$ v $\mathbf{Q}_0$ skládající se ze dvou různých reálných úběžných bodů). Podle věty 102.5 (aplikované na kvadriku $\mathbf{Q}_{m-2}$ prostoru N) existuje v N $(m - 2)$-rozměrný lineární podprostor $\mathbf{P}_{m-2}$, jehož všecky body leží vně $\mathbf{Q}_{m-1}$ (což je zřejmě správné i pro $m = 2$). Avšak také bod S, který je konjugovaný ke každému bodu prostoru N, leží vně $\mathbf{Q}_{m-1}$, takže podle věty 99:6 leží vně $\mathbf{Q}_{m-1}$ celá nadrovina ϱ prostoru $\mathbf{E}_m$, která spojuje S a $\mathbf{P}_{m-2}$. Ježto tedy $\mathbf{Q}_{m-1}$ a ϱ nemají žádný společný bod, můžeme rozdělit množinu všech e. bodů naší kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$ na dva t. zv. *pláště*, z nichž jeden leží celý v jednom a druhý celý ve druhém z obou poloprostorů, na které nadrovina ϱ rozkládá e. prostor $\mathbf{E}_m$. Pro $m = 2$ dvojdílnou $\mathbf{Q}_1$ jsme nazvali hyperbolou; místo slova plášť se pro $m = 2$ užívá slova *větev*. Je třeba ovšem dokázat, že rozklad naší $\mathbf{Q}_{m-1}$ na dva pláště je nezávislý na volbě pomocné nadroviny ϱ, o které ostatně stačí vědět, že leží celá vně $\mathbf{Q}_{m-1}$ (a nemá tudíž s $\mathbf{Q}_{m-1}$ žádný společný reálný bod); nezáleží na tom, zda ϱ prochází středem S. Abychom slíbený důkaz provedli, uvažme, že podle poznámky na konci článku 99, jsou-li A, B dva různé e. body na $\mathbf{Q}_{m-1}$, leží buďto celá úsečka AB až na body A, B uvnitř a ostatek přímky AB vně $\mathbf{Q}_{m-1}$ nebo leží obráceně celá úsečka AB až na body A, B vně a ostatek přímky AB uvnitř $\mathbf{Q}_{m-1}$; který z obou případů nastane, to záleží na tom, zdali průsečík přímky AB s nadrovinou ϱ, který v projektivním rozšíření $\bar{\mathbf{E}}_m$ prostoru $\mathbf{E}_m$ jistě existuje, náleží do úsečky AB. Z toho plyne: *Jestliže dva různé e. body A, B dvojdílné kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$ leží oba na témže plášti, je vnitřek úsečky AB částí vnitřku kvadriky; jestliže však leží každý z obou bodů A, B v jiném plášti, je vnitřek úsečky AB částí vnějšku kvadriky.* Tím jsou pláště skutečně popsány nezávisle na pomocné nadrovině ϱ. Na druhé straně je patrné, že popis plášťů pomocí poloprostorů, na které nadrovina ϱ rozdělí $\mathbf{Q}_{m-1}$, zůstane správný i v tom případě, je-li ϱ tečnou nadrovinou, neboť každá tečná nadrovina je celá vně $\mathbf{Q}_{m-1}$ až na svůj bod dotyku.

Řekli jsme si již, že úběžné body dvojdílné kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$ tvoří v nadrovině N pro $m \geqq 3$ regulární eliptickou kvadriku $\mathbf{Q}_{m-2}$. Přímky, které spojují střed S se směry ležícími na $\mathbf{Q}_{m-2}$ jsou asymptoty kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$ a dohromady tvoří její *asymptotický kužel* $\mathbf{Q}'_{m-1}$; je to singulární $(m - 1)$-rozměrná eliptická kvadrika s jediným singulárním bodem S. Směr $\{\mathbf{u}\}$ leží uvnitř $\mathbf{Q}_{m-1}$, právě když leží uvnitř $\mathbf{Q}_{m-2}$ neboli právě když leží uvnitř $\mathbf{Q}'_{m-1}$; podobně jestliže slovo uvnitř nahradíme slovem vně. Máme směry trojího druhu. Jestliže předně směr $\{\mathbf{u}\}$ leží na $\mathbf{Q}_{m-1}$, potom přímka směru $\{\mathbf{u}\}$ jdoucí středem S je asymptotou a nemá tudíž s $\mathbf{Q}_{m-1}$ v konečnu žádný společný bod; každá jiná přímka směru $\{\mathbf{u}\}$ má s $\mathbf{Q}_{m-1}$ v konečnu právě jeden společný bod, který rozdělí přímku na dvě polopřímky, z nichž jedna leží uvnitř a druhá vně $\mathbf{Q}_{m-1}$. Jestliže za druhé směr $\{\mathbf{u}\}$ leží uvnitř $\mathbf{Q}_{m-1}$, potom každá přímka směru $\{\mathbf{u}\}$ je sečnou a protne $\mathbf{Q}_{m-1}$ ve dvou reálných bodech H_1, H_2, z nichž je každý v jiném plášti; středy všech dvojic H_1, H_2 vyplní polární nadrovinu směru $\{\mathbf{u}\}$ vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-1}$, která prochází středem S a leží celá vně $\mathbf{Q}_{m-1}$.

Jestliže posléze směr $\{u\}$ leží vně Q_{m-1}, potom jeho polární nadrovina σ protne Q_{m-1} v regulární dvojdílné eliptické kvadrice $Q_{m-2}(\sigma)$ [pro $m = 3$ v hyperbole $Q_1(\sigma)$], která má s Q_{m-1} společný střed S; přímka, vedená ve směru $\{u\}$ bodem na $Q_{m-2}(\sigma)$, je tečnou ke Q_{m-1} v tomto bodě, přímka vedená ve směru $\{u\}$ bodem uvnitř $Q_{m-2}(\sigma)$ protne Q_{m-1} ve dvou bodech H_1, H_2 na témž plášti tak, že střed dvojice H_1, H_2 leží v nadrovině σ; posléze přímka vedená ve směru $\{u\}$ bodem vně $Q_{m-2}(\sigma)$ je nesečnou pro Q_{m-1}.

Výsledky formulované v předcházejícím odstavci platí též pro $m = 2$, t. j. pro hyperbolu Q_1; „asymptotický kužel" Q'_0 se zde skládá ze dvou asymptot a pro směr $\{u\}$ ležící vně Q_1 kvadrika $Q_0(\sigma)$ se skládá ze dvou reálných bodů.

Pro $m = 2$ vedle formálně reálné regulární Q_1, elipsy a hyperboly neexistují jiné regulární středové Q_1. Pro $m = 3$ vedle formálně reálné regulární Q_2 se signaturou (4,0), elipsoidu se signaturou (3.1) a dvojdílné Q_2 s touž signaturou (3,1), nazývané obyčejně *dvojdílný hyperboloid*, existuje ještě regulární středová Q_2 se signaturou (2,2); je to přímková kvadrika zvaná obyčejně *jednodílný hyperboloid*. Také jednodílný hyperboloid, stejně jako dvojdílný, protne úběžnou rovinu v kuželosečce Q_1; přímky spojující střed S s jednotlivými úběžnými body na Q_1 tvoří opět *asymptotický kužel* Q'_2. Rozdíl mezi oběma hyperboloidy je na př. v tom, že kdežto dvojdílný hyperboloid leží celý uvnitř svého asymptotického kužele Q'_2, leží jednodílný hyperboloid celý vně Q'_2. Jiný rozdíl je na př. v tom, že pro jednodílný hyperboloid je každá přímka buďto sečnou nebo tečnou; nesečny neexistují. Popis možných poloh přímky ke Q_2, výše podrobně udaný pro elipsoidy a dvojdílné hyperboloidy, nebudeme zde uvádět; čtenář už poznal, že tu běží jen o jednoduché specialisace projektivních vlastností známých z předcházející kapitoly.

Pro obecné m se omezme na poznámku, že existuje mimo formálně reálnou Q_{m-1} se signaturou $(m + 1, 0)$ pro liché m celkem $\frac{1}{2}(m + 1)$ možných signatur pro regulární středové Q_{m-1}:

$$(107.1) \qquad (m, 1); \ (m - 1, 2); \ \ldots; \ \left(\frac{m+1}{2}, \frac{m+1}{2}\right);$$

každá z těchto signatur, s výjimkou poslední, dává dva různé typy podle toho, zda střed S je uvnitř či vně Q_{m-1}, takže celkem pro liché

m máme m různých typů bodově reálných regulárních středových $\mathbf{Q}_{m-1}$. Pro sudé m mimo signaturu $(m+1, 0)$ formálně reálné $\mathbf{Q}_{m-1}$ máme celkem $\frac{1}{2}m$ možných signatur pro regulární středové $\mathbf{Q}_{m-1}$:

$$(107.2) \qquad (m, 1); \ (m-1, 2); \ \ldots; \ \left(\frac{m}{2}+1, \frac{m}{2}\right);$$

každá z těchto signatur bez výjimky dává dva různé typy podle toho, zda střed S je uvnitř či vně $\mathbf{Q}_{m-1}$, takže pro sudé m stejně jako pro liché m máme opět celkem m různých typů bodově reálných regulárních středových $\mathbf{Q}_{m-1}$.

Z výsledků článku 100 plyne, že je-li dána regulární středová $\mathbf{Q}_{m-1}$ prostoru $\mathbf{E}_m$, je možno v $\mathbf{E}_m$ nekonečně mnoha způsoby zavést lineární soustavu souřadnic

$$(107.3) \qquad \langle S; \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m \rangle$$

s počátkem ve středu S kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$ tak, že *rovnice kvadriky* $\mathbf{Q}_{m-1}$ je

$$(107.4) \qquad \varepsilon_1 x_1^2 + \ldots + \varepsilon_m x_m^2 = 1,$$

což ovšem znamená, že e. bod $X = [x_1, \ldots, x_m]$ leží na $\mathbf{Q}_{m-1}$, právě když je splněna rovnice (107.4). Při tom koeficienty $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$ jsou různé od nuly a ačkoli jejich hodnoty jsou ovšem závislé na volbě soustavy souřadnic (107.3), jsou jejich znamení na této volbě nezávislá, neboť je-li (p, q) signatura dané $\mathbf{Q}_{m-1}$, při čemž je $p + q = m + 1$ a můžeme předpokládat, že $p \geqq q$, je pro formálně reálnou $\mathbf{Q}_{m-1}$: $p = m + 1$, $q = 0$ a všecka ε_r $(1 \leqq r \leqq m)$ jsou záporná; pro bodově reálnou kvadriku pak: (1) v případě $p > q$, jestliže střed S leží uvnitř $\mathbf{Q}_{m-1}$, počet kladných ε_r je roven p, počet záporných ε_r je roven $q - 1$; (2) v případě $p > q$, jestliže střed S leží vně $\mathbf{Q}_{m-1}$, počet kladných ε_r je roven q, počet záporných ε_r je roven $p - 1$; (3) v případě $p = q$, který je možný pouze pro lichá m, je počet kladných ε_r roven p, počet záporných ε_r roven $p - 1$. Pro $m = 2$ v rovnici

$$\varepsilon_1 x_1^2 + \varepsilon_2 x_2^2 = 1$$

jsou obě čísla ε_1, ε_2 záporná v případě formálně reálné $\mathbf{Q}_1$, obě jsou kladná v případě elipsy, jedno je kladné a druhé záporné v případě hyperboly. Pro $m = 3$ v rovnici

$$\varepsilon_1 x_1^2 + \varepsilon_2 x_2^2 + \varepsilon_3 x_3^2 = 1$$

jsou všecka tři čísla ε_1, ε_2, ε_3 záporná v případě formálně reálné $\mathbf{Q}_2$, všecka tři jsou kladná v případě elipsoidu, jedno je kladné a dvě záporná v případě dvojdílného hyperboloidu, dvě jsou kladná a jedno záporné v případě jednodílného hyperboloidu.

Zároveň s kvadrikou $\mathbf{Q}_{m-1}$ danou rovnicí (107.5) je účelné uvažovat také kvadriku $\mathbf{Q}'_{m-1}$ danou rovnicí

$$(107.5) \qquad \varepsilon_1 x_1^2 + \ldots + \varepsilon_m x_m^2 + 1 = 0\,,$$

což je opět regulární středová kvadrika téhož $\mathbf{E}_m$ s týmž středem S. Vztah mezi oběma kvadrikami $\mathbf{Q}_{m-1}$ a $\mathbf{Q}'_{m-1}$ je zřejmě symetrický; nazveme je navzájem *středově sdružené.* Je patrné, že každý průměr je buďto asymptotou zároveň pro $\mathbf{Q}_{m-1}$ i pro $\mathbf{Q}'_{m-1}$, nebo je pro jednu z nich sečnou a pro druhou nesečnou. Vztah středové sdruženosti je nezávislý na volbě souřadnicové soustavy (107.3), neboť se dá popsat tak, že je-li ϱ polární nadrovina e. bodu X vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-1}$ a je-li X' obraz bodu X při středové souměrnosti se středem S, je ϱ polární nadrovina bodu X' vzhledem ke $\mathbf{Q}'_{m-1}$.

Budiž nyní $\mathbf{Q}_{m-1}$ *paraboloid,* t. j. regulární kvadrika prostoru $\mathbf{E}_m$, pro kterou úběžná nadrovina N je tečnou nadrovinou; v případě $m = 2$, který v následujícím není vyloučen, se místo slova paraboloid užívá slova *parabola.*

Označme $\{\boldsymbol{u}_1\}$ (úběžný) bod dotyku nadroviny N a nazveme jej *osovým směrem* paraboloidu. Ježto regulární kvadrika $\mathbf{Q}_{m-1}$ obsahuje reálný bod $\{\boldsymbol{u}\}$, je paraboloid $\mathbf{Q}_{m-1}$ bodově reálnou kvadrikou; jeho (neorientovaná) signatura má tvar (p, q), kde $p \geqq q \geqq 1$, $p + q = m + 1$. Nadrovina N podle věty 102.2 protne $\mathbf{Q}_{m-1}$ v kvadrice $\mathbf{Q}_{m-2}$, která má jediný singulární bod $\{\boldsymbol{u}_1\}$ a která má signaturu $(p - 1, q - 1)$. Je-li $q = 1$, je $\mathbf{Q}_{m-1}$ *eliptický paraboloid,* t. j. je to paraboloid, který je zároveň eliptickou kvadrikou; v tomto případě, který pro $m = 2$ je jedině možný, je osový směr $\{\boldsymbol{u}_1\}$ jediným reálným úběžným bodem paraboloidu; je-li však $q \geqq 2$ (a tedy $m \geqq 3$), je úběžná kvadrika $\mathbf{Q}_{m-2}$ bodově reálná a obsahuje mimo svůj singulární bod $\{\boldsymbol{u}_1\}$ ještě nekonečně mnoho regulárních reálných bodů.

Budiž nejprve $\mathbf{Q}_{m-1}$ eliptický paraboloid, takže při kladné orientaci je signatura $(m, 1)$; body vně $\mathbf{Q}_{m-1}$ jsou kladné, body uvnitř $\mathbf{Q}_{m-1}$ jsou záporné. Až na osový směr $\{\boldsymbol{u}_1\}$, který leží na $\mathbf{Q}_{m-1}$, leží všecky úběžné body vně $\mathbf{Q}_{m-1}$. E. přímka p osového směru $\{\mathbf{u}_1\}$ není tečnou ke $\mathbf{Q}_{m-1}$ v bodě $\{\mathbf{u}_1\}$, protože tečná nadrovina v tomto bodě je úběžná; tudíž p je sečnou pro $\mathbf{Q}_{m-1}$ a protne $\mathbf{Q}_{m-1}$ v konečnu v právě jednom bodě A, který rozdělí p na dvě polopřímky tak, že až na bod A je jedna celá uvnitř a druhá vně $\mathbf{Q}_{m-1}$. Má-li e. přímka p směr různý od $\{\mathbf{u}_1\}$, je její úběžný bod vně $\mathbf{Q}_{m-1}$ a jsou tři možnosti: buďto p je nesečnou a leží celá vně $\mathbf{Q}_{m-1}$, nebo p je tečnou a až na svůj bod dotyku leží celá vně $\mathbf{Q}_{m-1}$, nebo posléze p je sečnou a protne $\mathbf{Q}_{m-1}$ ve dvou různých e. bodech H_1, H_2 tak, že úsečka H_1H_2 až na své krajní body leží uvnitř $\mathbf{Q}_{m-1}$, ostatek přímky p pak vně $\mathbf{Q}_{m-1}$. Tedy jako u elipsoidu můžeme i u eliptického paraboloidu definovat vnitřek jako množinu všech vnitřních bodů všech úseček, jejichž krajní body leží na $\mathbf{Q}_{m-1}$. Jestliže e. bod A leží na $\mathbf{Q}_{m-1}$, potom přímka p vedená bodem A v osovém směru $\{\mathbf{u}_1\}$ není tečnou v bodě A, takže zaměření tečné nadroviny α bodu A neobsahuje směr $\{\mathbf{u}_1\}$. E. nadrovina $\beta \neq \alpha$ rovnoběžná s α nemůže být tečnou nadrovinou pro $\mathbf{Q}_{m-1}$. Neboť β protne p v e. bodě $B \neq A$; budiž B' ten bod na přímce p, pro který A je středem dvojice B, B'; ježto oba body A, $\{\mathbf{u}_1\}$ leží na $\mathbf{Q}_{m-1}$, jsou B, B' navzájem konjugovány vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-1}$, mimo to však také každý úběžný bod nadroviny α je konjugován jak s bodem A, tak i s bodem $\{\mathbf{u}_1\}$, tedy též s bodem B'; z toho plyne, že β je polární nadrovinou bodu B', který neleží na β, takže β vskutku není tečnou nadrovinou. Na druhé straně budiž $\mathbf{P}_{m-2}$ libovolný $(m-1)$-směr neobsahující směr $\{\mathbf{u}_1\}$; potom má $\mathbf{Q}_{m-1}$ tečnou nadrovinu (podle předchozího právě jednu) se zaměřením $\mathbf{P}_{m-2}$. Neboť je-li β libovolně zvolená e. nadrovina se zaměřením $\mathbf{P}_{m-2}$, potom její pól B vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-1}$ je bod v konečnu, ježto každý bod v nekonečnu je konjugován s bodem $\{\mathbf{u}_1\}$, který neleží v β; přímka p vedená bodem B ve směru $\{\mathbf{u}_1\}$ protne $\mathbf{Q}_{m-1}$ v e. bodě A a každý úběžný bod nadroviny β je konjugován jak s bodem B, tak s bodem $\{\mathbf{u}_1\}$, tedy též s bodem A, takže tečná nadrovina bodu A je rovnoběžná s β.

Ježto parabola má signaturu (2,1), platí všecky výsledky předcházejícího odstavce i pro parabolu. Pro $m \geqq 3$ některé z těchto výsledků platí pro všecky paraboloidy. Zejména platí, že každá přímka osového směru $\{\mathbf{u}_1\}$ protne $\mathbf{Q}_{m-1}$ v právě jednom e. bodě, že tečná nadrovina nemůže obsahovat osový směr $\{\mathbf{u}_1\}$ a že každý $(m-1)$-směr, který neobsahuje směr $\{\mathbf{u}_1\}$, je zaměřením právě jedné tečné nadroviny. To, co bylo právě řečeno, se vztahuje na ty tečné nadroviny, jejichž bod dotyku je v konečnu; jestliže paraboloid $\mathbf{Q}_{m-1}$ není eliptický, obsahuje úběžné body $\{\mathbf{u}\} \neq \{\mathbf{u}_1\}$ a tečná nadrovina v takovém úběžném bodě obsahuje směr $\{\mathbf{u}_1\}$.

Dokažme nyní, že je-li dán paraboloid $\mathbf{Q}_{m-1}$ prostoru $\mathbf{E}_m$, je možno v $\mathbf{E}_m$ nekonečně mnoha způsoby zavést lineární soustavu souřadnic

$$\langle P\,;\,\mathbf{u}_1\,,\,\ldots\,,\,\mathbf{u}_m\rangle \tag{107.6}$$

tak, aby *rovnice paraboloidu* $\mathbf{Q}_{m-1}$ byla

$$\varepsilon_2 x_2^2 + \ldots + \varepsilon_m x_m^2 = 2x_1\,, \tag{107.7}$$

což ovšem znamená, že e. bod $X = [x_1\,,\,\ldots\,,\,x_m]$ leží na $\mathbf{Q}_{m-1}$, právě když je splněna rovnice (107.7). Při tom koeficienty $\varepsilon_2\,,\,\ldots\,,\,\varepsilon_m$ jsou různé od nuly a je-li mezi nimi $p - 1$ kladných a $q - 1$ záporných, jsou čísla $p\,,\,q$ nezávislá na volbě soustavy (107.6), ježto $(p\,,\,q)$ je neorientovaná signatura kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$; je patrné, že jestliže soustavu (107.6) změníme tak, že místo $\mathbf{u}_1$ dáme $-\mathbf{u}_1$, vymění se p a q mezi sebou.

Nejprve je patrné, že jsou-li dána čísla $\varepsilon_2\,,\,\ldots\,,\,\varepsilon_m$ různá od nuly, potom při libovolné volbě lineární soustavy souřadnic (107.6) je (107.7) rovnice určité kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$. Snadno verifikujeme, že $\mathbf{Q}_{m-1}$ nemá ani v konečnu, ani v nekonečnu singulární bod a že pólem úběžné nadroviny N je úběžný bod $\{\mathbf{u}_1\}$, takže $\mathbf{Q}_{m-1}$ je *paraboloid s osovým směrem* $\{\mathbf{u}_1\}$. Dále je patrné, že průnik $\mathbf{Q}_{m-1}$ s N má rovnici $\varepsilon_2 x_2^2 + \ldots + \varepsilon_m x_m^2 = 0$, takže je-li $p - 1$ čísel ε_r kladných a $q - 1$ záporných, je tento průnik singulární $\mathbf{Q}_{m-2}$ prostoru N s jediným singulárnim bodem $\{\mathbf{u}_1\}$ a s neorientovanou signaturou $(p - 1\,,\,q - 1)$, takže podle věty 102.2 $\mathbf{Q}_{m-1}$ má neorientovanou signaturu $(p\,,\,q)$.

Obráceně budiž dán v $\mathbf{E}_m$ paraboloid $\mathbf{Q}_{m-1}$. Budiž $\mathbf{Q}_{m-2}$ průnik $\mathbf{Q}_{m-1}$ s úběžnou nadrovinou N, takže $\mathbf{Q}_{m-2}$ je singulární kvadrika v N s jednobodovým vrcholem, jímž je osový směr paraboloidu $\mathbf{Q}_{m-1}$. Podle věty 100.2 existuje v N polární ar. base $\mathbf{u}_1\,,\,\ldots\,,\,\mathbf{u}_m$ pro $\mathbf{Q}_{m-2}$ a podle věty 100.1 existuje index s $(1 \leqq s \leqq m)$ tak, že $\{\mathbf{u}_s\}$ je osový směr pro $\mathbf{Q}_{m-1}$. Můžeme předpokládat, že $s = 1$. Podle předchozího existuje na $\mathbf{Q}_{m-1}$ e. bod P tak, že tečná nadrovina ke $\mathbf{Q}_{m-1}$ v bodě P má zaměření $\{\mathbf{u}_2\,,\,\ldots\,,\,\mathbf{u}_m\}$. Je-li nyní $\mathbf{Q}_{m-1}$ vytvořen kvadratickou formou f_2 příslušnou bilineární formě f, potom $f_2(P) = 0$, $f(P, \mathbf{u}_1) = a \neq 0$, $f(P, \mathbf{u}_r) = 0$ pro $2 \leq r \leq m$ a dále $f_2(\mathbf{u}_1) = 0$, $f_2(\mathbf{u}_r) = \varepsilon_r \neq 0$ pro $2 \leq r \leq m$, $f(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_r) = 0$ pro $2 \leq r \leq m$, $f(\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_s) = 0$ pro $2 \leq r, s \leq m$, $r \neq s$. Tedy pro $X = x_0P + x_1\mathbf{u}_1 + \ldots + x_m\mathbf{u}_m$ je

$$f_2(X) = \varepsilon_2 x_2^2 + \ldots + \varepsilon_m x_m^2 + 2ax_0x_1$$

a ježto můžeme předpokládat, že $a = -1$, dostáváme rovnici (107.7), uvážíme-li, že pro e. bod X je $x_0 = 1$.

