Ladislav Skula

Die Fortsetzung stetiger Homomorphismen von δ-Halbgruppen

In: Josef Novák (ed.): General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra, Proceedings of the Third Prague Topological Symposium, 1971. Academia Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, Praha, 1972. pp. 401--404.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/700789

DIE FORTSETZUNG STETIGER HOMOMORPHISMEN VON δ-HALBGRUPPEN

L. SKULA

Brno

1. Einleitung. In der Zahlentheorie spielt die sog. Divisorentheorie eines Integritätsbereiches eine grosse Rolle. Dieser Begriff wurde von Borewicz und Šafarevič in [2] neuartig und übersichtlich eingeführt. Die äquivalente Formulierung dieses Begriffes ist, wie folgt (Skula [6]):

Unter einer *Divisorentheorie eines Integritätsbereiches R* versteht man einen Homomorphismus h der multiplikativen Halbgruppe R' von dem Integritätsbereich R in eine Halbgruppe $\mathfrak{D}$ mit eindeutiger Primfaktorzerlegung, wobei die folgenden Axiome gelten:

1° $r_1, r_2 \in R' \Rightarrow [r_1 \underset{R'}{/} r_2 \Leftrightarrow h(r_1) \underset{\mathfrak{D}}{/} h(r_2)]$,

2° $\mathfrak{a} \in \mathfrak{D} \Rightarrow \mathfrak{a}$ ist der grösste gemeinsame Teiler der Menge $\{h(r) : r \in R', \mathfrak{a} \underset{\mathfrak{D}}{/} h(r)\}$.

(Das Symbol $/$ bezeichnet die Teilbarkeitsrelation.)

Den Begriff der Divisorentheorie können wir auf die kommutativen Halbgruppen mit Einselement und mit Kürzungsregel gleicherweise übertragen. Clifford ([3]) nennt diese Divisorentheorie „normal ideal arithmetics". Wir werden diese Halbgruppen mit einer Divisorentheorie studieren und wir beschränken uns auf die Halbgruppen, die ausser dem Einselement keine Einheit besitzen. Solche Halbgruppen nennen wir δ-Halbgruppen. Unter diesen Voraussetzungen ist der Homomorphismus h in der Definition der Divisorentheorie ein Isomorphismus, den wir als eine identische Einbettung betrachten und den wir mit e_G bezeichnen. Die Halbgruppe $\mathfrak{D}$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{c}G$.

Für jede δ-Halbgruppe $\mathfrak{c}G$ gilt also:

1° $g_1, g_2 \in G \Rightarrow [g_1 \underset{G}{/} g_2 \Leftrightarrow e_G(g_1) \underset{\mathfrak{c}G}{/} e_G(g_2) \Leftrightarrow g_1 \underset{\mathfrak{c}G}{/} g_2]$,

2° $\mathfrak{a} \in \mathfrak{c}G \Rightarrow \mathfrak{a}$ ist der grösste gemeinsame Teiler der Menge $\{e_G(g) : g \in G, \mathfrak{a} \underset{\mathfrak{c}G}{/} e_G(g)\} = \{g \in G : \mathfrak{a} \underset{\mathfrak{c}G}{/} g\}$.

2. Die δ-Topologie. Eine nichtleere Untermenge I einer δ-Halbgruppe G heisst ein *δ-Ideal (der Halbgruppe G)*, wenn folgendes gilt:

$$I = \{g \in G : (g_1, g_2 \in G, g_1 \mid ig_2 \text{ für jedes } i \in I) \Rightarrow g_1 \mid gg_2\}.$$

(Vgl. Prüfer [5].)

Die Menge aller δ-Ideale von G bezeichnen wir mit $\mathfrak{J}(G)$. Diese Menge ist durchschnittsabgeschlossen und erzeugt gemeinsam mit der leeren Menge als System aller abgeschlossenen Mengen eine Topologie auf G, die wir mit δ_G bezeichnen. Diese Topologie ist eine U-Topologie in dem Sinne von Čech ([4]). Diese ist sogar eine KU-Topologie, aber sie ist allgemein weder eine A-Topologie (additive Topologie) noch eine B-Topologie ($\delta_G\{g\} \neq \{g\}$ für $g \in G$). Die Operation auf G ist bei dieser Topologie stetig.

Wenn wir jetzt die Kategorie $\mathcal{K}$ aller δ-Halbgruppen mit δ-stetigen Homomorphismen betrachten, dann erzeugen alle Halbgruppen mit eindeutiger Primfaktorzerlegung eine reflektive Unterkategorie $\mathcal{D}$ von $\mathcal{K}$, und $e_G : G \to \mathfrak{c}G$ ist die $\mathcal{D}$-Reflexion von G. Der Morphismus e_G ist ein Epimorphismus, also ist $\mathcal{D}$ eine epireflektive Unterkategorie.

