M. Novotný

Idealtopologien auf geordneten Mengen

In: (ed.): General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra, Proceedings of the second Prague topological symposium, 1966. Academia Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, Praha, 1967. pp. 274--275.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/700817

IDEALTOPOLOGIEN AUF GEORDNETEN MENGEN

M. NOVOTNÝ

Brno

Sei P eine geordnete Menge, $\mathfrak{m}$ eine unendliche Kardinalzahl. Die Menge $I \subseteqq P$ heißt $\mathfrak{m}$-*Ideal*, wenn für jedes M mit $\emptyset \neq M \subseteqq I$ und $|M| < \mathfrak{m}$ die Beziehung $M^{*+} \subseteqq I$ gilt. Ein $\mathfrak{m}$-Ideal I nennen wir *total irreduzibel*, wenn für jede Familie I^ν $(\nu \in N,\ N \neq \emptyset)$ von $\mathfrak{m}$-Idealen aus $I = \bigcap_{\nu \in N} I^\nu$ stets die Existenz eines Index $\nu_0 \in N$ mit $I^{\nu_0} = I$ folgt. Eine geordnete Menge P heißt *aufwärts* $\mathfrak{m}$-*gerichtet*, wenn für jede nicht leere Menge $M \subseteqq P$ mit $|M| < \mathfrak{m}$ eine obere Schranke in P existiert.

Im Satz 1 werden alle total irreduziblen $\mathfrak{m}$-Ideale eines Kardinalproduktes $\prod_{\nu \in N} P_\nu$ beschrieben; pr_ν ist die natürliche Projektion des Produktes auf P_ν.

Satz 1. *Sei* $\mathfrak{m}$ *eine unendliche Kardinalzahl,* $N \neq \emptyset$ *eine Menge mit Für eine,* P_ν *eine nicht leere aufwärts* $\mathfrak{m}$-*gerichtete geordnete Menge für jedes* $\nu \in N$. $|N| < \mathfrak{m}$ *Menge* $I \subseteqq \prod_{\nu \in N} P_\nu$ *sind folgende Aussagen äquivalent*:

(A) *I ist ein total irreduzibles* $\mathfrak{m}$-*Ideal.*

(B) *Es gibt einen Index* $\nu_0 \in N$ *und ein total irreduzibles* $\mathfrak{m}$-*Ideal* I_{ν_0} *von* P_{ν_0} *so, daß* $I = pr_{\nu_0}^{-1} I_{\nu_0}$ *gilt.*

Alle Begriffe und der Satz lassen sich dualisieren.

Unter einer $\mathfrak{m}$-*Idealtopologie* auf einer geordneten Menge verstehen wir eine Topologie, bei welcher das System, welches aus allen total irreduziblen $\mathfrak{m}$-Idealen und aus allen total irreduziblen dualen $\mathfrak{m}$-Idealen besteht, eine Subbasis für offene Mengen bildet.

Aus dem Satz 1 ergibt sich

Satz 2. *Sei* $\mathfrak{m}$ *eine unendliche Kardinalzahl,* $N \neq \emptyset$ *eine Menge mit* $|N| < \mathfrak{m}$, P_ν *eine nicht leere aufwärts und abwärts* $\mathfrak{m}$-*gerichtete geordnete Menge für jedes* $\nu \in N$. *Dann ist die* $\mathfrak{m}$-*Idealtopologie auf* $\prod_{\nu \in N} P_\nu$ *mit der Produkttopologie aller* $\mathfrak{m}$-*Idealtopologien auf* P_ν *identisch.*

FUCHSOVÁ hat zu jedem $\mathfrak{m} > \aleph_1$ eine einfach geordnete Menge $C_{\mathfrak{m}}$ ohne Lücken und Sprünge so konstruiert, daß für jedes Paar von regulären unendlichen Kardinalzahlen $\mathfrak{p} < \mathfrak{n} < \mathfrak{m}$ die $\mathfrak{p}$-Idealtopologie von der $\mathfrak{n}$-Idealtopologie auf $C_{\mathfrak{m}}$ verschieden ist. SKULA hat dann gezeigt, daß man zu jedem $\mathfrak{m} > \aleph_1$ eine (teilweise) geordnete Menge $D_{\mathfrak{m}}$ so kontruieren kann, daß für jedes Paar $\mathfrak{p} < \mathfrak{n} < \mathfrak{m}$ von unendlichen Kardinalzahlen die $\mathfrak{p}$-Idealtopologie und $\mathfrak{n}$-Idealtopologie auf $D_{\mathfrak{m}}$ voneinander verschieden sind.

Literatur

[1] *J. Mayer und M. Novotný:* On some topologies on products of ordered sets. Archivum mathematicum, Brno *1* (1965), 251—257.