ÜBER DIE REALISIERUNG VON BOOLE-ALGEBREN ALS BOOLE-ALGEBREN REGULÄR OFFENER MENGEN

J. FLACHSMEYER

Greifswald

Seit den grundlegenden STONEschen Arbeiten [12] und [13] hat sich die Theorie der Boole-Algebren zu einem weitverzweigten Gebiet der modernen Mathematik entwickelt. (Vgl. hierzu den Ergebnisbericht von SIKORSKI [11]). Ausgangspunkt für die Verflechtung der Theorie der Boole-Algebren mit der Topologie und Funktionalanalysis war der bekannte Stonesche Darstellungssatz. Nach diesem Satz gibt es zu jeder Boole-Algebra $\mathbf{B}$ bis auf Homöomorphie genau einen nulldimensionalen kompakten Hausdorffschen Raum $M(\mathbf{B})$, so dass die abstrakte Boole-Algebra $\mathbf{B}$ dem Mengenkörper der offen-abgeschlossenen Mengen von $M(\mathbf{B})$ isomorph ist. Der eindeutig bestimmte kompakte nulldimensionale Hausdorffsche Raum $M(\mathbf{B})$ heisst der Stonesche Darstellungsraum von $\mathbf{B}$. Zufolge des Darstellungssatzes nehmen also die Mengenkörper der offen-abgeschlossenen Mengen von nulldimensionalen (kompakten) Hasudorffschen Räumen eine Schlüsselstellung in der gesamten Theorie der Boole-Algebren ein. Ausser diesen in der Topologie auftauchenden interessanten Boole-Algebren gibt es noch andere von der Topologie her ausgezeichnete Boole-Algebren. Wir meinen hier die Boole-Algebren $\mathbf{R}_0(X)$ der regulär offenen Mengen von topologischen Räumen X. Die Grundtatsachen über diese Algebren entnehme man aus BIRKHOFF [1] bzw. SIKORSKI [11]. Die Bedeutung von $\mathbf{R}_0(X)$ für die allgemeine Theorie der Boole-Algebren geht beispielsweise aus der Tatsache hervor, dass für einen nulldimensionalen Raum X $\mathbf{R}_0(X)$ die Dedekind-MacNeillesche Vervollständigung der Boole-Algebra der offenabgeschlossenen Mengen von X ist (vgl. [11], S. 119). Die Bedeutung der Algebren $\mathbf{R}_0(X)$ für die Topologie selbst wird in den Untersuchungen von GLEASON [7] und dem Verfasser [2], [5] und [6] dargelegt. Wir wollen uns hier mit einem von G. BIRKHOFF stammenden Problem und einigen verwandten Fragen über die Boole-Algebren $\mathbf{R}_0(X)$ befassen. In dem Problem 82 [1] hat BIRKHOFF nach notwendigen und hinreichenden Bedingungen für eine abstrakte Boole-Algebra $\mathbf{B}$ gefragt, so dass $\mathbf{B}$ isomorph zur Boole-Algebra $\mathbf{R}_0(X)$ für einen gewissen metrisierbaren Raum ist. In unserer Arbeit [3] haben wir diesem Problem schon eine rein topologische Version an die Seite gestellt[1]). Wir kehren nun wieder zur ursprünglichen Fassung des Problems zurück.

[1]) Inzwischen gab V. I. Ponomarev [14] eine Lösung dieser topologischen Version des Birkhoffschen Problems.

Definition. $\mathbf{B}$ sei eine Boole-Algebra. Unter dem *Dichtigkeitsgrad* $\mathrm{d}(\mathbf{B})$ von $\mathbf{B}$ verstehen wir die kleinste Mächtigkeit einer in $\mathbf{B}$ dichten Teilmenge

$$\mathrm{d}(\mathbf{B}) = \inf \operatorname{card}(D) \mid D \text{ dicht in } \mathbf{B}\,.$$

Dabei heisst bekanntlich D in $\mathbf{B}$ dicht, wenn es zu jedem $b \in \mathbf{B}$ mit $b \neq 0$ ein $d \in D$ mit $d \neq 0$ gibt, so dass

$$d \leqq b \quad \text{gilt.}$$

Die Boole-Algebren $\mathbf{B}$, für welche $\mathrm{d}(\mathbf{B}) \leqq \aleph_0$ besteht, sind unter der Bezeichnung separable Boole-Algebren hinreichend geläufig.