108. ABSOLUTNÍ POLARITA. Budiž dán eukleidovský prostor $\mathbf{E}_m$ ($m \geq 2$) a budiž N jeho úběžná nadrovina. Množina $\mathbf{V}_m$ všech vektorů prostoru $\mathbf{E}_m$ je ar. základ projektivního $(m-1)$-rozměrného prostoru N. Je-li $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{uv}$ skalární součin vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, je f symetrická bilineární forma ve $\mathbf{V}_m$ a pro příslušnou kvadratickou formu f_2 máme $f_2(\mathbf{u}) = |\mathbf{u}|^2$, takže forma f_2 je definitní kladná a tedy podle věty 99.1 regulární. Forma f_2 vytvořuje formálně reálnou kvadriku prostoru N, kterou označíme $\mathbf{A}_{m-2}$ a nazveme *absolutní kvadrikou* prostoru $\mathbf{E}_m$. Polaritu vzhledem k $\mathbf{A}_{m-2}$ nazveme *absolutní polaritou* prostoru $\mathbf{E}_m$. Zřejmě dva reálné směry $\{\mathbf{u}\}$, $\{\mathbf{v}\}$ jsou k sobě kolmé, právě když jsou konjugované vzhledem k $\mathbf{A}_{m-2}$. Můžeme pojem *kolmosti* jako názvu pro konjugovanost vzhledem k $\mathbf{A}_{m-2}$ rozšířit na komplexní směry. Při tom se však vyskytnou imaginární směry, které jsou na sobě kolmé; jsou to právě ty směry, které náležejí do absolutní kvadriky $\mathbf{A}_{m-2}$; nazýváme je *minimální* nebo také *isotropické směry*. Pro $m = 2$ jsou právě dva minimální směry, které jsou navzájem komplexně sdružené. Pro $m \geq 3$ je minimálních směrů nekonečně mnoho. Směr komplexně sdružený s minimálním směrem je také minimální.

Pro $m = 2$ polarita vzhledem k $\mathbf{A}_0$ je eliptická involuce, která se nazývá *absolutní involuce* roviny $\mathbf{E}_2$. Je-li φ reálná involuce na úběžné přímce roviny $\mathbf{E}_2$ různá od absolutní involuce, plyne z věty 93.3, že ve φ existuje právě jedna dvojice složená ze dvou navzájem kolmých směrů.

Budiž $m \geq 2$ opět libovolné. Budiž v $\mathbf{E}_m$ dán e. bod S a budiž dáno číslo $r > 0$. Nazveme *koulí prostoru* $\mathbf{E}_m$ se *středem* S a *poloměrem* r množinu všech e. bodů X prostoru $\mathbf{E}_m$, jejichž vzdálenost od bodu S

je rovna r. Koule prostoru E_m nazveme také $(m - 1)$-*rozměrné koule.* Zřejmě jednorozměrné koule jsou totožné s *kružnicemi* (viz článek 58). Podmínka, aby bod X ležel na kouli se středem S a poloměrem r zní $(X - S) . (X - S) = r^2$, takže v libovolné *kartézské* soustavě souřadnic $\langle P ; \mathbf{e}_1 , \ldots , \mathbf{e}_m \rangle$ rovnice koule zní

$$(x_1 - s_1)^2 + \ldots + (x_m - s_m)^2 = r^2$$

a jestliže počátek P splyne se středem S, jednodušeji:

$$x_1^2 + \ldots + x_m^2 = r^2 . \tag{108.1}$$

Z toho plyne, že koule prostoru E_m je regulární bodově reálná kvadrika v E_m, která protne úběžnou nadrovinu v absolutní kvadrice A_{m-2}. Obráceně budiž dána v prostoru E_m kvadrika Q_{m-1} tak, že úběžná nadrovina ji protne v absolutní kvadrice A_{m-2}. (Předpokládáme, že úběžná nadrovina není částí Q_{m-1}.) Může se stát, že Q_{m-1} je singulární; ježto však A_{m-2} je regulární, je to zřejmě jen tak možné, že Q_{m-1} má jediný singulární bod S, který leží v konečnu; Q_{m-1} se potom skládá ze všech minimálních přímek procházejících bodem S, který je jediným reálným bodem na Q_{m-1}. Jestliže Q_{m-1} je regulární, je to středová kvadrika, která je buďto eliptická nebo formálně reálná. Je-li S její střed ve smyslu článku 107 a je-li $\langle S ; \mathbf{e}_1 , \ldots , \mathbf{e}_m \rangle$ libovolná kartézská soustava souřadnic s počátkem S, je patrné, že $S , \mathbf{e}_1 , \ldots$ $\ldots , \mathbf{e}_m$ je polární ar. base pro Q_{m-1}, takže Q_{m-1} má rovnici tvaru (107.4), při čemž čísla $\varepsilon_1 , \ldots , \varepsilon_m$ jsou si rovna, ježto Q_{m-1} obsahuje A_{m-2}. Jestliže Q_{m-1} je bodově reálná, jsou čísla ε_r kladná a rovnici (107.4) lze dát tvar (108.1), kde $r > 0$; tedy Q_{m-1} je v tomto případě koule a bod je jejím středem také ve smyslu definice tohoto článku. Je-li Q_{m-1} formálně reálná, jsou čísla ε_r záporná a rovnici (107.4) lze dát tvar

$$x_1^2 + \ldots + x_m^2 + r^2 = 0 ;$$

v tomto případě kvadrika Q'_{m-1} středově sdružená s Q_{m-1} je koule s rovnicí (108.1).

V článku 79 jsme poznali, že je-li f afinní transformace prostoru E_m, má f projektivní rozšíření $\{f\}$, které je kolineací prostoru $\bar{\mathsf{E}}_m$ se samodružnou nadrovinou N, kde N znamená opět úběžnou nadrovinu; víme také, že obráceně každá kolineace prostoru $\bar{\mathsf{E}}_m$ se samodružnou nadrovinou N je projektivním rozšířením určité afinní transformace prostoru $\mathbf{E}_m$. Částí $\{f\}$ je určitá kolineace K nadroviny N. Snadno se dokáže, že transformace f je podobná nebo shodná, právě když K převádí absolutní kvadriku $\mathbf{A}_{m-2}$ samu v sebe. Je-li tomu tak, potom transformace f je shodná, právě když determinant kolineace $\{f\}$ v samodružné nadrovině N (viz článek 85) je roven ± 1, při čemž $+1$ se týká přímé a -1 nepřímé shodné transformace. Důkazy přenecháváme čtenáři.

Absolutní polarity lze užít k důkazům vět metrické geometrie pomocí projektivní geometrie. V této knize nebudeme se tímto thematem zabývat a spokojíme se jednou drobnou ukázkou. V projektivní rovině $\mathbf{P}_2$ budiž dána kuželosečka $\mathbf{Q}_1$ a na ní dva různé body A_1, A_2; dále budiž v $\mathbf{P}_2$ dána přímka p procházející pólem C přímky A_1A_2 vzhledem ke $\mathbf{Q}_1$, která neprochází ani bodem A_1, ani bodem A_2, takže protne $\mathbf{Q}_1$ ve dvou různých (reálných nebo imaginárních) bodech M_1, M_2. Budiž φ projektivní zobrazení svazku $\pi(A_1, \mathbf{P}_2)$ na svazek $\pi(A_2, \mathbf{P}_2)$ popsané ve větě 103.2. Potom na přímce p existuje projektivita ψ tak, že je-li X libovolný bod přímky p, X' jeho obraz při φ, potom přímka A_1X má při ψ za obraz přímku A_2X'. Nyní zřejmě body M_1, M_2 jsou samodružné při ψ a je-li B průsečík přímek A_1A_2, p, je každý z obou bodů B, C obrazem druhého při ψ, takže podle věty (87.4 je ψ involuce s dvojnými body M_1, M_2. Budiž nyní $\mathbf{P}_2 = \overline{\mathbf{E}}_2$, $\mathbf{Q}_1$ budiž kružnice a body A_1, A_2 buďtež voleny tak, aby přímka A_1A_2 byla průměrem; potom můžeme za p volit úběžnou přímku, načež body M_1, M_2 tvoří absolutní $\mathbf{A}_0$ a ψ je absolutní involuce. Dostáváme takto projektivní důkaz známé t. zv. Thaletovy věty, podle níž úhel $\sphericalangle A_1CA_2$ je pravý, je-li C bod na $\mathbf{Q}_1$ různý od A_1 i od A_2.

109. SVAZKY KVADRIK. Budiž Φ_m množina všech kvadratických forem v projektivním prostoru $\mathbf{P}_m$; na rozdíl od dohody učiněné v článku 95 počítejme do Φ_m také nulovou formu, kterou v tomto článku označíme ω a pro kterou je $\omega(X) = 0$ pro každý ar. bod X prostoru $\mathbf{P}_m$. Jsou-li f_2, g_2 dvě kvadratické formy, je také $f_2 + g_2$ kvadratická forma; rovněž cf_2 je kvadratická forma pro každou volbu čísla c. Φ_m je tedy vektorový prostor s nulovým vektorem ω. Zvolíme-li libovolně ar. basi $A_0, A_1, \ldots, A_m$ prostoru $\mathbf{P}_m$, potom ty kvadratické formy φ_{rs} $(0 \leqq$

$\leqq r \leqq s \leqq m)$, pro něž $\varphi_{rs}(X) = x_r x_s$ pro $X = x_0 A_0 + x_1 A_1 + \ldots + x_m A_m$, tvoří basi pro Φ_m, takže Φ_m má dimensi $\frac{1}{2}(m + 1)(m + 2)$. Jak je nám známo, existuje vzájemně jednoznačný vztah mezi kvadrikami $\mathbf{Q}_{m-1}$ prostoru $\mathbf{P}_m$ a jednorozměrnými lineárními soustavami obsaženými ve Φ_m. Proto *množinu všech kvadrik prostoru* $\mathbf{P}_m$, kterou označíme $\{\mathbf{Q}_{m-1}\}$, *můžeme považovat za projektivní prostor dimense* $\frac{1}{2}m(m + 3)$, jehož ar. základem je Φ_m. Při tom jsme měli na mysli reálné kvadratické formy a reálné kvadriky, ale co jsme řekli, platí i o komplexních kvadratických formách, jejichž soubor můžeme označit $\Phi_m(\mathrm{i})$ a o komplexních kvadrikách, jejichž soubor můžeme označit $\{\mathbf{Q}_{m-1}(\mathrm{i})\}$. V dalším pro stručnost budeme užívat značek Φ_m, $\{\mathbf{Q}_{m-1}\}$ v obojím smyslu, reálném i komplexním.

Dvě různé kvadriky prostoru $\mathbf{P}_m$ určují přímku prostoru $\{\mathbf{Q}_{m-1}\}$, která se obyčejně nazývá *svazek kvadrik* v $\mathbf{P}_m$. Ar. basí takového svazku jsou libovolné dvě lineárně nezávislé kvadratické formy v $\mathbf{P}_m$. Je-li dán svazek kvadrik v $\mathbf{P}_m$ — označme jej Σ — a je-li $\mathbf{P}_k$ lineární podprostor prostoru $\mathbf{P}_m$, potom každá kvadrika svazku Σ buďto obsahuje $\mathbf{P}_k$ jako část nebo protne $\mathbf{P}_k$ v kvadrice $\mathbf{Q}_{k-1}$. Jsou možné celkem tři případy: (1) prostor $\mathbf{P}_k$ je částí všech kvadrik svazku Σ; (2) prostor $\mathbf{P}_k$ je částí právě jedné kvadriky svazku Σ a všecky ostatní $\mathbf{Q}_{m-1}$ svazku protnou $\mathbf{P}_k$ v téže $\mathbf{Q}_{k-1}$; (3) prostor $\mathbf{P}_k$ není částí žádné kvadriky svazku Σ, načež každá z nich protne $\mathbf{P}_k$ v jiné $\mathbf{Q}_{k-1}$ a všecky tyto $\mathbf{Q}_{k-1}$ tvoří svazek kvadrik v $\mathbf{P}_k$, který můžeme nazvat *průnikem* svazku Σ s prostorem $\mathbf{P}_k$.

Následující dvě věty jsou zřejmé.

Věta 109.1. *Budiž Σ svazek kvadrik prostoru $\mathbf{P}_m$. Je-li A bod prostoru $\mathbf{P}_m$, potom jím procházejí buďto všecky kvadriky svazku Σ nebo právě jedna z nich.* V prvém případě pravíme, že A je *základní bod svazku* Σ.

Věta 109.2. *Jsou-li body A, B konjugovány zároveň vzhledem ke dvěma různým kvadrikám svazku kvadrik, jsou konjugovány vzhledem ke všem kvadrikám svazku.*

Budiž Σ svazek kvadrik na přímce $\mathbf{P}_1$; připomeňme si, že každá $\mathbf{Q}_0$ je dvojice (reálných nebo imaginárních, různých nebo splývajících) bodů. Σ nazveme *parabolický* nebo *neparabolický*, podle toho, zda má či nemá základní bod. Snadno se dokáže, že parabolický Σ se základním bodem A je množina těch dvojic bodů na $\mathbf{P}_1$, do kterých náleží bod A (včetně dvojice A, A, která tvoří jedinou singulární $\mathbf{Q}_0$ svazku).

VĚTA 109.3. *Neparabolické svazky kvadrik na přímce $\mathbf{P}_1$ jsou totožné s involucemi na $\mathbf{P}_1$.*

DŮKAZ. Jsou-li A_0, A_1 dvojné body involuce φ, tvoří dvojice A_0, A_0 singulární $\mathbf{Q}_0'$, dvojice A_1, A_1 singulární $\mathbf{Q}_0''$ a obě kvadriky $\mathbf{Q}_0'$, $\mathbf{Q}_0''$ určují svazek kvadrik Σ na P_1. Je-li $\mathbf{Q}_0$ jiná kvadrika svazku Σ, která tudíž podle věty 109.1 neobsahuje ani bod A_0, ani bod A_1, jsou podle věty 109.2 body A_0, A_1 navzájem konjugovány vzhledem ke $\mathbf{Q}_0$, z čehož plyne, že dvojice $\mathbf{Q}_0$ náleží do involuce φ. Je tedy svazek Σ částí involuce φ a ježto podle věty 109.1 Σ musí obsahovat $\mathbf{Q}_0$, do které náleží libovolně předepsaný bod na $\mathbf{P}_1$, splyne Σ s φ. Tím je dokázáno, že φ tvoří svazek kvadrik na $\mathbf{P}_1$, který zřejmě je neparabolický. Je-li obráceně dán na $\mathbf{P}_1$ neparabolický svazek Σ, zvolme v něm dvě různé dvojice $\mathbf{Q}_0' = (A_0, A_1)$; $\mathbf{Q}_0'' = (B_0, B_1)$, jimiž je jednoznačně určen. Stačí dokázat, že existuje na $\mathbf{P}_1$ involuce φ obsahující dvě dvojice $\mathbf{Q}_0'$, $\mathbf{Q}_0''$. Za tím účelem uvažme nejprve, že ježto Σ je neparabolický, nemají dvojice $\mathbf{Q}_0'$, $\mathbf{Q}_0''$ podle věty 109.1 žádný společný bod. Je-li nyní $A_0 = A_1$, $B_0 = B_1$, je φ involuce s dvojnými body A_0, B_0. Je-li dále třeba $A_0 \neq A_1$, $B_0 = B_1$, určeme na $\mathbf{P}_1$ bod C tak, aby bylo $(A_0A_1B_0C) = -1$; φ je potom involuce s dvojnými body B_0, C. Jsou-li posléze všecky čtyři body A_0, A_1, B_0, B_1 navzájem různé, plyne existence involuce φ z věty 87.5.

Z věty 109.3 plyne

VĚTA 109.4. *Jestliže přímka p neprochází žádným základním bodem svazku kvadrik Σ v prostoru $\mathbf{P}_m$ $(m \geqq 2)$, potom p protne Σ v involuci.*

Svazek kvadrik Σ se jmenuje *singulární*, jestliže každá jeho kvadrika je singulární; Σ se jmenuje *regulární*, jestliže naopak aspoň jedna jeho kvadrika je regulární. Výše jsme poznali, že pro $m = 1$ každý Σ je regulární; naproti tomu pro $m \geqq 2$ existují singulární svazky kvadrik v $\mathbf{P}_m$, ale v této knize se jimi nebudeme zabývat.

Bod A nazveme *singulárním bodem svazku kvadrik* Σ v $\mathbf{P}_m$, je-li singulárním bodem aspoň jedné kvadriky svazku. Může se stát, že A je singulárním pro *všecky* kvadriky svazku Σ, který potom nutně je singulární. Není-li tomu tak, plyne z věty 109.2, že A je singulárním bodem právě jedné kvadriky svazku. Bod A nazveme *regulárním bodem svazku kvadrik* Σ, není-li jeho singulárním bodem.

VĚTA 109.5. *Budiž Σ svazek kvadrik v $\mathbf{P}_m$. Je-li A singulárním bodem svazku Σ a je-li ϱ jeho polární nadrovina vzhledem k jedné kvadrice svazku Σ, pro kterou A není singulárním bodem, potom ϱ je polární nadrovinou bodu A vzhledem ke každé kvadrice svazku Σ, pro kterou A není singulárním bodem. Je-li A regulárním bodem svazku Σ, má A vzhledem ke dvěma různým kvadrikám svazku vždy také dvě různé polární nadroviny.*

DŮKAZ. Prvá část věty je důsledkem věty 109.2. Předpokládejme, že bod A regulární vzhledem k Σ má vzhledem ke dvěma různým kvadrikám svazku Σ touž polární nadrovinu ϱ; máme dokázat, že je to nemožné. Zvolme bod B mimo nadrovinu ϱ; snadno se zjistí, že v Σ existuje kvadrika $\mathbf{Q}_{m-1}$, vzhledem k níž je bod B konjugován s bodem A. Podle věty 109.2 však je vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-1}$ také každý bod nadroviny ϱ konjugován s bodem A, takže A je singulárním bodem pro $\mathbf{Q}_{m-1}$. Ježto A je regulárním bodem pro Σ, je to nemožné.

Poznámka. Je-li A základní bod svazku Σ, plyne z věty 109.5, že je-li A regulárním bodem svazku Σ, má každá z kvadrik svazku v bodě A jinou tečnou nadrovinu, kdežto je-li A singulární pro Σ, je buďto A singulárním bodem každé kvadriky ze Σ, nebo všecky ty kvadriky ze Σ, pro které je A regulárním bodem, mají v A touž tečnou nadrovinu.

VĚTA 109.6. *Každý svazek kvadrik Σ v prostoru $\mathbf{P}_m$ má aspoň jeden reálný nebo imaginární singulární bod. Je-li m sudé, má Σ aspoň jeden reálný singulární bod. Existuje-li v Σ regulární formálně reálná kvadrika, platí dokonce* (ať už m je sudé či liché), *že každá singulární kvadrika svazku Σ je reálná.*

DŮKAZ. Pro singulární Σ je věta zřejmá; budiž tedy f_2, g_2 taková ar. base pro Σ, že kvadratická forma f_2 je regulární. Zvolme libovolně ar. basi $A_0, A_1, \ldots, A_m$ pro $\mathbf{P}_m$; pro $X = x_0A_0 + x_1A_1 + \ldots + x_mA_m$ budiž

$$f_2(X) = \sum_{r=0}^{m} \sum_{s=0}^{m} a_{rs}x_rx_s, \qquad g_2(X) = \sum_{r=0}^{m} \sum_{s=0}^{m} b_{rs}x_rx_s,$$

kde $a_{rs} = a_{sr}$, $b_{rs} = b_{sr}$. Kvadrika $g_2 + \lambda f_2$ svazku Σ je singulární, právě když

$$(109.1)\qquad \begin{vmatrix} b_{00} + \lambda a_{00} & b_{01} + \lambda a_{01} & \dots & b_{0m} + \lambda a_{0m} \\ b_{10} + \lambda a_{10} & b_{11} + \lambda a_{11} & \dots & b_{1m} + \lambda a_{1m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m0} + \lambda a_{m0} & b_{m1} + \lambda a_{m1} & \dots & b_{mm} + \lambda a_{mm} \end{vmatrix} = 0 .$$

Ježto f_2 je regulární, je determinant (94.9) různý od nuly, takže (109.1) je rovnice stupně $m + 1$ pro λ, která pro sudé m má aspoň jeden reálný kořen, pro liché m pak aspoň jeden reálný nebo imaginární kořen. Podle věty 99.3 stačí ještě dokázat, že je-li forma f_2 definitní, je každý kořen rovnice (109.1) reálný. Nechť naopak f_2 je třeba definitní kladná a přesto (109.1) má imaginární kořen λ. Budiž $A = A_1 + \mathrm{i}A_2$ singulární bod kvadratické formy $g_2 + \lambda f_2$, takže $A^* = A_1 - \mathrm{i}A_2$ je singulární bod kvadratické formy $g_2 + \lambda^* f_2$, kde číslo λ^* je komplexně sdružené s číslem λ. Ježto singulární bod je konjugován s každým bodem, je jednak (f, g jsou bilineární formy příslušné k f_2, g_2)

$$g(A , A^*) + \lambda f(A , A^*) = 0 ,$$

jednak

$$g(A , A^*) + \lambda^* f(A , A^*) = 0 .$$

Ježto λ je imaginární, je $\lambda \neq \lambda^*$, tedy $f(A , A^*) = 0$. Avšak

$$\begin{aligned} f(A , A^*) &= f(A_1 + \mathrm{i}A_2 , A_1 - \mathrm{i}A_2) = \\ &= f_2(A_1) + f_2(A_2) + \mathrm{i}f(A_2 , A_1) - \mathrm{i}f(A_1 , A_2) \end{aligned}$$

a ježto f je symetrická, je

$$0 = f(A , A^*) = f_2(A_1) + f_2(A_2) .$$

Protože f_2 je kladná, je $f_2(A_1) = 0$, $f_2(A_2) = 0$ a protože f_2 je definitní, je $A_1 = \mathbf{o}$, $A_2 = \mathbf{o}$, tedy $A = A_1 + \mathrm{i}A_2 = \mathbf{o}$, což je nemožné.

Poznámka. Ježto singulární kvadriky svazku Σ odpovídají kořenům λ rovnice (109.1), vidíme, že *regulární svazek kvadrik prostoru* $\mathbf{P}_m$ *obsahuje nejvýše* $m + 1$ (reálných nebo imaginárních) *singulárních kvadrik.* Ježto regulární formálně reálná kvadrika neobsahuje žádný reálný bod, je snadným důsledkem věty 109.1, že *regulární svazek kvadrik obsahuje nekonečně mnoho regulárních bodově reálných kvadrik.*

VĚTA 109.7. *Jestliže svazek kvadrik Σ prostoru $\mathbf{P}_m$ obsahuje aspoň jednu regulární formálně reálnou kvadriku, existuje ar. base prostoru $\mathbf{P}_m$, která je polární vzhledem ke každé kvadrice svazku Σ.*

DŮKAZ. Je-li $m = 1$, je Σ neparabolický svazek kvadrik na $\mathbf{P}_1$, tedy podle věty 109.3 involuce na $\mathbf{P}_1$, která obsahuje dvojici složenou z imaginárních komplexně sdružených bodů, takže je hyperbolická podle věty 93.2. Můžeme tedy při důkaze pro $\mathbf{P}_m$ předpokládat, že $m \geq 2$ a že věta platí pro $\mathbf{P}_{m-1}$. Podle věty 109.6 existuje reálný singulární bod $\{A_0\}$ pro Σ; ježto Σ obsahuje regulární kvadriku, je bod $\{A_0\}$ singulárním pro jedinou kvadriku svazku Σ a vzhledem ke všem ostatním kvadrikám svazku má $\{A_0\}$ podle věty 109.5 jednu a touž polární nadrovinu $\mathbf{P}_{m-1}$. Zřejmě $\{A_0\}$ je konjugován s každým bodem nadroviny $\mathbf{P}_{m-1}$ vzhledem je všem kvadrikám svazku Σ. Průnik Σ' nadroviny $\mathbf{P}_{m-1}$ se svazkem Σ je svazek kvadrik prostoru $\mathbf{P}_{m-1}$, který opět obsahuje regulární formálně reálnou kvadriku (průnik $\mathbf{P}_{m-1}$ s regulární formálně reálnou kvadrikou svazku Σ), takže existuje ar. base $A_1, \ldots, A_m$ nadroviny $\mathbf{P}_{m-1}$ polární vzhledem ke každé kvadrice svazku Σ'. Připojíme-li A_0, obdržíme ar. basi $A_0, A_1, \ldots, A_m$ prostoru $\mathbf{P}_m$, která má žádanou vlastnost.

