Štefan Porubský

Kniha „Bernoulliovy polynomy" od Matyáše Lercha

Acta Historiae Rerum Naturalium necnon Technicarum (New Series), Vol. 7 (2003), 119–141

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501890

Kniha »Bernoulliovy polynomy« od Matyáše Lercha*

Štefan Porubský

Život a dílo Matyáše Lercha bylo v minulosti hodnoceno z mnoha pohledů. Některé charakteristiky můžeme jen stěží nahradit lepšími už i z toho důvodu, že jejich autoři reprodukovali svou osobní zkušenost jako bezprostřední svědkové popisovaných událostí. Podobně, faktografická fakta je možné změnit jen pod vlivem nových objevů. Je dobře známým faktem, že publikované vědecké dílo Matyáše Lercha se skládá z 238 vědeckých prací a mnoha dalších článků odborných. Tyto práce jsou uveřejněny ve 32 různých odborných časopisech nebo sbornících našich i zahraničních. Z nich je napsáno 118 česky, 80 francouzsky, 34 německy, 3 chorvatsky, 2 polsky a 1 portugalsky. Podle oborů je prací z matematické analýzy asi 150, z teorie čísel asi 40; další publikace se týkají geometrie, aritmetiky, numerických výpočtů a dalších témat podružnějšího významu. Těžiště jeho prací bylo nepochybně v oblasti matematické analýzy, kde Lerch publikoval ve všech důležitých úsecích, které v době jeho činnosti stály v popředí zájmu světové matematiky. Jsou to: obecná teorie funkcí, nekonečné řady, funkce gamma, eliptické funkce a integrální počet.([Borůvka 1961, str. 356])

Když Lerch v r. 1922 umírá, zanechává v pozůstalosti v rukopisu dvě knihy; jednu o eliptických funkcích a jednu o Bernoulliových polynomech. Zejména studium vlastností eliptických funkcí, bylo za jeho aktivního života středobodem intenzivního zájmu. Bernoulliovy polynomy a čísla jsou v té době předmětem zájmu především z důvodu jejich nečekaných výskytů v tematicky vzdálených výsledcích. Koncem 19. století vzniká dojem, že okruhy důležitých problémů u obou problematik jsou již vyčerpány a dosažitelné výsledky dokázány. To je příznačná atmosféra pro knižní zpracování různých aspektů důležitých výsledků. Publikace tohoto druhu jsou však většinou určeny pro specializované publikum. V české odborné matematické literatuře však chyběly publikace již na základní úrovni.

---

* *Date*: 29. května 2003.
1991 *Mathematics Subject Classification.* 11B68, 39A10.
Key words and phrases. Bernoulliova čísla a polynomy, diferenční rovnice.
Práce byla napsaná s podporou grantu # 201/01/0471 Grantové agentury České republiky.

Koncem roku 1901 vyšel v Praze *Počet diferenciální* od Eduarda Weyra nákladem Jednoty českých matematiků. Weyr byl k sepsání této knihy vyzván výborem Jednoty, jak sám uvádí v předmluvě ([Bečvář 1995, str. 143]). V září 1902 vyšla ostrá kritika Weyrovy knihy sepsaná Janem Vilémem Pexiderem, která obvinila Weyra, že jeho učebnice vznikla složením opsaných částí knih Tanneryho, Genocchiho a Serreta ([Bečvář 1995, str. 143]). Weyr asi nebyl vhodnou osobou k napsání solidně vybudovaného diferenciálního počtu. Byl kromě jiného značně pracovně zatížen. Lepší českou učebnici mohl snad v té době napsat jedině M. Lerch, který však byl v létech 1896–1906 na univerzitě ve Fribourgu ([Bečvář, 1995, str. 153]). Zdá se, že potřeba české učebnice analýzy byla pociťována již delší dobu. Ludvík Frank píše v článku *O životě profesora Matyáše Lercha* ([Frank 1953, str. 130]): [Lerch] obdržel od pražské městské rady 500 zlatých jako cestovní stipendium na rok 1886 a stejnou částku na další rok, tentokrát s úkolem sepsati učebnici počtu diferenciálního a integrálního.[1] Lerch učebnici nenapsal a rovněž nepodnikl studijní cestu, takže stipendium považoval za svůj dluh. Splatil jej v roce 1901, když získal Velkou cenu pařížské Akademie ([Bečvář 1995, str. 157]).

Aktivně tvořící matematici většinou věnují svoji energii bezprostřední vědecké práci, učení nebo výchově, případně organizační činnosti. S Lerchem to nebylo jinak.

Lerch se v posledních letech věnoval jen a jen práci vědecké a povinnostem učitelským. Přednášky jeho, dvouroční kurs, byly drženy na vysoké úrovni — patrno nejlépe z toho, že s vynecháním algebraických a geometrických partií tvořily základ jeho univerzitních přednášek ve Freiburgu i v Brně. Rozsah jejich byl asi tento: Prvních 9 kapitol I. dílu a prvních 6 kapitol II. dílu Serretova kompendia (v něm. překladu); funkce gamma a partie příbuzné, však mnohem důkladněji; úvod do theorie funkcí komplexní proměnné, Cauchy–Riemannova differenciální rovnice; derivování a integrování řad a součinů funkcí — aplikace na $\sin \pi x$ a $\pi \cot \pi x$, Bernoulliovská a Eulerova čísla; Fourierovy řady, někdy též úvod do nauky o potentiálu. Elementární methody řešení differenciálních rovnic prvního a vyššího řádu a stupně; Cauchyho existenční

[1] Čupr ale uvádí ([Čupr 1923, str. 307]: městská rada pražská udělila Lerchovi dvakráte po 500 zl., „k tomu účelu, abyste ku svému dalšímu odbornému studiu podnikati mohl cesty dle předloženého a radou městskou schváleného programu cestovního, to však s tou podmínkou, že vědecká díla, jež vydati jste se zavázal, sepíšete jazykem českým…“. – Š.P.

důkaz, řešení řadami i omezenými integrály; jednoduché rovnice parciální (jednou též základy počtu variačního). Z algebry: nauka o rovnicích — též Gaussův důkaz o existenci řešení — numerické a grafické řešení rovnic algebraických a zejména transcendentních. Z analytické geometrie rovinné: bod, přímka, kuželosečka (byl–li čas i z hlediska projektivní geometrie), z prostorové: přímka, rovina, plochy stupně druhého [(Čupr 1923, str. 309]).

Proto, že se nevěnoval intenzívně psaní učebnic měl i další vnitřní důvody.