Unter dem Zellularitätsgrad $\mathrm{z}(\mathbf{B})$ von $\mathbf{B}$ verstehen wir die folgende Kardinalzahl

$$\mathrm{z}(\mathbf{B}) = \sup \operatorname{card}(S) \mid (S \subset \mathbf{B} \quad \text{für} \quad x, y \in S \quad \text{mit} \quad x \neq y \quad \text{gilt stets} \quad x \wedge y = 0)\,.$$

Bemerkung. 1. Die Definition des Dichtigkeitsgrades stellt eine unmittelbare Nachbildung der entsprechenden Definition der separablen Boole-Algebren dar. Der Begriff des Zellularitätsgrades ist von D. Kurepa eingeführt worden. (Der Hinweis auf Kurepa findet sich in [10], wo der Zellularitätsgrad für das System der offenen Mengen eines topologischen Raumes ausgesprochen wird.)

2. Offensichtlich gilt für jede Boole-Algebra $\mathbf{B}$

$$\mathrm{z}(\mathbf{B}) \leqq \mathrm{d}(\mathbf{B})\,.$$

Für separable Boole-Algebren $\mathbf{B}$ ist stets

$$\mathrm{z}(\mathbf{B}) = \mathrm{d}(\mathbf{B})\,,$$

ebenso für atomare Boole-Algebren. Es gibt aber auch Boole-Algebren $\mathbf{B}$ mit $\mathrm{z}(\mathbf{B}) < \mathrm{d}(\mathbf{B})$ (Siehe die Folgerungen aus Satz 1). Unser erstes Ergebnis lautet nun wie folgt.

Satz 1. $\mathbf{B}$ *sei eine Boole-Algebra. Lässt sich* $\mathbf{B}$ *als Boole-Algebra der regulär offenen Mengen eines metrisierbaren Raumes* X *realisieren, d. h. gibt es einen metrisierbaren Raum* X *derart, dass* $\mathbf{B}$ *zu* $\mathbf{R}_0(X)$ *isomorph ist, so bestehen für* $\mathbf{B}$ *die folgenden Bedingungen*

1) $\mathbf{B}$ *ist vollständig,*

2) *Der Zellularitätsgrad von* $\mathbf{B}$ *und der Dichtigkeitsgrad von* $\mathbf{B}$ *stimmen überein,*

$$\mathrm{z}(\mathbf{B}) = \mathrm{d}(\mathbf{B})\,.$$

Der Beweis stützt sich auf den folgenden Hilfssatz, der eine unmittelbare Verallgemeinerung des separablen Falles ist (vgl. MARCZEWSKI [9]).

Hilfssatz 1. *Für einen metrisierbaren Raum* X *sind die folgenden Bedingungen äquivalent.*

(1) *X besitzt eine offene Basis* $\mathfrak{B}$ *von der Mächtigkeit* $\leqq \mathbf{m}$.

(2) *X besitzt eine dichte Teilmenge D von der Mächtigkeit* $\leqq \mathbf{m}$.

(3) *Jedes System* $\mathfrak{S}$ *von offenen Mengen, die paarweise disjunkt sind, hat eine Mächtigkeit* $\leqq \mathbf{m}$.

Beweis. ϱ bezeichne eine Metrik auf X, die die gegebene Topologie erzeugt. Wir können uns auf die Situation $\mathbf{m} \geqq \aleph_0$ beschränken! Die Implikation (1) $\Rightarrow$ (2) ist nach dem Auswahlaxiom klar. Die Umkehrung (2) $\Rightarrow$ (1) ergibt sich wie folgt. Es sei D eine dichte Teilmenge von X mit card $D \leqq \mathbf{m}$. Dann bildet das System $\mathfrak{B} = \{K_{1/n}(x) \mid x \in D,\ n \in \mathbf{N}\}$, das aus allen offenen Kugeln um die Punkte $x \in D$ mit Radien $1/n$ besteht, eine offene Basis der Mächtigkeit $\leqq \mathbf{m}$. Die Implikation (2) $\Rightarrow$ (3) ist wiederum klar. Die Umkehrung (3) $\Rightarrow$ (2) erschliesst man wie folgt. Zu jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbf{N}$ gibt es nach dem Zornschen Lemma ein maximales System von offenen Kugeln des Radius $1/n$, die paarweise disjunkt sind. $\mathfrak{S}_n$ sei für jedes $n \in \mathbf{N}$ ein solches maximales System

$$\mathfrak{S}_n = \{K_{1/n}(x_i) \mid i \in I_n,\ K_{1/n}(x_i) \cap K_{1/n}(x_j) = \emptyset \quad \text{für} \quad i, j \in I_n \quad \text{mit} \quad i \neq j\}\,.$$

