V. M. Tikhomirov; L. A. Tumarkin

О поперечниках Урысона n-мерной Эвклидовой сферы

In: Josef Novák (ed.): General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra, Proceedings of the Third Prague Topological Symposium, 1971. Academia Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, Praha, 1972. pp. 441--442.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/700803

О ПОПЕРЕЧНИКАХ УРЫСОНА n-МЕРНОЙ ЭВКЛИДОВОЙ СФЕРЫ

В. М. ТИХОМИРОВ и Л. А. ТУМАРКИН

Москва

1. Пусть F — компактное метрическое пространство (с фиксированной метрикой). Поперечником Урысона $d_k^U(F)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, называется нижняя грань чисел $\varepsilon > 0$ таких, что имеется замкнутое ε-покрытие F кратности $k + 1$ [1].

Для компактов, лежащих в банаховом пространстве, имеются и другие характеристики их „массивности", именуемые поперечниками: поперечники по Александрову, Колмогорову, Бернштейну, Гельфанду [2] и ряд других. Поперечники во всех смыслах образуют монотонную последовательность: $d_0(F) \geqq \geqq d_1(F) \geqq \ldots$

Представляют интерес фигуры, у которых все ненулевые поперечники одинаковы. Для поперечников во всех перечисленных смыслах, кроме урысоновского, за такую фигуру, расположенную в гильбертовом пространстве, можно принять n-мерный шар (то есть центральное сечение шара в гильбертовом пространстве n-мерной плоскостью). К. А. Ситников [3] показал, что если эвклидово пространство само n-мерно, то шары в этом пространстве суть единственные фигуры, для которых $d_0 = d_1 = \ldots = d_{n-1}$, где d_k — поперечники по Александрову.

В тридцатых годах одним из авторов настоящей заметки была высказана гипотеза, что для n-мерной эквлидовой сферы (то есть границы $(n + 1)$-мерного шара) все ненулевые поперечники по Урысону одинаковы. В случае $n = 2$ так оно и есть [2].

2. Целью настоящей заметки является доказательство следующей теоремы, в которой E^{n+1} есть $(n + 1)$-мерное эвклидово пространство, где норма вектора $x = (x_1, \ldots, x_{n+1})$ определяется равенством $\|x\| = \sqrt{(x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2)}$, а

$$S^n = \left\{x \in E^{n+1} : \sum_{k=1}^{n+1} x_k^2 = 1\right\}.$$

Теорема. $d_K^U(S^n) = 2$ при $0 \leqq k \leqq (n - 1)/2$.

Доказательство. Пусть $[C_1, \ldots, C_M]$ есть некоторое замкнутое покрытие S^n кратности $k + 1$, где $k \leqq (n - 1)/2$. Обозначим через C_i^δ δ-раздутие множеств

$C_i \subset S^n$:

$$C_i^\delta = \{y \in S^n : \inf_{x \in C_i} \|x - y\| < \delta\}, \quad i = 1, \ldots, M.$$

При достаточно малом $\delta > 0$ $[C_1^\delta, \ldots, C_M^\delta]$ есть октрытое покрытие S^n той же кратности $k + 1$.

Обозначим через $\mathcal{N}$ нерв покрытия $[C_1^\delta, \ldots, C_M^\delta]$ [4]. Реализуем $\mathcal{N}$ гомеоморфно в $E^{2k+1} \subset E^n$, что возможно в силу неравенства между k и n [4]. Пусть F — каноническое отображение S^n в $\mathcal{N} \subset E^n$ [4].

В силу теоремы Борсука об антиподах [5] найдутся две диаметрально-противоположные точки x_0 и $-x_0$, принадлежащие S^n, отображающиеся в одну точку $x \in \mathcal{N}$. В силу построения канонического отображения x_0 и $-x_0$ принадлежат одному и тому же множеству $C_{i_0}^\delta$. Значит, диаметр $C_{i_0}^\delta$ равен двум. В силу произвольности δ максимальный диаметр элементов покрытия $[C_1, \ldots, C_M]$ таже равен двум. В силу же произвольности покрытия $[C_1, \ldots, C_M]$ мы получаем, что $d_k^U(S^n) \geqq 2$. Откуда в силу того, что $d_0^U(S^n) = 2$ и из монотонности поперечников мы получаем, что $d_k^U(S^n) = 2$, $0 \leqq k \leqq (n-1)/2$, что и требовалось.

Литература

[1] *П. С. Урысон:* О канторовых многообразиях I. Труды по топологии и другим областям математики, т. 1, ГИТТЛ, Москва, 1951, 483.

[2] *В. М. Тихомиров и Л. А. Тумаркин:* О поперечниках компактов. Труды Международного Симпозия по топологии и ее применениях, Херцег-Нови, 25—31. 8. 1968, Югославия. Београд, 1969, 310—316.

[3] *К. А. Ситников:* Über die Rundheit der Kugel. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. II *9* (1958), 213—215.

[4] *Л. С. Понтрягин:* Основы комбинаторной топологии. Москва—Ленинград, 1947, 30; 32; 35.

[5] *К. Борсук:* Drei Sätze über die *n*-dimensionale euklidische Sphäre. Fund. Math. *20* (1933), 177—190.