РАЗМЕРНОСТЬ И МЯГКИЕ ПУЧКИ

И. А. ШВЕДОВ

Новосибирск

Пусть X – паракомпактное пространство и $\dim X$ – его размерность, определяемая с помощью всевозможных открытых покрытий. Хорошо известно, что $\dim X$ не превосходит n в том и только в том случае, когда всякое непрерывное отображение любого замкнутого подмножества $Y \subset X$ в n-мерную сферу S^n распространимо на всё X. Последнее можно выразить словами: пучок непрерывных отображений из X в S^n является мягким. Совершенно аналогичный факт имеет место для когомологической размерности $\dim(X, G)$ пространства X с коэффициентами в произвольном пучке абелевых групп G. Именно: для каждого целого числа n существует такой пучок G^n, что $\dim(X, G)$ не больше n в том и только в том случае, когда пучок G^n является мягким. В связи с этим многие теоремы как о лебеговской, так и о когомологической размерности, можно получить в качестве следствий некоторых утверждений о пучках. Например, допустим, что пространство X есть объединение семейства $\mathscr{V}$, состоящего из локально конечной системы локально замкнутых подмножеств, локально счётной системы замкнутых подмножеств и произвольной системы открытых подмножеств. В этом случае для того, чтобы пучок с базой X был мягким, необходимо и достаточно, чтобы он был относительно мягким над каждым элементом V семейства $\mathscr{V}$. Отсюда немедленно вытекает, что $\dim X = \max_{V \in \mathscr{V}} (\operatorname{rdim} V)$, где $\operatorname{rdim} V$ – относительная размерность множества $V \subset X$. В точности такой же результат получается и для когомологической размерности. Аналогичным способом можно вывести следующее усиление теоремы К. А. Ситникова о расположении r-мерного множества в евклидовом пространстве. Пусть X – подмножество в R^n и $\dim(X, G) = r$, где G – произвольная абелева группа. Тогда существует такая точка $x \in X$, что в любом достаточно малом шаре V с центром в точке x лежит $(n - r - 1)$-мерный G-цикл, зацеплённый в V с множеством X а при $k < n - r - 1$ вообще нет k-мерных G-циклов, зацеплённых с X в какой-либо области из R^n.

В том случае, когда G – абелева группа, в качестве рассмотренного ранее пучка G^n можно взять пучок непрерывных отображений из X в комплекс Эйленберга-Маклейна $\mathsf{K}(G, n)$. Из этого в предположении $\dim X < \infty$ с помощью симплициальной аппроксимации нетрудно вывести следующие факты. Если группа G имеет конечное число образующих то $\dim(X, G) = \dim(\check{X}, G)$, где $\check{X}$ – расширение Чеха пространства X. Пусть Z – группа целых чисел. Поскольку $(n+1)$-остов комплекса $K(Z, n)$ гомотопически эквивалентен сфере S^n, то из условия $\dim(X, Z) \leqq n$ вытекает, что пучок непрерывных отображений из X в S^n является мягким. Это равносильно известной формуле П. С. Александрова $\dim X = \dim(X, Z)$, доказанной для паракомпактных пространств К. Х. Даукером. Привлекая некоторые конструкции гомотопической топологии, можно получить следующее усиление приведенного результата. Пусть Y – произвольный клеточный комплекс и $\Pi_i = \pi_i(Y)$ – его i-тая гомотопическая группа. Тогда, если $\dim(X, \Pi_i) \leqq i$ для каждого i, то пучок непрерывных отображений из X в Y является мягким.