L. Budach; H. Grell

Arithmetisch-topologische Untersuchungen an Ringen mit eingeschränkten Minimalbedingungen

In: (ed.): General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra, Proceedings of the symposium held in Prague in September 1961. Academia Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, Prague, 1962. pp. [121]--122.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/700986

ARITHMETISCH-TOPOLOGISCHE UNTERSUCHUNGEN AN RINGEN MIT EINGESCHRÄNKTEN MINIMALBEDINGUNGEN

L. BUDACH und H. GRELL

Berlin

I. In einem Ring t gilt der eingeschränkte Produktkettensatz, wenn jede Kette $c_1 \supseteq c_2 \supseteq \ldots \supseteq c_i \supseteq \ldots \supseteq c \neq (0)$ von Idealen c_i, deren jedes c_i aus dem vorhergehenden c_{i-1} durch Idealmultiplikation $c_i = d_i c_{i-1}$ entsteht und die alle ein vom Nullideal verschiedenes Ideal c umfassen, im Endlichen abbricht. Nach AKIZUKI und KRULL sind in t alle von (0) und t verschiedenen Primideale maximal, und jedes (eigentliche, d. h. von (0) und t verschiedene) Ideal wird eindeutiges Produkt oder, was dasselbe ist, eindeutiger Durchschnitt endlichvieler zu verschiedenen Primidealen gehöriger Primärideale von endlichem Exponenten. Umgekehrt ist für die Gültigkeit dieser Idealtheorie die eingeschränkte Produktkettenbedingung notwendig. Die genannten Ringe bilden sogar noch dann, wenn man Nullteilerfreiheit verlangt, eine echte Oberklasse der Ringe mit eingeschränkter Minimalbedingung, die durch Fortfall der Bedingung $c_i = d_i c_{i-1}$ beschrieben sind; sie lassen sich auch kennzeichnen als Ringe mit eigeschränktem Produktkettensatz, in denen jedes Ideal eine endliche Basis hat.

II. Für die zu Beginn von I. genannten Ringe gilt im Fall der Nullteilerfreiheit

Satz 1. *Für ein Primideal p mit $(0) \subset p \subset t$ ist stets* $\bigcap_{1}^{\infty} p^\nu = (0)$.

Dieser Satz ist für Noethersche Integritätsbereiche als „Durchschnittssatz" wohlbekannt. Weiter hat man

Satz 2. *Bei $t^2 \subset t$* (t^2 echte Untermenge von t) *ist* $\bigcap_{1}^{\infty} t^\nu = (0)$ ($t^2 \subset t$ kann nur eintreten, falls t kein Einselement besitzt, ist aber mit der Nichtexistenz eines Einselementes nicht äquivalent).

Diese Sätze ermöglichen für die genannten Ringe in naheliegender Weise u. a. die Einführung einer „natürlichen" Topologie, die, eben ihnen zufolge, dem Regularitätsaxiom genügt.

III. Für einen Integritätsbereich t mit Gültigkeit der eingeschränkten Minimalbedingung sei $T(t)$ die Menge aller t umfassenden Integritätsbereiche im Quotientenkörper $Q(t)$ von t. Durch die Vorschrift: „$t_1 <_t t_2$, falls die durch t_1 definierte natürliche und auf t eingeschränkte Topologie feiner ist als die entsprechende durch t_2 definierte und auf t eingeschränkte", wird $T(t)$ eine Halbordnung. Bei $t_1, t_2 \in T(t)$

heisse t_1 zu t_2 bezüglich t äquivalent, $t_1 \equiv_t t_2$, falls gleichzeitig $t_1 <_t t_2$ und $t_2 <_t t_1$ gilt. Man kann zeigen, dass dann die Äquivalenzklassen bez. $\equiv_t$ abgeschlossen sind gegenüber den Operationen der Vereinigung endlich und des Durchschnitts sogar unendlich vieler Exemplare einer Klasse. Insbesondere ist der Durchschnitt aller Elemente einer Klasse ebenfalls Element der Klasse. Es gilt:

1. Der genannte Durchschnitt $\tilde{t}$ ist gleich der topologischen Abschliessung von t in einem jeden Exemplar der Klasse. – Neben diese topologische Charakterisierung treten die beiden folgenden, ihr jeweils einzeln gleichwertigen arithmetischen.

2. $\tilde{t}$ ist der grösste t umfassende und in einem beliebigen Exemplar der Äquivalenzklasse enthaltene Integritätsbereich derart, dass die Erweiterungsideale $\tilde{t}p$ sämtlicher Primideale p aus t in $\tilde{t}$ wiederum Primideale vom t-Grade 1 sind.

3. Für einen beliebigen Repräsentanten t' der Äquivalenzklasse ist $\tilde{t}$ der kleinste t umfassende und in t' gelegene Integritätsbereich, über dem t' lokal endlich ist. „Lokalendlich" besagt: Ist für ein beliebiges Primideal p aus $\tilde{t}$ die Menge S_p definiert als das multiplikativ abgeschlossene System aller nicht in p gelegenen Elemente aus t, so ist der Quotientenring t'_{S_p} endlicher $\tilde{t}_p$-Modul, wo $\tilde{t}_p$ der wie üblich aus $\tilde{t}$ durch Aufnahme der in p nicht enthaltenen Elemente in die Nenner gebildete Quotientenring ist.

IV. In einer im vergangenen Jahr in den Londoner Proceedings veröffentlichten Arbeit „Prime Ideals and Integral Dependence" definiert NORTHCOTT verallgemeinerte Dedekindsche Ordnungen als Integritätsbereiche t mit Gültigkeit der eingeschränkten Minimalbedingung, in denen fast alle Primideale p umkehrbar sind, $pp^{-1} = t$ für fast alle p aus t.

Es gilt

4. t ist verallgemeinerte Dedekindsche Ordnung genau dann, falls für jede Kette $t \subseteq t_1 \subseteq t_2 \subseteq \ldots \subseteq \hat{t}$ von Integritätsbereichen t_i, die sämtlichen in der ganzen Abschliessung $\hat{t}$ von t in $Q(t)$ enthalten sind, von einem gewissen Index $i \geqq i_j$ ab die in $Q(t)$ gebildeten Modulquotienten $t_{i+1}/t_i \neq (0)$ sind. – Für eine verallgemeinerte Dedekindsche Ordnung t ist die topologische Abschliessung $\tilde{t}$ von t in der ganzen Abschliessung $\hat{t}$ von t dadurch ausgezeichnet, dass $\hat{t}$ ein endlicher $\tilde{t}$-Modul wird. Nimmt man diese letzte Eigenschaft als charakterisierende Bedingung, so erhält man eine Ringklasse, die eine Verallgemeinerung der Northcottschen verallgemeinerten Dedekindschen Ordnungen darstellt. In diesen Ringen werden die Erweiterungsideale fast aller Primideale aus t ebenfalls Primideale, und zwar vom t-Grad 1. Ein Gegenbeispiel zeigt, daß aus der letzten Bedingung nicht umgekehrt die Umkehrbarkeit des Ausgangsprimideals erschlossen werden kann.