ÜBER DIE QUOTIENTENTOPOLOGIE ALS SPUR DER POTENZ EINER TOPOLOGIE

G. GRIMEISEN

Stuttgart

1. Zur Geschichte der in Abschnitt 2 beschriebenen Fragestellung bemerken wir folgendes: Es sei $(E, \mathfrak{U})$ ein uniformer Raum, $\tau(\mathfrak{U})$ die von der uniformen Struktur $\mathfrak{U}$ induzierte Topologie von E, $\mathfrak{F}E$ die Klasse aller bezüglich $\tau(\mathfrak{U})$ abgeschlossenen Teilmengen von E. Nach Bourbaki ([1], p. 145, exercice 7c) läßt sich in der Menge $\mathfrak{F}E$ eine uniforme Struktur $\mathfrak{W}(\mathfrak{U})$ so einführen, daß für jede Äquivalenzrelation R auf E mit $E/R \subseteqq \mathfrak{F}E$ die Spur $(\sigma(\mathfrak{W}(\mathfrak{U})))_{E/R}$ der von $\mathfrak{W}(\mathfrak{U})$ induzierten Topologie $\sigma(\mathfrak{W}(\mathfrak{U}))$ von $\mathfrak{F}E$ in der Menge E/R feiner ist als die Quotiententopologie $\tau(\mathfrak{U})/R$. Ist $(E, \tau, .)$ eine topologische Gruppe mit der Topologie τ und der Operation ., ist ferner $\mathfrak{U}$ ihre rechts-uniforme Struktur, H ein abgeschlossener Normalteiler von $(E, \tau, .)$ und R die Äquivalenzrelation $\{(x, y) \mid (x, y) \in E \times E$ und $x^{-1} . y \in H\}$, so gilt sogar $(\sigma(\mathfrak{W}(\mathfrak{U})))_{E/R} = \tau/R$ (s. Bourbaki [2], p. 31, exercice 5, und Michael [12], p. 158, Proposition 2.6).

2. Entsprechend kann man die Frage nach einer geeigneten Topologie der Potenzmenge $\mathfrak{P}E$ (Michael [12], p. 158 und 180: einer geeigneten Teilmenge von $\mathfrak{P}E$) eines topologischen Raumes (E, τ) aufwerfen, die – relativiert auf die Quotientenmenge E/R bezüglich einer Äquivalenzrelation R auf E – mit der Quotiententopologie τ/R vergleichbar ist oder gar (s. Franklin [4], p. 341) mit dieser übereinstimmt. Michael ([12], p. 180, Bemerkung zur Verallgemeinerung von Proposition 2.7) konstruiert u. a. in der Menge $\mathfrak{P}_0E$ aller nichtleeren Teilmengen von E eine Topologie $\sigma(\tau)$ mit der Eigenschaft (genauer: zwei Topologien dieser Art), daß bezüglich jeder Äquivalenzrelation R auf E die Spur $\sigma(\tau)_{E/R}$ von $\sigma(\tau)$ in der Menge E/R feiner ist als die Quotiententopologie τ/R. Franklin [4] knüpft hieran an und vergröbert (in beiden bei Michael auftretenden Fällen) $\sigma(\tau)$ bei gegebener Äquivalenzrelation R konstruktiv zu einer Topologie $\varrho(R, \tau)$ von $\mathfrak{P}_0E$ mit der Eigenschaft $\varrho(R, \tau)_{E/R} = \tau/R$.

3. In der vorliegenden Note modifiziert Verf. die Resultate Michaels (vgl. unseren Satz 1) und Franklins (vgl. unseren Satz 2) in folgender Weise. Es sei (E, τ) ein topologischer Raum, d. h. E eine Menge und τ eine Abbildung von $\mathfrak{P}E$ in sich mit den Eigenschaften $\tau\emptyset = \emptyset$, $\tau(X \cup Y) = \tau X \cup \tau Y$, $X \subseteqq \tau X$ (für alle $X, Y \in \mathfrak{P}E$) und $\tau \circ \tau = \tau$. Wir verwenden „Topologie" (hier τ) als ein Synonym für „Hüllenoperator". Es werde mit $\mathfrak{P}\tau$ die vom Verf. in [6], p. 189, eingeführte Topologie $\sigma(\tau)$ von $\mathfrak{P}E$