[Čupr 1923, str. 305]: Jest velmi litovati, že nemáme žádné učebnice od Lercha. Podotkl jsem před ním několikráte, až odejde z vysoké školy, že přijde tak na zmar jeho veliká zásoba učitelských zkušeností; na to mi nejednou odpověděl slovy: „*Věda — o tu se mi vždy především jedná — dělá se několikastránkovými pojednáními a nikdy tlustými učebnicemi; a pak, český národ neměl pro mně místa na svých vysokých školách, když byl jsem ve vědeckém vzrostu, nu já nemám proň učebnice na sklonku své vědecké činnosti.* I byl jsem velmi mile překvapen, když o vánocích (tuším roku 1918) ukázal mi obsáhlý rukopis monografie o Bernoulliských funkcích a číslech, která měla být šířeji založena než známá monografie Saalschützova.[2] Než jiné práce zatlačili interes Lerchův od této práce, jež nedokončena jest v jeho pozůstalosti. Nedokončen zůstal i rukopis spisu o elliptických funkcích, jímž se Lerch zabýval až do své smrti; byl rozpočten na dva díly, z nichž jen k prvnímu připraven jest materiál. ….

Lerchovy práce o eliptických funkcích jsou z devadesátých let minulého století. V té době byl rozvoj klasické teorie eliptických funkcí téměř dokončen. Po studiu eliptických integrálů Legendrem a objevech Abelových a Jacobiových byla studována theorie eliptických funkcí na základě teorie funkcí analytických. …

Lerchovy práce o eliptických funkcích nejsou zásadního významu. Většinou navazují na práce Jacobiovy a Hermitovy a přinášejí rozmanité doplňky známých výsledků. Tento přínos je dvojího druhu: Lerch jednak používá podstatně theorie eliptických funkcí ke studiu otázek, jež byly dříve vyšetřovány jinak; jednak využívá svých znalostí důkazových metod a speciálními obraty dochází často velmi zjednodušeně k známým výsledkům. Kromě toho mnohé relace zobecňuje ([Radochová 1957, str. 503]).

V každém případě byl Lerch kompetentním znalcem všech zákoutí

[2] viz [Saalschütz 1893] — Š.P.

teorie eliptických funkcí. Zachovalá část rukopisu první učebnice o eliptických funkcích byla dodatečně publikována [Lerch 1950] E. Čechem s pomocí O. Borůvky. Rukopis o Bernoulliových polynomech se nezachoval celý do dnešních dnů a nebyl nikdy (ani částečně) publikován. V příloze této práce je reprodukována první část tohoto rukopisu.

Rukopis knihy o Bernoulliových polynomech je psán ručně na volných listech formátu přibližně A5 s číslováním končícím u 302. Listy jsou popsány jednostranně, ale 29 z nich obsahuje text i na rubu. Na některých místech jsou malé poznámky psané tužkou, s největší pravděpodobností pocházejí od O. Borůvky. Většinou mají formu dat, která ale nejsou v časové posloupnosti. To nasvědčuje, že text byl studován několikrát. Rukopis není úplný. Chybí v něm strany 57, 129-144, 75, 225. Strany 57, 129-144, 75 už nebyly součásti textu asi dávno předtím, než se dostaly k autorovi těchto řádek. Strana 225 se musela ztratit později, protože není na soupisce chybějících stran. Kniha má 8 kapitol, dvě z nich jsou bez názvu:

Kdyby knížka byla vyšla tiskem, představovala by zajímavý doplněk ke knihám o Bernoulliových číslech, které vyšly přibližně v té době ve světě [Saalschütz 1893, Čistjakov 1895, Nielsen 1923].

Bernoulliova čísla jsou jednou z nejznámějších posloupností v matematice. Vystupují v rozvojích mnoha funkcí, např. $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$, $\operatorname{cosec} x$, $\ln|\sin x|$, $\ln|\cos x|$, $\ln|\operatorname{tg} x|$, $\operatorname{tgh} x$, $\operatorname{cotgh} x$, $\operatorname{cosech} x$, v tzv. Euler-Maclaurinově sumační formuli, která se kromě jiného používá na zrychlení konvergence mnoha řad. Jejich vlastnosti hrají důležitou roli v teorii čísel (zejména v souvislosti s klasickými útoky na Velkou Fermatovu větu), v p-adické analýze a jejích aplikacích [Porubský 1998], v teorii diferenčních rovnic a kombinatorice [Kaucký 1975]. Počet prací, v kterých vystupují, je obdivuhodný, kolem 3000 položek ([SkuSla1983]). V nedávné minulosti se navíc ukázalo, že mnohé starší výsledky kolem Bernoulliových polynomů mají překvapující nové aplikace nejen v moderní teorii čísel ([Koblitz 1977, Porubský 1998]).

Zajímavé je konstatování: Obecných výsledků si Lerch později mnoho nevážíval; říkal, čím pravidlo je obecnější, tím že méně dává pro praxi, a této výtky neušetřil ani některých svých prací např. nového důkazu Weierstrassovy věty, že lze se k dané funkci spojité v intervalu $a \dots b$ blížit posloupností racionálních funkcí stejnosměrně konvergující (Rozpravy Č. Ak. I, 33): rád by prý viděl aspoň jednu takovou posloupnost funkcí vytvořenou dle předpisu v důkazu tom obsaženém! Lerch nemiloval vůbec důkazů, které nepodávaly možnosti myšlenky v nich obsažené konstruktivně nebo počtářsky vykořistiti ([Čupr 1923, str. 303]).

Problém pro Lercha byl ukončen, až dovedl udati i postup numerických výpočtů resp. konstrukcí, proto mezi jeho pracemi jest jich tolik, jež se zabývají počítacími methodami problémů řešených jím i jinými matematiky, odtud pramení jeho snaha po řadách co nejrychleji konvergentních, snaha po seznání asymptotických výrazů, z téhož důvodu kupuje pro svůj ústav na brněnské technice i 20místný počítací stroj soustavy The Millionaire. Vzorce nepřístupné numerickému propočítaní, např. vyjádření ve formě determinantu, přímo nenáviděl, říkal o nich, že jsou pro matematika to, co pro chudáka šunka za oknem; ani k jedné ani k druhé věci se nemůže. O jeho aversi k obecným problémům byla již učiněna zmínka dříve – na druhé straně však podotýkal, že utilitarismus nemá ve vědě místa; kdo prý se při každém objevu hned táže, k čemu to je, podobá se dítěti, jež strká do úst vše, co poprvé vidí, aby seznalo, jak to chutná [Čupr, str. 304]).

Protože Bernoulliova čísla se často objevují právě ve výsledcích, které mohou být použity k numerickým prověrkám, mohou dobře posloužit jako demonstrace těchto Lerchových nároků. Typickým příkladem je Kummerův výsledek ve směru možného důkazu velké Fermatovy věty $x^p + y^p = z^p$, kde p je liché prvočíslo. V té době překvapující Kummerův výsledek požaduje dělitelnost alespoň jednoho čitatele Bernoulliových čísel B_2, B_4, …, B_{p-3} prvočíslem p. Jak jsme již poznamenali Bernoulliova čísla se objevují často v rozvojích funkcí, a jako taková se přirozeně objevují v mnoha Lerchových pracích. Často je citován jeho jeden, ve své podstatě jednoduchý výsledek, kde Lerch [Lerch 1905, str. 483] dokázal speciální případ velmi důležité Voronného kongruence pro Bernoulliova čísla, přičemž postřehl její použití na algoritmické[3] řešení lineárních kongruencí $ax \equiv 1 \pmod{N}$, $(a, N) = 1$ [Porubský 1998], které je možné

[3] Pro malé hodnoty N se úloha řeší obyčejně „hrubou silou“, tj. probírkou všech možných hodnot x od 1 do $N - 1$. Pro velké hodnoty je tato metoda prakticky

psát ve tvaru

$$x \equiv a - 12 \sum_{i=1}^{N-1} i \left\lfloor \frac{ai}{N} \right\rfloor \pmod N.$$

Zde $\lfloor u \rfloor$ označuje tzv. (dolní) celou část u.

