Matyáš Lerch
Theorie funkce gamma. [IV.]

Věstník Čes. Akademie cís. Fr. Jos. pro vědy, slovesnost a umění v Praze 2 (1893), 462–472

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501774

Theorie funkce gamma.

Napsal *M. Lerch.*

(Dokončení.)

2. Dokázali jsme dříve Eulerův vztah

$$(a)\qquad \Gamma(a)\,\Gamma(1-a)=\frac{\pi}{\sin a\pi}$$

pomocí Eulerovy a Gaussovy definice funkce Γ, předpokládajíce známou větu

$$\sin a\pi=\pi a\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a^2}{n^2}\right).$$

Všecky dosud známé důkazy této věty jsou velmi složité anebo nejsou dosti elementarné. Zdá se mi spíše býti methodicky správným postup, který onu větu vyvozuje z integrálu.

Věta (a) je totiž ekvivalentní se vzorcem

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}-\frac{\Gamma'(1-a)}{\Gamma(1-a)}=-\pi\cot a\pi\,;$$

dosadíme-li sem za oba členy integrály (5), obdržíme

$$(8^a)\qquad \int_0^1\frac{x^{a-1}-x^{-a}}{1-x}\,dx=\pi\cot a\pi\,,$$

pokud ovšem $0<a<1$. Tento vztah dokázal Euler, vloživ za a hodnotu racionalnou, a ustanoviv integrál obyčejným rozkladem v částečné zlomky. Podali jsme elementarný důkaz [1]) tohoto vzorce, jenž předpokládá toliko nejjednodušší vlastnosti řad a omezených integrálů.

O tomto důkazu, jakož i o důkazu vzorce Eulerova

$$(8^b)\qquad \int_0^\infty\frac{x^{a-1}\,dx}{1+x}=\frac{\pi}{\sin a\pi}\,,\qquad 0<a<1\,,$$

na tomto místě pomlčíme.

Jest nám nyní přikročiti k stanovení integrálu

$$B(a,b)=\int_0^\infty\frac{x^{a-1}\,dx}{(1+x)^{a+b}}\,,$$

[1]) Časopis pro pěstov. math. a fys. 1892. Bulletin des Sciences mathématiques 1892, Décembre.

jehož konvergence žádá, aby Real. $a > 0$, Real. $b > 0$. K jeho stanovení užívá se veledůležitého ač jednoduchého vzorce (1^a), a sice zde ve tvaru

$$\frac{1}{(1+x)^{a+b}} = \frac{1}{\Gamma(a+b)} \int_0^\infty e^{-(1+x)z} z^{a+b-1}\, dz\,;$$

substitucí tohoto výrazu do integrálu B obdržíme

$$B(a,b) = \frac{1}{\Gamma(a+b)} \int_0^\infty x^{a-1}\, dx \int_0^\infty e^{-z-zx} z^{a+b-1}\, dz\,;$$

obrátíme-li pořádek integrační, vyjde

$$B(a,b) = \frac{1}{\Gamma(a+b)} \int_0^\infty e^{-z} z^{a+b-1}\, dz \int_0^\infty e^{-zx} x^{a-1}\, dx\,.$$

Vnitřní integrál má dle (1^a) hodnotu $\frac{\Gamma(a)}{z^a}$, a tedy

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a+b)} \int_0^\infty e^{-z} z^{b-1}\, dz = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}\,,$$

t. j.

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\, dx}{(1+x)^{a+b}} = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}\,. \tag{9}$$

Jestliže v integrálu tomto píšeme

$$\frac{x}{1+x} = z\,, \qquad x = \frac{z}{1-z}\,, \qquad dx = \frac{dz}{(1-z)^2}\,,$$

obdržíme klassický vztah Eulerův

$$\int_0^1 z^{a-1}(1-z)^{b-1}\, dz = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}\,. \tag{10}$$

Není obtížno dokázati tento vzorec přímo na základě funkcionalných vlastností tohoto integrálu.[1]) Také dobré elementarné důkazy tohoto vztahu byly podány již v dávných letech.[2])

Vzorec (8^b) vznikne z (9) pro $a+b=1$; tímto způsobem se v integralním počtu nejčastěji dokazuje věta Eulerova $\Gamma(a)\,\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}$.

