Klára Császár

Abgeschwächte Trennungsaxiome

In: (ed.): General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra, Proceedings of the second Prague topological symposium, 1966. Academia Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, Praha, 1967. pp. 103--104.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/700820

ABGESCHWÄCHTE TRENNUNGSAXIOME

K. CSÁSZÁR

Budapest

Das bekannte Rieszsche Trennungsaxiom (T_1), ebenso wie das Hausdorffsche Trennungsaxiom (T_2) kann man in folgende Axiome (T_0) und (R) bzw. (H) einteilen:

(T_0): Sind x und y zwei verschiedene Punkte des topologischen Raumes E, so besitzt mindestens einer dieser Punkte eine Umgebung, die den anderen nich enthält.

(R): Besitzt der Punkt x eine Umgebung, die den Punkt y nicht enthält, so besitzt auch y eine Umgebung, die x nicht enthält.

(H): Besitzt der Punkt x eine Umgebung, die den Punkt y nicht enthält, so haben x und y fremde Umgebungen.

Ist E ein topologischer Raum und besteht $A \subset E$, so sagen wir z. B., dass E das Axiom (T_0) bis auf A erfüllt (der Raum ein T_{0A}-Raum ist), wenn von zwei verschiedenen Punkten x und y, die nicht beide zu A gehören, mindestens einer eine, den anderen nicht enthaltende Umgebung besitzt. Ähnliche relativisierte Formen der Axiome (R), (H), (T_1) und (T_2) lassen sich leicht angeben.

Es gilt nun die folgende Bemerkung:

Ist der Raum E bis auf $A \subset E$ ein T_0-, R-, bzw. T_1-Raum, ist weiterhin A als Unterraum von E eine T_0-, R-, bzw. T_1-Raum, dann ist auch E ein T_0-, R-, bzw. T_1-Raum.

Eine ähnliche Bemerkung besteht für die Axiome (H) und (T_2) nur unter der Bedingung, dass A in E dicht ist.

Wir untersuchen im folgenden die Invarianzeigenschaften der Axiome (T_0), (R) und (H) bei „strikten", insbesondere bei Alexandroffschen und Wallmanschen Raumerweiterungen.

Sei im folgenden E ein topologischer Raum und $E' \supset E$. Zu jedem Punkt $x \in E'$ sei ein offener Filter $\mathfrak{s}(x)$ zugeordnet, speziell für $x \in E$ bestehe $\mathfrak{s}(x) = \mathfrak{v}(x)$, wobei $\mathfrak{v}(x)$ den Umgebungsfilter von $x \in E$ bezeichnet. Wir setzen $h(X) = \{x : x \in E', X \in \mathfrak{s}(x)\}$ für $X \subset E$. Die Mengen $h(G)$, wobei G die offenen Teilmengen von E durchläuft, bilden die Basis einer Topologie auf E', und zwar der gröbsten Topologie auf E' mit der Eigenschaft, dass die Spur in E des Umgebungsfilters jedes Punktes $x \in E'$ mit $\mathfrak{s}(x)$ zusammenfällt; sie heisst die zum Filtersystem $\{\mathfrak{s}(x) : x \in E'\}$ gehörende „strikte" Erweiterung.

Man kann das Filtersystem $\{\mathfrak{s}(x)\}$ betreffende Bedingungen angeben, damit E' den Axiomen (T_0), (R), (T_1), (H), (T_2) genügt.

Bezeichne speziell E^* die Alexandroffsche „einpunktige" Erweiterung des Raumes E. Es gelten dann die folgenden Bemerkungen: E^* ist ein T_{0E}-Raum, demgemäss ein T_0-Raum, sobald E ein T_0-Raum ist. Wenn E ein R-Raum ist, dann ist E^* ein R-Raum, und ein T_{1E}-Raum. E^* ist genau dann ein H-Raum, wenn E ein lokalkompakter H-Raum ist.

In der Theorie der Wallmanschen Erweiterung von T_1-Räumen spielen bekanntlich die ultraabgeschlossenen Filter eine grundlegende Rolle, und es ist von Bedeutung, dass in einem T_1-Raum E die Filter $\hat{x} = \{X : x \in X \subset E\}$ $(x \in E)$ ultraabgeschlossene Filter sind. Nun kann man zeigen, dass in einem R-Raum E die Filter $[x] = \{X : \overline{\{x\}} \subset X \subset E\}$ $(x \in E)$ ultraabgeschlossen sind, und mit Hilfe dieser Bemerkung kann man die Theorie der Wallmanschen Erweiterung auf R-Räume übertragen. Bezeichnet E'' die Wallmansche Erweiterung des R-Raumes E, so ist E'' ein kompakter R-Raum, der genau dann ein H-Raum ist, wenn E normal ist; in diesem Fall ist E'' sogar ein T_{2E}-Raum.