Označení Bernoulliova čísla poprvé použil Abraham De Moivre (1667–1754) ve své *Miscellanea analytics*, která vyšla v Londýně v r. 1730. Vzdal tím hold Jakubu Bernoullimu[4], který tato čísla objevil před r. 1695 ve vzorci pro $S_m(r)$, součet m-tých mocnin prvních r přirozených čísel.[5] Vzorec byl však publikován až posmrtně v jeho knížce *Ars Conjetandi* [Bernoulli 1713, str. 94–99].[6]

Když v dnes používaném označení označíme B_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, k-té Bernoulliho číslo[7], pak tato můžeme spočítat rekurentně pomocí vztahu

$$\sum_{i=0}^{m} \binom{m+1}{i} B_i = \begin{cases} 1, & \text{když } m = 0, \\ 0, & \text{pro } m > 0. \end{cases} \tag{1}$$

Například, $B_0 = 1$, $\binom{2}{1} B_0 + \binom{2}{1} B_1 = 0$, atd., což vede na tabulku[8]

---

nepoužitelná.

[4] Toto označení použil i L. Euler (1707-1783) v [Euler 1755], kde píše ... unde isti numeri, qui ab Inuentore Iacobo Bernoullio cocari solent Bernoulliani ... . Jméno Jakoba Bernoulli (1654–1705) nesou i další pojmy: Bernoulliho rozdělení a Bernoulliho diferenciální rovnice. Považoval vlastnosti logaritmické spirály, o které napsal dvě slavná pojednání, za magická a přál si mít na svém náhrobním kameni vygravírovanou tuto spirálu s nápisem *Eadem Mutata Resurgo*. J. Bernoulli jako první též použil termín *integrál* nebo *permutace*.

[5] Téměř současně se objevují Bernoulliova čísla i nezávisle u japonského matematika Seki Takakazu (1642–1708).

[6] *Ars Conjetandi* je asi Bernoulliho nejoriginálnější dílo. Dílo bylo neúplné ke dni jeho úmrtí a vyšlo 8 let po jeho smrti. Mělo velký vliv na rozvoj teorie pravděpodobnosti.

[7] Toto je tzv. sudá notace pro Bernoulliova čísla, kde $B_{2s+1} = 0$ s výjimkou B_1. Jedno v minulosti používaných označení označovalo jako k-té Bernoulliho číslo číslo $B_k^* = (-1)^{k-1} B_{2k}, k \geq 1$.

[8] Tento rekurentní vztah je nepříjemný pro přímé výpočty protože vede na počítaní se zlomky, např. $B_{36} = -\frac{26\,315\,271\,553\,053\,477\,373}{1\,919\,190}$, nebo $B_{62} = \frac{12\,300\,585\,434\,086\,858\,541\,953\,039\,857\,403\,386\,151}{6}$. Použitím tohoto vztahu L. Euler spočítal hodnoty B_n pro $n \leq 30$. Poslední Eulerem spočtené číslo má hodnotu

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
B_n	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{5}{66}$	0	$-\frac{691}{2730}$

Pomocí Bernoulliových čísel můžeme psát

$$S_m(n) = \frac{1}{m+1}\left(B_0 n^{m+1} + \binom{m+1}{1} B_1 n^m + \ldots + \binom{m+1}{m} B_m n\right).$$

Jako ilustraci spočítal Bernoulli pomocí svého vzorečku součet desátých mocnin přirozených čísel od 1 po 1000. K výsledku

$$91\,409\,924\,241\,424\,243\,424\,241\,924\,242\,500$$

poznamenává, že potřeboval k tomu méně než „polovinu čtvrthodiny". Použitím jeho vzorce k tomu potřeboval spočítat hodnoty B_0, B_1, $\ldots B_{10}$, čím asi velice rezonoval s Lerchovou představou o „počtářsky vykořistitelných" výsledcích.

$B_{30} = \frac{8\,615\,841\,276\,005}{14\,322}$. V r. 1842 publikoval M. Ohm [Ohm 1842] hodnoty B_n pro $n \leq 62$.
Z (3) plyne též, že

$$\frac{|B_{2n}| > 2(2n)!}{(2\pi)^{2n},}$$

tj. že Bernoulliova čísla v absolutní hodnotě rostou nade všechny meze. Přesněji $B_{2n} \sim (-1)^{n-1} 4\sqrt{\pi n}(n/\pi e)^{2n}$.
Pohodlnější pro výpočet je vztah přes tzv. **tangentní čísla**

$$T_{2n-1} = (-1)^{n-1}\frac{4^n(4^n-1)}{2n} B_{2n},$$

která jsou určena pomocí polynomů $T_n(x)$ stupně $n+1$ s nezápornými celočíselnými koeficienty, kde

$$T_{n+1}(x) = (1+x^2)T'^{(}_{n}x), \qquad T_0(x) = x$$

přičemž

$$T_{2n+1} = T_{2n+1}(0).$$

Například,

n	1	3	5	7	9	11	13	15	17
T_n	1	2	16	272	7 936	353 792	22 368 256	1 903 757 312	209 865 342 976

Poznamenejme, že úloha spočítat součet mocnin celých čísel má i hlubší dopad. V počátečním období rozvoje diferenciálního a integrálního počtu se tento problém objevuje u P. FERMATA (1601–1665) v r. 1635 při přibližném výpočtu plochy pod grafem mocninné funkce x^m.

V r. 1735 vyřešil L. Euler, tzv. *Bazilejský problém*[9], spočítat[10]

$$\zeta(k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots \tag{2}$$

Euler našel hodnotu součtu $\frac{\pi^2}{6}$. Tento problém byl ve své době stejně populární jako byla v současnosti tzv. velká Fermatova věta, a proto není divu, že Euler si tento výsledek velice považoval a označoval jej za jeden z nejdůležitějších, který kdy dokázal. Součet (2) představuje hodnotu Riemannovy zeta funkce $\zeta(2)$. Později Euler [Euler 1748, článek 168] našel hodnoty $\zeta(2k)$ pro $k \leq 13$. Je mimořádně zajímavou skutečností, že obecně platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}} = (-1)^{n-1} \frac{2^{2n-1}\pi^{2n} B_{2n}}{(2n)!}, \qquad n > 0, \text{ celé.} \tag{3}$$

---

[9] Jakob Bernoulli publikoval v období 1682–1704 pět pojednání o nekonečných řadách. To první obsahuje například výsledek, že harmonická řada diverguje, o kterém si myslel, že je nový. Nevěděl, že tento výsledek dokázal Mengoli (1626–1686) o 40 let dřív. Na druhé straně Bernoulli dokázal, že $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$ konverguje, že její součet je < 2, ale nebyl schopen najít její přesný součet. Součet se nepodařilo najít ani Leibnizovi. Problém se stal známým jako Bazilejský problém.