---

[1]) Viz citované moje pojednání ve Věstníku král. čes. spol. nauk z roku 1889.

[2]) Viz na př. Dirichletovy přednášky vydané Gust. Ferd. Meyerem. (Vorlesungen über die Theorie der bestimmten Integrale zwischen reellen Grenzen.)

Ještě snazší než převedení integrálu $\Gamma(a)$ v součin Eulerův a Gaussův jest vyvoditi z integrálu (24[a])

$$\varpi(a) = \int_{-\infty}^{0} \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2} \right) e^{at} \frac{dt}{t} \tag{11}$$

řadu Gudermannovu. Vypočtěme si za tím účelem

$$\varpi(a+1) - \varpi(a) = \int_{-\infty}^{0} \left(1 - \frac{e^t - 1}{t} + \frac{e^t - 1}{2} \right) e^{at} \frac{dt}{t};$$

pravou stranu možno pokládati za limitu, pro $\varepsilon = 0$, výrazu

$$V_\varepsilon = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} e^{at} \frac{dt}{t} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} e^{(a+1)t'} \frac{dt'}{t'} + \int_{-\infty}^{-\varepsilon} e^{at} \frac{dt}{t^2} - \int_{-\infty}^{-\varepsilon} e^{(a+1)t'} \frac{dt'}{t'^2},$$

jenž po substitucích $t = \dfrac{x}{a}$, $t' = \dfrac{x}{a+1}$ obdrží tvar

$$V_\varepsilon = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{-a\varepsilon} e^x \frac{dx}{x} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{-(a+1)\varepsilon} e^x \frac{dx}{x} + a \int_{-\infty}^{-a\varepsilon} e^x \frac{dx}{x^2} - (a+1) \int_{-\infty}^{-(a+1)\varepsilon} e^x \frac{dx}{x^2},$$

čili

$$V_\varepsilon = \frac{1}{2} \varphi(a\varepsilon) + \frac{1}{2} \varphi\big((a+1)\varepsilon\big) + a\,\psi(a\varepsilon) - (a+1)\,\psi\big((a+1)\varepsilon\big), \tag{b}$$

kde položeno

$$\varphi(\delta) = \int_{-\infty}^{-\delta} e^t \frac{dt}{t}, \qquad \psi(\delta) = \int_{-\infty}^{-\delta} e^t \frac{dt}{t^2}.$$

Částečnou integrací však obdržíme

$$\psi(\delta) = \int_{-\infty}^{-\delta} e^t \frac{dt}{t^2} = \frac{e^{-\delta}}{\delta} + \int_{-\infty}^{-\delta} e^t \frac{dt}{t} = \frac{1}{\delta} - 1 + \varphi(\delta) + (\delta),$$

znamenáme-li (δ) veličinu zároveň s δ nekonečně malou; dále

$$\varphi(\delta) = \int_{-\infty}^{-\delta} e^t \frac{dt}{t} = -\int_{\delta}^{\infty} e^{-t} \frac{dt}{t} = e^{-\delta} \log \delta - \int_{\delta}^{\infty} e^{-t} \log t \, dt$$

a tedy

$$\varphi(\delta) = \log \delta - \Gamma'(1) + (\delta),$$

$$\psi(\delta) = \frac{1}{\delta} - 1 + \varphi(\delta) + (\delta).$$

Dosazením této hodnoty za ψ do V_ε máme

$$V_\varepsilon = \left(a+\frac{1}{2}\right)\varphi(a\varepsilon) - \left(a+\frac{1}{2}\right)\varphi(a\varepsilon+\varepsilon) + 1 + (\varepsilon)\,,$$

anebo po vyjádření

$$\varphi(a\varepsilon) = \log a + \log\varepsilon - \Gamma'(1) + (\varepsilon)\,,$$

$$\varphi(a\varepsilon+\varepsilon) = \log(a+1) + \log\varepsilon - \Gamma'(1) + (\varepsilon)\,,$$

$$V_\varepsilon = \left(a+\frac{1}{2}\right)\Big[\log a - \log(a+1)\Big] + 1 + (\varepsilon)\,,$$