Nach Voraussetzung ist card $(\mathfrak{S}_n) \leqq \mathbf{m}$. Die Menge

$$D := \bigcup \{x_i \mid i \in I_n\} \mid (n \in \mathbf{N})$$

ist dann dicht in X, denn auf Grund der Maximalität von $\mathfrak{S}_n$ überschneidet für einen beliebigen Punkt $x \in X$ die Kugel $K_{1/n}(x)$ ein $K_{1/n}(x_i)$. Für D besteht ausserdem die Beziehung card $(D) \leqq \mathbf{m}$.

Beweis des Satzes 1. Es sei für die Boole-Algebra $\mathbf{B}$ ein metrisierbarer Raum X vorhanden, so dass $\mathbf{B}$ als $\mathbf{R}_0(X)$ realisiert wird: $\mathbf{B} \cong \mathbf{R}_0(X)$. Bei einem beliebigen topologischen Raum X ist $\mathbf{R}_0(X)$ stets vollständig, also ist die Vollständigkeit von $\mathbf{B}$ zur Realisierung notwendig. Jedes disjunkte System $\mathfrak{S}$ aus offenen Mengen des Realisierungsraumes X hat offensichtlich eine Mächtigkeit $\leqq \mathrm{z}(\mathbf{B})$, weil nämlich die regulär offenen Mengen eine Basis des metrisierbaren Raumes X bilden. Nach dem Hilfssatz besitzt der Raum X dann eine Basis $\mathfrak{B}$ der Mächtigkeit $\leqq \mathrm{z}(\mathbf{B})$. Das System $\mathfrak{B}_0 := \{\operatorname{Int} \bar{B} \mid B \in \mathfrak{B}\}$ liegt dicht in der Boole-Algebra $\mathbf{R}_0(X)$. Wegen card $\mathfrak{B}_0 \leqq \mathrm{z}(\mathbf{B})$ erhalten wir $\mathrm{d}(\mathbf{B}) \leqq \mathrm{z}(\mathbf{B})$. Damit ist also $\mathrm{d}(\mathbf{B}) = \mathrm{z}(\mathbf{B})$ erkannt (vgl. Bemerkung 2).

Folgerungen.

1. *Die Dedekind-MacNeillesche Vervollständigung einer freien Boole-Algebra mit* $\mathbf{m}$ *freien Erzeugenden ist bei* $\mathbf{m} > \aleph_0$ *nicht als Boole-Algebra* $\mathbf{R}_0(X)$ *der regulär offenen Mengen eines metrisierbaren Raumes X realisierbar.*

2. $\mathbf{B}$ *sei eine Massalgebra, d. h.* $\mathbf{B}$ *ist eine* σ*-vollständige Boole-Algebra, die ein strikt positives* σ*-additives beschränktes Mass trägt.* $\mathbf{B}$ *ist dann und nur dann als Boole-Algebra der regulär offenen Mengen eines metrisierbaren Raumes realisierbar, wenn* $\mathbf{B}$ *atomar ist.*

Beweis. 1. $\mathbf{B}$ sei eine freie Boole-Algebra mit $\mathbf{m}$ freien Erzeugenden. Der Darstellungsraum ist dann das verallgemeinerte Cantorsche Diskontinuum $D^{\mathbf{m}}$ (vgl. SIKORSKI [11]). Die Dedekind-MacNeillesche Vervollständigung $\tilde{\mathbf{B}}$ von $\mathbf{B}$ ist also isomorph zu $\mathbf{R}_0(D^{\mathbf{m}})$. Der Zellularitätsgrad $z(\mathbf{B})$ und der Zellularitätsgrad $z(\tilde{\mathbf{B}})$ stimmen überein, denn $\mathbf{B}$ liegt in $\tilde{\mathbf{B}}$ dicht. Von $z(\mathbf{B})$ ist bekannt, dass er gleich $\aleph_0$ beträgt. Nach Marczewski [9] ist nämlich jedes disjunkte System offener Mengen von $D^{\mathbf{m}}$ höchstens abzählbar. Der Dichtigkeit von $\mathbf{B}$ ist hingegen gleich $\mathbf{m}$. Zur Bestätigung dieser Behauptung betrachten wir eine Menge M der Mächtigkeit $\mathbf{m}$. Dann besteht $D^{\mathbf{m}}$ aus den Abbildungen $\chi : M \to \{0, 1\}$. Die Mengen der folgenden Gestalt bilden eine offene Basis in $D^{\mathbf{m}}$:

$$|E, F| = \{\chi : M \to \{0, 1\}\,, \quad \chi(x) = 0 \quad \text{für} \quad x \in E\,, \quad \chi(x) = 1 \quad \text{für} \quad x \in F\}\,, \quad E, F$$

endliche disjunkte Mengen in M. Diese $|E, F|$ sind stets offen-abgeschlossen in $D^{\mathbf{m}}$, sie gehören damit zum Mengenkörper der $\mathbf{B}$ als die Boole-Algebra $\mathbf{B}(D^{\mathbf{m}})$ der offen-abgeschlossenen Mengen von $D^{\mathbf{m}}$ realisiert.

$\mathfrak{D} = \{|E, F| \mid E, F$ endliche disjunkte Teilmengen von $M\}$ ist dicht in $\mathbf{B}(D^{\mathbf{m}})$. Jedes dichte Teilsystem $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{D}$ hat eine Mächtigkeit $\mathbf{m}$, denn sonst gibt es sicher eine endliche nicht leere Menge $E_0 \subset M$, die bei allen $|E, F| \in \mathfrak{S}$ jeweils zu dem E fremd ist. Dann liegt aber kein $|E, F| \in \mathfrak{S}$ unterhalb von $|E, \emptyset|$. Das widerspricht der Dichtigkeit von $\mathfrak{S}$. Folglich gilt $d(\mathbf{B}) = \mathbf{m}$, und daher auch $d(\tilde{\mathbf{B}}) = \mathbf{m}$. Nach Satz 1 kann deshalb $\tilde{\mathbf{B}}$ bei $\mathbf{m} > \aleph_0$ nicht als $\mathbf{R}_0(X)$ mit metrisierbaren X realisiert werden.

2. Die Massalgebra $\mathbf{B}$ sei als $\mathbf{R}_0(X)$ für ein gewisses metrisierbares X realisierbar. Weil für eine Massalgebra stets $z(\mathbf{B}) \leqq \aleph_0$ gilt, ist nach Satz 1 die Massalgebra $\mathbf{B}$ separabel. Nach dem Satz 2.4. unserer Arbeit [4] fällt die Ordnungstopologie in $\mathbf{B}$ metrisierbar aus. Zum anderen ist nach dem Satz 2.1. [4] die Ordnunsgtopologie einer separablen Algebra nur bei Atomarität der Algebra Hausdorffsch. Demnach muss die Massalgebra $\mathbf{B}$ atomar sein. Auf andere Weise haben schon Horn und Tarski [8, Theorem 3.8] erschlossen, dass jede separable Massalgebra atomar ist. Wenn jetzt umgekehrt die Massalgebra $\mathbf{B}$ atomar ist, so ist sie als vollständig atomare Algebra zu einem Potenzmengenkörper isomorph, und zwar zu exp $(\mathbf{N})$. Damit ist $\mathbf{B}$ als $\mathbf{R}_0(\mathbf{N})$ des diskret metrisierten Raumes der natürlichen Zahlen erkannt.

Für atomare Boole-Algebren $\mathbf{B}$ sind die im Satz 1 genannten Bedingungen (1) und (2) für die Realisierung als $\mathbf{R}_0(X)$ bei passendem metrisierbaren X hinreichend, wie die Schlussweise im letzten Teil des vorstehenden Beweises zeigt. Mit unserem nächsten Satz geben wir noch einen weiteren, weniger trivialen Fall an, wo die Bedingungen hinreichend sind.