110. SVAZEK KUŽELOSEČEK. V tomto článku budeme vyšetřovat regulární svazek kvadrik Σ v projektivní rovině $\mathbf{P}_2$ Podle poznámky za větou 109.6 obsahuje Σ nekonečně mnoho kuželoseček, a proto nazveme Σ *svazkem kuželoseček*; vedle kuželoseček může Σ obsahovat také formálně reálné regulární $\mathbf{Q}_1$ a též singulární $\mathbf{Q}_1$, ale počet těchto posledních (reálných i imaginárních) nemůže převýšit číslo tři. Každé dvě různé kuželosečky $\mathbf{Q}_1'$, $\mathbf{Q}_2''$ jsou obsaženy v právě jednom svazku kuželoseček, a proto v tomto článku dospějeme také k poznatkům o dvojici kuželoseček.

Zavedeme nyní pojem *násobnosti základního bodu* svazku Σ, která má v každém případě jednu ze čtyř hodnot 1, 2, 3, 4 (*jednoduché, dvojné, trojné, čtyřnásobné* základní body). Základní bod A nazveme *jednoduchým*, je-li regulárním bodem svazku; každá $\mathbf{Q}_1$ svazku má v bodě A určitou tečnu, která nemůže být táž pro dvě různé křivky svazku (viz poznámku po větě 109.5). Jestliže základní bod A svazku

Σ je singulárním bodem svazku, potom (podle téže poznámky a ježto svazek Σ je regulární) je A singulárním pro právě jednu Q_1 svazku a všecky ostatní Q_1 svazku mají v bodě A touž tečnu t. Dokážeme ihned, že jsou možné tři případy: (1) Na tečně t existuje právě jeden bod $B \neq A$ singulární pro Σ; v tomto případě A je *dvojný*. (2) Na tečně t neexistuje mimo bod A žádný jiný bod singulární pro Σ; v tomto případě A je *trojný*. (3) Každý bod tečny t je singulární pro Σ; v tomto případě A je *čtyřnásobný*. Abychom provedli slíbený důkaz, zvolme v Σ dvě různé kuželosečky Q_1', Q_1'' a uvažujme dvě projektivní zobrazení φ', φ'' přímky t na svazek $\pi(A; \mathsf{P}_2)$, při čemž pro bod X přímky t je $\varphi'X$ jeho polára vzhledem ke Q_1', $\varphi''X$ jeho polára vzhledem ke Q_1''. Podle věty 109.5 je X singulární pro Σ, právě když $\varphi'X = \varphi''X$, t. j. právě když je samodružným bodem projektivity $\psi = \varphi' \circ (\varphi'')^{-1}$; při tom jedním samodružným bodem pro ψ je bod A a podle článku 87 nastane jedna ze tří výše uvedených možností.

Dvě různé kuželosečky Q_1', Q_1'' náležejí do právě jednoho svazku kuželoseček Σ a bod A je průsečíkem kuželoseček Q_1', Q_1'', právě když je základním bodem pro Σ. Pravíme, že A je jednoduchým, dvojným, trojným, čtyřnásobným průsečíkem kuželoseček Q_1', Q_1'' podle toho, zda A je jednoduchým, dvojným, trojným, čtyřnásobným základním bodem pro Σ. Podle předcházejícího *průsečík A kuželoseček Q_1', Q_1'' je jednoduchý, právě když tečny obou kuželoseček v bodě A jsou navzájem různé; mají-li Q_1', Q_1'' ve společném bodě A touž tečnu t, je A dvojný průsečík v případě, že na t existuje právě jeden bod $B \neq A$ s touž polárou vzhledem ke Q_1' jako vzhledem ke Q_1''; A trojný průsečík v případě, že každý bod $B \neq A$ společné tečny t má vzhledem ke Q_1' jinou poláru než vzhledem ke Q_1''; A je čtyřnásobný průsečík v případě, že každý bod společné tečny t má touž poláru vzhledem ke Q_1' jako vzhledem ke Q_1''.*

Účelnost předcházejících definic je patrná z toho, že dokážeme: *Svazek Σ má aspoň jeden* (reálný nebo imaginární) *základní bod a součet násobností všech těchto základních bodů je vždy roven čtyřem.* Jinak řečeno: *Dvě různé kuželosečky mají aspoň jeden* (reálný nebo imaginární) *průsečík a součet násobností všech těchto průsečíků je vždy roven čtyřem.* Je patrné, že existuje-li imaginární základní bod (průsečík) A, potom také komplexně sdružený bod A^*, který je různý od A, je základním bodem (průsečíkem) s touž násobností. Podle výše vyslovené věty tedy imaginární základní bod (průsečík) je buďto jednoduchý nebo dvojný.

Při důkaze předpokládejme nejprve, že žádný singulární bod svazku Σ není základním bodem, takže každým singulárním bodem A svazku Σ prochází jen ta kvadrika svazku, pro kterou je A singulárním bodem. Budiž potom Q'_1 zvolená *kuželosečka* svazku Σ. Podle věty 109.6 existuje aspoň jeden reálný bod A, který je singulárním pro Σ. Podle právě řečeného leží bod A mimo kuželosečku Q'_1 a je singulárním bodem určité kvadriky svazku Σ, kterou označíme Q''_1. Není možné, aby Q''_1 byla dvojnásobná přímka p, neboť potom by každý bod přímky p byl singulárním bodem pro Σ a tudíž by existoval také singulární bod svazku Σ na kuželosečce Q'_1, což odporuje učiněnému předpokladu. Tedy Q''_1 se skládá ze dvou různých (reálných nebo imaginárních) přímek p_1, p_2 protínajících se v bodě A (tedy mimo Q'_1), a žádná z těchto přímek není tečnou pro Q'_1, neboť jinak by bod dotyku byl singulárním pro Σ a ležel by na Q'_1, což je vyloučeno. Tedy každá z přímek p_1, p_2 protne Q'_1 ve dvou různých (reálných nebo imaginárních) bodech a dostáváme celkem čtyři různé (reálné nebo imaginární) body A_1, A_2, A_3, A_4, z nichž každý je jednoduchým základním bodem pro Σ, neboť tečna ke Q''_1 ve kterémkoli z nich splyne s jednou z přímek p_1, p_2, není tedy tečnou ke Q''_1. Také je patrné, že mimo A_1, A_2, A_3, A_4 nemá Σ žádný další základní bod, protože Q'_1 a Q''_1 nemají žádný další průsečík. Ježto body A_1, A_2, A_3, A_4 leží na kuželosečce Q'_1, nemohou žádné tři z nich ležet v téže přímce. Ježto uvažovaný svazek kuželoseček má čtyři různé jednoduché základní body, nazveme jej *svazkem kuželoseček typu* (1,1,1,1).

Zbývá k diskusi ten případ, že uvažovaný svazek kuželoseček Σ má základní bod A, který je singulárním bodem pro Σ. Zvolme opět v Σ *kuželosečku* Q'_1, která nutně prochází bodem A a budiž Q''_1 ta kvadrika svazku Σ, která má v A singulární bod.

Jestliže Q''_1 je dvojnásobná přímka p, jsou dvě možnosti. Buďto p protne Q'_1 ve dvou různých (reálných nebo imaginárních) bodech A_1, A_2; budiž potom A_0 průsečík tečen ke Q'_1 v bodech A_1, A_2. Každý od A_1 různý bod přímky A_0A_1 má vzhledem ke Q''_1 touž poláru p, která je vzhledem ke Q'_1 polárou bodu A_0 a žádného jiného bodu na přímce A_0A_1. Podle věty 109.5 leží tedy na přímce A_0A_1 právě jeden bod $X \neq A_1$ singulární pro Σ; proto A_1, a zřejmě též A_2 je dvojným základním bodem pro Σ a je patrné, že Σ nemá jiné základní body; takový svazek Σ nazveme *svazkem kuželoseček typu* (2,2). Při tom jsme předpokládali, že p není tečnou kuželosečky $\mathbf{Q}_1'$. Je-li p tečnou ke $\mathbf{Q}_1''$ v bodě A, je každý bod na p singulárním pro Σ, takže A je čtyřnásobným základním bodem pro Σ a je patrné, že Σ nemá jiné základní body; takový svazek Σ nazveme *svazkem kuželoseček typu* (4).

V předcházejícím odstavci jsme předpokládali, že kvadrika $\mathbf{Q}_1''$, která má v bodě A kuželosečky $\mathbf{Q}_1'$ singulární bod, je dvojnásobná přímka. Je tedy třeba vyšetřit ten případ, že $\mathbf{Q}_1''$ se skládá ze dvou různých (reálných nebo imaginárních) přímek p_1, p_2 protínajících se v bodě A. Jestliže ani p_1, ani p_2 není tečnou ke $\mathbf{Q}_1'$ v bodě A, protne p_1 kuželosečku $\mathbf{Q}_1'$ ještě v bodě $A_1 \neq A$, p_2 pak v bodě $A_2 \neq A$ a body A, A_1, A_2 jsou navzájem různé a jsou základními body pro svazek Σ, který zřejmě nemá jiných základních bodů. Při tom A_1, A_2 jsou jednoduché základní body pro Σ, protože v nich má $\mathbf{Q}_1'$ jinou tečnu než $\mathbf{Q}_1''$. Naproti tomu A je dvojným základním bodem pro Σ. Neboť je-li t tečna ke $\mathbf{Q}_1'$ v bodě A a je-li A_0 průsečík přímky t s přímkou A_1A_2, má bod A_0 touž poláru vzhledem ke $\mathbf{Q}_1'$ jako vzhledem ke $\mathbf{Q}_1''$, totiž přímku A_0C, kde C je na přímce A_1A_2 harmonicky sdružen s bodem A_0 vzhledem k bodům A_1, A_2; naproti tomu ten bod $X \neq A$ přímky t, jehož polárou vzhledem ke $\mathbf{Q}_1'$ je přímka p_1, má jistě vzhledem ke $\mathbf{Q}_1''$ polárou různou od p_1. Má tedy Σ celkem tři základní body A, A_1, A_2, z nichž první je dvojný a ostatní dva jednoduché; takový svazek Σ nazveme *svazkem kuželoseček typu* (2,1,1). Zbývá případ, že jedna z obou přímek p_1, p_2 je tečnou ke $\mathbf{Q}_1'$ v bodě A. Pro určitost to budiž přímka p_1, kdežto p_2 protne $\mathbf{Q}_1'$ ještě v bodě $A_1 \neq A$. Body A, A_1 jsou základní body svazku Σ, který zřejmě nemá jiných základních bodů. Ježto v A_1 má $\mathbf{Q}_1'$ jinou tečnu než $\mathbf{Q}_1''$, je A_1 jednoduchým základním bodem pro Σ, kdežto A je trojným základním bodem, neboť každý bod $X \neq A$ tečny p_1 má vzhledem ke $\mathbf{Q}_1''$ za poláru přímku p_1, která není polárou bodu X vzhledem ke $\mathbf{Q}_1'$; takový svazek Σ nazveme *svazkem kuželoseček typu* (3,1).

Poznali jsme, že je celkem pět různých typů svazků kuželoseček, z nichž každý jsme označili symbolem složeným z násobností základních bodů; jsou to typy (1,1,1,1), (2,1,1), (2,2), (3,1), (4).

Svazkem Σ typu (1,1,1,1) má čtyři reálné nebo imaginární základní body A_1, A_2, A_3, A_4, z nichž žádné tři neleží v téže přímce. Daným bodem X různým od základních bodů prochází podle věty 109.1 právě jedna kvadrika $\mathbf{Q}_1$ svazku. Jestliže bod X leží v téže přímce se dvěma základními body, pro určitost třeba na přímce A_1A_2, je patrné, že přímka A_1A_2 je částí kvadriky $\mathbf{Q}_1$, která — ježto obsahuje všecky čtyři základní body — nutně se skládá z obou přímek A_1A_2, A_3A_4. Z toho je patrné, že Σ obsahuje tři různé reálné nebo imaginární singulární kvadriky: $\mathbf{Q}_1'$ složenou z přímek A_1A_2, A_3A_4, jejichž průsečík C' je singulárním bodem pro $\mathbf{Q}_1'$; $\mathbf{Q}_1''$ složenou z přímek A_1A_3, A_2A_4, jejichž průsečík C'' je singulárním bodem pro $\mathbf{Q}_1''$; $\mathbf{Q}_1'''$ složenou z přímek A_1A_4, A_2A_3, jejichž průsečík C''' je singulárním bodem pro $\mathbf{Q}_1'''$. Svazek Σ tedy obsahuje tři různé singulární kvadriky $\mathbf{Q}_1'$, $\mathbf{Q}_1''$, $\mathbf{Q}_1'''$ a v souhlase s poznámkou za větou 109.6 neobsahuje žádnou jinou singulární kvadriku. Tudíž Σ má právě tři (reálné nebo imaginární) singulární body C', C'', C''', které zřejmě neleží v jedné přímce. Body C', C'', C''' tvoří polární ar. basi pro každou kvadriku svazku Σ; to plyne z věty 109.2. Neboť na př. C' je vzhledem ke $\mathbf{Q}_1'$ konjugován s každým bodem roviny, zejména s bodem C'', který je vzhledem ke $\mathbf{Q}_1''$ konjugován s každým bodem roviny, zejména s bodem C', takže podle věty 109.2 jsou body C', C'' navzájem konjugovány vzhledem ke každé kvadrice svazku Σ. Zvolíme-li bod X tak, aby neležel v téže přímce s žádnými dvěma ze čtyř základních bodů A_1, A_2, A_3, A_4 svazku Σ, je patrné, že kvadrika $\mathbf{Q}_1(X)$ svazku Σ procházející bodem X je regulární bodově reálná kvadrika, t. j. $\mathbf{Q}_1(X)$ je kuželosečka, a je to jediná kuželosečka procházející body A_1, A_2, A_3, A_4, X, neboť z našich úvah plyne, že dvě různé kuželosečky nemohou mít více než čtyři průsečíky. Poznamenejme ještě, že základní body A_1, A_2, A_3, A_4 svazku Σ typu (1,1,1,1) nejsou podrobeny jiné podmínce než výše vyslovené, podle níž žádné tři ze čtyř bodů A_1, A_2, A_3, A_4 neleží v téže přímce. Za ar. basi příslušného svazku Σ můžeme zvolit na př. obě singulární $\mathbf{Q}_1$, z nichž prvá se skládá z dvojice přímek A_1A_2, A_3A_4 a druhá z dvojice přímek A_1A_3, A_2A_4. V právě provedené úvaze je m. j. obsažen důkaz následující věty.

Věta 110.1. *Pěti různými body, z nichž žádné tři neleží v téže přímce,* *prochází právě jedna kuželosečka.* Přenecháme čtenáři, aby sám provedl jednak přímý početní důkaz věty 110.1, jednak důkaz založený na případě $m = 1$ věty 79.6 a na větách 103.1 a 103.2. Mimo to je účelné poznamenat, že z našich úvah plyne podle věty 109.4:

VĚTA 110.2. *Buďtež A_1, A_2, A_3, A_4 čtyři body projektivní roviny $\mathbf{P}_2$, z nichž žádné tři neleží v téže přímce. Budiž p přímka v rovině $\mathbf{P}_2$, která neprochází žádným ze čtyř bodů A_1, A_2, A_3, A_4. Potom existuje involuce φ na přímce p tak, že do φ náleží dvojice průsečíků s přímkou p předně přímek A_1A_2, A_3A_4, za druhé přímek A_1A_3, A_2A_4, za třetí přímek A_1A_4, A_2A_3.*

Nechť čtenář sám uváží, že věta 86.2 je zvláštním případem věty 110.2.

Pokud se týče reality, jsou u svazku Σ typu (1,1,1,1) tři možnosti. Předně mohou všecky čtyři základní body A_1, A_2, A_3, A_4 být reálné; potom jsou reálné také singulární body C', C'', C''' a singulární $\mathbf{Q}_1$ svazku jsou bodově reálné. Za druhé mohou být třeba A_1, A_2 reálné, A_3, A_4 pak imaginární a komplexně sdružené; singulární bod C' je reálný a kvadrika $\mathbf{Q}_1'$ je bodově reálná, ale singulární body C'', C''' a kvadriky $\mathbf{Q}_1''$, $\mathbf{Q}_1'''$ jsou imaginární. Za třetí mohou být všecky čtyři body A_1, A_2, A_3, A_4 imaginární a třeba A_1, A_2 komplexně sdružené, a stejně i A_3, A_4; potom jsou všecky tři singulární body C', C'', C''' reálné, kvadrika $\mathbf{Q}_1'$ je bodově reálná, kvadriky $\mathbf{Q}_1''$, $\mathbf{Q}_1'''$ jsou formálně reálné. Formálně reálné kvadriky se vyskytnou pouze v tom případě, že všechny čtyři základní body jsou imaginární.

U ostatních typů svazků kuželoseček shrneme pouze výsledky, které čtenář snadno odůvodní. Svazek Σ typu (2,1,1) je určen, zvolíme-li libovolně tři body A, A_1, A_2 tak, aby neležely v jedné přímce, a přímku t procházející bodem A, ale neprocházející ani bodem A_1 ani bodem A_2. Bod A a přímka t jsou reálné; body A_1, A_2 jsou buďto reálné nebo imaginární a komplexně sdružené. Σ obsahuje dvě singulární $\mathbf{Q}_1$, z nichž jedna se skládá z přímek A_1A_2 a t, je tedy bodově reálná, druhá pak z přímek AA_1, AA_2, je tedy při reálných A_1, A_2 bodově reálná, při imaginárních A_1, A_2 formálně reálná. Σ neobsahuje žádnou formálně reálnou regulární $\mathbf{Q}_1$. Neexistuje ar. base polární zároveň vzhledem ke dvěma (a tedy podle věty 109.2 ke všem) kvadrikám svazku. Každá kuželosečka svazku Σ prochází všemi třemi body A, A_1, A_2 a má v bodě A tečnu t; obráceně každá taková kuželosečka náleží do Σ. Daným bodem, který neleží ani na přímce t, ani na žádné z přímek A_1A_2, AA_1, AA_2, prochází právě jedna kuželosečka svazku.

Svazek Σ typu (2,2) je určen, zvolíme-li libovolně tři body A, A_1, A_2 tak, aby neležely v jedné přímce; bod A je reálný, body A_1, A_2 jsou buďto reálné nebo imaginární a komplexně sdružené. Σ obsahuje dvě regulární $\mathbf{Q}_1$, z nichž jednou je dvojnásobná přímka A_1A_2 a druhá se skládá z přímek AA_1, AA_2, je tedy bodově reálná, jsou-li body A_1, A_2 reálné, formálně reálná, jsou-li A_1, A_2 imaginární. Jsou-li A_1, A_2 reálné, neobsahuje Σ žádnou formálně reálnou $\mathbf{Q}_1$; jsou-li A_1, A_2 imaginární, obsahuje Σ nekonečně mnoho formálně reálných $\mathbf{Q}_1$ (které až na jedinou z nich jsou regulární). Existuje nekonečně mnoho reálných ar. basí polárních zároveň vzhledem ke všem kvadrikám svazku Σ; jsou to ar. base tvaru A, B_1, B_2, kde $B_1 \neq B_2$ a dvojice B_1, B_2 náleží do involuce φ s dvojnými body B_1, B_2. Každá kuželosečka svazku Σ prochází body A_1, A_2 a má v nich tečny AA_1, AA_2; obráceně každá taková kuželosečka náleží do Σ; také lze říci, že Σ obsahuje ty kuželosečky $\mathbf{Q}_1$, které mají tu vlastnost, že je-li B_1, B_2 libovolná dvojice involuce φ, je přímka AB_2 polárou bodu B_1 vzhledem ke $\mathbf{Q}_1$. Daným bodem, který neleží na žádné z přímek A_1A_2, AA_1, AA_2, prochází právě jedna kuželosečka svazku.

Svazek Σ typu (3,1) je určen, zvolíme-li libovolně kuželosečku $\mathbf{Q}_1'$ a na ní dva různé reálné body A, A_1. Σ obsahuje právě jednu singulární kvadriku, která se skládá z přímky AA_1 a z tečny ke $\mathbf{Q}_1'$ v bodě A. Neexistuje ar. base polární zároveň ke dvěma různým kvadrikám svazku. Σ neobsahuje žádnou formálně reálnou kvadriku. Kuželosečka $\mathbf{Q}_1 \neq \mathbf{Q}_1'$ náleží do Σ, právě když prochází oběma body A, A_1, má v bodě A touž tečnu jako $\mathbf{Q}_1'$, v bodě A_1 pak jinou tečnu než $\mathbf{Q}_1'$ a posléze nemá mimo A, A_1 další společný bod s $\mathbf{Q}_1'$. Daným bodem, který neleží ani na přímce AA_1, ani na tečně ke $\mathbf{Q}_1'$ v bodě A, prochází právě jedna kuželosečka svazku.

Svazek Σ typu (4) je určen, zvolíme-li libovolně reálný bod A, jím procházející reálnou přímku p a reálné projektivní zobrazení φ přímky p na svazek přímek $\pi(A; \mathbf{P}_2)$, pro něž $\varphi A = p$. Σ obsahuje právě jednu singulární kvadriku; je to dvojnásobná přímka p.

Neexistuje ar. base polární zároveň ke dvěma různým kvadrikám svazku. Σ neobsahuje žádnou formálně reálnou kvadriku. Kuželosečka $\mathbf{Q}_1$ náleží do Σ, právě když polárou každého bodu X přímky p vzhledem ke $\mathbf{Q}_1$ je přímka φX. Daným bodem, který neleží na přímce p, prochází právě jedna kuželosečka svazku.

111. METRICKÁ KLASIFIKACE REGULÁRNÍCH KVADRIK. Stejně jako v článku 107 budeme i v tomto článku vyšetřovat pouze *regulární* $\mathbf{Q}_{m-1}$ v prostoru $\mathbf{E}_m$ $(m \geqq 2)$. V článku 107 jsme poznali, že vhodnou volbou lineární soustavy souřadnic lze docílit toho, aby rovnice kvadriky měla jednoduchý tvar (107.4), je-li $\mathbf{Q}_{m-1}$ regulární středová kvadrika, nebo (107.7), je-li $\mathbf{Q}_{m-1}$ paraboloid.

