Tibor Šalát
Normale Zahlen und Bairesche Kategorien von Mengen

In: (ed.): General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra, Proceedings of the second Prague topological symposium, 1966. Academia Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, Praha, 1967. pp. 306--307.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/700898

NORMALE ZAHLEN UND BAIRESCHE KATEGORIEN VON MENGEN

T. ŠALÁT

Bratislava

Jede reelle Zahl x kann man, wie bekannt durch ihre g-adische Entwicklung (g ist ganz, $g > 1$)

$$x = c_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n(x)}{g^n}$$

eindeutig ausdrücken; dabei sind die $c_k(x)$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$) ganze Zahlen (sogenannte Ziffern von x), $0 \leqq c_k(x) < g$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$) und für unendlich viele k ist $c_k(x) < < g - 1$. Man bezeichne mit $N_n(r, x)$, $0 \leqq r \leqq g - 1$ die Anzahl des Auftretens der Zahl r in der endlichen Folge $c_1(x), c_2(x), \ldots, c_n(x)$. Die Zahl x nennt man eine *g-adisch normale Zahl*, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_n(r, x)}{n} = \frac{1}{g} \quad (r = 0, 1, \ldots, g - 1)$$

ist. Nach einem klassischen Satz von E. Borel (siehe [1] S. 191) sind fast alle reellen Zahlen g-adisch normal.

Eine natürliche Verallgemeinerung der g-adischen Entwicklungen von reellen Zahlen sind die Cantorschen Reihen. Es sei $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ eine Folge von natürlichen Zahlen, $q_k > 1$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$). Jede reelle Zahl kann man, wie bekannt durch ihre Cantorsche Reihe

$$x = \varepsilon_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k(x)}{q_1 q_2 \ldots q_k}$$

eindeutig ausdrücken; dabei sind die $\varepsilon_k(x)$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$) ganze Zahlen, $0 \leqq \varepsilon_k(x) < < q_k$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$) und für unendlich viele k ist $\varepsilon_k(x) < q_k - 1$. Die Grundlagen der metrischen Theorie der Cantorschen Reihen wurden von A. Rényi und P. Erdös ausgearbeit (siehe [2], [3], [4]). In diesen Arbeiten wird auch die folgende Verallgemeinerung des Satzes von E. Borel bewiesen. Man setze $s_n(r) = \sum_{k \leqq n, r < q_k} 1/q_k$. Die reelle Zahl x nennt man *normal in Bezug auf die Folge* $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$, wenn für jede ganze Zahl $r \geqq 0$, für welche $\lim_{n\to\infty} s_n(r) = +\infty$ ist $\lim_{n\to\infty} [(N_n(r, x))/(s_n(r))] = 1$ gilt; dabei bedeutet $N_n(r, x)$ die Anzahl des Auftretens der Zahl r in der endlichen Folge $\varepsilon_1(x), \varepsilon_2(x), \ldots \ldots, \varepsilon_n(x)$. Das wichtigste Ergebnis der Arbeiten [2], [3] besagt, dass fast alle reellen Zahlen in Bezug auf die Folge $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ normal sind, wenn $\sum_{k=1}^{\infty} 1/q_k = +\infty$ ist.

Im Zusammenhang mit den erwähnten metrischen Ergebnissen ergibt sich die natürliche Frage über die Bairesche Kategorie der Menge N_g aller g-adisch normalen Zahlen und der Menge $N(q_1, q_2, \ldots, q_k, \ldots)$ aller in Bezug auf die Folge $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\sum_{k=1}^{\infty} 1/q_k = +\infty$ normalen Zahlen im metrischen Raum $\boldsymbol{E}_1$ aller reellen Zahlen mit der Euklidischen Metrik.

Mit $\{a_n\}_n'$ bezeichne man die Menge aller Häufungswerte der Folge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. In der Arbeit [5] wird mit Hilfe einiger Ergebnisse über die Limitierbarkeit der Folgen von Nullen und Einsen bewiesen, dass im Falle $g = 2$ für alle $x \in \boldsymbol{E}_1$ bis auf eine Menge von erster Kategorie $\{N_n(r, x)/n\}_n' = \langle 0, 1 \rangle$ ist. Aus diesem Ergebnis folgt, dass die Menge N_2 eine Menge von erster Kategorie in $\boldsymbol{E}_1$ ist. Das Ergebnis von Golubov wurde in der Arbeit [6] verallgemeinert. Ausserdem wird in dieser Arbeit gezeigt, dass die Menge N_g eine $G_{\delta\sigma\delta}$-Menge in $\boldsymbol{E}_1$ ist.

Im Zusammenhang mit dem erwähnten metrischen Ergebnis über die Cantorschen Reihen wird in der Arbeit [7] folgender Satz bewiesen:

Es sei für ein $r \geqq 0$ $\lim_{n \to \infty} s_n(r) = +\infty$. *Dann gilt für alle* $x \in \boldsymbol{E}_1$ *bis auf eine Menge von erster Kategorie*

$$\langle 0, \max(2, r + 1) \rangle \subset \left\{ \frac{N_n(r, x)}{s_n(r)} \right\}_n' . \tag{1}$$

Wenn $\sum_{k=1}^{\infty} 1/q_k = +\infty$, dann folgt aus dem erwähnten Satz, dass die Menge $N(q_1, q_2, \ldots, q_k, \ldots)$ eine Menge von erster Baireschen Kategorie in $\boldsymbol{E}_1$ ist. Mit Hilfe geeigneter Beispiele von Folgen $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ kann man zeigen, dass die Zahl $\max(2, r + 1)$ auf der linken Seite von (1) im allgemeinen durch keine grössere Zahl ersetzt werden kann. In der Arbeit [7] wird auch bewiesen, dass die Menge $N(q_1, q_2, \ldots, q_k, \ldots)$, $\sum_{k=1}^{\infty} 1/q_k = +\infty$ eine $G_{\delta\sigma\delta}$-Menge in $\boldsymbol{E}_1$ ist.

Literatur

[1] *H. H. Ostmann:* Additive Zahlentheorie I. Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg 1956.

[2] *A. Rényi:* A számjegyek eloszlása valós számok Cantor-féle eloállításaiban. Mat. Lap. VII (1956), 77—100.

[3] *P. Erdös and A. Rényi:* Some further statistical properties of the digits in Cantor's series. Acta math. acad. sci. Hung. X (1959), 21—29.

[4] *P. Erdös and A. Rényi:* On Cantor's series with convergent $\sum(1/q_n)$. Ann. Univ. Sci. Budap. de Rol. Eötvös nom. II (1959), 93—109.

[5] *V. I. Golubov:* O summirovanii posledovateľnostej. Izv. vyšš. učeb. zaved. Matematika *4* (41) (1964), 47—55.

[6] *T. Šalát:* A remark on normal numbers. Revue roumaine de math. pures et appl. XI (1966), 53—56.

[7] *T. Šalát:* Über die Cantorschen Reihen (die Arbeit wird in Czechosl. Math. J. erscheinen).