Satz 2. *Jede separable vollständige Boole-Algebra ist als Boole-Algebra $\mathbf{R}_0(X)$ der regulär offenen Mengen eines gewissen metrisierbaren nulldimensionalen kompakten Raumes realisierbar.*

Wir beweisen allgemeiner den

Satz 2.' *Zu jeder vollständigen Boole-Algebra* $\mathbf{B}$ *vom Dichtigkeitsgrad* $\mathfrak{m}$ *gibt es einen kompakten nulldimensionalen Hausdorffschen Raum* X *vom Gewicht* $\mathfrak{m}$, *so dass* $\mathbf{B}$ *zur Boole-Algebra* $\mathbf{R}_0(X)$ *der regulär offenen Mengen von* X *isomorph ist.*

Beweis. Wir betrachten den Stoneschen Darstellungsraum $M(\mathbf{B})$ von $\mathbf{B}$. Dieser Raum ist infolge der Vollständigkeit von $\mathbf{B}$ extremal zusammenhangslos, d. h. die abgeschlossene Hülle jeder offenen Mengen ist auch wieder offen. Daraus erhält man leicht, dass $\mathbf{B}$ gerade als $\mathbf{R}_0(M(\mathbf{B}))$ realisiert ist. $M(\mathbf{B})$ hat im allgemeinen noch nicht das Gewicht $\mathfrak{m}$. Wir konstruieren aus $M(\mathbf{B})$ einen gewünschten Raum X auf folgende Weise. $\mathfrak{D}$ sei ein dichtes System von $\mathbf{R}_0(M(\mathbf{B}))$ mit der Mächtigkeit $\mathfrak{m}$ $(\geqq \aleph_0)$. Ferner sei

$$\mathfrak{A} = \{A \mid A \in \mathfrak{D} \quad \text{oder} \quad M(\mathbf{B}) - A \in \mathfrak{D}\}\,.$$

Mittels $\mathfrak{A}$ konstruieren wir eine Äquivalenzrelation R auf $M(\mathbf{B})$, indem xRy genau dann gelten soll, wenn x und y sich nicht durch das System $\mathfrak{A}$ trennen lassen. Einzelheiten entnehme man hierzu aus den Beweisausführungen zum Satz 2 unserer Arbeit [5]. Es ergibt sich – wie dort gezeigt wurde – ein nulldimensionaler kompakter Hausdorffscher Raum X als Quotientenraum $M(\mathbf{B})/R$, wobei das Gewicht von $X = M(\mathbf{B})/R$ höchstens gleich $\mathfrak{m}$ ist. Die kanonische Abbildung $\varphi : M(\mathbf{B}) \to X$ ist überdies offensichtlich irreduzibel in dem Sinne, dass keine echte abgeschlossene Teilmenge von $M(\mathbf{B})$ durch φ auf ganz X abgebildet wird. Gemäss des Lemmas 2 unserer Arbeit [3] bewirkt die Abbildung φ einen Isomorphismus der Boole-Algebra $\mathbf{R}_a(M(\mathbf{B}))$ der regulär abgeschlossenen Mengen von $M(\mathbf{B})$ auf die Boole-Algebra $\mathbf{R}_a(X)$ der regulär abgeschlossenen Mengen von X. Damit sind $\mathbf{R}_0(M(\mathbf{B}))$ und $\mathbf{R}_0(X)$ isomorph. Dann muss das Gewicht von X notwendig gleich $\mathfrak{m}$ sein, weil gewiss eine dichte Menge in $\mathbf{R}_0(X)$ von der Mächtigkeit des Gewichtes des Raumes X existiert.

Bemerkung. Einen anderen Beweis des Satzes 2' könnte man unter Benutzung des Sikorskischen Fortsetzungssatzes von Homomorphismen [11, § 33] führen. Dazu geht man von einer dichten Menge D der Mächtigkeit $\mathfrak{m}$ in $\mathbf{B}$ aus. $\mathbf{B}_1$ sei die von D erzeugte Teilalgebra in $\mathbf{B}$. Der Darstellungsraum $M(\mathbf{B}_1)$ hat bei $\mathfrak{m} > \aleph_0$ ein Gewicht $\mathfrak{m}$. Nach dem Sikorskischen Fortsetzungssatz erhält man $\mathbf{B} \cong \mathbf{R}_0(M(\mathbf{B}_1))$. Unser Beweis spielt sich mehr im topologischen Bereich ab. Mit den in [2] durchgeführten Untersuchungen, die Verschärfungen der Untersuchungen von [7] darstellen, stehen topologische Sätze zur Verfügung, die auch den Sikorskischen Satz zu folgern gestatten.

