Willi Törnig

Monoton konvergente Iterationsprozesse zur Lösung diskretisierter nichtlinearer Randwertprobleme

In: Michal Greguš (ed.): Equadiff 5, Proceedings of the Fifth Czechoslovak Conference on Differential Equations and Their Applications held in Bratislava, August 24-28, 1981. BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1982. Teubner-Texte zur Mathematik, Bd. 47. pp. 344--347.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/702318

MONOTON KONVERGENTE ITERATIONSPROZESSE ZUR LÖSUNG DISKRETISIERTER NICHTLINEARER RANDWERTPROBLEME

W. Törnig
Darmstadt, Bundesrepublik Deutschland

1. Einführung

Die numerische Lösung von nichtlinearen Rand- oder Anfangs-Randwertproblemen mit der Methode der finiten Elemente oder mit Differenzenverfahren führt auf große schwach besetzte nichtlineare Gleichungssysteme. Ihre schnelle und zuverlässige iterative Lösung bereitet aus mehreren Gründen oft auch heute noch Schwierigkeiten. Diese nehmen naturgemäß mit der Größe des Gleichungssystems zu.

Die Zuverlässigkeit der iterativen Verfahren läßt sich entscheidend verbessern, wenn komponentenweise monoton einschließend iteriert werden kann. Ein solches Verfahren ist nicht nur jederzeit kontrollierbar, man erhält auch bei lokaler Konvergenz Kriterien für die richtige Wahl der Startnäherungen.

Untersuchungen über monotone Iterationen finden sich u.a. in [2], [3], [4], [5]. Die folgenden Ergebnisse stellen Verallgemeinerungen unter schwächeren Voraussetzungen entsprechender Resultate in [5] dar.

2. Eine Klasse von monoton einschließend konvergenten Verfahren

Es sei $F : R^N \to R^N$, und es soll das nichtlineare Gleichungssystem

(2.1) $\qquad Fz = 0,\ Fz := (F_1(z),\dots,F_N(z))^T$

gelöst werden. Wir setzen wie üblich $x \leq y$ für $x_i \leq y_i$, $i = 1,\dots,N$ und

(2.2) $\qquad B_o := \langle x^{(o)}, y^{(o)} \rangle := \{ z \in R^N \mid x^{(o)} \leq z \leq y^{(o)} \}$,

(2.3) $\qquad z^{(k)i} := (z_1^{(k+1)},\dots,z_{i-1}^{(k+1)}, z_i^{(k)},\dots,z_N^{(k)})^T,\ i = 1,\dots,N;\ k = 0,1,\dots$

Satz 1

$F : R^N \to R^N$, $F \in C^1(B_o)$, sei außerdiagonal antiton und strikt diagonal isoton, und es gebe $x^{(o)}$, $y^{(o)} \in R^N$, $x^{(o)} \leq y^{(o)}$, mit $Fx^{(o)} \leq 0 \leq Fy^{(o)}$. Ferner seien $P_i^k(x) > 0$, $i = 1,\dots,N$; $k = 0,1,\dots$; $P_i^k : B_o \to R^1$; $P_i^k \in C^o(B_o)$, vorgegebene Funktionen.

Dann gibt es positive Zahlen ω_{ik}, $\bar{\omega}_{ik}$, so daß die durch

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} - \omega_{ik} P_i^k(x^{(k)i}) F_i(x^{(k)i}),$$

(2.4) $$y_i^{(k+1)} = y_i^{(k)} - \bar{\omega}_{ik} P_i^k(y^{(k)i}) F_i(y^{(k)i}),$$

$$i = 1,\dots,N;\ k = 0,1,\dots$$

definierten Iterationsfolgen $\{x^{(k)}\}$, $\{y^{(k)}\}$ die Eigenschaften haben:

$$x^{(k)} \uparrow x^*,\ y^{(k)} \downarrow y^*,\ x^* \le y^*,\ Fx^* = Fy^* = 0.$$

Ergänzungen

a) Für die Größen ω_{ik}, $\bar{\omega}_{ik}$ gilt (mit $\partial_i F_i(z) := (\partial F_i/\partial x_i)_{(z)}$)

$$0 < \omega_{ik}, \bar{\omega}_{ik} \le \{\max_{z\in B_0} P_i^k(z) \cdot \max_{z\in B_0} \partial_i F_i(z)\}^{-1}.$$

b) Ist $F := (\partial_1 F_1,\dots,\partial_N F_N)^T$ in B_0 diagonal isoton, so gilt

$$0 < \omega_{ik}, \bar{\omega}_{ik} \le \{\max_{z\in B_0} (P_i^k(z)\partial_i F_i(z))\}^{-1}.$$

(F ist z.B. diagonal isoton, wenn $F \in C^2(B_0)$ und $\partial_i^2 F_i \ge 0$, $i = 1,\dots,N$.)

c) Ist F invers isoton, also mit den Voraussetzungen des Satzes 1 eine M-Funktion, so folgt aus $Fx^{(o)} \le 0 \le Fy^{(o)}$ stets $x^{(o)} \le y^{(o)}$. Die Startnäherungen $x^{(o)}, y^{(o)}$ lassen sich dann ohne großen Aufwand berechnen.

d) Die Verfahren lassen einfache Mehrgittertechniken zu.

