RICHTUNGSRÄUME UND RICHTUNGSDIMENSION

E. DEÁK

Budapest

Eine *Richtungsstruktur* (RS) bzw. *ordentliche RS* einer nichtleeren Menge X ist ein nichtleeres System $\mathfrak{R}$ von *Richtungen* $\mathscr{R}$ von X, wobei jedes $\mathscr{R}$ eine Menge von Paaren (G, F) $(G \subseteq F \subseteq X)$ mit folgenden Eigenschaften ist: (a) $(\emptyset, \emptyset)$, $(X, X) \in \mathscr{R}$, (b) $(G_1, F_1), (G_2, F_2) \in \mathscr{R} \Rightarrow F_1 \subseteq G_2$ oder $F_2 \subseteq G_1$, (c) die Familie aller G (aller F) ist bezüglich beliebiger Vereinigung (Durchschnittsbildung) abgeschlossen, bzw. noch (d) $\bigcup\{F \setminus G \mid (G, F) \in \mathscr{R}\} = X$. Dies ist eine Verallgemeinerung der Halbraumstruktur eines Vektorraumes. Eine RS $\mathfrak{R}$ einer Menge X wird nun in zweifacher Weise mit einer Topologie $\mathscr{T}$ von X verbunden, je nachdem $\mathfrak{R}$ oder $\mathscr{T}$ zuerst gegeben ist:

I. Ein *Richtungsraum* (RR) ist ein Paar $(X, \mathfrak{R})$, X eine nichtleere Menge und $\mathfrak{R}$ eine ordentliche RS derselben mit $x \in X \Rightarrow \{x\} = \bigcap\{F \setminus G \mid (G, F \in \mathscr{R}, x \in F \setminus G\ (\mathscr{R} \in \mathfrak{R})\}$. Ein RR $(X, \mathfrak{R})$ wird durch Hinzunahme derjenigen Topologie $\mathscr{T}$ von X, die durch alle Mengen G und $X \setminus F$ als Subbasis induziert wird, zu einem *topologischen RR* (TRR) $(X, \mathfrak{R}, \mathscr{T})$ ergänzt. $(X, \mathscr{T})$ ist dabei immer ein TYCHONOFFscher Raum. Der Begriff des RR-es bzw. TRR-es ist eine Verallgemeinerung des Begriffs des Vektorraumes bzw. des lokalkonvexen Raumes mit der schwachen Topologie.

II. Umgekehrt kann die Topologie $\mathscr{T}$ eines beliebigen topologischen Raumes $(X, \mathscr{T})$ durch RS-en $\mathfrak{R}$ in der besagten Weise induziert werden; dies sind die *RS-en des Raumes.* (Ein T_0-Raum hat dann und nur dann ordentliche RS-en, wenn er vollständig regulär ist.) Dadurch wird jedem topologischen Raum eine bestimmte Kardinalzahl, seine *Richtungsdimension* (RD) zugeordnet: dies ist das Minimum der Mächtigkeiten aller RS-en des Raumes.

In beiden Fällen konnte eine kleine Theorie aufgebaut werden. Da die konvexen Mengen eines Vektorraumes dadurch charakterisiert sind, dass sie mit je zwei ihrer Punkte auch den Durchschnitt aller diese Punkte enthaltenden Halbräume (d. h. die gerade Verbindungsstrecke) enthalten, kann der Konvexitätsbegriff auf Mengen in RR-en $(X, \mathfrak{R})$ übergetragen werden, wobei die Mengen G und F sowie ihre Komplemente die Rolle der Halbräume übernehmen (und auch so genannt werden). Eine besondere Bedeutung erlangen hierbei die sog. *stark $\mathfrak{R}$-konvexen Mengen,* die als Durchschnitt von $\mathfrak{R}$-Halbräumen darstellbar sind; sie ermöglichen die Einführung eines Analogons des Begriffs des inwendigen Punktes sowie eine Verallgemeinerung des Begriffs des Extremalpunktes für RR-e. Das Hauptergebnis ist der Satz: *jede* *kompakte und stark $\mathfrak{R}$-konvexe Menge E eines* TRR-*es* $(X, \mathfrak{R}, \mathscr{T})$ *ist die stark $\mathfrak{R}$-konvexe Hülle der Menge der $\mathfrak{R}$-Extremalpunkte von E, und es zeigt sich, dass dies eine Verallgemeinerung einer äquivalenten Fassung des Satzes von* KREIN-MILMAN *ist.*

Im zweiten Falle können mehrere zu entsprechenden Sätzen der MENGER-URYSOHNschen Dimensionstheorie analoge Sätze (Produkt-, Vereinigungs-, Kompaktifizierungssatz) für die RD abgeleitet werden. Eine wesentliche Abweichung dieser beiden Dimensionsbegriffe zeigt sich am klarsten darin, *dass für jedes natürliche n der n-dimensionale euklidische Raum ein Universalraum aller solchen separablen metrischen Räume ist, deren* RD *n nicht überschreitet.* Dieses Hauptergebnis wird mittels einiger Sätze, die Fragen der Einbettung topologischer Räume in das Produkt von ordnungstopologischen Räumen behandeln, gewonnen; es finden sich darunter ein entsprechendes Analogon und eine Verallgemeinerung des TYCHONOFFschen Einbettungssatzes.

Im Literaturverzeichnis sind Publikationen angegeben, in welchen ich bisher dieses Thema behandelt habe.

Literatur

[1] *E. Deák:* Ein neuer topologischer Dimensionsbegriff. Revue Roum. Math. Pures Appl. *10* (1965), 31—42.

[2] *E. Deák:* Eine vollständige Charakterisierung der Teilräume eines euklidischen Raumes mittels der Richtungsdimension. Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci. *9* (1965), 437—465.

[3] *E. Deák:* Einige Beziehungen der Richtungsdimension zu den klassischen Dimensionsbegriffen der allgemeinen Topologie. Mathematische Nachrichten (im Druck).

[4] *E. Deák:* Bemerkungen zu meiner vorangehenden Arbeit „Ein neuer topologischer Dimensionsbegriff". Revue Roum. Pures Appl. (im Druck).

[5] *E. Deák:* Eine Verallgemeinerung des Begriffs des linearen Raumes und der Konvexität. Ann. Univ. Sci. Budapest. Sectio Math. *9* (1966), 45—59.

[6] *E. Deák:* Topologische Richtungsräume — eine Verallgemeinerung des Begriffs des lokalkonvexen Raumes mit der schwachen Topologie. Studia Sci. Math. Hung. *1* (1966), 297—308.

[7] *E. Deák:* Extremalpunktsbegriffe für Richtungsräume und eine Verallgemeinerung des Krein-Milmanschen Satzes für topologische Richtungsräume. Acta Math. (im Druck).