bezeichnet. Wir nennen $\mathfrak{P}\tau$ die *Potenz der Topologie* τ, den topologischen Raum $(\mathfrak{P}E, \mathfrak{P}\tau)$ die *Potenz des topologischen Raumes* (E, τ); in [7], p. 107, wird $(\mathfrak{P}E, \mathfrak{P}\tau)$ der „Potenzraum von (E, τ) bezüglich des Limesoperators" genannt. Der Limes $\mathrm{Lim}_{(\mathfrak{P}\tau)}\, \mathfrak{a}$ eines jeden Filters $\mathfrak{a}$ über $\mathfrak{P}E$ ist nichtleer, da (nach der Definition von $\mathfrak{P}\tau$) $\emptyset \in \mathrm{Lim}_{(\mathfrak{P}\tau)}\, \mathfrak{a}$ gilt; folglich ist $(\mathfrak{P}E, \mathfrak{P}\tau)$ kompakt.

Satz 1. *Ist R eine Äquivalenzrelation auf E, so ist die Spur $(\mathfrak{P}\tau)_{E/R}$ von $\mathfrak{P}\tau$ in der Menge E/R feiner als die Quotiententopologie τ/R.* [1])

Beweis: s. Satz 1 in [9].

Bemerkung 1. Beachtet man, daß bei gegebener Teilmenge $\mathfrak{F}$ von $\mathfrak{P}E$ der Limesoperator Lim_ϱ bezüglich der Spur $\varrho = (\mathfrak{P}\tau)_{\mathfrak{F}}$ der Topologie $\mathfrak{P}\tau$ in der Menge $\mathfrak{F}$ auf Grund der Definition von $\mathfrak{P}\tau$ der Äquivalenzgleichung

$$X \in \mathrm{Lim}_\varrho (f, I, \mathfrak{a}) \Leftrightarrow X \subseteqq \lim\inf_\tau (f, I, \mathfrak{a}) \tag{3.1}$$

für alle $X \in \mathfrak{F}$ und alle gefilterte Familien $(f, I, \mathfrak{a})$ über $\mathfrak{F}$ genügt (Genaueres in [8] im Anschluß an den dortigen Satz 3), so erhält man Satz 1 als Folgerung der Aussage (2) bei FLACHSMEYER [3], p. 3, die inhaltlich besagt, daß für eine beliebige Äquivalenzrelation R auf E

$$X \subseteqq \lim\inf_\tau (f, I, \mathfrak{a}) \Rightarrow X \in \mathrm{Lim}_{(\tau/R)} (f, I, \mathfrak{a}) \tag{3.2}$$

für alle $X \in E/R$ und alle gefilterte Familien $(f, I, \mathfrak{a})$ über E/R richtig ist.

Satz 2. *Ist R eine Äquivalenzrelation auf E und gilt die nachstehende Aussage* (a), *so ist* $(\mathfrak{P}\tau)_{E/R} = \tau/R$.

(a) *Zu jedem $(x, y) \in R$ gibt es eine stetige Abbildung φ von (E, τ) in (E, τ) mit der Eigenschaft $(x, y) \in \varphi \subseteqq R$.*

Beweis: s. Satz 2 in [9].

Bemerkung 2. Kombiniert man (3.1) mit Satz 2 bei FLACHSMEYER [3], p. 3, und definiert man die *Unterhalb-Stetigkeit einer Äquivalenzrelation R auf E bezüglich* τ wie in Definition 1 bei FLACHSMEYER [3], p. 2, so erhält man

(3.3) *R ist dann und nur dann unterhalb stetig bezüglich τ, wenn $(\mathfrak{P}\tau)_{E/R} = \tau/R$.*

Gilt also (a), so ist nach unserem Satz 2 die Äquivalenzrelation R unterhalb stetig bezüglich τ. — In der Bedingung (a) wird φ selbstverständlich als Relation aufgefaßt: $(x, y) \in \varphi$ bedeutet dasselbe wie $y = \varphi(x)$.

---

[1]) Ist $M \subseteq E$, so heißt die Abbildung τ_M: $X \to M \cap \tau X$ $(X \in \mathfrak{P}M)$ die *Spur der Topologie τ in der Menge M.* Sind τ_1, τ_2 Topologien von E, so heißt τ_1 *feiner als* τ_2, wenn $\tau_1 X \subseteq \tau_2 X$ für alle $X \in \mathfrak{P}E$.