[10] Lerch [Lerch 1887] při studiu tzv. Malmsténovských řad zavedl funkci $\mathcal{K}(w, x, s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{2kx\pi i}}{(w+k)^s}$, která nese jeho jméno. Díky této Lerchově zeta funkci je to v podstatě vedle E. Čecha jméno jediného českého matematika, které figuruje v klasifikaci Americké matematické společnosti, která se používá při klasifikaci článků v Mathematical Reviews a v Zentralblattu für Mathematik. Když zvolíme x celé dostaneme z ní tzv. Hurwitzovu zeta funkci, která se dále pro $k = 1$ redukuje na Riemannovu zeta funkci $\zeta(s)$. Lerch nejdříve publikoval výsledky o Malmsténovských řadách v sérii 3 článků psaných v češtině o rozsahu více než 100 stran (autor tohoto článku již několikrát v minulosti dělal z nich kopie pro zahraniční zájemce, pro jejich nedostupnost v zahraničí). Když si asi uvědomil jejich význam, publikoval alespoň výsledky o funkci $\mathcal{K}(w, x, s)$ ve francouzštině.

Doposud neznáme přesnou hodnotu $\zeta(n)$ pro liché hodnoty argumentu n.[11]

Bernoulliova čísla dostaneme též jako hodnoty tzv. Bernoulliových polynomů[12] $B_n(x)$ pro nulovou hodnotu argumentu, tj. $B_n = B_n(0)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Tyto polynomy[13] můžeme definovat i jako polynomy $B_n(x)$, pro které

$$\int_x^{x+1} B_n(t)\mathrm{d}t = x^n. \tag{4}$$

Pak

$$m^n + (m+1)^n + \ldots + (s-1)^n = \int_m^s B_n(t)\mathrm{d}t,$$

a derivace (4) vede na charakterizaci

$$B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}. \tag{5}$$

Proto když zvolíme v následující větě $f(x) = x^n$, pak $g(n)$ jsou právě Bernoulliovy polynomy, jak ukazuje vztah (5). Tato věta představuje základní výsledek pro řešení diferenčních rovnic v oboru polynomů [Nörlund 1924]:

---

[11] Velký rozruch způsobil v r. 1981 výsledek francouzského matematika R. Apéryho, že hodnota $\zeta(3)$ je iracionální číslo [Apéry 1981, Poorten 1978]. V r. 2000 T. Rivoal [Rivoal 2000] dokázal, že mezi čísly $\zeta(3), \zeta(5), \zeta(7), \ldots$ je nekonečně mnoho iracionálních.
Sám Lerch [Lerch 1900] vyjádřil $\zeta(4k-1)$ pomocí velmi rychle konvergentní řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4k-1}} = \frac{(2\pi)^{4k-1}}{(4k)!} \left(B_{2k} + (-1)^{k-1} \frac{1}{2} \binom{4k}{2k} B_k^2 + \sum_{\nu=1}^{k-1} (-1)^{\nu-1} \binom{4k}{2\nu} B_\nu B_{2k-\nu} \right) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4k-1}} \frac{1}{e^{2n\pi} - 1}.$$

[12] Toto pojmenování, s použitím jiného označení poprvé použil Joseph Ludwig Raabe (1801–1859) in [Raabe 1848]. Raabe je obyčejně považován za švýcarského matematika, protože tam prožil podstatnou část života. Narodil se ale ve slavném haličském městečku Brody (dnes Ukrajina), které v té době bylo na území Rakouska-Uherska. Vystudoval ve Vídni.

[13] Podobně jako pro Bernoulliova čísla (poznámka pod čarou [7]) i v případě Bernoulliových polynomů se v minulosti nepoužívalo jednotné označení. Např. N. Nielsen [Nielsen 1923] rozumí pod Bernoulliovými polynomy polynomy $n!B_n(x-1)$.

Věta 1. *Nechť $f(n)$ je polynom stupně r s racionálními koeficienty. Pak*

$$g(n) = f(1) + f(2) + \ldots + f(n), \qquad \textit{neboli} \quad \Delta g(n) = f(n),$$

je polynom stupně $r + 1$ s racionálními koeficienty.

Jak pomocí tohoto přístupu vybudovat základy teorie Bernoulliových polynomů ukazuje následující text převzatý z Lerchova rukopisu o Bernoulliových polynomech a tvořící jeho první kapitolu.[14] Předtím ještě jedna charakteristika Lerchovýh postojů ([Borůvka 1961, str. 358]): ... Lerchovy spisy jsou psány krásným, propracovaným slohem. Lerch sám napsal: „*Vděčím velmi spontánním inspiracím, i když jsou na počátku zpravidla nedokonalé. Moje metoda práce se ostatně podobá metodě romanopisce Balzaca, musím neustále korigovat svůj styl a psáti téměř krasopisně. Tak dosahuji zdokonalení a obohacení úvah.*“ Jako ukázku Lerchova slohu si dovolím uvést výňatek z jednoho ze zmíněných pojednání věnovaných systematickému výkladu vlastností funkce gamma. V něm Lerch mluví o tzv. charakteristických vlastnostech funkcí, tj. vlastnostech, jimiž jsou příslušné funkce jednoznačně určeny, takže — abych se vyjádřil názorně — lze z nich vykouzlit barevnou fotografii těchto funkcí. Cituji: „*V teorii funkcí důležitou úlohu mají tzv. charakteristické vlastnosti funkcí, které tyto úplně definují, aniž záležejí v nějakém jich způsobu aproximace. Hledajíc takových vlastností charakteristických hledí se analysis přiblížit vědám popisným, kteréž individua v přírodě se vyskytující určují na základě jistých znaků. Veliká cena řečených výsledků, jež nejsou dosud nikterak četné, věží nejen v eleganci, jež se tím zavádí do úvah analytických, které jimi rázem pozbývají unavujícího vlivu početních detailů a razí cestu myšlénce na úkor mnohdy zbytečných formalismů, ale cena funkcionálních vlastností charakteristických spočívá hlavně v tom, že ony jsou to především, jež podporují invenci, jak toho theorie funkcí elliptických podává velkolepé doklady. Budeme také v průběhu úvah těchto se snažit, abychom pro jednotlivé útvary poskytli vlastnosti charakteristické, pokud toho připouští materiál málo ohebný*“.

[14] V souvislosti s Lerchovým názorem na diferenční počet je zajímavá následující poznámka [Čupr 1923, str. 305]: Tvrdil [Lerch], že počet differenciální a integrální — opírající se v přední řadě o pojem a existenci spojitosti — jsa applikován na problémy fysikální, může poskytovati jen první přiblížení, neboť jako hmotu tak i jiné jevy není nutno a snad je nesprávno si představovati je jako spojité; applikacím pro přírodní vědy snad lépe by vyhovoval jakýsi „počet rozdílový a summační“.