Eine unmittelbare Anwendung des Satzes 2 führt uns zu dem bekannten von Tarski mitgeteilten Ergebnis (siehe [11, S. 120]).

Alle separablen vollständigen atomlosen Boole-Algebren sind zueinander isomorph.

Beweis. Es seien $\mathbf{B}_1$ und $\mathbf{B}_2$ zwei separable vollständig atomlose Boole-Algebren. Sie lassen sich nach Satz 2 als $\mathbf{R}_0(X)$ und $\mathbf{R}_0(Y)$ mit kompakten metrisierbaren nulldimensionalen Räumen X und Y realisiren. X und Y können keine isolierten

Punkte enthalten, weil sonst Atome in $\mathbf{B}_1$ bzw. $\mathbf{B}_2$ vorhanden wären. Nach dem bekannten topologischen Charakterisierungssatz des klassischen Cantorschen Diskontinuums sind X und Y zu dem Cantorschen Diskontinuum $D^{\aleph_0}$ homöomorph. Also sind $\mathbf{R}_0(X)$ und $\mathbf{R}_0(Y)$ isomorph!

Eine weitere Anwendung des Satzes 2 führt auf den

Satz 3. *Die Boole-Algebra $\mathbf{R}_0(D^{\aleph_0})$ der regulär offenen Mengen des Cantorschen Diskontinuums, d. h. die bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte separable vollständige atomlose Algebra, ist eine universelle separable Boole-Algebra, indem nämlich jede separable Boole-Algebra $\mathbf{B}$ einer Teilalgebra von $\mathbf{R}_0(D^{\aleph_0})$ isomorph ist.*

Beweis. Zu der gegebenen separablen Algebra $\mathbf{B}$ betrachten wir den Stoneschen Darstellungsraum $M(\mathbf{B})$. $\mathbf{R}_0(M(\mathbf{B}))$ ist ebenfalls separabel, diese Algebra lässt sich nach Satz 2 als $\mathbf{R}_0(X)$ realisieren, wobei es sich bei X nun einen kompakten nulldimensionalen metrisierbaren Raum handelt. Nach einem Satz von Alexandroff gibt es eine stetige Abbildung $\varphi : D^{\aleph_0} \to X$ des Cantorschen Diskontinuums $D^{\aleph_0}$ auf X. Dann gibt es auch eine stetige Abbildung des zu $D^{\aleph_0}$ gehörenden Projektivraumes $\mathring{D}^{\aleph_0}$ auf den zu X gehörenden Projektivraum $\mathring{X}$ $\mathring{\varphi} : \mathring{D}^{\aleph_0} \to \mathring{X}$ (vgl. [2] bzw. [7]). Durch die Zuordnung $B \to \mathring{\varphi}^{-1}(B)$, $B \in \mathbf{R}_0(\mathring{X})$, wird die Algebra $\mathbf{R}_0(\mathring{X})$ die zu $\mathbf{R}_0(X)$ isomorph ist, isomorph in die Algebra $\mathbf{R}_0(\mathring{D}^{\aleph_0})$ die zu $\mathbf{R}_0(D^{\aleph_0})$ isomorph ist, eingebettet. Damit ist auch $\mathbf{B}$ einer Teilalgebra von $\mathbf{R}_0(D^{\aleph_0})$ isomorph.

Bemerkung. 1. Der Beweis der vorstehenden Aussage hätte ebenfalls ganz innerhalb der Theorie der abstrakten Boole-Algebren unter Verwendung des Sikorskischen Fortsetzungssatzes abgehandelt werden können.

2. Ausser der im Satz 3 als universell erkannten separablen Boole-Algebra $\mathbf{R}_0(D^{\aleph_0})$ gibt es noch eine andere separable universelle Algebra, und zwar haben Horn und Tarski [8] von der Algebra $\exp(\mathbf{N})$ die Universalität gezeigt. $\exp(\mathbf{N})$ ist im Gegensatz zu $\mathbf{R}_0(D^{\aleph_0})$ eine atomare Algebra. Die Universalität von $\exp(\mathbf{N})$ können wir auch aus Satz 3 und weiteren topologischen Theoremen erschliessen. Es gibt nämlich eine stetige Abbildung der Stone-Čech-Erweiterung $\beta\mathbf{N}$ auf $D^{\aleph_0}$. Daraus folgt mit entsprechender Schlussweise wie im Beweis zu Satz 3, dass $\mathbf{R}_0(D^{\aleph_0})$ einer Teilalgebra von $\mathbf{R}_0(\beta\mathbf{N})$ isomorph ist. $\mathbf{R}_0(\beta\mathbf{N})$ wiederum ist zu $\exp(\mathbf{N})$ isomorph. Zufolge der Universalität von $\mathbf{R}_0(D^{\aleph_0})$ ist auch $\exp(\mathbf{N})$ universell. Obgleich beide Algebren $\mathbf{R}_0(D^{\aleph_0})$ und $\exp(\mathbf{N})$ separabel sind, enthalten sie dennoch Teilalgebren, die nicht separabel sind. Diese Tatsache wurde für $\exp(\mathbf{N})$ schon von Horn und Tarski bewiesen.