Während bei FRANKLIN, loc. cit., die oben erwähnte Topologie $\varrho(R, \tau)$ durch R und τ bestimmt wird, hängt $\mathfrak{P}\tau$ nicht von R ab. An die Stelle der Bindung von $\varrho(R, \tau)$ an R tritt in Satz 2 die Verträglichkeitsbedingung (a) für R und τ.

Ist insbesondere $(E, \tau, .)$ eine topologische Gruppe ($.$ die Gruppenoperation, x^{-1} das zu x inverse Element) und ist H eine Untergruppe von E, so ist die Äquivalenzrelation

$$R = \{(x, y) \mid (x, y) \in E \times E \text{ und } x^{-1} . y \in H\}$$

mit τ im Sinne von (a) in Satz 2 verträglich. Der „homogene Raum" $(E/R, \tau/R)$ (s. KOWALSKY [11], p. 231, oder BOURBAKI [2], p. 17–18, dort mit einer algebraischen Struktur versehen) hat also nach Satz 2 die Topologie $(\mathfrak{P}\tau)_{E/R}$ (dies folgt auch aus (3.3), Satz 1 bei FLACHSMEYER [3], p. 2, und Proposition 14 bei BOURBAKI [2], p. 18). Ist H spezieller ein Normalteiler, so ist die übliche Topologie der Faktorgruppe E/H identisch mit $(\mathfrak{P}\tau)_{E/H}$.

4. Um zu demonstrieren, daß $\mathfrak{P}\tau$ nicht nur für den eben diskutierten Zweck von Nutzen ist, geben wir einige andere interessante Spuren von $\mathfrak{P}\tau$ an. Es sei $(E, \tau, .)$ eine topologische Semigruppe, d. h. ein topologischer Raum (E, τ), in dem eine assoziative und stetige Abbildung von $(E, \tau) \times (E, \tau)$ in (E, τ) vorliegt. Für alle $(X, Y) \in \mathfrak{P}E \times \mathfrak{P}E$ definieren wir $X . Y$ durch

$$X . Y = \{x . y \mid x \in X \textit{ und } y \in Y\} .$$

Satz 3. *Ist $\mathfrak{F}$ eine Teilmenge von $\mathfrak{P}E$ mit der Eigenschaft, daß $(X, Y) \to$ $\to X . Y$ $((X, Y) \in \mathfrak{F} \times \mathfrak{F})$ eine Operation in $\mathfrak{F}$ ist, so ist $(\mathfrak{F}, (\mathfrak{P}\tau)_{\mathfrak{F}}, .)$ bezüglich dieser Operation eine topologische Semigruppe.*

Beweis: Satz 6 in [8]. (Die Assoziativität von $.$ ist unmittelbar klar.)

Beispiele für Teilmengen $\mathfrak{F}$ von $\mathfrak{P}E$ mit $X . Y \in \mathfrak{F}$ für alle $(X, Y) \in \mathfrak{F} \times \mathfrak{F}$ sind: a) $\mathfrak{F} = \mathfrak{P}E$; b) $\mathfrak{F}$ = Klasse aller höchstens einelementigen Teilmengen von E; c) es sei $(E, \tau, .)$ eine topologische Gruppe und $\mathfrak{F}$ die Klasse aller offenen Teilmengen von E (s. KOWALSKY [11], p. 229, Satz 36.5); d) es sei $(E, \tau, .)$ eine topologische Gruppe und $\mathfrak{F}$ die Klasse aller kompakten Teilmengen von E (s. PONTRJAGIN [13], p. 113, und MICHAEL [12], p. 158, (1)); e) es sei $(E, \tau, .)$ eine topologische Gruppe und $\mathfrak{F}$ die zu einem Normalteiler H von E gehörige Faktorgruppe E/H.

Beispielsweise ist die Menge aller abgeschlossenen Teilmengen einer topologischen Semigruppe $(E, \tau, .)$ im allgemeinen *keine* solche Teilmenge $\mathfrak{F}$ von $\mathfrak{P}E$ (s. etwa das Beispiel bei HILLE-PHILLIPS [10], p. 262 unten).