Označme $\mathbf{Q}_{m-2}$ průnik uvažované kvadriky s úběžnou nadrovinou N; ježto absolutní kvadrika $\mathbf{A}_{m-2}$ je regulární formálně reálná kvadrika v N, existuje podle věty 109.7 ar. base

$$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m \tag{111.1}$$

prostoru N polární i vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-2}$ i vzhledem k $\mathbf{A}_{m-2}$. Můžeme ještě předpokládat, že $|\mathbf{u}_r| = 1$ pro $1 \leqq r \leqq m$; ar. base (111.1) je tedy ortonormální a polární vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-2}$. Je-li $\mathbf{Q}_{m-1}$ středová a je-li S její střed, je

$$\langle S; \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m \rangle \tag{111.2}$$

kartézská soustava souřadnic, v níž $\mathbf{Q}_{m-1}$ má rovnici

$$\varepsilon_1 x_1^2 + \ldots + \varepsilon_m x_m^2 = 1, \tag{111.3}$$

kde $\varepsilon_r \neq 0$ pro $1 \leqq r \leqq m$. Můžeme předpokládat, že

$$\varepsilon_1 \geqq \varepsilon_2 \geqq \ldots \geqq \varepsilon_m; \tag{111.4}$$

uvidíme, že potom čísla $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ jsou jednoznačně určena. Prozatím však předpokládejme, že máme dánu pevnou kartézskou soustavu souřadnic (111.2) tak, že rovnice kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$ má tvar (111.3). Předpokládejme, že platí (111.4) a rozdělme indexy na *skupiny* tak, že indexy $r, s (1 \leqq r, s \leqq m)$ jsou v téže skupině, právě když $\varepsilon_r = \varepsilon_s$. Nazveme *osou regulární středové kvadriky* $\mathbf{Q}_{m-1}$ průměr $\{S; \mathbf{v}\}$ takový, že diametrální nadrovina, která je polární ke směru $\{\mathbf{v}\}$ vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-1}$, je kolmá na směr $\{\mathbf{v}\}$. Je-li však

$$\mathbf{v} = a_1 \mathbf{u}_1 + \ldots + a_m \mathbf{u}_m, \tag{111.5}$$

potom polární nadrovina směru $\{\mathbf{v}\}$ má rovnici

$$\varepsilon_1 a_1 x_1 + \ldots + \varepsilon_m a_m x_m = 0 ;$$

Průměr $\{S ; \mathbf{v}\}$ je osou, právě když tato rovnice je ekvivalentní s rovnicí

$$a_1 x_1 + \ldots + a_m x_m = 0 .$$

Tudíž směr každé osy přísluší k určité skupině indexů v tom smyslu, že koeficient a_r ve (111.5) může být různý od nuly pouze, když index r náleží do této skupiny; obráceně, je-li tato podmínka splněna, je přímka $\{S ; \mathbf{v}\}$ osou kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$. Každé skupině indexů můžeme přiřadit *totální osový prostor*, který prochází středem kvadriky a jehož zaměření má za ar. basi právě ty z vektorů (111.1), jejichž indexy náležejí do uvažované skupiny; je to lineární podprostor prostoru $\mathbf{E}_m$, jehož dimense je rovna počtu indexů v příslušné skupině; číslo ε_r (stejné pro všecky indexy uvažované skupiny) nazveme *koeficientem totálního osového prostoru* vzhledem ke kvadrice $\mathbf{Q}_{m-1}$. Je patrné, že v kartézské soustavě souřadnic (111.2) má $\mathbf{Q}_{m-1}$ rovnici tvaru (111.3), právě když každá přímka $\{S ; \mathbf{u}_r\}$ $(1 \leqq r \leqq m)$ je osou. Jeden krajní případ je ten, že všecky koeficienty ε_r $(1 \leqq r \leqq m)$ jsou navzájem různé; osy jsou v tomto případě totožné s totálními osovými prostory a jsou tudíž jednoznačně určeny, a to i co do pořadí, žádáme-li platnost nerovností (111.4); pro kartézskou soustavu souřadnic (111.2) je potom konečný počet, a to přesně 2^m možností, neboť neurčitost je pouze v tom, že kterýkoli vektor $\mathbf{u}_r$ $(1 \leqq r \leqq m)$ lze nahradit vektorem $-\mathbf{u}_r$. Druhý krajní případ je ten, že všecky koeficienty ε_r jsou si rovny; jsou-li rovny *kladnému* číslu c^2, je $\mathbf{Q}_{m-1}$ koule se středem S a s poloměrem $|c|$; jsou-li všecky koeficienty ε_r rovny témuž *zápornému* číslu $-c^2$, je $\mathbf{Q}_{m-1}$ formálně reálná kvadrika středově sdružená s koulí se středem S a s poloměrem $|c|$. V těchto případech má kvadrika $\mathbf{Q}_{m-1}$ rovnici tvaru (111.3) při *každé* kartézské soustavě souřadnic (111.2), jejímž počátkem je bod S. Pro každou regulární středovou kvadriku $\mathbf{Q}_{m-1}$, jestliže některé z koeficientů ε_r jsou si rovny, je nekonečně mnoho kartézských soustav souřadnic (111.2), vzhledem k nimž rovnice $\mathbf{Q}_{m-1}$ má tvar (111.3). Vektory (111.1) se dělí na skupiny příslušné jednotlivým totálním osovým prostorům; jestliže dimense d totálního osového prostoru $\mathbf{E}_d$ je rovna jedné, přísluší mu ve (111.1) jediný vektor $\boldsymbol{u}_r$, který je určen dvojznačně: lze jej totiž nahradit vektorem $-\boldsymbol{u}_r$; jestliže však $d > 1$, potom máme ve (111.1) d vektorů příslušných k $\mathbf{E}_d$, které lze volit nekonečně mnoha způsoby: jsou podrobeny pouze té podmínce, že tvoří ortonormální basi pro $\mathbf{E}_d$. Ohlásili jsme již, že koeficient ε_r příslušný totálnímu osovému prostoru $\mathbf{E}_d$ je tímto prostorem jednoznačně určen. Je výhodné uvažovat v této souvislosti zároveň s kvadrikou $\mathbf{Q}_{m-1}$ také s ní středově sdruženou kvadriku $\mathbf{Q}'_{m-1}$, jejíž rovnice je

$$\varepsilon_1 x_1^2 + \ldots + \varepsilon_m x_m^2 + 1 = 0\,, \tag{111.6}$$

t. j. při přechodu od $\mathbf{Q}_{m-1}$ ke $\mathbf{Q}'_{m-1}$ každý koeficient ε_r přejde v $-\varepsilon_r$. Je zvykem zavést kladné číslo a_r rovnicí

$$\varepsilon_r = \pm \frac{1}{a_r^2}\,; \tag{111.7}$$

čísla a_r nazýváme *poloosou* příslušnou ose $\{S\,;\,\boldsymbol{u}_r\}$. Snadno se zjistí, že pro $\varepsilon_r > 0$ protne $\mathbf{Q}_{m-1}$ osu $\{S\,;\,\boldsymbol{u}_r\}$ ve dvou různých reálných bodech

$$A'_r = S + a_r\boldsymbol{u}_r\,; \qquad A''_r = S - a_r\boldsymbol{u}_r\,; \tag{111.8}$$

S je střed dvojice A'_r, A''_r a každý z bodů A'_r, A''_r má od bodu S vzdálenost rovnu a_r. Při $\varepsilon_r < 0$ je osa $\{S\,;\,\boldsymbol{u}_r\}$ nesečnou pro $\mathbf{Q}_{m-1}$, ale protne středově sdruženou kvadriku $\mathbf{Q}'_{m-1}$ v bodech (111.8). Je nyní patrné, že číslo ε_r je jednoznačně určeno prostorem $\mathbf{E}_d$.

Pro $m = 2$, nepřihlížíme-li k případu $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 > 0$ kružnice a středově sdruženému případu $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 < 0$, máme jednak *elipsu* s rovnicí

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1\,, \qquad 0 < a_1 < a_2$$

a s ní středově sdruženou formálně reálnou regulární $\mathbf{Q}_1$ s rovnicí

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + 1 = 0\,,$$

jednak dvě navzájem středově sdružené *hyperboly,* z nichž jedna má rovnici

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1\,, \qquad a_1 > 0\,,\ a_2 > 0\,,$$

druhá pak rovnici

$$\frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_1^2}{a_1^2} = 1 , \qquad a_1 > 0 , \; a_2 > 0 .$$

Pro $m = 3$, jestliže opět nepřihlížíme k případu $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 > 0$ koule a středově sdruženému případu $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 < 0$, je rozeznávat *rotační* a *trojosé* regulární středové $\mathbf{Q}_2$, při čemž u trojosých $\mathbf{Q}_2$ jsou čísla ε_1 , ε_2 , ε_3 navzájem různá, kdežto u rotačních $\mathbf{Q}_2$ dvě z čísel ε_1 , ε_2 , ε_3 jsou si rovna, ale třetí se od nich liší. U trojosé $\mathbf{Q}_2$ jsou osy jednoznačně určeny; máme jednak *trojosý elipsoid* s rovnicí

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1 , \qquad 0 < a_1 < a_2 < a_3$$

a s ním středově sdruženou formálně reálnou regulární $\mathbf{Q}_2$ s rovnicí

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} + 1 = 0 ,$$

jednak dva navzájem středově sdružené *trojosé hyperboloidy*, z nichž jeden je dvojdílný a druhý jednodílný. Při tom rovnice jednodílného hyperboloidu je

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1$$

a rovnice příslušného dvojdílného hyperboloidu je

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} + 1 = 0 ,$$

kde čísla a_1 , a_2 , a_3 jsou kladná a $a_1 \neq a_2$.

U rotační $\mathbf{Q}_2$ je jednoznačně určena pouze ta osa, jejíž koeficient je různý od (sobě rovných) koeficientů druhých dvou os; tato osa se jmenuje *rotační osa* uvažované $\mathbf{Q}_2$; tvoří jeden totální osový prostor, kdežto druhým totálním osovým prostorem je rovina vedená středem S kvadriky kolmo na rotační osu. Máme tu předně *rotační elipsoid* s rovnicí

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{x_3^2}{b^2} = 1 , \qquad a > 0 , \; b > 0 , \; a \neq b ,$$

který se z důvodů, jež si čtenář sám snadno uvědomí, nazývá *protáhlým,* je-li $a < b$, *zploštělým*, je-li $a > b$; s uvažovaným elipsoidem je středově sdružena formálně reálná regulární kvadrika s rovnicí

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{x_3^2}{b^2} + 1 = 0 .$$

Za druhé máme *rotační jednodílný hyperboloid* s rovnicí

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{a^2} - \frac{x_3^2}{b^2} = 1 , \qquad a > 0 , b > 0$$

a s ním středově sdružený *rotační dvojdílný hyperboloid* s rovnicí

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{a^2} - \frac{x_3^2}{b^2} + 1 = 0 , \qquad a > 0 , b > 0 .$$

Názvy rotační elipsoid, rotační hyperboloid, rotační osa jsou odůvodněny tím, že jak se snadno dokáže, středová rotační $\mathbf{Q}_2$ je svým vlastním obrazem při každé rotaci prostoru $\mathbf{E}_3$, jejíž osou je rotační osa uvažované kvadriky.

Přistupme k paraboloidům! Úběžná nadrovina N opět protne $\mathbf{Q}_{m-1}$ v kvadrice $\mathbf{Q}_{m-2}$, která tentokrát má (jediný) singulární bod, který je osovým směrem paraboloidu $\mathbf{Q}_{m-1}$. Podle věty 109.7 opět je možno najít ortonormální ar. basi (111.1) prostoru N polární vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-2}$, při čemž podle věty 100.1 můžeme předpokládat, že $\{\boldsymbol{u}_1\}$ je osový směr paraboloidu. Podle článku 107 existuje na paraboloidu právě jeden bod V, zvaný *vrcholem paraboloidu*, jehož tečná nadrovina je kolmá na osový směr. Podle úvahy provedené na konci článku 100.7 má paraboloid $\mathbf{Q}_{m-1}$ v kartézské soustavě souřadnic

(111.9) $$\langle V ; \boldsymbol{u}_1 , \ldots , \boldsymbol{u}_m \rangle$$

rovnici tvaru

(111.10) $$\varepsilon_2 x_2^2 + \ldots + \varepsilon_m x_m^2 = 2x_1 ,$$

kde čísla $\varepsilon_2 , \ldots , \varepsilon_m$ jsou různá od nuly. Můžeme předpokládat, že

(111.11) $$\varepsilon_2 \geqq \ldots \geqq \varepsilon_m .$$

Přímka $\{V ; \boldsymbol{u}_1\}$ vedená vrcholem paraboloidu v osovém směru se jmenuje *osa paraboloidu*. Nazveme *hlavní tečnou paraboloidu* takovou tečnu $\{V ; \boldsymbol{v}\}$ paraboloidu v jeho vrcholu V, jejíž směr $\{\boldsymbol{v}\}$ má vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-1}$ polární nadrovinu kolmou na $\{\mathbf{v}\}$. Ježto $\{V ; \mathbf{v}\}$ je tečna ve V, je

$$(111.12) \qquad \mathbf{v} = a_2\mathbf{u}_2 + \ldots + a_m\mathbf{u}_m$$

a polární nadrovina směru $\{\mathbf{v}\}$ podle (111.10) má rovnici

$$\varepsilon_2 a_2 x_2 + \ldots + \varepsilon_m a_m x_m = 0 .$$

Podmínka pro hlavní směr je, aby tato rovnice byla ekvivalentní s rovnicí

$$a_2 x_2 + \ldots + a_m x_m = 0 .$$

Rozdělíme-li tedy indexy r $(2 \leqq r \leqq m)$ na skupiny tak, aby dva indexy r, s přišly do téže skupiny, právě když $\varepsilon_r = \varepsilon_s$, potom je $\{V ; \mathbf{v}\}$ hlavní tečnou, právě když všecky ty indexy r $(2 \leqq r \leqq m)$, pro něž ve (111.12) je $a_r \neq 0$, náležejí do téže skupiny. Každé skupině indexů můžeme přiřadit *totální hlavní tečnový prostor*, který prochází vrcholem V paraboloidu a jehož zaměření má za ar. basi právě ty vektory $\mathbf{u}_r$ $(2 \leqq r \leqq m)$, jejichž indexy patří do uvažované skupiny; je to lineární podprostor $\mathbf{E}_d$ tečné nadroviny paraboloidu ve vrcholu, jehož dimense d je rovna počtu indexů v příslušné skupině. Je patrné, že v kartézské soustavě souřadnic (111.9) má paraboloid rovnici tvaru (111.10), právě když přímka $\{V ; \mathbf{u}_1\}$ je jeho osou a každá přímka $\{V ; \mathbf{u}_r\}$ $(2 \leqq r \leqq m)$ hlavní tečnou (z čehož ovšem už plyne, že počátek V je vrcholem paraboloidu).

Pro $m = 2$ máme *parabolu*, která má ve svém vrcholu jedinou tečnu, jež ovšem je hlavní tečnou a obyčejně se nazývá *vrcholovou tečnou* paraboly. V kartézské soustavě souřadnic $\{V ; \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$, ve které $\{V ; \mathbf{u}_1\}$ je osa paraboly a $\{V ; \mathbf{u}_2\}$ vrcholová tečna, má parabola rovnici $\varepsilon_2 x_2^2 = 2x_1$. Taková kartézská soutava je určena čtyřznačně, ježto místo $\mathbf{u}_1$ lze dát $-\mathbf{u}_1$, místo $\mathbf{u}_2$ pak $-\mathbf{u}_2$. Při přechodu od $\mathbf{u}_2$ k $-\mathbf{u}_2$ koeficient ε_2 se nezmění, ale při přechodu od $\mathbf{u}_1$ k $-\mathbf{u}_1$ přejde ε_2 v $-\varepsilon_2$. Jednoznačně je určeno číslo $|\varepsilon_2|$, místo něhož se obyčejně zavádí číslo

$$\frac{1}{|\varepsilon_2|} = p ,$$

kterému se říká *parametr paraboly*, a jehož geometrický význam si osvětlíme v článku 113. Číslo ε_2 samo je úplně určeno teprve, když rozhodneme mezi vektory $\boldsymbol{u}_1$ a $-\boldsymbol{u}_1$, t. j. když zvolíme určitou orientaci osy paraboly, kterou nazveme *kladnou*, jestliže pro ty body $V + x\boldsymbol{u}_1$, které leží uvnitř paraboly, je $x > 0$, *zápornou*, je-li pro ně $x < 0$. Snadno se dokáže, že $\varepsilon_2 > 0$ při kladné a $\varepsilon_2 < 0$ při záporné orientaci osy paraboly.

Také pro $m \geqq 3$ jsou čísla ε_r $(2 \leqq r \leqq m)$ jednoznačně určena teprve, když se rozhodneme pro určitou orientaci osy paraboloidu $\{V ; \boldsymbol{u}_1\}$; při změně této orientace se změní znamení u všech ε_r zároveň. Rovina $\{V ; \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_r\}$ protne paraboloid v parabole, jejíž osa splyne s osou paraboloidu a jejíž parametr je $1 : |\varepsilon_r|$; je $\varepsilon_r > 0$ nebo $\varepsilon_r < 0$ podle toho, zda zvolená orientace osy je pro uvažovanou osu kladná či záporná.

Pro $m = 3$ máme jednak *dvojosé paraboloidy*, u nichž $\varepsilon_2 \neq \varepsilon_3$, jednak *rotační paraboloidy*, u nichž $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$. Rotační paraboloid přejde sám v sebe při kladné rotaci prostoru $\boldsymbol{E}_3$, jejíž osou je osa rotačního paraboloidu. Rotační paraboloidy jsou zvláštním případem eliptických paraboloidů. Dvojosý paraboloid má jen dvě hlavní tečny; u rotačního paraboloidu naproti tomu je každá tečna ve vrcholu hlavní tečnou.

Libovolný paraboloid $\boldsymbol{Q}_{m-1}$ spolu s dvojnásobnou úběžnou nadrovinou N určuje svazek kvadrik, ve kterém dvojnásobná N je jedinou singulární kvadrikou; každá jiná kvadrika svazku je paraboloidem, který vznikne z původního paraboloidu translací ve směru osy; má-li $\boldsymbol{Q}_{m-1}$ rovnici (111.10), mají ostatní paraboloidy svazku rovnici

$$\varepsilon_2 x_2^2 + \ldots + \varepsilon_m x_m^2 = 2(x_1 - \lambda) ;$$

vrcholem je bod $V + \lambda \boldsymbol{u}_1$.

Libovolná regulární středová kvadrika $\boldsymbol{Q}_{m-1}$ spolu s dvojnásobnou úběžnou nadrovinou N určuje svazek kvadrik, který nazveme *homothetickým*. Takový svazek obsahuje právě dvě singulární kvadriky, a to vedle dvojnásobné N ještě kvadriku, která má za jediný singulární bod střed S a je společným asymptotickým kuželem všech regulárních kvadrik svazku. Má-li výchozí $\boldsymbol{Q}_{m-1}$ rovnici (111.3), mají regulární $\boldsymbol{Q}_{m-1}$ svazku rovnice

$$\varepsilon_1 x_1^2 + \varepsilon_2 x_2^2 + \ldots + \varepsilon_m x_m^2 = \lambda ,$$

kde $\lambda \neq 0$. Zároveň se středovou regulární $\mathbf{Q}_{m-1}$ obsahuje náš svazek každou kvadriku, která z ní vznikne homothetickou transformací se středem homothetie S a s libovolným koeficientem homothetie. Dále zároveň s $\mathbf{Q}_{m-1}$ obsahuje náš svazek také s ní středově sdruženou kvadriku $\mathbf{Q}'_{m-1}$; každá regulární kvadrika svazku vznikne z jedné z obou kvadrik $\mathbf{Q}_{m-1}$, $\mathbf{Q}'_{m-1}$ homothetickou transformací se středem homothetie S.

112. KONFOKÁLNÍ STŘEDOVÉ KVADRIKY. V článku 109 jsme zavedli pojem svazku kvadrik v prostoru $\mathbf{P}_m$. Tento pojem má smysl pro každý projektivní prostor, tedy též pro prostor $\tilde{\mathbf{P}}_m$ duální k prostoru $\mathbf{P}_m$. Kvadriky prostoru $\tilde{\mathbf{P}}_m$ jsme v článku 98 nazvali duálními kvadrikami prostoru $\mathbf{P}_m$. V tomto článku si probereme jeden důležitý zvláštní případ svazku duálních kvadrik.

Budiž dán eukleidovský prostor $\mathbf{E}_m$ $(m \geqq 2)$; označme N jeho úběžnou nadrovinu, takže N je projektivní prostor dimense $m - 1$. V článku 108 jsme definovali absolutní kvadriku $\mathbf{A}_{m-2}$ prostoru $\mathbf{E}_m$; je to formálně reálná regulární kvadrika prostoru N. Podle článku 98 (viz str. 115) existuje singulární duální kvadrika prostoru $\mathbf{E}_m$, kterou označíme $\tilde{\mathbf{A}}_{m-2}$ a nazveme *absolutní duální kvadrikou* prostoru $\mathbf{E}_m$, která se skládá ze všech těch nadrovin prostoru $\mathbf{E}_m$, které procházejí některým tečným $\mathbf{P}_{m-2}$ kvadriky $\mathbf{A}_{m-2}$; N je duálním vrcholem pro $\tilde{\mathbf{A}}_{m-2}$. Zároveň s $\mathbf{A}_{m-2}$ je také $\tilde{\mathbf{A}}_{m-2}$ formálně reálná (viz str. 132).

Budiž

(112.1) $$\langle P ; \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m \rangle$$

kartézská soustava souřadnic v prostoru $\mathbf{E}_m$; ar. body P, $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m$ tvoří ar. basi projektivního rozšíření $\overline{\mathbf{E}}_m$ prostoru $\mathbf{E}_m$, k níž existuje duální ar. base

(112.2) $$\tilde{A}_0, \tilde{A}_1, \ldots, \tilde{A}_m$$

prostoru $\tilde{\mathbf{E}}_m$ duálního k $\overline{\mathbf{E}}_m$; zřejmě $\tilde{A}_0$ je ar. zástupce nadroviny N. Je-li

(112.3) $$X = x_0 P + x_1 \mathbf{u}_1 + \ldots + x_m \mathbf{u}_m, \qquad \tilde{X} = \xi_0 \tilde{A}_0 + \xi_1 \tilde{A}_1 + \ldots + \xi_m \tilde{A}_m,$$

je $\mathbf{A}_{m-2}$ dána rovnicemi

(112.4) $$x_1^2 + \ldots + x_m^2 = 0, \qquad x_0 = 0$$

a snadno spočteme, že $\tilde{\mathbf{A}}_{m-2}$ má rovnici

$$\xi_1^2 + \ldots + \xi_m^2 = 0 . \tag{112.5}$$

Budiž nyní $\mathbf{Q}_{m-1}$ reálná regulární kvadrika prostoru $\mathbf{E}_m$ a budiž $\tilde{\mathbf{Q}}_{m-1}$ její dualisace, tedy regulární duální kvadrika, která spolu s duální kvadrikou $\tilde{\mathbf{A}}_{m-2}$ určuje regulární svazek duálních kvadrik, který označíme Σ. Podle poznámky před větou 109.7 obsahuje Σ mimo $\tilde{\mathbf{A}}_{m-2}$ ještě nejvýš m singulárních duálních kvadrik. Nazveme *konfokální soustavou kvadrik* určenou danou regulární kvadrikou $\mathbf{Q}_{m-1}$ množinu všech těch regulárních kvadrik prostoru $\mathbf{E}_m$, jejichž dualisace (jež jsou regulární duální kvadriky) náležejí do Σ.

V tomto článku probereme případ, že daná kvadrika $\mathbf{Q}_{m-1}$ je středová. Potom je možné volit kartézskou soustavu souřadnic (112.1) tak, aby $\mathbf{Q}_{m-1}$ měla rovnici

$$\frac{x_1^2}{c_1} + \ldots + \frac{x_m^2}{c_m} = 1 , \tag{112.6}$$

kde čísla c_r $(1 \leqq r \leqq m)$ jsou různá od nuly.

Proti (111.3) jsme tedy poněkud změnili označení; je $c_r = 1 : \varepsilon_r$. Ze (112.3) a (112.6) plyne, že je-li $x_0 = -\xi_0$, $x_r = c_r\xi_r$ $(1 \leqq r \leqq m)$, je $\tilde{X}$ polární nadrovina bodu X vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-1}$. Z toho pak snadno následuje, že dualisace $\tilde{\mathbf{Q}}_{m-1}$ kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$ má rovnici

$$c_1\xi_1^2 + \ldots + c_m\xi_m^2 = \xi_0^2 . \tag{112.7}$$

Tudíž Σ obsahuje vedle $\tilde{\mathbf{A}}_{m-2}$ duální kvadriky s rovnicí

$$(c_1 - \lambda)\xi_1^2 + \ldots + (c_m - \lambda)\xi_m^2 = \xi_0^2 . \tag{112.8}$$

Duální kvadrika s rovnicí (112.8) je regulární, jestliže číslo λ je různé od všech čísel $c_1, \ldots, c_m$. Tedy konfokální soustava určená středovou kvadrikou s rovnicí (112.6) se skládá z kvadrik daných rovnicí

$$\frac{x_1^2}{c_1 - \lambda} + \ldots + \frac{x_m^2}{c_m - \lambda} = 1 , \tag{112.9}$$

kde

$$\lambda \neq c_r \quad \text{pro} \quad 1 \leqq r \leqq m . \tag{112.10}$$

Počátek souřadnic je tedy společným středem všech kvadrik konfokální soustavy, které se také shodují ve všech osách.

Pro $m = 2$ v případě $c_1 = c_2$ všecky kuželosečky konfokální soustavy jsou kružnice se společným středem P. Je-li $c_1 \neq c_2$, můžeme předpokládat, že

$$c_1 > c_2 . \tag{112.11}$$

Rovnice

$$\frac{x_1^2}{c_1 - \lambda} + \frac{x_2^2}{c_2 - \lambda} = 1 \tag{112.12}$$

dává potom:

elipsu pro $\lambda < c_2$,
hyperbolu pro $c_2 < \lambda < c_1$,
formálně reálnou $\mathbf{Q}_1$ pro $\lambda > c_1$.