tak že $\lim\limits_{\varepsilon=0} V_\varepsilon$ má hodnotu

$$\varpi(a+1) - \varpi(a) = 1 - \left(a+\frac{1}{2}\right)\log\frac{a+1}{a}\,.$$

Rovnici tuto pišme

$$(11^a)\qquad \varpi(a) = \left[\left(a+\frac{1}{2}\right)\log\frac{a+1}{a} - 1\right] + \varpi(a+1)\,;$$

klademe-li zde za a postupně a, $a+1$, $a+2, \ldots a+n-1$ a sečteme-li výsledky, obdržíme

$$\varpi(a) = \sum_{\nu=0}^{n-1}\left[\left(a+\nu+\frac{1}{2}\right)\log\frac{a+\nu+1}{a+\nu} - 1\right] + \varpi(a+n)\,.$$

Z integrálu je však patrno, že $\lim\limits_{n=\infty} \varpi(a+n) = 0$, a tedy máme

$$(11^b)\qquad \varpi(a) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\left[\left(a+\nu+\frac{1}{2}\right)\log\frac{a+\nu+1}{a+\nu} - 1\right],$$

což jest řada Gudermannova.

Odvodíme ještě (dle Dirichleta) druhý vzorec Binetův, jenž v kapitole I. vyvozen processem poněkud namáhavým. Funkci pod integračním znamením vzorce (11) možno psáti

$$\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,\frac{e^t+1}{e^t-1} - \frac{1}{t} = -\frac{1}{2i}\cot\left(\frac{ti}{2}\right) - \frac{1}{t}\,.$$

Avšak

$$\pi\cot\left(\frac{ti}{2}\right) = \frac{2\pi}{ti} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\frac{ti}{2\pi}+n} + \frac{1}{\frac{ti}{2\pi}-n}\right),$$

tedy

$$-\frac{1}{2i}\cot\left(\frac{ti}{2}\right) = \frac{1}{t} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2t}{t^2+4n^2\pi^2}\,,$$

a odtud

$$\frac{1}{e^t-1}-\frac{1}{t}+\frac{1}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2t}{t^2+4n^2\pi^2},$$

a následovně

$$\varpi(a)=\int_{-\infty}^{0}\left(\frac{1}{e^t-1}-\frac{1}{t}+\frac{1}{2}\right)e^{at}\frac{dt}{t}=\int_{-\infty}^{0}e^{at}\,dt\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{t^2+4n^2\pi^2};$$

dokážeme však dodatečně, že smí se integrovati po členech, t. j. že

$$(\alpha)\qquad \int_{-\infty}^{0}e^{at}\,dt\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{t^2+4n^2\pi^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{0}\frac{2e^{at}\,dt}{t^2+4n^2\pi^2}.$$

Pak transformujme pravou stranu substitucí $t=2n\pi x$, i obdržíme

$$(\beta)\qquad \varpi(a)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{e^{2nax\pi}\,dx}{x^2+1};$$

podobně můžeme zde sečísti pod znamením integračním, užívajíce vzorce

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e^{2nax\pi}=-\log\left(1-e^{2ax\pi}\right),$$

čímž vznikne

$$\varpi(a)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^2+1}\log\left(1-e^{2ax\pi}\right)$$

anebo po substituci $x=-\frac{z}{a}$

$$(11^c)\qquad \varpi(a)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{a\,dz}{z^2+a^2}\log\left(\frac{1}{1-e^{-2z\pi}}\right),$$

kterýžto vzorec Binetův jsme chtěli obdržeti.

Zbývá ještě ukázati správnost vzorce (α).

Z nerovnosti

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{2}{t^2+4n^2\pi^2}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{t^2+4n^2\pi^2}=\varphi(t)$$

a z existence integrálu

$$\int_{-\infty}^{0}e^{at}\,dt\,\varphi(t)$$

plyne

$$\sum_{n=1}^{N} \int_{-\infty}^{0} \frac{2\, e^{at}\, dt}{t^2 + 4n^2\pi^2} < \int_{-\infty}^{0} e^{at}\, \varphi(t)\, dt\,,$$

a tedy musí řada

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{0} \frac{2\, e^{at}\, dt}{t^2 + 4n^2\pi^2}$$

konvergovati a při tom

$$S \leqq \int_{-\infty}^{0} e^{at}\, \varphi(t)\, dt\,.$$

Avšak

$$\int_{-M}^{0} e^{at} \varphi(t)\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-M}^{0} \frac{2\, e^{at}\, dt}{t^2 + 4n^2\pi^2}$$

skládá se ze členů menších než S, tak že

$$\int_{-M}^{0} e^{at}\, \varphi(t)\, dt < S \leqq \int_{-\infty}^{0} e^{at}\, \varphi(t)\, dt\,;$$

zvětšujeme-li M, stává se rozdíl prvého a posledního členu této nerovnosti libovolně malým, a proto bude

$$S = \int_{-\infty}^{0} e^{at}\, \varphi(t)\, dt\,,$$

což jest rovnice (α).