Das Beispiel e) führt uns zu Satz 2 insofern zurück, als Satz 2 die Richtigkeit von Satz 3 im Beispiel e) nach sich zieht. In den Beispielen a) bis d) haben (zufolge (3.1) und $\emptyset \in \mathfrak{F}$) alle Filter $\mathfrak{a}$ über $\mathfrak{F}$ bezüglich der Topologie $\varrho = (\mathfrak{P}\tau)_{\mathfrak{F}}$ einen nichtleeren Limes $\mathrm{Lim}_\varrho\, \mathfrak{a}$; in diesen Fällen hat man nämlich $\emptyset \in \mathrm{Lim}_\varrho\, \mathfrak{a}$; folglich ist dann $(\mathfrak{F}, (\mathfrak{P}\tau)_{\mathfrak{F}})$ kompakt.

5. Eine natürliche Einführung von $\mathfrak{P}\tau$ stützt sich auf die Diskussion von Limesräumen im Sinne von [6], p. 187. Verf. benützt die vorliegende Gelegenheit, zwei einfachere Formulierungen des in [6], p. 187, vorkommenden Axioms (Lim 1) mitzuteilen.

Es sei, für jede Menge M, ΦM die Klasse aller gefilterten Familien über M. Diejenigen gefilterten Familien $(f, I, \mathfrak{a})$ über M, bei denen f die identische Selbstabbildung e_I von I ist (bei denen folglich $I \subseteqq M$ gilt) wollen wir kurz mit $\mathfrak{a}$, also mit dem auf I vorliegenden Filter $\mathfrak{a}$ bezeichnen. Die Klasse aller gefilterten Familien $(f, I, \mathfrak{a})$ über M dieser Art bezeichnen wir mit $\Phi_0 M$. (Durch Angabe eines Filters $\mathfrak{a} \in \Phi_0 M$ ist dann I als $I = \bigcup_{A \in \mathfrak{a}} A$ bestimmt.) Ist $\mathfrak{a}$ ein Filter über einer beliebigen nichtleeren Menge, so bezeichnen wir wie in [5], p. 322, mit $\mathscr{G}\mathfrak{a}$ die Menge $\{C \mid C \subseteqq \bigcup_{A \in \mathfrak{a}} A$ und $C \cap A \neq \emptyset$ für alle $A \in \mathfrak{a}\}$.

Satz 4. *Es sei E eine Menge und* Lim *eine Abbildung von ΦE in $\mathfrak{P}E$. Dann sind folgende Aussagen* (Lim 1), (Lim 1'), (Lim 1'') *äquivalent.*

(Lim 1) *Für alle $x \in E$ und alle $(f, I, \mathfrak{a}) \in \Phi E$ gilt:*

$x \in \mathrm{Lim}\,(f, I, \mathfrak{a})$ *besteht genau dann, wenn es zu jeder Menge $S \subseteqq E$ mit der Eigenschaft „$f(i) \in S$ für $\mathfrak{a}$-konfinal viele $i \in I$" ein $y \in \Phi S$ mit der Eigenschaft $x \in \mathrm{Lim}\, y$ gibt.*

(Lim 1') $\mathrm{Lim}\,(f, I, \mathfrak{a}) = \bigcap_{C \in \mathscr{G}\mathfrak{a}} \bigcup_{y \in \Phi f C} \mathrm{Lim}\, y$ *für alle* $(f, I, \mathfrak{a}) \in \Phi E$.

(Lim 1'') *Es gilt* (a) *und* (b):

(a) $\mathrm{Lim}\, \mathfrak{a} = \bigcap_{C \in \mathscr{G}\mathfrak{a}} \bigcup_{\mathfrak{b} \in \Phi_0 C} \mathrm{Lim}\, \mathfrak{b}$ *für alle* $\mathfrak{a} \in \Phi_0 E$.

(b) $\mathrm{Lim}\,(f, I, \mathfrak{a}) = \mathrm{Lim}\, f\mathfrak{a}$ *für alle* $(f, I, \mathfrak{a}) \in \Phi E$.

Beweis. 1. Es sei $(f, I, \mathfrak{a}) \in \Phi E$ und $\mathfrak{s}$ die Menge aller Mengen S mit der Eigenschaft $f(i) \in S \subseteqq E$ für $\mathfrak{a}$-konfinal viele $i \in I$. Die Äquivalenz von (Lim 1) und (Lim 1') folgt daraus, daß es zu jedem $S \in \mathfrak{s}$ eine Menge $C \in \mathscr{G}\mathfrak{a}$ gibt mit $fC \subseteqq S$ und daß umgekehrt $f(\mathscr{G}\mathfrak{a}) \subseteqq \mathfrak{s}$ gilt.