Pro $m = 3$ v případě $c_1 = c_2 = c_3$ všecky bodově reálné kvadriky konfokální soustavy jsou koule se společným středem P. Je-li na př. $c_1 \neq c_2 = c_3$, jsou konfokální kvadriky rotační se společnou rotační osou $\{P ; \boldsymbol{u}_1\}$; jejich rovnice je

$$\frac{x_1^2}{c_1 - \lambda} + \frac{x_2^2 + x_3^2}{c_2 - \lambda} = 1 .$$

Je patrné, že studium takové soustavy konfokálních $\mathbf{Q}_2$ se redukuje na studium soustavy (112.11) konfokálních $\mathbf{Q}_1$, jež jsou řezy daných $\mathbf{Q}_1$ rovinou $\{P ; \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$. Skutečně nový proti $\boldsymbol{E}_2$ je tedy v $\boldsymbol{E}_3$ pouze ten případ, že všecka tři čísla c_1, c_2, c_3 jsou navzájem různá. Je-li tomu tak, můžeme předpokládat, že

$$c_1 > c_2 > c_3 , \tag{112.13}$$

načež rovnice

$$\frac{x_1^2}{c_1 - \lambda} + \frac{x_2^2}{c_2 - \lambda} + \frac{x_3^2}{c_3 - \lambda} = 1 \tag{112.14}$$

dává

elipsoid pro $\lambda < c_3$,
jednodílný hyperboloid pro $c_3 < \lambda < c_2$,
dvojdílný hyperboloid pro $c_2 < \lambda < c_1$,
formálně reálnou $\mathbf{Q}_2$ pro $\lambda > c_1$.

Stejně jako pro $m = 2$ a pro $m = 3$ je i pro vyšší m nejdůležitější ten případ, že *všecka čísla* c_r $(1 \leq r \leq m)$ jsou navzájem různá, na který se v následujícím omezíme a volíme označení tak, aby bylo

$$c_1 > \ldots > c_m . \tag{112.15}$$

Potom je lehko patrné ze (112.8), že Σ obsahuje mimo $\tilde{\mathbf{A}}_{m-2}$ ještě právě m singulárních duálních kvadrik, jejichž rovnice se dostanou, jestliže ve (112.8) je $\lambda = c_r$ $(1 \leqq r \leqq m)$, takže každá z nich přísluší jedné hodnotě indexu r. Singulární duální kvadrika příslušná indexu r má za duální vrchol (viz str. 114) nadrovinu σ_r vedenou bodem P kolmo na směr $\{\mathbf{u}_r\}$; uvažovaná duální kvadrika se skládá ze všech těch nadrovin prostoru $\mathbf{E}_m$, které obsahují některý tečný $\mathbf{E}_{m-2}$ regulární $(m - 2)$-rozměrné kvadriky nadroviny σ_r dané rovnicemi

$$(112.16) \qquad \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq r}}^{m} \frac{x_s^2}{c_s - c_r} = 1\,; \quad x_r = 0\,.$$

Kvadriky (112.16) se jmenují *fokální* $\mathbf{Q}_{m-2}$ uvažované konfokální soustavy a také fokální $\mathbf{Q}_{m-2}$ kterékoli $\mathbf{Q}_{m-1}$ náležející do té konfokální soustavy.

Pro $m = 2$ máme dvě fokální $\mathbf{Q}_0$, jednu danou rovnicemi $x_1^2 = c_1 - c_2$, $x_2 = 0$, druhou danou rovnicemi $x_2^2 = c_2 - c_1$, $x_1 = 0$. Za předpokladu (112.11) prvá fokální $\mathbf{Q}_0$ se skládá ze dvou reálných bodů

$$(112.17) \qquad P \pm \sqrt{c_1 - c_2}\,.\,\mathbf{u}_1$$

a druhá ze dvou imaginárních komplexně sdružených bodů

$$(112.18) \qquad P \pm \mathrm{i}\sqrt{c_1 - c_2}\,.\,\mathbf{u}_2\,.$$

Body (112.17) a (112.18) se jmenují *ohniska* kterékoli $\mathbf{Q}_1$ uvažované konfokální soustavy (112.11). Tedy každá středová regulární $\mathbf{Q}_1$ má celkem čtyři komplexní ohniska, po dvou na každé ze svých obou os; na jedné z os jsou ohniska reálná (tato osa se nazývá *hlavní osa*), na druhé imaginární (tato osa se nazývá *vedlejší osa*). Snadno se zjistí, že u elipsy poloosa příslušná hlavní ose je větší než poloosa příslušná vedlejší ose, u hyperboly pak hlavní osa je sečnou, vedlejší nesečnou. Reálná ohniska středové kuželosečky (která není kružnicí; pro kružnici jsme ohniska nedefinovali) leží vždy uvnitř kuželosečky. Čtenář sám provede početní důkaz známé věty, že jsou-li F_1, F_2 reálná ohniska a je-li a poloosa příslušná hlavní ose, je elipsa množinou těch bodů X v rovině $\mathbf{E}_2$, pro něž $\overline{F_1X} + \overline{F_2X} = 2a$, u hyperboly pak je jedna větev množinou těch X, pro něž $\overline{F_1X} - \overline{F_2X} = 2a$, druhá množinou těch X , pro něž $\overline{F_2X} - \overline{F_1X} = 2a$.

Pro $m = 3$ máme tři fokální $\mathbf{Q}_1$, jednu danou rovnicemi

(112.19) $$\frac{x_1^2}{c_1 - c_3} + \frac{x_2^2}{c_2 - c_3} = 1\,, \quad x_3 = 0\,,$$

druhou danou rovnicemi

(112.20) $$\frac{x_1^2}{c_1 - c_2} - \frac{x_3^2}{c_2 - c_3} = 1\,, \quad x_2 = 0\,,$$

třetí danou rovnicemi

(112.21) $$\frac{x_2^2}{c_1 - c_2} + \frac{x_3^2}{c_1 - c_3} + 1 = 0\,, \quad x_1 = 0\,.$$

Za předpokladu (112.13) je (112.19) elipsa v rovině $\{P\,;\,\mathbf{u}_1\,,\,\mathbf{u}_2\}$, (112.20) hyperbola v rovině $\{P\,;\,\mathbf{u}_1\,,\,\mathbf{u}_3\}$, (112.21) formálně reálná regulární $\mathbf{Q}_1$ v rovině $\{P\,;\,\mathbf{u}_2\,,\,\mathbf{u}_3\}$.

Vraťme se k libovolnému m a zvolme bod $X = P + x_1\mathbf{u}_1 + \ldots + x_m\mathbf{u}_m$ tak, aby všecky souřadnice x_r byly různé od nuly, neboli aby X neležel v žádné z nadrovin σ_r $(1 \leqq r \leqq m)$. Ptáme se po kvadrikách konfokální soustavy procházejících daným bodem X . Podmínka je vyjádřena rovnicí (112.9), ve které neznámou je λ . Označíme-li $\varphi(\lambda)$ levou stranu rovnice (112.9), která tedy zní $\varphi(\lambda) = 1$, je $\varphi(\lambda)$ spojitá funkce pro všecka λ mimo výjimečné hodnoty $\lambda = c_1\,, c_2\,, \ldots, c_m$ a blíží-li se λ některé výjimečné hodnotě, má $\varphi(\lambda)$ limitu zleva rovnou $+\infty$ a limitu zprava rovnou $-\infty$; blíží-li se λ k $\pm\infty$, má $\varphi(\lambda)$ limitu rovnou nule. Z toho je patrné, že za předpokladu (112.15) rovnice $\varphi(\lambda) = 1$ má aspoň jeden kořen v každém z m intervalů

(112.22) $$\lambda < c_m\,; \quad c_m < \lambda < c_{m-1}\,, \ldots, c_2 < \lambda < c_1\,;$$

na druhé straně je $\varphi(\lambda) = 1$ algebraická rovnice m-ho stupně, která nemůže mít více než m kořenů; proto naše rovnice má v každém z m intervalů (112.22) právě jeden kořen. Tedy *za předpokladu, že všecky koeficienty c_r jsou navzájem různé a že bod X leží mimo všecky nadroviny σ_r* (vedené středem kolmo k osám), *prochází bodem X právě m kvadrik konfokální soustavy, a to právě po jedné kvadrice každého z m různých typů, na které jsme v článku* 107 *rozdělili bodově reálné regulární středové* $\mathbf{Q}_{m-1}$.

Každá z těch m kvadrik naší konfokální soustavy, které procházejí bodem X, má v bodě X určitou tečnou nadrovinu; celkem je to m *tečných nadrovin, které jsou všecky navzájem kolmé.* Jsou-li totiž $\tilde{\mathbf{Q}}^{(r)}_{m-1}$ $(1 \leqq r \leqq m)$ dualisace uvažovaných kvadrik procházejících bodem X a jsou-li ϱ_r jejich tečné nadroviny v bodě X, potom pro každé r je vzhledem ke $\tilde{\mathbf{Q}}^{(r)}_{m-1}$ s nadrovinou ϱ_r konjugována každá nadrovina procházející bodem X, takže pro $1 \leqq r < s \leqq m$ jsou nadroviny ϱ_r, ϱ_s navzájem konjugovány vzhledem k oběma různým duálním kvadrikám $\tilde{\mathbf{Q}}^{(r)}_{m-1}$, $\tilde{\mathbf{Q}}^{(s)}_{m-1}$, jež obě náležejí do Σ a tudíž podle věty 109.2 jsou nadroviny ϱ_r, ϱ_s navzájem konjugovány vzhledem k $\tilde{\mathbf{A}}_{m-2}$ a snadno se dokáže, že to právě znamená, že nadroviny ϱ_r, ϱ_s jsou navzájem kolmé.

113. KONFOKÁLNÍ PARABOLOIDY. Pokračujíce v úvahách začatých v předcházejícím článku předpokládejme nyní, že výchozí regulární kvadrika $\mathbf{Q}_{m-1}$ je paraboloid. Potom můžeme kartézskou soustavu souřadnic (112.1) volit tak, že $\mathbf{Q}_{m-1}$ má rovnici

$$\frac{x_2^2}{c_2} + \ldots + \frac{x_m^2}{c_m} = 2x_1\,, \tag{113.1}$$

kde čísla c_r $(2 \leqq r \leqq m)$ jsou různá od nuly. Potom [při označení (112.3)], je-li $x_0 = -\xi_1$, $x_1 = -\xi_0$, $x_r = c_r\xi_r$ $(2 \leqq r \leqq m)$, je $\tilde{X}$ polární nadrovinou bodu X vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-1}$ a dualisace $\tilde{\mathbf{Q}}_{m-1}$ kvadriky $\mathbf{Q}_{m-1}$ má rovnici

$$c_2\xi_2^2 + \ldots + c_m\xi_m^2 = 2\xi_0\xi_1$$

a tudíž Σ (označení stále jako v článku 112) obsahuje vedle $\tilde{\mathbf{A}}_{m-2}$ duální kvadriky s rovnicí

$$(c_2 - \lambda)\xi_2^2 + \ldots + (c_m - \lambda)\xi_m^2 = \xi_1(2\xi_0 + \lambda\xi_1)\,. \tag{113.2}$$

Duální kvadrika s rovnicí (113.2) je regulární, jestliže číslo λ je různé od všech čísel $c_2, \ldots, c_m$. Je-li tomu tak, potom [opět při označení (112.3)], je-li $x_0 = -\xi_1$, $x_1 = -\xi_0 - \lambda\xi_1$, $x_r = (c_r - \lambda)\xi_r$ pro $2 \leqq r \leqq m$, je X pól nadroviny $\tilde{X}$ vzhledem k duální kvadrice s rovnicí (113.2), takže tato je dualisací kvadriky s rovnicí

$$\frac{x_2^2}{c_2 - \lambda} + \ldots + \frac{x_m^2}{c_m - \lambda} = 2(x_1 - \tfrac{1}{2}\lambda)\,. \tag{113.3}$$

(113.3) je tedy rovnice libovolné kvadriky konfokální soustavy určené paraboloidem $\mathbf{Q}_{m-1}$; ve (113.3) je ovšem třeba předpokládat, že

$$(113.4) \qquad \lambda \neq c_r \quad \text{pro} \quad 2 \leqq r \leqq m \,.$$

Ze (113.3) je patrné, že všecky kvadriky naší konfokální soustavy jsou paraboloidy, které mají společnou osu v přímce $\{P\,;\,\boldsymbol{u}_1\}$ a společné směry hlavních tečen. Vrchol paraboloidu je $P + \frac{1}{2}\lambda\boldsymbol{u}_1$, kde je nutné, aby λ splňovalo nerovnosti (113.4).

Pro $m = 2$ výchozí parabola $\mathbf{Q}_1$ má rovnici $x_2^2 = 2c_2x_1$, kde číslo $|c_2|$ jsme v článku 111 nazvali *parametrem* paraboly $\mathbf{Q}_1$. Osou paraboly je přímka $\{P\,;\,\boldsymbol{u}_1\}$ a každý bod osy až na výjimečný bod $F = P + \frac{1}{2}c_2\boldsymbol{u}_1$ je vrcholem jedné konfokální paraboly; bod F naproti tomu leží uvnitř všech parabol konfokální soustavy. Bod F se jmenuje *ohnisko* paraboly (na rozdíl od elipsy a hyperboly má tedy parabola *jediné* ohnisko); *parametr paraboly je dvojnásobek vzdálenosti vrcholu od ohniska.*

Jestliže pro $m = 3$ je $c_2 = c_3$, jsou všecky paraboloidy rotační se společnou osou a studium takové konfokální soustavy rotačních paraboloidů se v podstatě redukuje na studium soustavy konfokálních parabol, která vznikne, protneme-li paraboloidy pevně zvolenou rovinou procházející osou. Podobně je tomu i pro vyšší m , a proto se omezíme na ten případ, že čísla c_r $(2 \leqq r \leqq m)$ jsou navzájem různá; označení volíme tak, aby bylo

$$(113.5) \qquad c_2 > \ldots > c_m \,.$$

Pro $m = 2$ ovšem nerovnosti (113.5) odpadnou.

Je patrné, že Σ obsahuje mimo $\tilde{\mathbf{A}}_{m-2}$ ještě právě $m - 1$ dalších singulárních duálních kvadrik, z nichž každá patří jednomu z indexů r $(2 \leqq r \leqq m)$ a je pro $m \geqq 3$ dána rovnicí

$$(113.6) \qquad \sum_{\substack{s=2 \\ s \neq r}}^{m} (c_s - c_r)\xi_s^2 = \xi_1(2\xi_0 + c_r\xi_1) \,,$$

pro $m = 2$ pak rovnicí

$$(113.7) \qquad \xi_1(2\xi_0 + c_2\xi_1) = 0 \,.$$

Duálním vrcholem takové singulární kvadriky je pro $m \geqq 3$ nadrovina σ_r vedená osou kolmo na směr $\{\boldsymbol{u}_r\}$ hlavní tečny; pro $m = 2$ je duálním vrcholem prostě osa. Pro $m = 2$ se naše singulární duální kvadrika (113.7) skládá ze všech přímek, které buďto jsou rovnoběžné s osou paraboly nebo procházejí jejím ohniskem. Pro $m \geqq 3$ singulární duální kvadrika (113.6) se skládá ze všech těch nadrovin prostoru $\boldsymbol{E}_m$, které obsahují některý tečný $\boldsymbol{E}_{m-2}$ regulární $(m - 2)$-rozměrné kvadriky nadroviny σ_r dané rovnicemi

$$(113.8) \qquad \sum_{\substack{s=2 \\ s \neq r}}^{m} \frac{x_s^2}{c_s - c_r} = 2x_1 - c_r\,, \quad x_r = 0\,;$$

tato $\boldsymbol{Q}_{m-2}$ se jmenuje *fokální* $\boldsymbol{Q}_{m-2}$ konfokální soustavy paraboloidů nebo kteréhokoli paraboloidu této soustavy; počet takových fokálních $\boldsymbol{Q}_{m-2}$ je roven $m - 1$; každá z nich je pro $m \geqq 3$ paraboloidem ve své nadrovině σ_r, pro $m = 3$ tedy parabolou.

Zvolme bod $X = P + x_1\boldsymbol{u}_1 + \ldots + x_m\boldsymbol{u}_m$ tak, aby bylo $x_r \neq 0$ pro $2 \leqq r \leqq m$, aby tedy neležel v žádné z výše uvedených $m - 1$ nadrovin σ_r. Podmínka, aby paraboloid naší konfokální soustavy procházel bodem X, zní $\varphi(\lambda) = 2x_1$, kde

$$\varphi(\lambda) = \frac{x_2^2}{c_2 - \lambda} + \ldots + \frac{x_m^2}{c_m - \lambda} + \lambda\,.$$

Za předpokladu (113.4) je $\varphi(\lambda)$ spojitá funkce proměnné λ; blíží-li se λ některé z vyloučených hodnot c_r $(2 \leqq r \leqq m)$, má $\varphi(\lambda)$ limitu zleva rovnou $+\infty$ a limitu zprava rovnou $-\infty$; mimo to pro $\lambda \to \infty$ je $\varphi(\lambda) \to \infty$, pro $\lambda \to -\infty$ je $\varphi(\lambda) \to -\infty$. Z toho soudíme, že naše rovnice $\varphi(\lambda) = 2x_1$ má aspoň jeden kořen v každém z m intervalů

$$(113.9) \qquad \lambda < c_m\,;\ c_m < \lambda < c_{m-1}\,;\ \ldots\,;\ c_3 < \lambda < c_2\,;\ \lambda > c_2$$

a ježto $\varphi(\lambda) = 2x_1$ je algebraická rovnice m-ho stupně, máme v každém z intervalů (113.9) právě jeden kořen. Tedy *jestliže čísla c_r $(2 \leqq r \leqq m)$ jsou navzájem různá a jestliže bod X neleží v žádné z nadrovin σ_r* (pro $m = 2$ to znamená prostě, že X neleží na společné ose uvažovaných parabol), *prochází bodem X právě m paraboloidů konfokální soustavy. Tečné nadroviny těchto m paraboloidů v bodě X jsou navzájem kolmé*, což se dokáže týmž způsobem jako u středových kvadrik.

114. ALTERNUJÍCÍ BILINEÁRNÍ FORMY. LINEÁRNÍ KOMPLEXY. Bilineární formu f v prostoru $\boldsymbol{P}_m$ jsme v článku 94 nazvali *alternující*, je-li identicky

$$f(Y, X) = -f(X, Y) . \tag{114.1}$$

Je-li v $\boldsymbol{P}_m$ zvolena ar. base

$$A_0, A_1, \dots A_m \tag{114.2}$$

a je-li f libovolná bilineární forma v $\boldsymbol{P}_m$, potom pro (94.6) a (94.7) platí (94.8). Je-li f alternující, potom v (94.6) je

$$a_{rs} = -a_{sr} \quad \text{pro} \quad 1 \leqq r < s \leqq m , \tag{114.3}$$

$$a_{rr} = 0 \quad \text{pro} \quad 1 \leqq r \leqq m . \tag{114.4}$$

Obráceně, platí-li (114.3) a (114.4), je (94.8) alternující bilineární forma v $\boldsymbol{P}_m$ a (94.8) můžeme psát ve tvaru

$$f(X, Y) = \sum_{(rs)} a_{rs}(x_r y_s - x_s y_r) , \tag{114.5}$$

kde sumace $\sum\limits_{(rs)}$ se vztahuje na všecky ty dvojice indexů r, s, pro něž $1 \leqq r < s \leqq m$.

VĚTA 114.1. *Je-li f alternující bilineární forma v $\boldsymbol{P}_m$, lze určit ar. basi* (114.2) *tak, že f má tvar*

$$\sum_{r=0}^{k-1} \varepsilon_r (x_{2r} y_{2r+1} - x_{2r+1} y_{2r}) , \tag{114.6}$$

při čemž $2k \leqq m + 1$.

DŮKAZ. Pro $m = 1$ je věta zřejmá při každé volbě ar. base A_0, A_1. Pro každé m je věta zřejmá, je-li f identicky rovna nule. Není-li f identicky rovna nule, lze určit A_0 tak, že není identicky $f(A_0, X) = 0$. Potom existuje nadrovina ϱ_0 jdoucí bodem A_0 tak, že $f(A_0, X) = 0$, právě když $\{X\}$ leží v ϱ_0. Zvolme A_1 mimo ϱ_0, takže $f(A_0, A_1) \neq 0$. Potom existuje nadrovina ϱ_1 jdoucí bodem A_1 tak, že $f(A_1, X) = 0$, právě když $\{X\}$ leží v ϱ_1. Je $\varrho_0 \neq \varrho_1$ a ježto můžeme předpokládat, že $m \geqq 2$, průnik $\boldsymbol{P}_{m-2}$ nadrovin ϱ_0, ϱ_1 není prázdný. Budiž

$$A_2, \dots, A_m \tag{114.7}$$

ar. base pro P_{m-2}. Potom je (114.2) ar. base pro P_m, neboť jinak by existovala čísla c_r $(0 \leqq r \leqq m)$ tak, že

$$c_0A_0 + c_1A_1 = \sum_{r=2}^{m} c_rA_r \neq \mathbf{o} ,$$

tedy buďto $c_0 \neq 0$ nebo $c_1 \neq 0$, což je nemožné, ježto

$$\begin{aligned} f(A_0 , \sum_{r=2}^{m} c_rA_r) &= f(A_1 , \sum_{r=2}^{m} c_rA_r) = 0 , \\ f(A_0 , c_0A_0 + c_1A_1) &= c_1f(A_0 , A_1) \\ f(A_1 , c_0A_0 + c_1A_1) &= -c_0f(A_0 , A_1) . \end{aligned}$$

Ve (114.5) je nyní $a_{0s} = a_{1s} = 0$ pro $2 \leqq s \leqq m$, takže pro $m = 2$ je $f(X , Y) = a_{01}(x_0y_1 - x_1y_0)$ a věta je pro $m = 2$ správná. Pro $m \geqq 3$ můžeme předpokládat, že věta je správná pro P_{m-2} , načež můžeme (114.7) volit tak, že pro $x_0 = y_0 = 0$, t. j. pro $X = x_2A_2 + \ldots + x_mA_m$, $Y = y_2A_2 + \ldots + y_mA_m$ je

$$f(X , Y) = \sum_{r=1}^{k-1} \varepsilon_r(x_{2r}y_{2r+1} - x_{2r+1}y_{2r}) ,$$

kde $2k \leqq m + 1$, načež, ježto $a_{0s} = a_{1s} = 0$ $(2 \leqq s \leqq m)$, má f při libovolných X , Y tvar (114.6), jestliže $\varepsilon_1 = a_{01}$.

Bod $\{X\}$ nazveme *regulárním* vzhledem k alternující bilineární formě f, existuje-li Y tak, že $f(X , Y) \neq 0$; bod $\{X\}$ nazveme *singulárním* vzhledem k f , jestliže $f(X , Y) = 0$ pro všecka Y. V článku 94 jsme definovali regulární a singulární bilineární formy f . Je patrné, že vzhledem k alternující bilineární formě f existují singulární body, právě když f je singulární. Množinu všech singulárních bodů singulární alternující bilineární formy f nazveme jejím *vrcholem*. Je to zřejmě lineární podprostor P_d v širším smyslu prostoru P_m $(0 \leqq d \leqq m$, při čemž $d = m$ pouze pro nulovou formu $f)$.

VĚTA 114.2. *Při lichém m existují jak regulární, tak i singulární alternující bilineární formy f , při sudém m pouze singulární. Je-li d dimense vrcholu singulární f , je číslo $m - d$ sudé* (není-li f nulová, je $m - d > 0$) .

DŮKAZ. Není-li f nulová forma, můžeme předpokládat, že ve (114.6) je $\varepsilon_r \neq 0$ pro $0 \leqq r \leqq k - 1$. Je-li $X = x_0A_0 + x_1A_1 + \ldots + x_mA_m$, je zřejmě $\{X\}$ singulární, právě když $x_s = 0$ pro $0 \leqq s \leqq 2k - 1$. Tedy f je regulární, právě když $2k = m + 1$, a pro $2k < m + 1$ má f vrchol $\{A_{2k}, \dots, A_m\}$ a tedy $d = m - 2k$.

