ÜBER 2-BANACH-RÄUME

S. GÄHLER

Berlin

Ein 2-*normierter Raum* L ist ein linearer Raum der Dimension > 1, über dessen Punktepaaren a, b eine reelle Funktion ν, die 2-*Norm* von L, erklärt ist, die folgende Eigenschaften besitzt:

1. Es gilt $\nu(a, b) = 0$ genau dann, wenn a und b linear abhängig sind,
2. $\nu(a, b) = \nu(b, a)$,
3. $\nu(a, \beta b) = |\beta|\, \nu(a, b)$ für jede reelle Zahl β sowie
4. $\nu(a, b + c) \leqq \nu(a, b) + \nu(a, c)$.

Auf jedem 2-normierten Raum L erzeugt das System $\{\mu_b\}_{b \in L}$ aller durch $\mu_b(a) = \nu(a, b)$ definierter Halbnormen μ_b, $b \in L$, eine uniforme Struktur und damit eine Topologie. Ein 2-normierter Raum, der eine beschränkte Nullumgebung besitzt, heißt *lokal beschränkt*. Ein vollständiger 2-normierter Raum wird 2-*Banach-Raum* genannt. Der Vortrag befaßt sich mit den 2-Banach-Räumen näher. Es wird unter anderem gezeigt, daß vom Standpunkt der uniformen Struktur aus die Klasse der Banach-Räume der Dimension > 1 mit der der lokal beschränkten 2-Banach-Räume übereinstimmt.

Ein 2-normierter Raum L^* heißt *Vervollständigung* eines 2-normierten Raumes L, wenn L ein linearer Teilraum von L^* ist, $\nu = \nu^* | L \times L$ gilt, die Topologie von L mit der durch die Topologie von L^* in L induzierten Topologie übereinstimmt, L in L^* dicht sowie L^* vollständig ist. Durch Beispiele läßt sich zeigen, daß ein 2-normierter Raum nicht immer eine Vervollständigung besitzt. Es existiert genau dann eine Vervollständigung L^* von L, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

1. Für zwei Cauchysche Moore-Smith-Folgen $(a_i)_{i \in I}$, $(b_j)_{j \in J}$ von Punkten $a_i, b_j \in L$ ist $\lim\limits_{i \in I} \lim\limits_{j \in J} \nu(a_i, b_j) = 0$ äquivalent der Existenz zweier reeller Zahlen α und β mit $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ sowie $(\alpha a_i)_{i \in I} \sim (\beta b_j)_{j \in J}$, wobei $\sim$ die bei der Konstruktion einer Vervollständigung eines uniformen Raumes üblicherweise benutzte Äquivalenzrelation bezeichnet.

2. Für beliebige Cauchysche Moore-Smith-Folgen $(a_i)_{i \in I}$, $(b_j)_{j \in J}$ von Punkten $a_i, b_j \in L$ gilt $\lim\limits_{i \in I} \lim\limits_{j \in J} \lim\limits_{i^* \in I} \nu(a_i - a_{i^*}, b_j) = 0$.

3. Zu jeder Cauchyschen Moore-Smith-Folge $(a_i)_{i \in I}$ von Punkten $a_i \in L$ und jedem $\varepsilon^* > 0$ existieren Punkte $b_1, \ldots, b_m \in L$ sowie ein $\varepsilon > 0$, so daß $\nu(a, b_j) < \varepsilon$, $j = 1, \ldots, m$, stets $\lim\limits_{i \in I} \nu(a, a_i) < \varepsilon^*$ nach sich zieht.

Literatur

[1] *S. Gähler:* Über 2-Banach-Räume. Math. Nachr. *42* (1969), 335—347.
[2] *S. Gähler:* Zum Problem der Vervollständigung 2-normierter Räume. Hausdorff-Gedenkband.
[3] *A. White:* 2-Banach spaces. Math. Nachr. *42* (1969), 43—60.