Das heisst: Jeder δ-stetiger Homomorphismus f einer δ-Halbgruppe G in eine Halbgruppe $\mathfrak{D}$ mit eindeutiger Primfaktorzerlegung ist eindeutig auf einen δ-stetigen Homomorphismus $\bar{f}$ von $\mathfrak{c}G$ fortsetzbar:

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[rr, "e_G"] \arrow[dr, "f"'] & & \mathfrak{c}G \arrow[dl, dashed, "\bar{f}"] \\
& \mathfrak{D} &
\end{tikzcd}$$

Wenn f ein Homomorphismus von $\mathfrak{D}_1$ in $\mathfrak{D}_2$ ist, wobei $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2 \in \mathcal{D}$ sind, dann ist f genau dann eine δ-stetige Abbildung, wenn es für jede Untermenge $\emptyset \neq M \subseteq \subseteq \mathfrak{D}_1$ folgendes gilt:

$$f(D(M)) = D(f(M)).$$

(D bezeichnet den grössten gemeinsamen Teiler.)

3. Die δ^*-Topologie. Die A-Modifikation (d.h. die additive Modifikation) der Topologie δ_G auf einer δ-Halbgruppe G heisst δ_G^*-Topologie. Diese Topologie ist eine T_0-Topologie und die Operation auf der Halbgruppe G ist bei dieser Topologie stetig.

Analogische Resultate wie für die Kategorie der δ-Halbgruppen, gelten auch für die Kategorie der δ_1-Halbgruppen.

Eine δ_1-*Halbgruppe* G ist eine δ-Halbgruppe, wenn folgendes Axiom gilt:

$$\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2 \in \mathfrak{c}G \Rightarrow \text{es gibt } \mathfrak{i} \in \mathfrak{c}G \text{ mit } (\mathfrak{a}_2, \mathfrak{i}) = 1_{\mathfrak{c}G} \text{ und } \mathfrak{a}_1 \,.\, \mathfrak{i} \in G\,.$$

(Vgl. Arnold [1].)

Wir bezeichnen mit $\mathscr{K}_1$ die Kategorie aller δ_1-Halbgruppen mit δ^*-stetigen Homomorphismen. *Dann ist auch $\mathscr{D}$, die Kategorie aller Halbgruppen mit eindeutiger Primfaktorzerlegung mit δ^*-stetigen Homomorphismen, eine epireflexive Unterkategorie von $\mathscr{K}_1$ und $e_G : G \to \mathfrak{c}G$ is die $\mathscr{D}$-Reflexion von G.*

Für einen Homomorphismus f von $\mathfrak{D}_1$ in $\mathfrak{D}_2$, wobei $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2 \in \mathscr{D}$ ist, gilt: f ist genau dann eine δ^*-stetige Abbildung, wenn die Menge

$$\{\mathfrak{p} \textit{ ist ein Primelement von } \mathfrak{D}_1 : \mathfrak{d} \mid f(\mathfrak{p})\}$$

stets endlich für jedes Element $\mathfrak{d} \in \mathfrak{D}_2$, $\mathfrak{d} \neq 1_{\mathfrak{D}_2}$, ist.

4. Anwendung an die Ringtheorie. Unter der multiplikativen Halbgruppe eines Integritätsbereiches R verstehen wir die übliche multiplikative Halbgruppe von R, in der wir die assoziierten Elemente identifizieren. Die multiplikative Halbgruppe $\bar{R}$ eines Integritätsbereiches R mit einer Divisorentheorie ist eine δ_1-Halbgruppe (Skula [6]).

Wenn k der Quotientenkörper von R ist und K/k eine endliche Erweiterung ist, so besitzt die ganzabgeschlossene Hülle S von R in K eine Divisorentheorie, also ist die multiplikative Halbgruppe $\bar{S}$ von S eine δ_1-Halbgruppe (Borewicz, Šafarevič [2]).

Aus den Resultaten in [2] folgt: *Die von der Norm von K in k erzeugte Abbildung N von $\bar{S}$ in $\bar{R}$ ist ein δ^*-stetiger Homomorphismus, der sich eindeutig auf einen δ^*-stetigen Homomorphismus $\bar{N}$ von $\mathfrak{c}\bar{S}$ auf $\mathfrak{c}\bar{R}$ fortsetzen lässt*:

$$\begin{tikzcd}
\bar{S} \arrow[r, "N"] \arrow[d, "e_S"'] & \bar{R} \arrow[d, "e_R"] \\
\mathfrak{c}\bar{S} \arrow[r, dashed, "\bar{N}"'] & \mathfrak{c}\bar{R}
\end{tikzcd}$$

Auch *die schlichten Homomorphismen von den Dedekindschen Ringen erzeugen δ^*-stetige Homomorphismen ihrer multiplikativen Halbgruppen.*

Literatur

[1] *I. Arnold:* Ideale in kommutativen Halbgruppen. Rec. Math. Moscow *36* (1929), 401—407.

[2] *S. I. Borewicz und I. R. Šafarevič:* Zahlentheorie. Deutsche Übersetzung. Basel und Stuttgart, Birkhäuser, 1966.

[3] *A. H. Clifford:* Arithmetic and ideal theory of commutative semigroups. Ann. of Math. *39* (1938), 594—610.

[4] *E. Čech:* a) Topological papers of Eduard Čech. Academia, Prague, 1968.
b) Topological spaces. Academia, Prague, 1966.

[5] *H. Prüfer:* Untersuchungen über die Teilbarkeitseigenschaften in Körpern. J. Reine Angew. Math. *168* (1932), 1—36.

[6] *L. Skula:* Divisorentheorie einer Halbgruppe. Math. Z. *14* (1970), 113—120.

J. E. PURKYNĚ UNIVERSITY, BRNO