V článku 94 jsme poznali, že každá regulární bilineární forma f prostoru $\mathbf{P}_m$ vytvořuje určitou korelaci K prostoru $\mathbf{P}_m$ a že obráceně každá korelace prostoru $\mathbf{P}_m$ je vytvořena nekonečně mnoha bilineárními formami, při čemž je-li f jedna z nich, jsou všecky tvaru cf, kde c je libovolné číslo různé od nuly. Korelaci K jsme nazvali *involutorní*, jestliže pro každý bod X platí, že kdykoli bod Y leží v nadrovině KX, leží také obráceně X v nadrovině KY. Poznali jsme, že K je involutorní, právě když vytvořující bilineární forma je buďto symetrická nebo alternující; v prvém případě jsme nazvali K polární korelací, ve druhém nulovou korelací. Je-li K polární korelace, víme, že existuje (bodově nebo formálně reálná) regulární $\mathbf{Q}_{m-1}$ tak, že pro každý bod X je KX jeho polární nadrovina vzhledem ke $\mathbf{Q}_{m-1}$; bod X leží v nadrovině KX, právě když X leží v $\mathbf{Q}_{m-1}$, takže existují reálné body X, které neleží v KX. Naproti tomu, je-li K nulová korelace, leží *každý* bod X prostoru $\mathbf{P}_m$ v nadrovině KX. Podle věty 114.2 pro sudé m neexistují a pro liché m existují nulové korelace prostoru $\mathbf{P}_m$. Pro $m = 1$ není rozdílu mezi bodem a nadrovinou a *jediná nulová korelace přímky $\mathbf{P}_1$ je její identická transformace.*

Budiž nyní dána v $\mathbf{P}_m$ *nenulová* alternující bilineární forma f, která může být regulární nebo singulární. Dva body $\{X\}$, $\{Y\}$ prostoru $\mathbf{P}_m$ nazveme *konjugované* vzhledem k f, je-li $f(X, Y) = 0$; podle (114.1) je to vztah vzájemný a každý $\{X\}$ je (mimo jiné i) sám k sobě konjugován. Je-li $\{X\}$ singulárním bodem pro f, je konjugován s každým bodem prostoru $\mathbf{P}_m$; je-li však $\{X\}$ regulárním bodem pro f, potom množina všech bodů konjugovaných s bodem $\{X\}$ tvoří nadrovinu *procházející bodem $\{X\}$*, kterou nazveme *polární nadrovinou* bodu $\{X\}$ vzhledem k f. Smysl pojmů regulární nebo singulární formy, regulárního nebo singulárního bodu, konjugovaných bodů, polární nadroviny zůstane nezměněn, nahradíme-li formu f formou cf, kde $c \neq 0$. Je-li nyní

$$X = \alpha A + \beta B, \qquad Y = \gamma A + \delta B,$$

plyne z (94.1) až (94.4) a ze (114.1), že

$$f(X, Y) = (\alpha\delta - \beta\gamma)\, f(A, B)$$

a z toho následuje: *jestliže dva různé body přímky p jsou navzájem konjugovány vzhledem k f, jsou každé dva body přímky p konjugovány vzhledem k f*. Množinu $\mathbf{C}_m$ všech takových přímek p nazveme *lineárním komplexem* v prostoru $\mathbf{P}_m$ vytvořeným (nenulovou) alternující bilineární formou f. Zároveň s f také každá cf $(c \neq 0)$ vytvořuje týž $\mathbf{C}_m$ a obráceně se snadno dokáže, že jestliže vedle f také druhá nenulová alternující bilineární forma g vytvořuje týž $\mathbf{C}_m$, existuje $c \neq 0$ tak, že je identicky $g = cf$. $\mathbf{C}_m$ je *regulární* nebo *singulární* podle toho, jaká je f; rovněž tak u pojmů *regulárního* nebo *singulárního bodu*, *konjugovaných bodů*, *polární nadroviny* atribut „vzhledem k $\mathbf{C}_m$" znamená totéž jako „vzhledem k f". Je-li f, a tedy i $\mathbf{C}_m$, singulární, potom *vrcholem* lineárního komplexu $\mathbf{C}_m$ rozumíme vrchol formy f. Je-li $\mathbf{C}_m$ regulární, potom nulová korelace K vytvořená lineárním komplexem $\mathbf{C}_m$ je nulová korelace vytvořená formou f; tedy nadrovina KX je polární nadrovina bodu $\{X\}$ vzhledem k $\mathbf{C}_m$. V každém případě, je-li A singulární bod pro $\mathbf{C}_m$, potom *každá* přímka jdoucí bodem A náleží do $\mathbf{C}_m$; je-li A regulární bod pro $\mathbf{C}_m$, potom do $\mathbf{C}_m$ náleží přímka p jdoucí bodem A, právě když p leží v polární nadrovině $\mathbf{P}_{m-1}$ bodu A vzhledem k $\mathbf{C}_m$, t. j. právě když p náleží do $\pi(A\,;\,\mathbf{P}_{m-1})$ [viz (81.1)].

Pro $m = 1$ je každý bod přímky $\mathbf{P}_1$ pouze sám k sobě konjugován vzhledem k f, takže $\mathbf{C}_1$ je prázdná množina. Pro $m = 2$ plyne z věty 114.2, že $\mathbf{C}_2$ je singulární a že jeho vrcholem je určitý bod A roviny $\mathbf{P}_2$; z toho snadno plyne, že $\mathbf{C}_2$ je prostě svazek přímek $\pi(A\,;\,\mathbf{P}_2)$. Pro $m = 3$ plyne z věty 114.2, že $\mathbf{C}_3$ může být regulární nebo singulární; je-li $\mathbf{C}_3$ singulární, je jeho vrcholem určitá přímka p prostoru $\mathbf{P}_3$ a snadno se dokáže, že $\mathbf{C}_3$ se skládá z přímky p a mimo ni ještě právě z těch přímek prostoru $\mathbf{P}_3$, které protínají přímku p. Je-li $\mathbf{C}_3$ regulární a je-li p libovolně daná přímka prostoru $\mathbf{P}_3$, dokáže se snadno, že množina všech těch bodů prostoru $\mathbf{P}_3$, které jsou konjugovány vzhledem (ke dvěma různým a tedy) ke všem bodům přímky p, tvoří opět přímku q, kterou nazveme *polárou* přímky p vzhledem k $\mathbf{C}_3$; je patrné, že polárou přímky q vzhledem k $\mathbf{C}_3$ je původní přímka p. Jestliže p náleží do $\mathbf{C}_3$, splyne se svou polárou q; jestliže p nenáleží do $\mathbf{C}_3$, nemají p a q žádný společný bod.

115. PŘÍMKOVÁ GEOMETRIE V $\boldsymbol{P}_3$. Budiž Ψ_m množina všech alternujících bilineárních forem v projektivním prostoru $\boldsymbol{P}_m$ $(m \geqq 3)$. Jsou-li f, g dvě takové formy, patří do Ψ_m také forma $f + g$; zároveň s f patří do Ψ_m také cf při každé volbě čísla c. Zvolíme-li libovolně ar. basi

$$A_0 , A_1 , \ldots , A_m$$

prostoru $\boldsymbol{P}_m$, potom ty bilineární formy ψ_{rs} $(0 \leqq r < s \leqq m)$, pro něž $\psi_{rs}(X , Y) = x_r y_s - x_s y_r$ pro $X = x_0 A_0 + x_1 A_1 + \ldots + x_m A_m$, $Y = y_0 A_0 + y_1 A_1 + \ldots + y_m A_m$, tvoří basi pro Ψ_m. Tedy Ψ_m je vektorovým prostorem dimense $\frac{1}{2}m(m + 1)$ a tudíž ar. základem projektivního prostoru $\{\Psi_m\}$ dimense $\frac{1}{2}(m - 1)(m + 2)$. Podle předcházejícího článku existuje vzájemně jednoznačný vztah mezi lineárními komplexy prostoru $\boldsymbol{P}_m$ a body prostoru $\{\Psi_m\}$. Omezíme se na nejdůležitější případ $m = 3$; pětirozměrný projektivní prostor $\{\Psi_3\}$ nazveme *Kleinovým prostorem*, označíme jej K_5 a každý bod prostoru K_5 nazveme *prvým Kleinovým obrazem* příslušného *lineárního komplexu* $\boldsymbol{C}_3$. Je-li $\boldsymbol{C}_3$ speciální, skládá se ze všech přímek protínajících určitou přímku p prostoru $\boldsymbol{P}_3$ (a z přímky p samé); prvý Kleinův obraz lineárního komplexu $\boldsymbol{C}_3$ nazveme v tomto případě také *Kleinovým obrazem přímky* p.

Zaveďme libovolnou ar. basi

$$A_0 , A_1 , A_2 , A_3 \tag{115.1}$$

prostoru $\boldsymbol{P}_3$, jíž podle předchozího odpovídá ar. base

$$\psi_{01} , \psi_{02} , \psi_{03} , \psi_{12} , \psi_{13} , \psi_{23} \tag{115.2}$$

Kleinova prostoru K_5, kde pro $X = x_0 A_0 + \ldots + x_3 A_3$, $Y = y_0 A_0 + \ldots + y_3 A_3$

$$\psi_{rs}(X) = x_r y_s - x_s y_r ,$$

$$r , s = 0,1 ; \ 0,2 ; \ 0,3 ; \ 1,2 ; \ 1,3 ; \ 2,3 .$$

Alternující bilineární forma f, kde

$$\begin{aligned} f(X , Y) = {} & a_{01}(x_0 y_1 - x_1 y_0) + a_{02}(x_0 y_2 - x_2 y_0) + \\ & + a_{03}(x_0 y_3 - x_3 y_0) + a_{12}(x_1 y_2 - x_2 y_1) + a_{13}(x_1 y_3 - x_3 y_1) + \\ & + a_{23}(x_2 y_3 - x_3 y_2) \end{aligned} \tag{115.3}$$

má vzhledem k ar. basi (115.2) souřadnice

$$(115.4) \qquad a_{01}\,, a_{02}\,, a_{03}\,, a_{12}\,, a_{13}\,, a_{23}\,,$$

které také nazveme (nejsou-li všecky rovny nule, t. j. jestliže forma f není nulová) *homogenními souřadnicemi lineárního komplexu vytvořeného formou* f a je-li f singulární s vrcholem p, také *homogenními souřadnicemi přímky* p vzhledem k ar. basi (115.1).

Ar. bod (115.4) prostoru K_5 označme stručně (a); je-li $a \neq \mathbf{o}$, nechť pro jednoduchost týž symbol (a) znamená také příslušný g. bod prostoru K_5.

VĚTA 115.1. *Je-li přímka p prostoru* $\mathbf{P}_3$ *určena body*

$$(115.5) \qquad \begin{aligned} L &= \lambda_0 A_0 + \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3\,,\\ M &= \mu_0 A_0 + \mu_1 A_1 + \mu_2 A_2 + \mu_3 A_3\,, \end{aligned}$$

potom čísla

$$(115.6) \qquad \begin{gathered} b_{01} = \lambda_2\mu_3 - \lambda_3\mu_2\,, \quad b_{02} = \lambda_3\mu_1 - \lambda_1\mu_3\,,\\ b_{03} = \lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1\,,\\ b_{12} = \lambda_0\mu_3 - \lambda_3\mu_0\,, \quad b_{13} = \lambda_2\mu_0 - \lambda_0\mu_2\,,\\ b_{23} = \lambda_0\mu_1 - \lambda_1\mu_0 \end{gathered}$$

jsou homogenními souřadnicemi přímky p vzhledem k ar. basi (115.1). Neboť alternující bilineární forma g, kde

$$(115.7) \qquad g(X\,, Y) = \begin{vmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3\\ \mu_0 & \mu_1 & \mu_2 & \mu_3\\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3\\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}\,,$$

vytvořuje singulární lineární komplex s vrcholem p.

Položme

$$(115.8) \qquad \varphi_2(a) = a_{01}a_{23} - a_{02}a_{13} + a_{03}a_{12}\,,$$

takže φ_2 je kvadratická forma prostoru K_5; dále položme

$$(115.9) \qquad \begin{aligned} \varphi(a\,, b) = a_{01}b_{23} + a_{23}b_{01} - a_{02}b_{13} - a_{13}b_{02} +\\ + a_{03}b_{12} + a_{12}b_{03}\,, \end{aligned}$$

takže φ je symetrická bilineární forma prostoru K_5 příslušná kvadratické formě φ_2. Vyjádření (115.8) formy φ_2 se týká ar. base (115.2); přejdeme-li od (115.2) k nové ar. basi

$$\chi_0, \chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4, \chi_5 \tag{115.10}$$

prostoru K_5 spjaté se (115.2) rovnicemi

$$\chi_0 = \psi_{01} + \psi_{23}, \quad \chi_1 = \psi_{01} - \psi_{23}, \quad \chi_2 = \psi_{02} - \psi_{13},$$
$$\chi_3 = \psi_{02} + \psi_{13}, \quad \chi_4 = \psi_{03} + \psi_{12}, \quad \chi_5 = \psi_{03} - \psi_{12},$$

máme místo souřadnic (115.4) bilineární formy (115.3) nové souřadnice

$$c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5,$$

kde

$$a_{01} = c_0 + c_1, \quad a_{02} = c_2 + c_3, \quad a_{03} = c_4 + c_5,$$
$$a_{23} = c_0 - c_1, \quad a_{13} = c_3 - c_2, \quad a_{12} = c_4 - c_5,$$

takže kvadratická forma (115.8) má v nových souřadnicích tvar

$$c_0^2 - c_1^2 + c_2^2 - c_3^2 + c_4^2 - c_5^2.$$

Tedy φ_2 je regulární kvadratická forma prostoru K_5 se signaturou (3,3).

VĚTA 115.2. *V Kleinově prostoru K_5 existuje regulární kvadrika se signaturou* (3,3), kterou nazveme *základní kvadrikou* prostoru K_5 a označíme Z_4, *s tou vlastností, že bod prostoru K_5 je Kleinovým obrazem přímky prostoru $\mathbf{P}_3$, právě když leží na Z_4*. Kvadrika Z_4 je vytvořena formou φ_2.

DůKAZ se rozpadá na dvě části. I. Podle věty 115.1 přímka p určená body (115.5) má homogenní souřadnice (115.6); zřejmě však ve (115.7) je $g(L, M) = 0$, takže $\varphi_2(b) = 0$.

II. Budiž $\varphi_2(a) = 0$, kde čísla (115.4) nejsou vesměs rovna nule; máme dokázat, že forma (115.3) je singulární. Volíme-li $X_1 = a_{12}A_0 - a_{02}A_1 + a_{01}A_2$, plyne ze (115.3), že $f(X_1, Y) = \varphi_2(a) \cdot y_3$, t. j. $f(X_1, Y) = 0$ identicky v Y. Je-li tedy $X_1 \neq \mathbf{o}$, je $\{X_1\}$ singulární bod pro f. Je-li však $X_1 = \mathbf{o}$, t. j. $a_{01} = a_{02} = a_{12} = 0$, dává (115.3) identitu $f(X, Y) = (a_{03}x_0 + a_{13}x_1 + a_{23}x_2)\, y_3 - (a_{03}y_0 + a_{13}y_1 + a_{23}y_2) \cdot x_3$; volíme-li $X_2 = x_0A_0 + x_1A_1 + x_2A_2 \neq \mathbf{o}$ tak, aby bylo $a_{03}x_0 + a_{13}x_1 + a_{23}x_2 = 0$, je $\{X_2\}$ singulární bod pro f.

VĚTA 115.3. *Přímka p prostoru $\mathbf{P}_3$ náleží do lineárního komplexu $\mathbf{C}_3$, právě když prvý Kleinův obraz $\mathbf{C}_3$ náleží do tečné nadroviny kvadriky Z_4 v tom jejím bodě, který je Kleinovým obrazem přímky p.*

DŮKAZ. Přímka p budiž určena body (115.5), takže má homogenní souřadnice (115.6). Lineární komplex $\mathbf{C}_3$ budiž vytvořen alternující bilineární formou (115.3). Máme dokázat, že $\varphi(a, b) = 0$, právě když $f(L, M) = 0$. Podle (115.3) a (115.6) je však dokonce vždy

$$\varphi(a, b) = f(L, M).$$

VĚTA 115.4. *Dvě různé přímky p, q prostoru $\mathbf{P}_3$ se protnou, právě když přímka Φ určená jejich Kleinovými obrazy leží celá na kvadrice Z_4. Je-li tomu tak, skládá se přímka Φ z Kleinových obrazů právě těch přímek prostoru $\mathbf{P}_3$, které v tomto prostoru vyplní svazek přímek obsahující p i q.* Přímku Φ nazveme *Kleinovým obrazem* našeho *svazku přímek.*

DŮKAZ. I. Jsou-li (a), (b) Kleinovy obrazy přímek p, q, plyne z věty 115.3, že (přímka q náleží do singulárního lineárního komplexu s vrcholem p, t. j. že) přímky p, q se protnou, právě když body (a), (b) jsou navzájem konjugovány vzhledem k Z_4. Avšak dva různé body (a), (b) kvadriky Z_4 jsou konjugovány vzhledem k Z_4, právě když přímka $(a)(b)$ leží celá na Z_4.

II. Jestliže přímka $(a)(b)$ leží celá na Z_4, budiž L průsečík přímek p, q, $M \neq L$ bod přímky p, $N \neq L$ bod přímky q. Ze (115.6) je patrné, že $(\lambda a + \mu b)$ je Kleinův obraz přímky, která spojuje bod L s bodem $\lambda M + \mu N$.

Ježto regulární kvadrika Z_4 prostoru K_5 má signaturu (3.3), plyne z článku 106, že existují roviny, jež jsou celé obsaženy v Z_4. Jaké to jsou roviny, o tom nás poučuje

VĚTA 115.5. *Kleinovy obrazy všech přímek procházejících daným bodem A prostoru $\mathbf{P}_3$ vyplní rovinu obsaženou v Z_4, kterou nazveme Kleinovým obrazem bodu A. Kleinovy obrazy všech přímek ležících v dané rovině ϱ prostoru $\mathbf{P}_3$ vyplní rovinu obsaženou v Z_4, kterou nazveme Kleinovým obrazem roviny ϱ. Obráceně, každá rovina obsažená v Z_4 je Kleinovým obrazem bodu nebo roviny prostoru $\mathbf{P}_3$.*

DŮKAZ plyne snadno z věty 115.4.

Poznámka. V článku 105 jsme dokázali, že na dvojrozměrné regulární kvadrice se signaturou (2,2) leží dvě soustavy reálných přímek tak, že dvě různé přímky téže soustavy se protnou, dvě přímky různých soustav se neprotnou. Podobně se dá dokázat, že na čtyřrozměrné regulární kvadrice se signaturou (3,3) leží dvě soustavy reálných rovin tak, že dvě různé roviny téže soustavy mají za průnik bod a že dvě roviny různých soustav buďto mají za průnik přímku nebo mají průnik prázdný. Tento fakt se v důsledku věty 115.5 jeví velmi názorně na kvadrice Z_4 : zde roviny jedné soustavy jsou Kleinovy obrazy bodů prostoru $\mathbf{P}_3$, roviny druhé soustavy pak Kleinovy obrazy rovin prostoru $\mathbf{P}_3$.

Druhým Kleinovým obrazem lineárního komplexu $\mathbf{C}_3$ nazveme množinu Γ_3 Kleinových obrazů všech přímek, ze kterých se skládá $\mathbf{C}_3$. Je-li (a) prvý Kleinův obraz $\mathbf{C}_3$, potom podle věty 115.3 Γ_3 je průnik kvadriky Z_4 s polární nadrovinou T_4 bodu (a) vzhledem ke čtyřrozměrné kvadrice Z_4 . Tudíž Γ_3 je trojrozměrná kvadrika; jestliže $\mathbf{C}_3$ je regulární, leží (a) mimo Z_4 (viz větu 115.2), takže podle věty 102.1 je Γ_3 regulární trojrozměrná kvadrika s (neorientovanou) signaturou (3,2); jestliže $\mathbf{C}_3$ je singulární s vrcholem p , potom podle věty 102.2 je Γ_3 singulární trojrozměrná kvadrika se signaturou (2,2), jejímž jediným singulárním bodem je Kleinův obraz přímky p .

Každé dva různé lineární komplexy $\mathbf{C}_3$ a $\mathbf{C}_3'$ určují *svazek lineárních komplexů*, složený z těch lineárních komplexů, jejichž prvé Kleinovy obrazy vyplní v prostoru K_5 přímku $\Phi = (a)(b)$, kde (a) , (b) jsou prvé Kleinovy obrazy lineárních komplexů $\mathbf{C}_3$ a $\mathbf{C}_3'$. Průnik obou lineárních komplexů $\mathbf{C}_3$ a $\mathbf{C}_3'$, který označíme L , se nazývá *lineární kongruence* v $\mathbf{P}_3$; každá přímka náležející do L náleží do všech lineárních komplexů svazku a L je průnikem kterýchkoli dvou lineárních komplexů svazku. Přímku Φ prostoru K_5 nazveme *prvým Kleinovým obrazem lineární kongruence* L .

Podle možných vzájemných poloh přímky Φ a kvadriky Z_4 máme čtyři různé druhy lineárních kongruencí L :

(1) Celá přímka Φ leží na kvadrice Z_4 ; L je *rozpadlá lineární kongruence.*

(2) Přímka Φ je sečnou kvadriky Z_4 ; L je *hyperbolická lineární kongruence.*

(3) Přímka Φ je nesečnou kvadriky Z_4 ; L je *eliptická lineární kongruence.*

(4) Přímka Φ je tečnou kvadriky Z_4, ale neleží celá na Z_4; L je *parabolická lineární kongruence.*

V případě (1) podle věty 115.4 existuje v $\mathbf{P}_3$ svazek přímek $\pi(A\ ;\ \varrho)$, kde A je bod a ϱ jím procházející rovina prostoru $\mathbf{P}_3$; L se skládá z těch přímek prostoru $\mathbf{P}_3$, která protnou každou přímku svazku $\pi(A\ ;\ \varrho)$. Je patrné, že L se rozpadá na dvě části, a to jednak na množinu všech přímek prostoru $\mathbf{P}_3$ procházejících bodem A, jednak na množinu všech přímek prostoru $\mathbf{P}_3$ ležících v rovině ϱ; průnikem obou částí je svazek $\pi(A\ ;\ \varrho)$. Obráceně obdržíme z každého svazku přímek $\pi(A\ ;\ \varrho)$ právě popsaným způsobem rozpadlou lineární kongruenci L.

V případě (2) můžeme předpokládat, že prvé Kleinovy obrazy lineárních komplexů $\mathbf{C}_3$ a $\mathbf{C}_3'$ jsou průsečíky přímky Φ se základní kvadrikou Z_4. Podle věty 115.2 jsou lineární komplexy $\mathbf{C}_3$, $\mathbf{C}_3'$ singulární, a jejich vrcholy jsou podle věty 115.4 dvě *neprotínající se* přímky p, q prostoru $\mathbf{P}_3$. Tedy hyperbolická kongruence L se skládá ze všech těch přímek prostoru $\mathbf{P}_3$, které protínají p i q; přímky p a q se jmenují *řídící přímky* hyperbolické lineární kongruence. Obráceně kterékoli dvě reálné neprotínající se přímky p, q prostoru $\mathbf{P}_3$ jsou řídícími přímkami určité hyperbolické kongruence.

V případě (3) eliptické lineární kongruence je vše stejné jako v předchozím případě až na to, že *řídící přímky* p, q jsou nyní dvě imaginární komplexně sdružené přímky bez společného bodu, tedy bez reálných bodů.

V případě (4) můžeme předpokládat, že Kleinův obraz (115.3) lineárního komplexu $\mathbf{C}_3$ je bod dotyku přímky Φ se základní kvadrikou Z_4. Kleinův obraz (115.9) lineárního komplexu $\mathbf{C}_3'$ leží mimo Z_4 v tečné nadrovině k Z_4 v bodě (115.3). Lineární komplex $\mathbf{C}_3$ je singulární; jeho vrcholem budiž přímka p prostoru $\mathbf{P}_3$, která je (v tomto případě jedinou) *řídící přímkou* parabolické lineární kongruence L. Lineární komplex $\mathbf{C}_3'$ je regulární a obsahuje přímku p; polární rovina vzhledem k $\mathbf{C}_3'$ libovolného bodu přímky p prochází přímkou p; jestliže každému bodu X přímky p přiřadíme jeho polární rovinu ψX vzhledem k $\mathbf{C}_3'$, dostaneme projektivní zobrazení ψ přímky p na svazek $\pi(p\ ;\ \mathbf{P}_3)$. Parabolická lineární kongruence L se skládá ze všech svazků přímek tvaru $\pi(X\ ,\ \psi X)$, kde X probíhá přímku p. Dokážeme, že také obráceně, zvolíme-li v $\mathbf{P}_3$ libovolně přímku p a projektivní zobrazení ψ

přímky p na svazek rovin $\pi(p , \mathsf{P}_3)$, potom jestliže X probíhá přímku p , všecky svazky přímek tvaru $\pi(X , \psi X)$ dohromady dávají parabolickou lineární kongruenci s řídící přímkou p . Za tím účelem zvolme (115.1) tak, aby body $\{A_0\}$, $\{A_1\}$ ležely na dané přímce p a aby obrazem libovolného bodu $\{\lambda A_0 + \mu A_1\}$ při projektivitě ψ byla rovina spojující přímku p s bodem $\{\lambda A_2 + \mu A_3\}$. Žádaná lineární kongruence bude vytvořena singulárním lineárním komplexem C_3 s vrcholem p a regulárním lineárním komplexem C_3' , zvolíme-li C_3' tak, aby obsahoval přímku p a aby libovolný bod X této přímky měl vzhledem k C_3' polární rovinu ψX . Je patrné, že alternující bilineární forma f , kde $f(X , Y) = x_0y_2 - x_2y_0 + x_3y_1 - x_1y_3$, má tuto vlastnost.