2. Es gelte (Lim 1'). Ist $(f, I, \mathfrak{a}) \in \Phi E$, so gilt dann

$$\mathrm{Lim}\, f\mathfrak{a} = \bigcap_{D \in \mathscr{G} f\mathfrak{a}} \bigcup_{y \in \Phi D} \mathrm{Lim}\, y = \bigcap_{C \in \mathscr{G}\mathfrak{a}} \bigcup_{y \in \Phi f C} \mathrm{Lim}\, y = \mathrm{Lim}\,(f, I, \mathfrak{a}).$$

Hierin gilt das zweite Gleichheitszeichen wegen $\mathscr{G} f\mathfrak{a} = f\mathscr{G}\mathfrak{a}$ (s. Satz 6 in [5]). Damit haben wir (b) bewiesen. Es sei $\mathfrak{a} \in \Phi_0 E$. Dann gilt nach (Lim 1') und (b)

$$\mathrm{Lim}\, \mathfrak{a} = \bigcap_{C \in \mathscr{G}\mathfrak{a}} \bigcup_{y \in \Phi C} \mathrm{Lim}\, y = \bigcap_{C \in \mathscr{G}\mathfrak{a}} \bigcup_{\mathfrak{b} \in \Phi_0 C} \mathrm{Lim}\, \mathfrak{b}.$$

Somit gilt (a) und damit insgesamt (Lim 1'').

3. Es gelte (Lim 1″). Verwendet man der Reihe nach (b), (a), $\mathscr{G}f\mathfrak{a} = f\mathscr{G}\mathfrak{a}$, (b), so erhält man für jedes $(f, I, \mathfrak{a}) \in \Phi E$

$$\operatorname{Lim}(f, I, \mathfrak{a}) = \operatorname{Lim} f\mathfrak{a} = \bigcap_{D \in \mathscr{G}f\mathfrak{a}} \bigcup_{\mathfrak{b} \in \Phi_0 D} \operatorname{Lim} \mathfrak{b} = \bigcap_{C \in \mathscr{G}\mathfrak{a}} \bigcup_{\mathfrak{b} \in \Phi_0 fC} \operatorname{Lim} \mathfrak{b} = \bigcap_{C \in \mathscr{G}\mathfrak{a}} \bigcup_{y \in \Phi fC} \operatorname{Lim} y$$

und damit die Gültigkeit von (Lim 1′). Dies war zu zeigen.

Literatur

[1] *N. Bourbaki:* Topologie générale, Chap. I—II. 2. Aufl., Actual. Sci. Industr., *1142* (1951).

[2] *N. Bourbaki:* Topologie générale, Chap. III—IV. 2. Aufl., Actual. Sci. Industr., *1143* (1951).

[3] *J. Flachsmeyer:* Über halbstetige Zerlegungen topologischer Räume. Math. Nachr. *24* (1962), 1—12.

[4] *S. P. Franklin:* Quotient topologies from power topologies. Arch. Math. *15* (1964), 341—342.

[5] *G. Grimeisen:* Gefilterte Summation von Filtern und iterierte Grenzprozesse. I. Math. Annalen *141* (1960), 318—342.

[6] *G. Grimeisen:* Eine natürliche Topologisierung der Potenzmenge eines topologischen Raumes. Proc. Symp. on General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra, Prague Sept. 1961, Czechosl. Acad. Sci. Prague 1962, 187—190.

[7] *G. Grimeisen:* Zur Stufenhebung bei topologischen Räumen. Math. Annalen *147* (1962), 95—109; *148* (1962), 82.

[8] *G. Grimeisen:* Topologische Räume, in denen alle Filter konvergieren. Math. Annalen (erscheint 1967).

[9] *G. Grimeisen:* Die Quotiententopologie als Spur der Potenz einer Topologie. Math. Annalen (erscheint 1967).

[10] *E. Hille and R. S. Phillips:* Functional analysis and semi-groups. Amer. Math. Soc., Coll. Publ., *31*, Providence 1957.

[11] *H. J. Kowalsky:* Topologische Räume. Basel-Stuttgart 1961.

[12] *E. Michael:* Topologies on spaces of subsets. Trans. Amer. Math. Soc. *71* (1951), 152—182.

[13] *L. S. Pontrjagin:* Topologische Gruppen, Teil 1. Leipzig 1957.