Ryszard Engelking

Quelques démonstrations nouvelles dans la théorie des ensembles boreliens

In: (ed.): General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra, Proceedings of the second Prague topological symposium, 1966. Academia Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, Praha, 1967. pp. 131--132.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/700863

QUELQUES DÉMONSTRATIONS NOUVELLES DANS LA THÉORIE DES ENSEMBLES BORELIENS

R. ENGELKING

Warszawa

Les démonstrations classiques (cf. [3], pp. 264, 285 et 291) de certains théorèmes sur les ensembles boreliens utilisent une construction connue sous le nom de l'opération de Montgomery. C'est à l'aide de cette opération que pour les espaces métriques généraux, M. D. Montgomery a démontré (en 1935) les théorèmes suivants, qui n'étaient connus auparavant que pour les espaces séparables (le mot „espace“ veut dire toujours „espace métrique“):

Théorème 1. *L'ensemble des points où un ensemble est localement de classe* α *additive (ou bien de classe multiplicative* $\alpha > 0$*) est encore de la même classe.*

Théorème 2. *Si la fonction* $f\colon X \times Y \to Z$ *est continue relativement à la première variable et de classe* α *relativement à la seconde, elle est une fonction de classe* $\alpha + 1$.

Théorème 3. *Le graphique de la fonction* $f\colon X \to Y$ *de classe* α *est de classe* α *multiplicative dans* $X \times Y$.

Or, on peut démontrer tous ces théorèmes (ainsi que les théorèmes sur les fonctions jouissant de la propriété de Baire qui correspondent aux théorèmes 2 et 3) en employant au lieu de l'opération de Montgomery le critère de la métrisation dû à Nagata et Smirnov et le lemme suivant qu'on démontre aisément à l'aide de l'induction transfinie:

Lemme. *L'union d'une famille localement finie des ensembles de classe* α *additive ou multiplicative est un ensemble de la même classe.*

Il faut noter qu'un important cas spécial du Théorème 1 a été démontré d'une façon similaire par E. Michael dans [4] et par K. Nagami dans [5].

Les démonstrations esquissées plus haut (pour les détails voir [1]) ne sont guère surprenantes. Celle qui va suivre l'est peut-être davantage (elle est due à W. Holsztyński, R. Sikorski et l'auteur, cf. [2]):

Théorème 4. *Dans le cube de Hilbert* H *il existe pour chaque* $\alpha < \Omega$ *un ensemble exactement de classe* α *multiplicative (additive).*

Démonstration. Soit M_0 un point arbitraire de H et soit $A_0 = H \setminus M_0$. Supposons que les ensembles M_ξ et A_ξ ont été définis pour $\xi < \alpha < \Omega$. Pour $\alpha = \beta + 1$ posons

$$M_\alpha = A_\beta \times A_\beta \times \ldots \subset H^{\aleph_0};$$

et soit

$$M_\alpha = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_\xi \times \ldots = \mathop{\mathbf{P}}_{\xi < \alpha} A_\xi \subset H^{\aleph_0}$$

si α est un nombre limite.

$H^{\aleph_0}$ et H étant homéomorphes, nous pouvons considérer M_α comme un sous-ensemble de H. Posons $A_\alpha = H \setminus M_\alpha$. De la définition il s'ensuit que

(*i*) *M_α (A_α) est de classe α multiplicative (additive).*

A l'aide de l'induction transfinie on montre que

(*ii*) *Pour chaque espace X et ensemble $B \subset X$ de classe α multiplicative (additive) il existe une fonction continue f: $X \to H$ telle que $f^{-1}(M_\alpha) = B$ (telle que $f^{-1}(A_\alpha) = B$).*

Le théorème équivaut évidemment à:

(*iii*) *L'ensemble M_α n'est pas de classe α additive.*

Supposons que (*iii*) n'est pas vrai. En vertu de (*i*) et (*ii*) il existe donc une fonction continue f: $H \to H$ telle que $f^{-1}(A_\alpha) = M_\alpha$. Comme f transforme M_α dans A_α et A_α dans M_α, on a $f(x) \neq x$ pour chaque $x \in H$ ce qui contredit le théorème du point invariant.

Travaux cités

[1] *R. Engelking:* On Borel sets and B-measurable functions in metric spaces. Prace Matemat. *10* (1966—67), 145—149.

[2] *R. Engelking, W. Holsztyński* and *R. Sikorski:* Some examples of Borel sets. Coll. Math. *15* (1966), 271—274.

[3] *C. Kuratowski:* Topologie I. Warszawa 1958.

[4] *E. Michael:* Local properties of topological spaces. Duke Math. Journ. *21* (1954), 163—172.

[5] *K. Nagami:* Local properties of topological spaces. Proc. Japan Acad. *32* (1956), 320—322.

MATHEMATICAL INSTITUTE OF THE POLISH ACADEMY OF SCIENCES