Druhým Kleinovým obrazem lineární kongruence L nazveme množinu Ω Kleinových obrazů všech přímek, ze kterých se skládá L . V důsledku věty 115.3 je Ω průnik kvadriky Z_4 s trojrozměrným lineárním podprostorem prostoru K_5 , který se skládá ze všech bodů vzhledem k Z_4 konjugovaných s každým bodem přímky Φ . Čtenář snadno odůvodní, že Ω je dvojrozměrná kvadrika, která v případě rozpadlé L se skládá ze dvou rovin protínajících se v přímce (jež je vrcholem uvažované kvadriky Ω), v případě hyperbolické L je Ω regulární se signaturou (2,2), v případě eliptické L je Ω regulární se signaturou (3,1), v případě parabolické L je Ω singulární s jednobodovým vrcholem a se signaturou (2,1).

VĚTA 115.6. *Budiž q polára přímky p vzhledem k regulárnímu lineárnímu komplexu C_3 . Jestliže p nenáleží do C_3 , je $p \neq q$ a spojnice Φ Kleinových obrazů přímek p , q prochází prvým Kleinovým obrazem lineárního komplexu C_3 . Jestliže p náleží do C_3 , je $p = q$ a tečna k Z_4 v Kleinově obrazu přímky p prochází prvým Kleinovým obrazem C_3 .*

DŮKAZ. V případě $p = q$ je věc jasná (viz větu 115.3). Budiž $p \neq q$ a budiž Φ spojnice Kleinových obrazů přímek p , q . Φ je prvým Kleinovým obrazem hyperbolické lineární kongruence L s řídícími přímkami p , q a je třeba pouze ukázat, že celá L je částí C_3 . To je však jasné, neboť L se skládá ze svazků přímek tvaru $\pi(A , \varrho)$, kde A je bod přímky p a rovina ϱ spojuje bod A s přímkou q , je tedy polární rovinou bodu A vzhledem k C_3 .

116. MÖBIUSŮV PROSTOR. Budiž dán eukleidovský prostor $\boldsymbol{E}_m$, budiž N jeho úběžná nadrovina a budiž $\boldsymbol{A}_{m-2}$ jeho absolutní kvadrika.

Nazveme $(m - 1)$-*sférou* a označme $\boldsymbol{S}_{m-1}$ takovou kvadriku projektivního prostoru $\bar{\boldsymbol{E}}_m$, která obsahuje jako část $(m - 2)$-rozměrnou kvadriku $\boldsymbol{A}_{m-2}$. Je rozeznávat dva případy. Předně máme takové $(m - 1)$-sféry $\boldsymbol{S}_{m-1}$, které neobsahují jako část celou úběžnou nadrovinu N; nazveme je *středové* $(m - 1)$-*sféry*. (Připomeňme si, že podle článku 107 pouze takové kvadriky prostoru $\bar{\boldsymbol{E}}_m$ počítáme mezi kvadriky prostoru $\boldsymbol{E}_m$, které neobsahují jako část celou nadrovinu N.) Podle článku 108 jsou tři druhy středových $\boldsymbol{S}_{m-1}$. Předně máme bodově reálné regulární $\boldsymbol{S}_{m-1}$, které jsme nazvali $(m - 1)$-rozměrnými koulemi a kterým nyní budeme říkat $(m - 1)$-*koule*; připomeňme si, že 1-koule jsou totožné s kružnicemi. Za druhé máme formálně reálné regulární $\boldsymbol{S}_{m-1}$, které nazveme stručné *formální* $\boldsymbol{S}_{m-1}$. Posléze patří mezi středové $\boldsymbol{S}_{m-1}$ ještě formálně reálné singulární $\boldsymbol{S}_{m-1}$ s jednobodovým vrcholem v konečnu, které nazveme stručně *bodové* $\boldsymbol{S}_{m-1}$. Vrcholem bodové $\boldsymbol{S}_{m-1}$ je e. bod A a obráceně každý e. bod A je vrcholem právě jedné bodové $\boldsymbol{S}_{m-1}$, která se skládá ze všech minimálních přímek prostoru $\boldsymbol{E}_m$ jdoucích bodem A, který je jediným jejím reálným bodem. Každá středová $\boldsymbol{S}_{m-1}$ má určitý e. bod A za svůj *střed*; je-li $\boldsymbol{S}_{m-1}$ regulární, je střed A pólem nadroviny N vzhledem k $\boldsymbol{S}_{m-1}$; je-li $\boldsymbol{S}_{m-1}$ bodová, je středem její vrchol.

Vedle středových $\boldsymbol{S}_{m-1}$ máme ještě takové $(m - 1)$-sféry, které obsahují jako část celou úběžnou nadrovinu N; sem patří mimo jiné dvojnásobná nadrovina N, kterou označíme N^2. Ostatní $\boldsymbol{S}_{m-1}$ obsahující N jako část nazveme *planární* $(m - 1)$-*sféry* a označíme je $\boldsymbol{T}_{m-1}$; množina všech bodů v konečnu každé $\boldsymbol{T}_{m-1}$, kterou označíme $[\boldsymbol{T}_{m-1}]$, je podle článku 96 (str. 108) nadrovina prostoru $\boldsymbol{E}_m$ a obráceně pro každou nadrovinu ϱ prostoru $\boldsymbol{E}_m$ máme právě jednu $\boldsymbol{T}_{m-1}$ tak, že $\varrho = [\boldsymbol{T}_{m-1}]$.

V článku 109 jsme poznali, že množina $\{\boldsymbol{Q}_{m-1}\}$ všech kvadrik projektivního prostoru $\bar{\boldsymbol{E}}_m$ tvoří projektivní prostor dimense $\frac{1}{2}m(m + 3)$, jehož ar. základem je množina všech kvadratických forem v $\bar{\boldsymbol{E}}_m$ (nulovou formu nevyjímajíc). Je patrné, že množina všech $(m - 1)$-sfér, kterou označíme M_{m+1}, tvoří lineární podprostor prostoru $\{\mathbf{Q}_{m-1}\}$, tedy opět projektivní prostor. Zvolme v $\mathbf{E}_m$ *kartézskou* soustavu souřadnic

$$\langle P\,;\, \mathbf{e}_1\,, \dots, \mathbf{e}_m \rangle\,. \tag{116.1}$$

Ar. body P, $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$ tvoří tedy ar. basi projektivního prostoru $\overline{\mathbf{E}}_m$ a pro libovolný ar. bod X položíme

$$X = x_0 P + x_1 \mathbf{e}_1 + \dots + x_m \mathbf{e}_m\,, \tag{116.2}$$

při čemž, jak víme, koeficient x_0 je nezávislý na volbě kartézské soustavy souřadnic (116.1). Prostor M_{m+1} má dimensi $m + 1$, neboť je patrné, že jeho ar. basí jsou kvadratické formy

$$g_0\,, g_1\,, \dots, g_m\,, g_{m+1}\,, \tag{116.3}$$

kde při označení (116.2) je

$$\begin{aligned} g_0(X) &= x_1^2 + \dots + x_m^2\,,\ g_{m+1}(X) = x_0^2\,, \\ g_r(X) &= -2x_0 x_r \quad \text{pro} \quad 1 \leqq r \leqq m\,. \end{aligned} \tag{116.4}$$

Kvadratická forma

$$F_2 = t_0 g_0 + t_1 g_1 + \dots + t_m g_m + t_{m+1} g_{m+1}\,, \tag{116.5}$$

kde nejsou všecka čísla

$$t_0\,, t_1\,, \dots, t_m\,, t_{m+1}\,, \tag{116.6}$$

jejichž souhrn stručně označíme (t), současně rovna nule, vytvořuje $(m - 1)$-sféru $\mathbf{S}_{m-1}$. Čísla (116.6) jsou souřadnicemi kvadratické formy F_2 a zároveň *homogenními souřadnicemi* $(m - 1)$*-sféry* $\mathbf{S}_{m-1}$ [odpovídajícími kartézské soustavě souřadnic (116.1) prostoru $\mathbf{E}_m$, ale jak ještě uvidíme, souřadnice t_0 je nezávislá na volbě soustavy (116.1)]. Je patrné, že pro N^2 a pro každou $\mathbf{T}_{m-1}$ je $t_0 = 0$, kdežto pro středové $\mathbf{S}_{m-1}$ je $t_0 \neq 0$; pro N^2 je také $t_1 = \dots = t_m = 0$ a ovšem $t_{m+1} \neq 0$.

Prostor M_{m+1} budeme nazývat *Möbiusovým prostorem.* Avšak místo abychom jako dosud body prostoru M_{m+1} úplně ztotožňovali s $(m - 1)$-sférami $\mathbf{S}_{m-1}$, bude účelné zaujmout obecnější stanovisko, že body prostoru M_{m+1} jsou jakékoli objekty, jen když tyto objekty jsou v určitém vzájemně jednoznačném vztahu s $(m - 1)$-sférami. Bod Möbiusova prostoru, který odpovídá dané $(m - 1)$-sféře $\mathbf{S}_{m-1}$, nazveme *prvým Möbiusovým obrazem* této $(m - 1)$-sféry. Prvý Möbiusův obraz $(m - 1)$-sféry N^2 nazveme *severním pólem* a označíme jej σ. Homogenní souřadnice (116.1) $(m - 1)$-sféry $\mathbf{S}_{m-1}$ jsou zároveň homogenními souřadnicemi jejího prvého Möbiusova obrazu; poznamenejme, že σ má všecky své homogenní souřadnice, až na poslední, rovny nule. Dále poznamenejme, že *budeme brát v úvahu pouze reálné body Möbiusova prostoru M_{m+1}*.

Položme nyní

$$\varphi_2(t) = t_1^2 + \ldots + t_m^2 - t_0 t_{m+1}. \tag{116.7}$$

Kvadratická forma φ_2 vytvořuje v prostoru M_{m+1} m-rozměrnou kvadriku, kterou nazveme *základní kvadrikou* prostoru M_{m+1} a označíme M'_m. Snadno se zjistí, že M'_m *je regulární eliptická kvadrika procházející severním pólem σ*, dále že je $\varphi_2(t) > 0$ pro body prostoru M_{m+1} vně M'_m, $\varphi_2(t) < 0$ pro body uvnitř M'_m. Snadno se dá dokázat, že kvadratická forma φ_2 je nezávislá na volbě kartézské soustavy souřadnic (116.1). To přenecháváme čtenáři, protože pro nás je důležitý pouze fakt, že základní kvadrika M'_m je nezávislá na volbě kartézské soustavy (116.1), a správnost tohoto faktu je bezprostředním důsledkem následující věty.

VĚTA 116.1. *Bod Möbiusova prostoru M_{m+1}, různý od severního pólu σ, je prvým Möbiusovým obrazem bodové $\mathbf{S}_{m-1}$, právě když leží na základní kvadrice M'_m.*

DůKAZ. Je-li $t_0 = 0$ a zároveň $\varphi_2(t) = 0$, plyne ze (116.7), že $t_1^2 + \ldots + t_m^2 = 0$ a ježto bereme v úvahu pouze reálné body prostoru M_{m+1}, musí být $t_1 = \ldots = t_m = 0$, t. j. severní pól σ je jediný bod na M'_m, pro který je $t_0 = 0$. Předpokládejme nyní, že ve (116.5) je $t_0 \neq 0$, takže $(m - 1)$-sféra $\mathbf{S}_{m-1}$ vytvořená kvadratickou formou F_2 je středová; máme dokázat, že $\varphi_2(t) = 0$, právě když $\mathbf{S}_{m-1}$ je bodová. Nyní ze (116.4) a (116.5) plyne snadno, že pro $x_0 = 1$ [t. j. jestliže ar. bod X ve (116.2) je e. bod] je

$$F_2(X) = t_0[(x_1 - a_1)^2 + \ldots + (x_m - a_m)^2] - \frac{1}{t_0} \cdot \varphi_2(t), \tag{116.8}$$

kde jsme položili

$$a_r = \frac{t_r}{t_0} \quad \text{pro} \quad 1 \leqq r \leqq m. \tag{116.9}$$

Ze (116.8) je patrné, že $\mathbf{S}_{m-1}$ je bodová, právě když $\varphi_2(t) = 0$, což se právě mělo dokázat. Zároveň jsme zjistili, že jsou-li (116.6) homogenní souřadnice středové $\mathbf{S}_{m-1}$, je její střed

$$A = P + a_1\mathbf{e}_1 + \ldots + a_m\mathbf{e}_m\,, \tag{116.10}$$

kde čísla a_r $(1 \leqq r \leqq m)$ jsou udána ve (116.9). Mimo to plyne ze (116.8), že $\varphi_2(t) > 0$ pro $(m — 1)$-kouli $\mathbf{S}_{m-1}$, $\varphi_2(t) < 0$ pro formální $\mathbf{S}_{m-1}$.

Nazveme *Möbiusovým obrazem e. bodu A* prvý Möbiusův obraz bodové $(m — 1)$-sféry $\mathbf{S}_{m-1}$, jejímž vrcholem je bod A. Větu (116.1) můžeme nyní vyslovit také takto: *Möbiusův obraz každého e. bodu A leží na M'_m a je různý od σ; obráceně každý od σ různý bod na M'_m je Möbiusovým obrazem určitého e. bodu A.* Mimo to ze (116.9) je patrné, že Möbiussův obraz e. bodu (116.10) má homogenní souřadnice

$$\begin{aligned} t_r &= a_r t_0 \quad \text{pro} \quad 1 \leqq r \leqq m\,, \\ t_{m+1} &= (a_1^2 + \ldots + a_m^2)t_0\,, \end{aligned} \tag{116.11}$$

kde číslo $t_0 \neq 0$ je libovolné. Poslední rovnice (116.11) je důsledkem toho, že $\varphi_2(t) = 0$.

V následujícím budiž M_σ tečná nadrovina k základní kvadrice M'_m v severním pólu σ. Ze (116.7) plyne, že čísla (116.6) jsou homogenními souřadnicemi bodu na M_σ, právě když $t_0 = 0$. Ježto M'_m je regulární eliptická kvadrika, leží všecky body nadroviny M_σ, vyjma bod dotyku σ, vně základní kvadriky M'_m.

Správnost následujících dvou vět je snadným důsledkem předcházejících vývodů.

VĚTA 116.2. *Body nadroviny M_σ různé od severního pólu σ jsou totožné s prvými Möbiusovými obrazy planárních $\mathbf{S}_{m-1}$.*

VĚTA 116.3. *Body prostoru M_{m+1}, které leží vně M'_m, ale mimo nadrovinu M_σ, jsou totožné s prvými Möbiusovými obrazy $(m — 1)$-koulí. Body prostoru M_{m+1}, které leží uvnitř M'_m, jsou totožné s prvými Möbiusovými obrazy formálních $(m — 1)$-sfér.*

Budiž $\mathbf{S}_{m-1}$ středová $(m — 1)$-sféra se středem A. Přiřadíme každému e. bodu X reálné číslo, které nazveme *mocností bodu X vzhledem k $\mathbf{S}_{m-1}$*. Jestliže předně $\mathbf{S}_{m-1}$ je bodová $(m — 1)$-sféra, je mocnost rovna $\overline{AX}^2$; je tedy rovna nule pro $X = A$, kladná pro

$X \neq A$. Je-li za druhé $\mathbf{S}_{m-1}$ $(m - 1)$-koule s poloměrem r, je mocnost rovna $\overline{AX}^2 - r^2$, je tedy rovna nule pro body X na $\mathbf{S}_{m-1}$, kladná pro body X vně $\mathbf{S}_{m-1}$, záporná pro body X uvnitř $\mathbf{S}_{m-1}$. Budiž posléze $\mathbf{S}_{m-1}$ formální $(m - 1)$-sféra; podle článku 107 (str. 157) je $\mathbf{S}_{m-1}$ středově sdružena s $(m - 1)$-koulí, jejíž poloměr budiž r; mocnost bodu X vzhledem k $\mathbf{S}_{m-1}$ je potom rovna $\overline{AX}^2 + r^2$, je tedy kladná pro všecky e. body X.

Jestliže kvadratická forma (116.5) vytvořuje středovou $(m - 1)$-sféru, takže $t_0 \neq 0$, dokáže se snadno na základě (116.8), že je-li X libovolný e. bod, je $F_2(X)$ rovné součinu čísla t_0 s mocností bodu X vzhledem k $\mathbf{S}_{m-1}$, takže hodnota t_0 je nezávislá na volbě kartézské soustavy souřadnic (116.1). Je-li $t_0 = 1$ ve (116.5), pravíme, že F_2 je *normální kvadratická forma* středové $(m - 1)$-sféry $\mathbf{S}_{m-1}$, a čísla (116.6) v případě $t_0 = 1$ nazveme *normálními souřadnicemi* této $(m - 1)$-sféry. Podle (116.9) jsou normální souřadnice t_r $(1 \leqq r \leqq m)$ středové $(m - 1)$-sféry $\mathbf{S}_{m-1}$ totožné s kartézskými souřadnicemi jejího středu a ze (116.7) a (116.9) se snadno odvodí, že $t_{m+1} = t_1^2 + \ldots + t_m^2 - \varepsilon r^2$, kde $\varepsilon r^2 = 0$ pro bodovou $\mathbf{S}_{m-1}$, pro $(m - 1)$-kouli $\mathbf{S}_{m-1}$ je $\varepsilon = 1$ a r znamená její poloměr, pro formální $\mathbf{S}_{m-1}$ je $\varepsilon = -1$ a r znamená poloměr $(m - 1)$-koule středově sdružené s $\mathbf{S}_{m-1}$.

V předcházejícím je obsažena

VĚTA 116.4. *Je-li F_2 normální kvadratická forma středové $(m - 1)$-sféry $\mathbf{S}_{m-1}$ a je-li X libovolný e. bod, je číslo $F_2(X)$ rovné mocnosti bodu X vzhledem k $\mathbf{S}_{m-1}$.*

VĚTA 116.5. *Je-li (t') Möbiusův obraz e. bodu A* (takže $(t') \neq \sigma$ leží na M'_m), *potom tečná nadrovina kvadriky M'_m v bodě (t') se skládá z bodu (t'), z prvých Möbiusových obrazů všech $(m - 1)$-koulí procházejících bodem A a z prvých Möbiusových obrazů všech těch $\mathbf{T}_{m-1}$, pro něž nadrovina $[\mathbf{T}_{m-1}]$ prochází bodem A.*

DŮKAZ. Tečná nadrovina kvadriky M'_m v bodě (t') se skládá ze všech těch bodů (t), pro něž je $\varphi(t, t') = 0$, kde φ je bilineární forma příslušná kvadratické formě φ_2, t. j.

$$(116.12) \qquad \varphi(t, t') = t_1 t_1' + \ldots + t_m t_m' - \tfrac{1}{2}(t_0 t_{m+1}' + t_{m+1} t_0') .$$

Je-li (t) prvý Möbiusův obraz $(m - 1)$-sféry $\mathbf{S}_{m-1}$ vytvořené kvadratickou formou (116.5), máme dokázat, že $\varphi(t, t') = 0$, právě když $F_2(t') = 0$. Podle (116.10) a (116.11) je však $t'_r = a_r t'_0$ pro $1 \leqq r \leqq m$, $t'_{m+1} = (a_1^2 + \ldots + a_m^2)t'_0$, kde $t'_0 \neq 0$; podle (116.2) je tedy

$$\varphi(t, t') = t'_0[a_1 t_1 + \ldots + a_m t_m - \tfrac{1}{2}(a_1^2 + \ldots + a_m^2)t_0 - \tfrac{1}{2}t_{m+1}],$$

takže podle (116.4), (116.5) a (116.10) je

$$-2\varphi(t, t') = F_2(t').$$

Druhým Möbiusovým obrazem $(m-1)$-*koule* $\mathbf{S}_{m-1}$ nazveme množinu Möbiusových obrazů všech bodů ležících na $\mathbf{S}_{m-1}$; *druhým Möbiusovým obrazem planární* $(m-1)$-sféry $\mathbf{T}_{m-1}$ nazveme množinu složenou ze severního pólu σ a z Möbiusových obrazů všech bodů nadroviny $[\mathbf{T}_{m-1}]$. Z vět 116.2 a 116.4 se snadno odvodí

VĚTA 116.6. *Je-li* $\mathbf{S}_{m-1}$ *buďto* $(m-1)$-*koule nebo planární* $(m-1)$-*sféra, potom druhý Möbiusův obraz* $(m-1)$-*sféry* $\mathbf{S}_{m-1}$ *je průnik* M'_m *s polární nadrovinou prvého Möbiusova obrazu* $(m-1)$-*sféra* $\mathbf{S}_{m-1}$. Ježto M'_m je m-rozměrná regulární eliptická kvadrika, je tedy (viz věty 102.1 a 116.2) uvažovaný druhý Möbiusův obraz $(m-1)$-*rozměrnou regulární eliptickou kvadrikou.*

117. SVAZKY KOULÍ. V tomto článku podržíme všecka označení zavedená v předcházejícím článku.

Ježto $(m-1)$-sféry jsou zvláštními případy kvadrik projektivního prostoru $\bar{\mathbf{E}}_m$, je *svazek* $(m-1)$-*sfér* zvláštním případem svazku kvadrik v $\bar{\mathbf{E}}_m$. Svazek $(m-1)$-sfér je tedy zřejmě množina takových $(m-1)$-sfér, jejichž prvé Möbiusovy obrazy vyplní přímku prostoru M_{m+1}, kterou označíme Φ. Svazek sám označíme Σ. Svazek Σ je určen dvěma libovolně zvolenými navzájem různými $(m-1)$-sférami $\mathbf{S}'_{m-1}$, $\mathbf{S}''_{m-1}$, vytvořenými dvěma lineárně nezávislými kvadratickými formami F'_2, F''_2 tvaru (116.5), jejichž souřadnice buďtež (t'), (t''). Týmiž symboly (t'), (t'') označíme také prvé Möbiusovy obrazy $(m-1)$-sféry $\mathbf{S}'_{m-1}$, $\mathbf{S}''_{m-1}$.

Svazek Σ nazveme *planární*, jestliže přímka Φ leží v nadrovině M_σ. Je třeba rozeznávat dva případy podle toho, zda přímka Φ prochází či neprochází severním pólem σ. Snadno se dokáže, že v prvém případě Σ obsahuje N^2 a mimo to ještě všecky planární $(m-1)$-sféry

$\mathbf{T}_{m-1}$ takové, že příslušné nadroviny $[\mathbf{T}_{m-1}]$ tvoří svazek nadrovin rovnoběžných s danou nadrovinou prostoru $\mathbf{E}_m$; ve druhém případě pak Σ se skládá ze všech planárních $(m — 1)$-sfér $\mathbf{T}_{m-1}$ takových, že příslušné nadroviny $[\mathbf{T}_{m-1}]$ tvoří svazek nadrovin prvního druhu prostoru $\mathbf{E}_m$, t. j. soustavu všech nadrovin procházejících určitým lineárním podprostorem $\mathbf{E}_{m-2}$ prostoru $\mathbf{E}_m$ (pro $m = 2$ určitým bodem roviny $\mathbf{E}_2$).

Jestliže přímka Φ neleží v nadrovině M_σ, potom, jak uvidíme, svazek Σ obsahuje nekonečně mnoho $(m — 1)$-koulí a proto říkáme, že Σ je *svazek* $(m — 1)$-*koulí*. Takový svazek Σ nazveme: (1) *hyperbolický*, je-li Φ nesečnou pro M'_m; (2) *eliptický*, je-li Φ sečnou pro M'_m; (3) *parabolický*, je-li Φ tečnou pro M'_m.

Počněme tím zvláštním případem eliptického svazku $(m$-$1)$-koulí, který dostaneme, jestliže přímka Φ prochází severním pólem σ; ježto Φ je sečnou pro M'_m, má Φ s M'_m mimo σ ještě jeden další společný bod, který je Möbiusovým obrazem e. bodu A. Můžeme předpokládat, že $\mathbf{S}'_{m-1}$ je bodová $(m — 1)$-sféra s vrcholem A a že $\mathbf{S}''_{m-1} = N^2$. Dále můžeme předpokládat, že F'_2 je normální kvadratická forma pro $\mathbf{S}'_{m-1}$, takže $F'_2(X) = \overline{AX}^2$ pro každý e. bod X, dále pak, že $F''_2(X) = 1$ pro každý e. bod X. Potom Σ obsahuje mimo N^2 ještě právě ty $(m — 1)$-sféry, jimž přísluší normální kvadratická forma $F_2 = F'_2 - \lambda F''_2$. Je-li X e. bod, je $F_2(X) = \overline{AX}^2 — \lambda$. Z toho je patrné, že Σ obsahuje mimo N^2 ještě právě všecky středové $(m — 1)$-sféry se středem A. Proto náš Σ nazveme *soustředným svazkem* $(m — 1)$-*koulí* se středem A.