1. K dané řadě základní, složené z jakýchkoli veličin

$$u_0, u_1, u_2, u_3, \dots, u_\nu, u_{\nu+1}, \dots \tag{6}$$

přísluší tzv. řady rozdílové různých řádů. První z nich

$$\Delta u_0, \Delta u_1, \Delta u_2, \Delta u_3, \dots, \Delta u_\nu, \Delta u_{\nu+1}, \dots$$

sestává z veličin tvořených dle pravidla

$$\Delta u_\nu = u_{\nu+1} - u_\nu,$$

tj. prostým odčítáním sousedních členů. Z prvních rozdílů tvoříme rozdíly druhé dle téhož pravidla

$$\Delta^2 u_\nu = \Delta u_{\nu+1} - \Delta u_\nu = u_{\nu+2} - 2u_{\nu+1} + u_\nu,$$

podobně tvoříme rozdíly třetí

$$\Delta^3 u_\nu = \Delta^2 u_{\nu+1} - \Delta^2 u_\nu = u_{\nu+3} - 3u_{\nu+2} + 3u_{\nu+1} - u_\nu,$$

atd.

Pro obecný člen p-té řady rozdílové máme obecné vyjádření

$$\begin{aligned}\Delta^p u_n &= u_{n+p} - \binom{p}{1} u_{n+p-1} + \binom{p}{2} u_{n+p-2} - \binom{p}{3} u_{n+p-3} + \dots \\ &\quad + (-1)^p \binom{p}{p} u_n \\ &= \sum_{\nu=0}^{p} (-1)^\nu \binom{p}{\nu} u_{n+p-\nu} = \sum_{\nu=0}^{p} (-1)^{p-\nu} \binom{p}{\nu} u_{n+\nu}.\end{aligned} \tag{7}$$

Velmi důležito jest vyjádření obecného členu řady základní (6) prostřednictvím veličin

$$u_n, \Delta u_n, \Delta^2 u_n, \Delta^3 u_n, \dots$$

tj. prvních členů všech řad rozdílových pocházejících z řady základní u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, … . Spočívá ve vzorci

$$u_{n+s} = \sum_{\nu=0}^{s} \binom{s}{\nu} \Delta^{\nu} u_n, \tag{8}$$

při čemž $\Delta^0 u_n = u_n$. Aniž se činí obecnosti újma možno voliti $n = 0$:

$$u_s = \sum_{\nu=0}^{s} \binom{s}{\nu} \Delta^{\nu} u_0; \tag{9}$$

zvláště jest

$$\Delta^m u_s = \sum_{\nu=0}^{s} \binom{s}{\nu} \Delta^{\nu+m} u_0. \tag{10}$$

Končí-li se posloupnost prvních členů rozdílových řad samými nulami, např.

$$0 = \Delta^{r+1} u_0 = \Delta^{r+2} u_0 = \Delta^{r+3} u_0 = \ldots,$$

ukazuje nám poslední rovnice, že

$$\Delta^r u_r = \Delta^r u_0,$$

tj. jedna z řad rozdílových — r-tá — sestává ze stejných členů, a další rozdíly jsou vesměs nullami. Řady takové slují se **arithmetické** r-tého řádu; pro takovou se rovnice (9) přepíše na

$$u_s = \sum_{\nu=0}^{r} \binom{s}{\nu} \Delta^{r} u_0, \tag{11}$$

poněvadž veličiny $\Delta^{r+1} u_0$, $\Delta^{r+2} u_0$, … se rovnají nulle. Zde pravá strana podrží smysl i pro lomená s, takže nacházíme celistvou racionální **funkci**

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{r} \binom{x}{\nu} \Delta^{r} u_0, \tag{12}$$

která poskytuje řadu základní pro celistvá kladná x,

$$f(x) = u_x,$$

a sice je tato funkce r-tého stupně. Pojem řady arithmetické r-tého [řádu == Š. P.] kryje se tedy s pojmem řady

$$f(0), f(1), f(2), f(3), \ldots,$$

kde $f(x)$ je celistvá funkce racionální stupně r. A sice je tato funkce jinak libovolná, tj. každá řada typu (13), příslušná k funkci celistvé stupně r, jest arithmetická řádu r. Vychází to z okolnosti, že

$$\Delta x^n = (x+1)^n - x^n = \binom{n}{1} x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} + \ldots,$$

podle níž bude postupně[15]

$\Delta^2 x^n$
$\Delta(x+1)^n$
Δx^n

$$\begin{aligned} \Delta^2 x^n &= n(n-1)x^{n-2} + a_2 x^{n-3} + b^2 x^{n-4} + \ldots \\ \Delta^3 x^n &= n(n-1)(n-2)x^{n-3} + a_3 x^{n-4} + b^3 x^{n-5} + \ldots \\ &\ldots \\ \Delta^{n-1} x^n &= n(n-1)\ldots 2x + a_{n-1} \\ \Delta^n x^n &= n! \end{aligned}$$

takže pak pro funkci

$$f(x) = A_0 x^r + A_1 x^{r-1} + A_2 x^{r-2} + \ldots$$

bude

$$\Delta^r f(x) = r! A_0,$$

tedy řada (13) arithmetickou r-tého řádu. 24.3.66

2. Rovnici (12) lze psáti

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{x}{\nu} \Delta^\nu f(0); \qquad \Delta x = 1, \tag{14}$$

při čemž $f(0)$, $\Delta f(0)$, $\Delta^2 f(0)$, ... značí počáteční členy rozdílových řad z veličin (13). Neboť tu členy počínaje $\nu = r + 1$ jsou rovny nulle.

[15] Zde uvedené marginální poznámky pochází s největší pravděpodobností od O. Borůvky a jsou do rukopisu vepsány obyčejnou tužkou – Š.P.

Rovnici (14) v případě $f(x) = x^n$ píšeme

$$x^n = \sum_{\nu=1}^{n} \binom{x}{\nu} \Delta^\nu 0^n,$$

takže $\Delta^\nu 0^n$ značí počáteční člen řady ν–tých mocnin rozdílů posloupnosti

$$0, 1, 2^n, 3^n, 4^n, \ldots$$

Zavedeme-li označení na okamžik[16]

$$\begin{aligned}\phi_n(x) &= x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)\\ &= \sum_{\varrho=0}^{n-1}(-1)^\varrho f_\varrho^{n-1} x^{n-\varrho} = x^n - f_1^{n-1}x^{n-1} + f_2^{n-1}x^{n-2} \mp \ldots,\end{aligned}$$

takže

$$\begin{aligned}f_1 &= \sum_{1}^{n-1} \nu\\ f_2 &= 1.2 + 1.3 + 2.3 + \ldots + (n-2)(n-1),\\ f_3 &= 1.2.3 + 1.2.4 + \ldots + (n-3)(n-2)(n-1)\\ &\ldots\end{aligned}$$

jsou základní souměrné úkony prvků 1, 2, 3, …,$n-1$, které slují též **součiniteli fakulty**, máme dvojici rovnic