Beispiele

1. SOR-Newton-Verfahren: Man setze $P_i^k(z) := (\partial_i F_i(z))^{-1}$. Ist ∂F in B_0 diagonal isoton, so gilt nach b)

$$0 < \omega_{ik}, \bar{\omega}_{ik} \le 1,$$

d.h., das Gauss-Seidel-Verfahren ist in diesem Falle unter den genannten Voraussetzungen monoton einschließend konvergent.

2. Die Diskretisierung quasilinearer Randwertprobleme liefert Gleichungssysteme der Gestalt $Fx := A(x)x - b(x) = 0$ mit der symmetrischen und positiv definiten Matrix $A(x) := (A_{ij}(x))$. Man kann dann etwa $P_i^k(z) := (A_{ii}(z))^{-1}$ wählen.

3. Anwendungen

3.1

Ist die Funktionalmatrix F' in jedem Punkt von B_0 eine M-Matrix, so ist F dort eine M-Funktion, d.h. invers isoton und außerdiagonal antiton sowie strikt diagonal isoton [1].

Nun führen einfache Differenzapproximationen bei Rand- bzw. Anfangs-Randwertproblemen nichtlinearer elliptischer bzw. nichtlinearer parabolischer Differentialgleichungen zu Gleichungssystemen, deren Funktionalmatrix F' eine M-Matrix ist, wenn in den Differentialgleichungen die gemischten Ableitungen $u_{x_i x_j}$, $i \neq j$, nicht auftreten [5]. Elliptische Differentialgleichungen dieser Art haben jedoch relativ geringe Bedeutung in physikalischen und technischen Bereichen. Entsprechende parabolische Anfangs-Randwertprobleme beschreiben z.B. nichtlineare Diffusionsvorgänge.

3.2

Dagegen treten etwa in der Strömungsmechanik oder in der Magnetostatik häufig Randwertprobleme mit quasilinearen (elliptischen) Potentialgleichungen auf; unter bekannten Voraussetzungen sind sie äquivalent dem Variationsproblem

$$\begin{aligned} I[v] &:= \int_G \Phi(v_x^2+v_y^2)dg + \int_{\Gamma_1} \varphi(x,y,v)ds = \text{Min}, \\ v &= f \text{ auf } \Gamma_2 := \Gamma-\Gamma_1 . \end{aligned} \tag{3.1}$$

Dabei sei $\Phi\in C^2([0,\infty))$ und $\Phi'(t) > 0$, $t \geq 0$.

Löst man solche Variationsprobleme numerisch mit einer geeigneten Methode der finiten Elemente oder mit einem passenden Differenzenverfahren, so ist die Funktionalmatrix F' des resultierenden nichtlinearen Gleichungssystems symmetrisch und positiv definit. Eine oft diskutierte Frage ist, wann F' zusätzlich L-Struktur besitzt, d.h. eine Stieltjes-Matrix ist.

Man kann zeigen, daß unter realistischen Bedingungen an das Randwertproblem zumindest einfache Differenzapproximationen zu einer solchen Funktionalmatrix führen. Im wesentlichen muß gefordert werden, daß die Differentialgleichung und die Lösung u des Randwertproblems folgende Eigenschaften besitzen:

$$\Phi''(t) \leq 0,\ u_x u_y \geq 0 \quad \text{oder} \quad \Phi''(t) \geq 0,\ u_x u_y \leq 0,\ t \geq 0,\ (x,y)\in\bar{G}.$$

3.3

Ein wichtiges Anwendungsgebiet der beschriebenen monoton einschließenden Iterationen ist auch die numerische Lösung der Prandtl'schen Grenzschicht-Gleichungen [5].

Der zur Verfügung stehende Raum läßt hier eine ausführliche Darstellung nicht zu. Eine solche befindet sich in Vorbereitung und wird in "Math. Meth. in the Appl. Sci." erscheinen.

Literatur:

[1] Moré, J. J.: A class of nonlinear functions and the convergence of Gauss-Seidel and Newton-Gauss-Seidel iterations.
Univ. of Maryland, Techn. Rep., Nr. 7o - 123 (197o).

[2] Ortega, J. M., Rheinboldt, W. C.: Iterative solution of nonlinear equations in several variables.
New York and London: Academic Press, 197o.

[3] Schelin, C. W.: Monotone convergence of the SOR-Newton iterative technique.
SIAM J. Numer. Anal. 1o (1973), S. 933 - 938.

[4] Schomberg, H.: Monotonically convergent iterative methods for nonlinear systems of equations.
Num. Math. 32 (1979), S. 97 - 1o4.

[5] Törnig, W.: Monoton einschließend konvergente Iterationsprozesse vom Gauss-Seidel-Typ zur Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme im R^N und Anwendungen.
Math. Meth. in the Appl. Sci. 2 (198o), S. 489 - 5o3.