Jestliže svazek Σ $(m — 1)$-koulí není soustředný, potom přímka Φ má s nadrovinou M_σ společný právě jeden bod τ, který je různý od σ. Do Σ náleží planární $(m — 1)$-sféra $\mathbf{T}_{m-1}$, jejímž prvým Möbiusovým obrazem je bod τ; nadrovinu $[\mathbf{T}_{m-1}]$ prostoru $\mathbf{E}_m$ označme krátce ϱ a nazveme ji *potenční nadrovinou* svazku Σ; pro $m = 2$ je ϱ přímka roviny $\mathbf{E}_2$, která se často také nazývá *chordálou* svazku kružnic Σ.

Ježto M'_m je regulární eliptická kvadrika prostoru M_{m+1}, leží přímka Φ v případě hyperbolického svazku Σ celá vně M'_m, v případě parabolického svazku pak má Φ s M'_m společný právě jeden bod a jinak je celá vně M'_m; posléze v případě eliptického svazku má Φ

s M'_m společné dva různé reálné body, které dělí Φ na dva intervaly, z nichž jeden leží vně a druhý uvnitř M'_m. Z toho plyne podle věty 116.3, že hyperbolický svazek Σ obsahuje mimo jedinou planární $(m - 1)$-sféru $\boldsymbol{T}_{m-1}$ ještě pouze $(m - 1)$-koule, parabolický svazek Σ obsahuje mimo $\boldsymbol{T}_{m-1}$ právě jednu bodovou $(m - 1)$-sféru a jinak už jen $(m - 1)$-koule. Posléze eliptický svazek Σ obsahuje mimo $\boldsymbol{T}_{m-1}$ právě dvě bodové $(m - 1)$-sféry a vedle toho ještě jednak nekonečně mnoho $(m - 1)$-koulí, jednak nekonečně mnoho formálních $(m - 1)$-sfér. V celku tedy každý neplanární svazek Σ obsahuje nekonečně mnoho $(m - 1)$-koulí, jak bylo výše už ohlášeno. (Planární svazky i soustředné svazky jsou v následujícím vyloučeny.)

Můžeme předpokládat, že F'_2 je normální kvadratická forma středové $(m - 1)$-sféry $\boldsymbol{S}'_{m-1}$ a že F''_2 vytvořuje planární $(m - 1)$-sféru $\boldsymbol{T}_{m-1}$. Je tedy $t'_0 = 1$, $t''_0 = 0$; mimo to se snadno dokáže, že je-li $\boldsymbol{u} = (t''_1, \ldots, t''_m)$, je $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{o}$ a směr $\{\boldsymbol{u}\}$ je kolmý na potenční nadrovinu ϱ. Libovolná $(m - 1)$-sféra $\boldsymbol{S}_{m-1}$ svazku Σ je vytvořena normální kvadratickou formou $F_2 = F'_2 + \lambda F''_2$ se souřadnicemi $(t) = (t' + \lambda t'')$. Je $t_0 = 1$, takže ze (116.9) plyne, že střed $(m - 1)$-sféry $\boldsymbol{S}_{m-1}$ má v kartézské soustavě (116.1) souřadnice $t_r = t'_r + \lambda t''_r$ $(1 \leqq r \leqq m)$. Je-li tedy A' střed $\boldsymbol{S}'_{m-1}$, má $\boldsymbol{S}_{m-1}$ střed $A' + \lambda\boldsymbol{u}$. Tedy *středy všech středových* $\boldsymbol{S}_{m-1}$ *svazku* Σ *vyplní přímkou kolmou na potenční nadrovinu* ϱ. Tato přímka se jmenuje *středná* svazku Σ; každý její bod je středem právě jedné $\boldsymbol{S}_{m-1}$ svazku Σ. Mocnost e. bodu X vzhledem k $\boldsymbol{S}_{m-1}$ je rovná

$$F_2(X) = F'_2(X) + \lambda F''_2(X)\,.$$

Jestliže X leží v potenční nadrovině ϱ, je $F''_2(X) = 0$ a mocnost $F_2(X)$ je nezávislá na λ; jestliže však X leží mimo ϱ, je $F''_2(X) \neq 0$ a X nemůže mít touž mocnost vzhledem ke dvěma různým středovým $\boldsymbol{S}_{m-1}$ svazku Σ. Tedy *potenční nadrovina* ϱ *je množina těch e. bodů* X, *které mají touž mocnost vzhledem ke všem středovým* $\boldsymbol{S}_{m-1}$ *svazku* Σ. Mimo to, jestliže e. bod X neleží v potenční nadrovině ϱ, tu, je-li dáno jakékoli reálné číslo c, existuje právě jedna středová $\boldsymbol{S}_{m-1}$ svazku Σ, vzhledem k níž má e. bod X danou mocnost c.

Ježto $F_2 = F'_2 + \lambda F''_2$, je patrné, že jestliže e. bod X nadroviny ϱ náleží do *jedné* středové $\boldsymbol{S}_{m-1}$ svazku Σ, náleží X do *každé* středové

$\mathbf{S}_{m-1}$ svazku Σ, kdežto e. bod X, který neleží v ϱ, náleží do *právě jedné* středové $\mathbf{S}_{m-1}$ svazku Σ. Při další diskusi je účelné (a podle předchozího také přípustné) předpokládat, že střed $(m-1)$-sféry $\mathbf{S}'_{m-1}$, která spolu s planární $(m-1)$-sférou $\mathbf{T}_{m-1}$ určuje náš svazek Σ, leží v potenční nadrovině ϱ. Kartézskou soustavu souřadnic (116.1) můžeme volit tak, že jejím počátkem P je střed $(m-1)$-sféry $\mathbf{S}'_{m-1}$ a mimo to tak, že $\varrho = \{P; \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m\}$. Potom pro každý e. bod $X = P + x_1\mathbf{u}_1 + \ldots + x_m\mathbf{u}_m$ je

$$F'_2(X) = x_1^2 + \ldots + x_m^2 - c,$$

kde $c = 0$, je-li $\mathbf{S}'_{m-1}$ bodová $(m-1)$-sféra, $c = r^2$, je-li $\mathbf{S}'_{m-1}$ $(m-1)$-koule s poloměrem $r > 0$, $c = -r^2$, je-li $\mathbf{S}'_{m-1}$ formální $(m-1)$-sféra středově sdružená s $(m-1)$-koulí poloměru $r > 0$. Mimo to je $F''_2(X) = ax_1$, $a \neq 0$; bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $a = -2$. Libovolná $(m-1)$-sféra svazku Σ je vytvořena normální kvadratickou formou $F_2 = F'_2 + \lambda F''_2$, kde tedy

$$F_2(X) = (x_1 - \lambda)^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2 - (\lambda^2 + c).$$

Je-li nejprve $c = r^2 > 0$, máme pro každé λ $(m-1)$-kouli $\mathbf{S}_{m-1}$ se středem $P + \lambda\mathbf{u}_1$ a s poloměrem $\sqrt{\lambda^2 + r^2}$; Σ je hyperbolický svazek, do něhož mimo $\mathbf{T}_{m-1}$ náleží ještě právě ty $(m-1)$-koule, které protnou nadrovinu ϱ v $(m-2)$-kouli se středem P a poloměrem r (pro $m = 2$ je 0-koulí se středem P a poloměrem $r > 0$ rozumět dvojici reálných bodů A, B se středem P, pro kterou $\overline{AB} = 2r$). Obráceně se snadno dokáže, že je-li dána nadrovina ϱ a v ní $(m-2)$-koule $\mathbf{S}_{m-2}$, potom všecky ty $(m-1)$-koule, které procházejí danou $(m-2)$-koulí, spolu s tou planární $(m-1)$-sférou $\mathbf{T}_{m-1}$, pro kterou $[\mathbf{T}_{m-1}] = \varrho$, tvoří hyperbolický svazek $(m-1)$-koulí.

Je-li za druhé $c = 0$, máme pro $\lambda = 0$ bodovou $(m-1)$-sféru se středem P a pro každé $\lambda \neq 0$ $(m-1)$-kouli se středem $P + \lambda\mathbf{u}_1$ a s poloměrem $|\lambda|$; Σ je parabolický svazek, do něhož mimo $\mathbf{T}_{m-1}$ a mimo zmíněnou bodovou $(m-1)$-sféru náležejí ještě právě ty $(m-1)$-koule, které procházejí bodem P a v tomto bodě mají tečnou nadrovinu ϱ. Obráceně se snadno dokáže, že je-li dána nadrovina ϱ a v ní bod P, potom všecky ty $(m-1)$-koule, které procházejí bodem P a mají zde tečnou nadrovinu ϱ, spolu s bodovou $(m-1)$-sférou středu P a s tou planární $(m-1)$-sférou, pro kterou $[\mathbf{T}_{m-1}] = \varrho$, tvoří parabolický svazek $(m-1)$-koulí.

Je-li posléze $c = -r^2 < 0$, potom pro $|\lambda| = r$ dostáváme dvě bodové $(m-1)$-sféry se středy $P_1 = P + \lambda \mathbf{u}_1$, $P_2 = P - \lambda \mathbf{u}_1$; nadrovina ϱ je nadrovinou souměrnosti úsečky P_1P_2. Pro $|\lambda| > r$ dostáváme $(m-1)$-kouli se středem $P + \lambda \mathbf{u}_1$ a s poloměrem $\sqrt{\lambda^2 - r^2}$. Pro $|\lambda| < r$ dostáváme formální $(m-1)$-sféru se středem $P + \lambda \mathbf{u}_1$, s níž je středově sdružená $(m-1)$-koule s týmž středem a s poloměrem $\sqrt{r^2 - \lambda^2}$. Σ je v uvažovaném případě eliptický svazek $(m-1)$-koulí. Obráceně je patrné, že jsou-li dány dva různé e. body P_1, P_2, existuje právě jeden svazek Σ $(m-1)$-koulí, do kterého náležejí obě bodové $(m-1)$-sféry se středy P_1, P_2; svazek Σ je zřejmě eliptický. Jsou-li F'_2, F''_2 normální kvadratické formy těchto bodových $(m-1)$-sfér, je pro každý e. bod X

$$F'_2(X) = \overline{P_1X}^2, \qquad F''_2(X) = \overline{P_2X}^2.$$

Do svazku Σ náleží planární $(m-1)$-sféra $\mathbf{T}_{m-1}$, pro kterou $[\mathbf{T}_{m-1}] = \varrho$ je nadrovinou souměrnosti úsečky P_1P_2; $\mathbf{T}_{m-1}$ je vytvořena kvadratickou formou $F'_2 - F''_2$. Každým bodem A prostoru $\mathbf{E}_m$, různým od P_1 i od P_2, který leží mimo nadrovinu ϱ (takže $\overline{P_1A} \neq 0$, $\overline{P_2A} \neq 0$, $\overline{P_1A} \neq \overline{P_2A}$), prochází (právě jedna) $(m-1)$-koule $\mathbf{S}_{m-1}$ svazku Σ, vytvořená kvadratickou formou $F_2 = F'_2 - \lambda F''_2$, kde číslo λ se určí z rovnice $F'_2(A) = \lambda F''_2(A)$ neboli $\overline{P_1A}^2 = \lambda \,.\, \overline{P_2A}^2$. Je $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq 1$ a číslo $\lambda = c^2$ $(c > 0)$ je kladné; $(m-1)$-koule $\mathbf{S}_{m-1}$ je množina těch bodů X, pro které $\overline{P_1X} : \overline{P_2X} = c$. Mimo popsané už $(m-1)$-sféry obsahuje náš svazek Σ ještě nekonečně mnoho formálních $(m-1)$-sfér $\mathbf{S}_{m-1}$. Střed Q takové $\mathbf{S}_{m-1}$ leží uvnitř úsečky P_1P_2, je však různý od středu P dvojice P_1, P_2. Je-li K $(m-1)$-koule se středem P, která prochází bodem P_1 (a tedy i bodem P_2), potom se snadno dokáže, že $(m-1)$-koule středově sdružená s uvažovanou $(m-1)$-koulí $\mathbf{S}_{m-1}$ je jednoznačně určena tím, že má střed Q a že nadrovina vedená bodem Q kolmo na přímku P_1P_2 ji protne v téže $(m-2)$-kouli, ve které protne K.

Pro $m = 2$ věta, že jsou-li dány v rovině $\mathbf{E}_2$ dva různé body P_1, P_2 a je-li dáno kladné číslo $c \neq 1$, potom množina všech těch e. bodů X, pro něž $\overline{P_1X} : \overline{P_2X} = c$, je kružnice, byla známa už slavnému starověkému geometrovi Apolloniovi z Pergy.

118. POKRAČOVÁNÍ O KOULÍCH. Budiž $1 \leqq d \leqq m$. *Lineární soustava* $(m - 1)$-*sfér* dimense d je množina Σ_d všech takových $(m-1)$-sfér, jejichž prvé Möbiusovy obrazy vyplní d-rozměrný lineární podprostor Φ_d prostoru M_{m+1}. Σ_d nazveme *planární*, jestliže Φ_d leží v nadrovině M_σ; planární Σ_m se skládá z N^2 a ze všech planárních $(m - 1)$-sfér. Je-li $d < m$, potom jestliže Φ_d neprochází bodem σ, skládá se Σ_d z těch planárních $(m - 1)$-sfér $\boldsymbol{T}_{m-1}$, pro něž nadroviny $[\boldsymbol{T}_{m-1}]$ tvoří d-rozměrnou lineární soustavu prvního druhu ve smyslu článku 48; jestliže Φ_d prochází bodem σ, potom Σ_d obsahuje N^2 a mimo to ty $\boldsymbol{T}_{m-1}$, pro něž nadroviny $[\boldsymbol{T}_{m-1}]$ tvoří d-rozměrnou lineární soustavu nadrovin druhého druhu.

Jestliže Φ_d neleží v nadrovině M_σ, potom Σ_d obsahuje nekonečně mnoho $(m - 1)$-koulí a pravíme, že Σ_d je *lineární soustava* $(m - 1)$-*koulí* dimense d. Vedle případu $d = 1$ probraného v předchozím článku je nejdůležitější případ $d = m$. Jediný planární Σ_m jsme už popsali výše; není-li Σ_m planární, pravíme, že Σ_m je *trs* $(m - 1)$-*koulí*. Příslušná Φ_m je nadrovina prostoru M_{m+1} různá od M_σ; budiž φ pól nadroviny Φ_m vzhledem k M'_m. Bod φ je prvým Möbiusovým obrazem určité $(m - 1)$-sféry, kterou nazveme *základní* $(m - 1)$-*sférou* trsu. Jsou-li (t') homogenní souřadnice bodu φ (a tedy také homogenní souřadnice základní $(m - 1)$-sféry), potom Σ_m se skládá z těch $(m - 1)$-sfér (t), pro něž platí $\varphi(t, t') = 0$ neboli [viz (116.12)]

$$(118.1) \qquad 2(t_1 t'_1 + \ldots + t_m t'_m) = t_0 t'_{m+1} + t_{m+1} t'_0 .$$

Jsou čtyři možné případy, jejichž geometrický popis se snadno odůvodní na základě (118.1) třeba tak, že napřed vhodně specialisujeme kartézskou soustavu souřadnic (116.1). Počneme případem planární základní $(m - 1)$-sféry $\boldsymbol{T}'_{m-1}$ a položme $[\boldsymbol{T}'_{m-1}] = \varrho$; Σ_m se skládá z N^2, ze všech těch planárních $(m - 1)$-sfér $\boldsymbol{T}_{m-1}$, pro něž nadrovina $[\boldsymbol{T}_{m-1}]$ je kolmá na ϱ a ze všech těch středových $(m - 1)$-sfér, jejichž středy leží v ϱ. Jestliže za druhé základní $(m - 1)$-sféra je bodová $\boldsymbol{S}_{m-1}$ se středem A, potom Σ_m se skládá ze všech planárních $\boldsymbol{T}_{m-1}$, pro něž nadrovina ϱ prochází bodem A, z jediné bodové $(m - 1)$-sféry, jíž je samotná základní $(m - 1)$-sféra $\boldsymbol{S}_{m-1}$, a ze všech $(m - 1)$-koulí procházejících bodem A. Jestliže posléze základní $(m - 1)$-sféra $\boldsymbol{S}'_{m-1}$ je regulární středová $(m - 1)$-sféra se středem A, položme

$c = r^2 > 0$, je-li S'_{m-1} $(m - 1)$-koule s poloměrem r, a položme $c = -r^2 < 0$, je-li S'_{m-1} formální $(m - 1)$-sféra středově sdružená s $(m - 1)$-koulí poloměru r. V tomto případě Σ_m se skládá jednak ze všech planárních $(m - 1)$-sfér T_{m-1}, pro něž nadrovina $[T_{m-1}]$ prochází bodem A, jednak ze všech těch středových S_{m-1}, vzhledem k nimž má bod A mocnost rovnou číslu c. V případě $c < 0$ všecky tyto středové S_{m-1} jsou $(m - 1)$-koulemi, kdežto v případě $c > 0$ do Σ_m náležejí vedle $(m - 1)$-koulí také bodové i formální S_{m-1}, při čemž bodová S_{m-1} se středem X náleží do Σ_m, právě když bod X leží na $(m - 1)$-kouli S'_{m-1}.

O dvou $(m - 1)$-koulích S_{m-1}, S'_{m-1} pravíme, že jsou navzájem *orthogonální*, jestliže jejich prvé Möbiusovy obrazy jsou navzájem konjugované vzhledem k M'_m; každá z nich náleží tedy do trsu $(m-1)$-koulí, jehož základní $(m - 1)$-sférou je druhá z nich. Snadno se dokáže, že dvě navzájem orthogonální $(m - 1)$-koule S_{m-1}, S'_{m-1} jsou navzájem různé a určují hyperbolický svazek $(m - 1)$-koulí, takže mají v případě $m = 2$ dva společné body a v případě $m \geqq 3$ nekonečně mnoho společných bodů; jestliže pak je A společný bod dvou $(m - 1)$-koulí S_{m-1}, S'_{m-1}, jsou tyto navzájem orthogonální, právě když jejich tečné nadroviny v bodě A stojí na sobě kolmo.

Lineární systémy Σ_d $(1 < d < m)$ nebudeme probírat.

Budiž nyní dána v E_m určitá regulární středová $(m - 1)$-sféra S_{m-1}, kterou nazveme *základní $(m - 1)$-sférou inverse*, a budiž A její střed, který nazveme *pólem inverse*. Budiž α Möbiusův obraz bodu A. Budiž $E_m - A$ množina, která vznikne z E_m odstraněním bodu A. Budeme definovat transformaci j množiny $E_m - A$, kterou nazveme *inversí vzhledem k* S_{m-1}. Za tím účelem budiž β prvý Möbiusův obraz $(m - 1)$-sféry S_{m-1} a Ψ polární nadrovina bodu β vzhledem k M'_m. Bod β neleží ani na M'_m, ani v M_σ a proto nadrovina Ψ neprochází ani bodem α, ani bodem σ. Snadno se dokáže, že homologie H prostoru M_{m+1} se středem β, s osovou nadrovinou Ψ a s invariantem -1 převádí kvadriku M'_m v samu sebe, při čemž $H\sigma = \alpha$ je Möbiusův obraz bodu A a obráceně $H\alpha = \sigma$. Slíbená definice inverse j spočívá v tom, že je-li X bod množiny $E_m - A$ a ξ jeho Möbiusův obraz, je $j(X)$ ten bod množiny $E_m - A$, jehož Möbiusovým obrazem je bod $H\xi$.

Základní vlastnosti inverse plynou přímo z její definice. Především je patrné, že je-li $j(X) = Y$, je také obráceně $j(Y) = X$. Je-li $\boldsymbol{S}_{m-1}$ $(m - 1)$-koulí, potom každý její bod je samodružný při j a obráceně každý při j samodružný bod leží na $\boldsymbol{S}_{m-1}$; je-li X uvnitř $\boldsymbol{S}_{m-1}$, je $j(X)$ vně; je-li X vně $\boldsymbol{S}_{m-1}$, je $j(X)$ uvnitř. Je-li $\boldsymbol{S}_{m-1}$ formální $(m - 1)$-sféra, nemá j samodružných bodů. Je-li ϱ nadrovina procházející bodem A, je $\varrho - A$ samodružná množina při j. Je-li ϱ nadrovina neprocházející bodem A, potom množina $j(\varrho)$ spolu s bodem A tvoří $(m - 1)$-kouli; obráceně, jestliže $(m - 1)$-koule $\boldsymbol{S}'_{m-1}$ prochází bodem A, potom $j(\boldsymbol{S}'_{m-1} - A)$ je nadrovina neprocházející bodem A. Je-li $\boldsymbol{S}'_{m-1}$ $(m - 1)$-koule neprocházející bodem A, potom totéž platí o $j(\boldsymbol{S}'_{m-1})$; jestliže $\boldsymbol{S}'_{m-1}$ náleží do trsu $(m - 1)$-koulí se základní $(m - 1)$-sférou $\boldsymbol{S}_{m-1}$, je $j(\boldsymbol{S}'_{m-1}) = \boldsymbol{S}'_{m-1}$.

Jestliže bod $X \neq A$ neleží na $\boldsymbol{S}_{m-1}$ a je-li $Y = j(X)$, plyne z článku 117, že bodová $(m - 1)$-sféra se středem X, bodová $(m - 1)$-sféra se středem Y a $(m - 1)$-sféra $\boldsymbol{S}_{m-1}$ náležejí do téhož (eliptického) svazku $(m - 1)$-koulí, jehož střednou je přímka XY, která tudíž obsahuje též bod A, t. j. bod $Y = j(X)$ leží na přímce AX, kterou označíme p. Nyní svazek $(m - 1)$-koulí je zvláštním případem svazku kvadrik, takže podle věty 109.4 jsou body X, Y dvojnými body involuce na přímce p, do které náleží dvojice B_1, B_2 průsečíků přímky p a $\boldsymbol{S}_{m-1}$. To však znamená, že body B_1, B_2 jsou harmonicky sdruženy vzhledem k bodům X, Y a to lze vyslovit tak, že dvojice X, Y náleží do involuce φ na přímce p, jejímiž dvojnými body jsou B_1, B_2. Je-li však $\boldsymbol{u}$ jednotkový vektor na přímce p, je zřejmě: (1) $B_1 = A + r\boldsymbol{u}$, $B_2 = A - r\boldsymbol{u}$, je-li $\boldsymbol{S}_{m-1}$ $(m - 1)$-koule s poloměrem r, (2) $B_1 = A + \mathrm{i}r\boldsymbol{u}$, $B_2 = A - \mathrm{i}r\boldsymbol{u}$, je-li $\boldsymbol{S}_{m-1}$ formální $(m - 1)$-sféra středově sdružená s $(m - 1)$-koulí poloměru r. Z toho snadno plyne (viz konec článku 87), že

$$\overrightarrow{AX} \cdot \overrightarrow{AY} = \begin{cases} r^2 & \text{v případě (1)}, \\ -r^2 & \text{v případě (2)}. \end{cases} \tag{118.2}$$

Ve (118.2) je obsažena elementární definice inverse. Další vlastnosti inverse nebudeme probírat.

PŘEHLED POJMŮ

V následujícím znamená n^k str. n, řádek k shora: n_k str. n, řádek k zdola.

PŘEHLED ZNAČEK

OBSAH

KRUH

svazek

42

AKADEMIK EDUARD ČECH

ZÁKLADY ANALYTICKÉ GEOMETRIE

II

Vydalo Přírodovědecké vydavatelství, Praha 1952. Hlavní redaktor Dr Milan Skalník, redaktorka Zora Knichalová, literární redaktorka Marta Střídová, technický redaktor Frant. Končický. — Z nové sazby písmem Extended vytiskla Státní tiskárna, n. p., závod 05 (Prometheus), Praha 8. — 1. vydání, náklad 3 300 výtisků 1—3 300 — 30103/2 — 55720(51)8(III)1 — 206 — 1% — Sazba 2. VII. 1952, tisk 6. XII. 1952. — 14 plánovacích archů, 10,63 autorských archů, 10,86 vydavatelských archů, 224 stran, 6 obrazců.

Papír 222-02, 86 × 122, 70 g.

Cena brož 120 Kčs.