(15) $$x^n = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\Delta^\nu 0^n}{\nu!} \phi_\nu(x),$$

(16) $$\phi_n(x) = \sum_{\varrho=0}^{n-1} (-1)^\varrho f_\varrho^{n-1} x^{n-\varrho}.$$

To dává podnět k následující větě:

Soustava rovnic

(17) $$z_n = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\Delta^\nu 0^n}{\nu!} y_\nu, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

---

16 Občas píšeme $f_\nu^{(n)}$ místo f_ν^n, aby se vyhnulo nedorozumění s mocností.

řeší se výrazy

$$(18) \qquad y_n = \sum_{\varrho=0}^{n-1} (-1)^\varrho f_\varrho^{n-1} z_{n-\varrho};$$

při čemž lze pravou stranu psáti symbolicky takto

$$y_n = z(z-1)(z-2)\dots(z-n+1); \qquad z^\nu = z_\nu.$$

Zaveďme prozatím označení — kterého se ostatně později přidržíme —

$$q_\nu^n = q_\nu^{(n)} = \frac{\Delta^\nu 0^n}{\nu!}.$$

Dosadíme hodnotu $z_{n-\varrho}$ podle (17) do vzorce (18); vyjde

$$(19) \qquad \sum_{\varrho=0}^{n-1} (-1)^\varrho f_\varrho^{n-1} q_\nu^{n-\varrho} = 0, \quad \nu < n;$$

dále dosadíme hodnotu q_ν podle (18) do (17), při čemž píšeme $\varrho = \nu - \sigma$:

$$(20) \qquad \sum_{\nu=\sigma}^{n} (-1)^\nu q_\nu^n f_{\nu-\sigma}^{\nu-1} = 0, \quad \sigma < n.$$

Rovnici (19) lze považovati za rekurentní vzorec pro neznámé q_ν^n:

$$q_\nu^n = f_1^{n-1} q_\nu^{n-1} - f_2^{n-1} q_\nu^{n-2} + f_3^{n-1} q_\nu^{n-3} - \dots;$$

řada se zakončí prvkem $q_\nu^\nu = 1$ (jelikož $\Delta^\nu 0\nu = \nu!$), a klademe-li postupně $n = \nu+1, \nu+2, \dots$, obdržíme

$$\begin{aligned} q_\nu^{\nu+1} &= f_1^\nu = \binom{\nu+1}{2}, \\ q_\nu^{\nu+2} &= f_1^{\nu+1} q_\nu^{\nu+1} - f_2^{\nu+1}, \\ q_\nu^{\nu+3} &= f_1^{\nu+2} q_\nu^{\nu+2} - f_2^{\nu+2} q_\nu^{\nu+1} + f_3^{\nu+2}, \\ &\dots \end{aligned}$$

z čehož vychází, že q_ν^n **jsou čísla celistvá**.

Také bychom již zde mohli zjistit okolnost, že **čísla**

$$q_1^{k+1}, q_2^{k+2}, q_3^{k+3}, \dots$$

tvoří arithmetickou posloupnost řádu $2k$, o níž však bude jednáno později.

Rovnice (12) řeší problém interpolace arithmetických řad; jeli totiž daná řada arithmetická stupně r.

$$u_0, u_1, u_2, \dots$$

dává nám rovnost (12) pro lomená x hodnoty u_x, které s hodnotami členů pro celistvá x souvisejí spojitě. Geometricky to značí, že nám výraz (12) dává parabolickou křivku stupně r, která prochází $r+1$ danými body

$$x = 0, y = u_0; \quad x = 1, y = u_1; \quad \dots; \quad x = r, y = u_r.$$

Je to interpolační vzorec Newtonův, a liší se jen formálně od vzorce Lagrangeova pro případ ekvidistantních pořadnic.

Pro účely prakse brává se pojem rozdílů poněkud obecněji; uvažujeme na místě (13) základní řadu

$$f(0), f(h), f(2h), f(3h), \dots$$

kde h jest jakákoli veličina, obyčejně realná a malá. Máme pak značení $\Delta x = h$, a

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x);$$

uvažujeme pak funkci proměnné t, $f(th)$, a rovnice (14) zní

$$f(th) = f(0) + \binom{t}{1}\Delta f(0) + \binom{t}{2}\Delta^2 f(0) + \dots$$

čili

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \frac{\Delta t(0)}{h}x + \frac{\Delta^2 t(0)}{h^2}\frac{x(x-h)}{2} \\ &\quad + \frac{\Delta^3 t(0)}{h^3}\frac{x(x-h)(x-2h)}{3!} + \dots; \quad \Delta x = h. \end{aligned} \tag{21}$$

Při tom se předpokládá $f(x)$ jako funkce racionální celistvá.

Jsou sice také funkce transcendentní, pro něž rovnice tato zůstává platnou, ona tu pravá strana konverguje a má za součet funkci na levé straně. Tak např. pro

$$f(x) = a^x \text{ máme } \Delta f(x) = a^x(a^h - 1), \Delta^\nu f(x) = a^x(a^h - 1)^\nu,$$

a volíme-li $h = 1$, zní pak (14) v tomto případě

$$a^x = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{x}{\nu} (a - l)^\nu,$$

čili píšeme-li $a = 1 + c$,

$$(1 + c)^x = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{x}{\nu} c^\nu.$$

Avšak již tento příklad ukazuje, že u transcendentních funkcí dlužno si počínati opatrně; neboť tato (známá binomická) řada konverguje pouze pro $-1 < c < 1$, tedy vzorec (14) dává u funkce $f(x) = a^x$ dobrý výsledek jen v případě $0 < a < 2$.

Forma, které se při početní praxi vzorce (21) užívá, je vlastně tato (kde roli proměnné převzala litera ξ)

$$\begin{aligned} f(x+\xi) = f(x) + \frac{\Delta f(x)}{h}\xi + \frac{\Delta^2 f(x)}{h^2}\frac{\xi(\xi-h)}{2!} + \\ + \frac{\Delta^3 f(x)}{h^3}\frac{\xi(\xi-h)(\xi-2h)}{3!} + \ldots, \quad \Delta x = h, \end{aligned} \tag{22}$$

a jest ξ veličina velmi malá, podobně jako h, a omezuje se na malý počet členů. Je to správné, pokud v uvažovaných mezích $f(x + \xi)$ má sblíženě průběh polynomu nízkého stupně v proměnné ξ. Jinak řada jako celek může býti divergentní.

Interpolační vzorec Newtonův a obecnější Lagrangeův se v učebnicích často přeceňuje. Nejenom že jeho možnost ukládá funkční povaze šetřené funkce $f(x)$ velká omezení — ostatně ne vždy přístupná — ale také podává výsledky chybné, jakmile se jedná o veličiny $u_x = f(x)$ získané měřením, nikoli číselně dané; neboť ve skutečnosti se hodnoty u_x berou do počtu s velkými součiniteli při výpočtu $\Delta^\nu u_0$, a tím malá odchylka od pravé hodnoty má za následek velkou chybu ve výsledku (de la Vallée-Poussin).