Die topologische Seite diese Sachverhaltes finden wir in dem folgenden

Hilfssatz 2. $\mathbf{c}$ *bezeichne die Mächtigkeit des Kontinuums. Dann gibt es eine stetige Abbildung $\varphi : \beta\mathbf{N} \to D^{\mathbf{c}}$ der Stone-Čech-Erweiterung des diskreten Raumes $\mathbf{N}$ der natürlichen Zahlen auf das verallgemeinerte Cantorsche Diskontinuums vom Gewicht* $\mathbf{c}$.

Der Beweis des Hilfssatzes stützt sich auf die Fortsetzungseigenschaften stetiger Abbildungen hinsichtlich der Stone-Čech-Erweiterung und die Tatsache, dass D^c eine abzählbare dichte Teilmenge enthält (vgl. [9]). Im Beweis zur Folgerung 1 des Satzes 1 war schon ausgeführt worden, dass die Boole-Algebra $\mathbf{B}(D^c)$ der offen-abgeschlossenen Mengen von D^c einen Dichtigkeitsgrad $\mathbf{c}$ hat. Folglich ist die freie Boole-Algebra mit $\mathbf{c}$ vielen Erzeugenden als eine nicht separable Teilalgebra in exp $(\mathbf{N})$ und auch in $\boldsymbol{R}_0(D^{\aleph_0})$ enthalten.

Literatur

[1] *G. Birkhoff:* Lattice theory. New York. Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, *25* (1948).

[2] *J. Flachsmeyer:* Topologische Projektivräume. Math. Nachr. *26* (1963), 57—66.

[3] *J. Flachsmeyer:* Über das System der regulär offenen (abgeschlossenen) Mengen (Russian). Doklady Akad. Nauk SSSR *156* (1964), 32—34.

[4] *J. Flachsmeyer:* Einige topologische Fragen in der Theorie der Booleschen Algebren. Arch. d. Math. *16* (1965), 25—33.

[5] *J. Flachsmeyer: H*-abgeschlossene Räume als schwach-stetige Bilder kompakter Räume. Math. Zeitschr. *91* (1966), 336—343.

[6] *J. Flachsmeyer:* Zur Theorie der *H*-abgeschlossenen Erweiterungen. Math. Zeitschr. *94* (1966), 349—381.

[7] *A. M. Gleason:* Projective topological spaces. Ill. J. Math. *2* (1958), 482—489.

[8] *A. Horn and A. Tarski:* Measures in Boolean algebras. Trans. Amer. Math. Soc. *64* (1948), 467—497.

[9] *E. Marczewski:* Séparabilité et multiplication cartésienne des espaces topologiques. Fund. Math. *34* (1947), 127—143.

[10] *S. Mardešić and P. Papić:* Continuous images of ordered compacta, the Suslin property and dyadic compacta. Glasnik Mat.-Fiz. Astron. Ser. II. *17* (1962), 3—22.

[11] *R. Sikorski:* Boolean algebras. Berlin—Göttingen—Heidelberg 1960. (2. Auflage 1964).

[12] *M. H. Stone:* The theory of representations for Boolean algebras. Trans. Amer. Math. Soc. *40* (1936), 37—111.

[13] *M. H. Stone:* Applications of the theory of Boolean rings to general topology. Trans. Amer. Math. Soc. *41* (1937), 321—364.

[14] *В. И. Пономарев:* О пространствах, соабсолютных с метрическими. Успехи математических наук *21* N 4 (1966), 100—132.

DEUTSCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN ZU BERLIN
FORSCHUNGSGEMEINSCHAFT,

INSTITUT FÜR REINE MATHEMATIK