Helmut Boseck

Darstellungen von Matrizengruppen über topologischen Körpern

In: (ed.): General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra, Proceedings of the symposium held in Prague in September 1961. Academia Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, Prague, 1962. pp. [119]--120.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/700917

DARSTELLUNGEN VON MATRIZENGRUPPEN ÜBER TOPOLOGISCHEN KÖRPERN

H. BOSECK

Berlin

Es sei K ein lokal-bikompakter, nicht zusammenhängender topologischer Körper der Charakteristik O. Mit $\mathfrak{G} = GL(2, K)$ werde die Gruppe der zweireihigen Matrizen

$$g = \begin{Vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{Vmatrix}$$

mit nicht verschwindender Determinante bezeichnet, wobei $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in K$ ist. Es sei ferner $G = PGL(2, K) = \mathfrak{G}/\mathfrak{z}$, wobei $\mathfrak{z}$ das Zentrum der Gruppe $\mathfrak{G}$ bezeichnet. Die Gruppe G wird häufig als Gruppe der gebrochenen linearen Transformationen

$$x' = x\bar{g} = \frac{\alpha x + \gamma}{\beta x + \delta}\,, \qquad x \in K \tag{1}$$

auf dem topologischen Körper K interpretiert.

Auf der additiven Gruppe K^+ des topologischen Körpers K existiert ein invariantes Integral, das mit

$$\int_{K^+} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{K^+} f(x + a)\,\mathrm{d}x\,, \qquad a \in K$$

bezeichnet wird. Es entsteht die Frage nach dem Verhalten dieses Integrals gegenüber der in (1) angegebenen gebrochenen rationalen Transformation. Diese Frage lässt sich wie folgt beantworten:

Es ist

$$\int_{K^+} f(x\bar{g})\,\beta(x, g)\,\mathrm{d}x = \int_{K^+} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{2}$$

mit

$$\beta(x, g) = |\det g|\,|\beta x + \delta|^{-2}\,. \tag{2'}$$

Hier bezeichnet $|\ |$ den in einem nicht zusammenhängenden topologischen Körper durch eine Bewertung definierten Absolutbetrag, der noch als normiert vorausgesetzt sei.

Eine Darstellung der Gruppe G, die in Analogie zu den Arbeiten von I. M. Gelfand, M. A. Neumark, M. J. Grajew als *quasireguläre Darstellung* bezeichnet werde, lässt sich nun wie folgt definieren: Es sei H der Raum der messbaren, quadratisch integrierbaren Funktionen $\varphi(\xi, s)$, $\xi \in K^+$, $s \in K^\times$, und es sei

$$T_g\, \varphi(\xi, s) = \beta^{\frac{1}{2}}(\xi, g)\, \varphi\left(\frac{\alpha\xi + \gamma}{\beta\xi + \delta}, \frac{s \det g}{(\beta\xi + \delta)^2}\right). \tag{3}$$

Die Zuordnung $g \to T_g$ ist eine unitäre Darstellung von G im Raum H, die quasireguläre Darstellung.

Die quasireguläre Darstellung lässt sich in der üblichen Weise zerlegen, indem man die Charaktergruppe $X^\times$ der multiplikativen Gruppe $K^\times$ der Körpers K betrachtet und die Fouriertransformation

$$\psi(\xi, \chi) = \int_{K^\times} \varphi(\xi, s)\, \overline{\chi(s)}\, \mathrm{d}^\times s$$

durchführt. Es ist

$$T_g\, \psi(\xi, \chi) = \beta^{\frac{1}{2}}(\xi, g)\, \chi\left(\frac{\det g}{(\beta\xi + \delta)^2}\right) \psi\left(\frac{\alpha\xi + \gamma}{\beta\xi + \delta}, \chi\right).$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich unmittelbar, dass H in eine kontinuierliche direkte Summe von Hilberträumen zerfällt, die alle zu $L^2(K^+)$ isomorph sind.

Die *erste Hauptserie* von Darstellungen der Gruppe G erhält man nun im Raum $L^2(K^+)$ durch die Operatoren

$$T_g^{(\chi)} f(x) = \chi\left(\frac{\det g}{(\beta\xi + \delta)^2}\right) \frac{|\det g|^{\frac{1}{2}}}{|\beta\xi + \delta|}\, f\left(\frac{\alpha\xi + \gamma}{\beta\xi + \delta}\right).$$

Die Darstellungen $g \to T_g^{(\chi)}$, $\chi \in X^\times$ der ersten Hauptserie sind unitär, irreduzibel und in ihrer Gesamtheit treu.

Beim Beweis der Irreduzibilität der Darstellungen der ersten Hauptserie spielt folgender Satz über die Struktur der Charaktergruppe Y^+ der additiven Gruppe K^+ des Körpers K eine Rolle:

Ist $y \in Y^+$, so sei definitionsgemäss für $a \in K^+$: $y^a(\xi) = y(a\xi)$. Ist dann y_0 ein vom Einscharakter verschiedener Charakter von K^+ und y beliebig aus Y^+, so gibt es ein $a \in K$ mit der Eigenschaft $y = y_0^a$.

Eine unmittelbare Folgerung dieser Aussage ist:

Die Gruppen K^+ und Y^+ sind isomorph.

Anmerkung. Der volle Text der Arbeit erscheint in der Zeitschrift „Mathematische Nachrichten," Band *24*, Heft 4 (1962).