3. Předmětem našich příštích úvah budou veličiny, k nimž dává podnět výraz — v němž mocnitel n je celistvý a kladný —

$$S_n(x) = o^n + 1^n + 2^n + \ldots + (x-1)^n,$$

definovaný zprvu pro celistvá kladná x. Očividná vlastnost

$$S_n(x+1) = S_n(x) + x^n, \quad \Delta S_n(x) = x^n \tag{23}$$

ukazuje, že $\Delta^{n+1} S_n(x) = n!$, a tedy veličiny

$$S_n(1), S_n(2), S_n(3), \ldots$$

tvoří arithmetickou řadu řádu $n+1$. Výraz $S_n(x)$ je tedy vyjádřitelný určitou celistvou funkcí stupně $n+1$. Dle definice jest (při $n > 0$) $S_n(1) = 0$, a tedy dává (23) pro $x = 0$ též

$$S_n(0) = 0. \tag{24}$$

Podmínkami (23) (24) jest celistvá racionální funkce $S_n(x)$ plně určena. Rovnice (23) ji určuje až na additivní konstantu. Předpokládejme, abychom to objasnili, že platí podobná vlastnost pro druhou funkci celistvou racionální $U(x)$, tj. $U(x+1) = U(x) + x^n$; pak bude rozdíl $U(x) - S_n(x) = f(x)$ celistvá racionální funkce a zároveň $f(x+1) = f(x)$ identicky; tedy zvlášť

$$f(0) = f(1) = f(2) = \ldots$$

Algebraická rovnice $f(z) = f(0)$ má tedy nekonečný počet kořenů, a jest tedy identická, tj. $f(x) = f(0)$. Tudíž rozdíl $U - S_n$ je stálý ($= f(0)$).

Rovnice (22) pro $h = 1$ nám podává vyjádření funkce $S_n(x+\xi)$

$$S_n(x+\xi) = S_n(x) + \sum_{\nu=1}^{n+1} \binom{\xi}{\nu} \Delta^{\nu-1} x^n; \quad \Delta x = 1. \tag{25}$$

Volme zde $x = 0$, a znamenejme počáteční členy rozdílových řad utvořených z posloupností

$$0^n, 1^n, 2^n, 3^n, \ldots$$

obvyklým způsobem $\Delta^\nu 0^n$ ($\Delta 0^n = 1$, $\Delta^2 0^n = 2^n - 2, \ldots$); tím vyjde za současné změny litery[17]

$$S_n(x) = \sum_{\nu=1}^{\nu} \Delta^\nu 0^n . \binom{x}{\nu+1}. \tag{26}$$

Z rovnice (23) plyne derivováním

$$S'_n(x+1) = S'_n(x) + nx^{n-1};$$

mnohočlen

$$f(x) = \frac{S'_n(x)}{n}$$

má tedy vlastnost $f(x+1) = f(x) + x^{n-1}$, i liší [se – Š. P.] od $S_{n-1}(x)$ o veličinu stálou, která jest

$$\frac{S'_n(x)}{n} - S_{n-1}(x) = \frac{S'_n(0)}{n}.$$

Máme tak vlastnost našich polynomů 14.12.63

$$S'_n(x) = nS_n(x) + S'_n(0).$$

Zavedeme ihned při té příležitosti polynomy **upravené**

$$S^*_n(x) = \frac{S'_{n+1}(x)}{n+1}, \qquad S_n(x) = S^*_n(x) - S^*_n(0); \tag{28}$$

jich charakteristické vlastnosti jsou

$$\Delta S^*_n(x) = x^n, \qquad \int_0^1 S^*_n(x)\mathrm{d}x = 0, \tag{29}$$

a platí obecně[18] pro $n > 0$ 4.11.59

$$\mathcal{D}S^*_n(x) = nS^*_{n-1}(x).$$

---

[17] Symbolický tvar jest

$$S_n(x) = \frac{(1+\Delta)^x - 1}{\Delta} 0^n.$$

[18] Symbol $\mathcal{D}f(x)$ značí totéž co $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$, tj. derivaci $f'(x)$.

Dle definice jest 31.3.66

$$S_0(x) = x,\ S_1(x) = \frac{x^2 - x}{2},\ S_0^*(x) = x - \frac{1}{2}.$$

Poněvadž

$$\binom{\xi}{\nu} = \frac{\xi}{\nu}\frac{(\xi-1)(\xi-2)\dots(\xi-\nu+1)}{(\nu-1)!} = (-1)^{\nu-1}\frac{\xi}{\nu} + \dots,$$

máme

$$\mathcal{D}_{\xi=0}\binom{\xi}{\nu} = (-1)^{\nu-1}\frac{1}{\nu},$$

a derivuje-li se (25) na místě $\xi = 0$, vychází tedy

$$S_n'(x) = \sum_{1}^{n+1}(-1)^{\nu-1}\frac{\Delta^{\nu-1}x^n}{\nu}.$$

Zaměňme n za $n+1$, pišme $\nu+1$ za ν a užijme vzorce (28):

$$(n+1)S_n^*(x) = \sum_{0}^{n+1}(-1)^{\nu}\frac{\Delta^{\nu}x^{n+1}}{\nu+1}. \tag{31}$$

Uvažujme dále funkci

$$f(x) = S_n(1-x);$$

bude

$$f(x+1) = S_n(-x) = S_n(1-x) - (-x)^n,$$

tj.

$$f(x+1) = f(x) + (-1)^{n-1}x^n,$$

takže musí

$$f(x) = (-1)^{n-1}S_n(x) + K = S_n(1-x);$$

pro $x = 0$ vychází $K = 0$, tedy

$$S_n(1-x) = (-1)^{n-1}S_n(x). \tag{32}$$

Derivace levé a pravé strany jsou

$$-nS_n^*(1-x), \qquad (-1)^{n-1}nS_{n-1}^*(x);$$

porovnejme a zaměňme n za $n+1$; vyjde

$$S_n^*(1-x) = (-1)^{n-1} S_n^*(x). \tag{33}$$

Poněvadž dle (29)[19] jest $S_n^*(1) = S_n^*(0)$, máme odtud pro $x = 0$

$$\left[1-(-1)^{n-1}\right] S_n^*(0) = 0;\ \text{podobně}\ S_n^*\left(\frac{1}{2}\right)$$

tedy **pro** n **sudé** > 0“

$$S_n^*(0) = 0, S_n^*\left(\frac{1}{2}\right) = 0. \tag{34}$$

Buď dále m celistvé kladné číslo a uvažujme součet

$$f(x) = \sum_{\alpha=0}^{m-1} S_n\left(\frac{x+\alpha}{m}\right);$$

odečtením od hodnoty

$$f(x+1) = \sum_{\alpha=0}^{m-1} S_n\left(\frac{x+\alpha+1}{m}\right) = \sum_{\alpha=1}^{m} S_n\left(\frac{x+\alpha}{m}\right)$$

zbude

$$f(x+1) - f(x) = S_n\left(\frac{x+\alpha}{m}\right) - S_n\left(\frac{x}{m}\right) = \left(\frac{x}{m}\right)^n,$$

a odtud vychází další vztah

$$f(x) = \frac{S_n(x)}{m^n} + K = \sum_{\alpha=0}^{m-1} S_n\left(\frac{x+\alpha}{m}\right).$$

Volba $x = 0$ dává hodnotu K a výsledek zní

$$\sum_{\alpha=0}^{m-1} S_n\left(\frac{x+\alpha}{m}\right) = \frac{S_n(x)}{m^n} + \sum_{\alpha=1}^{m-1} S_n\left(\frac{\alpha}{m}\right). \tag{35}$$

[19] Zde je chybná Lerchova odvolávka, kterou pravděpodobně Prof. Borůvka, opravil na druhou rovnost v (28) – Š.P.

Derivujme a zaměňme n za $n+1$; vyjde

$$\sum_{\alpha=0}^{m-1} S_n^*\left(\frac{x+\alpha}{m}\right) = \frac{1}{m^n} S_n^*(x). \tag{36}$$

Polynomy $S_n(x)$ a $S_n^*(x)$ slují **polynomy Bernoulliovy** (obyčejné a upravené). 11.11.59 I

Reference

[Apéry 1979] Apéry, R.: *Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$,* Astérisque **61**, 1979, 11–13.

[Apéry 1981] Apéry, R.: *Interpolation de fractions continues et irrationalite de certaines constants,* Mathématiques, CTHS: Bull. Sec. Sci. III, Bib. Nat., Paris 1981.

[Bečvář 1995] Bečvář, J. a kol.: *Eduard Weyr (1852–1903),* Matematická vědecká sekce Jednoty českých matematiků a fyziků, Praha 1995

[Borůvka 1961] Borůvka, O.: *O životě a díle Matyáše Lercha,* Spisy Přírodovědecké fakulty University J. E. Purkyně, A 21, 1961/7, číslo 425, 352–360.

[Bernoulli 1713] Bernoulli, J.: *Ars Conjectandi,* opus posthumum, Basel 1713; viz též *Die Werke von Jakob Bernoulli*, sv. III, 107–286.

[Čistjakov 1895] Чистяков, И.И.: Бернуллиевы числа, Москва 1895.

[Čupr 1923] Čupr, K.: *Prof. Matyáš Lerch,* Časopis pro pěstování matematiky **52**, 1923, 301–313.

[DilSkuSla 1991] Dilcher, K.–Skula, L.–Slavutskij, I.Sh.: *Bernoulli Numbers (Bibliography (1713–1990)).* Queen's papers in pure and applied mathematics, No. 87, Queen's University, Kingston, Ontario 1991, iv+175pp.

[Euler 1748] Euler, L.: *Introductio in Analysis Infinitorum,* sv. I, Bousque & Socios, Lausannæ 1748 (Oper (1), Vol. 8).

[Euler 1755] Euler, L.: *Institutiones calculi differentialis,* Acad. Imp. Sci. Petropolitanae, St. Petersburg, 1755 (Oper (1), Vol. 10).

[Frank 1953] Frank, L.: *O životě profesora Matyáše Lercha,* Časopis pro pěstování matematiky **78**, 1953, číslo 2, 119–137.

[Kaucký 1975] Kaucký, J.: *Kombinatorické identity* (Úvod do studia metod kombinatorické analýzy), Veda, vydavateľstvo SAV, Bratislava 1975.

[Koblitz 1977] Koblitz, N.: *p-adic Numbers, p-adic Analysis and Zeta-Functions,* Springer Verlag, New Yourk–Heidelberg–Berlin 1977.

[Lerch 1887] Lerch, M.: *Note sur la fonction $\mathcal{K}(w,x,s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{2kx\pi i}}{(w+k)^s}$,* Acta Mathematica **11**, 1887, 19–24.

[Lerch 1900] Lerch , M.: *Sur la fonction $\zeta(s)$ pour les valeurs impaires de l'argument,* Jornal des sciencias mathematicas e astronomicas, publicado pelo D. F. G. Teixeira, Coimbra **14**, 1900, 65–69.

[Lerch 1903] Lerch, M.: *Počet differenciálný. Sepsal Eduard Weyr.* Časopis pro pěstování matematiky a fysiky **32**, 1903, 52–56.

[Lerch 1905] Lerch, M.: *Zur Theorie des Fermatschen Quotienten* $\frac{a^{p-1}-1}{p} = q(a)$, Mathematische Annalen **60** (1905), 471–490.

[Lerch 1950] Lerch, M.: *Eliptické funkce,* nákladem Přírodovědecké fakulty MU Brno, rok vydání neuveden.

[Nielsen 1923] Nielsen, N.: *Traité Elémentaire des Nombres de Bernoulli,* ůbreak Gauthier–Villars, Paris 1923; 394 stran.

[Nörlund 1924] Nörlund, N. E.: *Differenzenrechnung,* Springer Verlag, Berlin 1924.

[Ohm 1842] Ohm, M.: *Etwas über die Bernoullischen Zahlen,* Journal für die reine und angewandte Mathematik **20**, 1842, 11-12.

[Poorten 1978] Poorten, van der, A.: *A proof that Euler missed … Apery's proof of the irrationality of* $\zeta(3)$, The Mathematical Intelligencer **1**, 1978/79, 195–203.

[Porubský 1998] Porubský, Š.: *Voronoï's type congruences for Bernoulli numbers,* in: *Voronoï's impact on modern science*, Proc. Inst. math. Nat. Acad. Sci. Ukraine, Vol. 21, Kyjev 1998, pp. 71–98.

[Porubský 2001] Porubský, Š.: *Leben und Werk von Matyáš Lerch,* Mathematik im Wandel III (M.Toepell Hrsg.), Verlag Franzbecker, Hildesheim Berlin 2001, 347–373.

[Raabe 1848] Raabe, J. L.: *Die Jacob Bernoullische Funktion,* Zürich 1848.

[Radochová 1957] Radochová, V.: *Lerchův přínos k theorii funkcí eliptických (Der Beitrag Mathias Lerchs zu der Theorie der elliptischen Funktionen,* Acta Academiae Scientiarum Čechoslovenicae Basis Brunensis (Práce Brněnské základny Československé akademie věd), **29**, 1957, Fasc. 10–11, Opus 363, 502–515.

[Rivoal 2000] Rivoal, T.: *La fonction zèta de Riemann prend une infinite de valeurs irrationelles aux entiers impairs,* Comptes Rendus de l'Académie de Sciences, Série I, Mathématique. Gauthier–Villars, **331**, 2000, No. 4, 267–270.

[Saalschütz 1893] Saalschütz, L.: *Vorlesungen über die Bernoulli Zahlen, ihren Zusammenhang mit den Secanten–Coefficienten und ihre wichtigen Anwendungen,* Springer Verlag, Berlin 1893; 207 stran.

[SkuSla 1987] Skula, L., Slavutskij, I.Sh.: *Bernoulli Numbers (1713–1983),* Universita J. E. Purkyně, Brno 1987; rozšířené vydání [DiSkuSla 1991].