Právě tak bychom dokázali, že lze řadu (β) vyčísliti sečtením pod znamením integračním.

3. Ze vzorce Eulerova

$$\Gamma(a)\, \Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}$$

plyne pro $a = \frac{1}{2}$ vztah $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, kterého jsme několikráte užili. Vyjádřen pomocí integrálu, jest

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \sqrt{\pi}\,;$$

zavedeme-li integrační proměnnou $x = z^2$, máme odtud

$$\int_{0}^{\infty} e^{-z^2}\, dz = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}\,,$$

známý to vzorec Laplace-ův.

Možno jej psáti

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}\,.$$

Transformujeme-li substitucí $x = \sqrt{a}\,z - \dfrac{b}{2\sqrt{a}}$, máme

(12) $$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-az^2+bz}\,dz = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\,.\,e^{\frac{b^2}{4a}}\,;$$

při tom značí a kladnou veličinu a $\sqrt{a}$ dlužno vzíti kladně. Jak integrál, tak pravá strana mají smysl i pro komplexní b; poněvadž jsou to funkce analytické této proměnné, a sice jednoznačné, musí rovnice (12) býti platnou pro všecka konečná b, realná i komplexní.

Hledejme nyní integrál

$$J = \int\limits_{0}^{\infty} e^{-x^2-\frac{k^2}{x^2}}\,dx\,;$$

substitucí $x = z\sqrt{k}$ máme

$$\frac{J}{\sqrt{k}} = \int\limits_{0}^{\infty} e^{-k\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)}\,dz\,.$$

Násobme obě strany e^{2k}, i vznikne

$$\frac{J}{\sqrt{k}}\,e^{2k} = \int\limits_{0}^{\infty} e^{-k\left(z^2-2+\frac{1}{z^2}\right)}\,dz = \int\limits_{0}^{\infty} e^{-k\left(z-\frac{1}{z}\right)^2} dz\,.$$

Položme dále

$$z - \frac{1}{z} = 2x\,,\ \text{tedy}\ z = x + \sqrt{x^2+1}\,,$$

i obdržíme

$$\frac{J}{\sqrt{k}}\,e^{2k} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-kx^2}\,dx + \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-kx^2}\,\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}}\,;$$

poslední integrál mizí, poněvadž integrovaná funkce je lichou, a tedy

$$\frac{J}{\sqrt{k}}\,e^{2k} = \int\limits_{\infty}^{\infty} e^{-kx^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{k}}\,,$$

t. j.

(13) $$\int\limits_{0}^{\infty} e^{-x^2-\frac{k^2}{x^2}}\,dx = \sqrt{\pi}\,e^{-2k}.$$

Píšeme-li zde $x = \sqrt{z}$, máme

$$(13^a) \qquad \int_0^\infty e^{-z-\frac{k^2}{z}} \frac{dz}{\sqrt{z}} = 2\sqrt{\pi}\, e^{-2k}.$$

Integrál tento jest jen zvláštním případem integrálu mnohonásobného

$$J(k) = \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty e^{-\left(x_1+x_2+\dots+x_{n-1}+\frac{k^n}{x_1 x_2 \dots x_{n-1}}\right)}$$

$$\times\, x_1^{\frac{1}{n}-1}\, x_2^{\frac{2}{n}-1} \dots x_{n-1}^{\frac{n-1}{n}-1}\, dx_1\, dx_2 \dots dx_{n-1},$$

jejž vyšetřil Liouville.

Differencujme dle k za znamením integračním, abychom obdrželi

$$\frac{dJ(k)}{dk} = -n k^{n-1} \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty e^{-\left(x_1+x_2+\dots x_{n-1}+\frac{k^n}{x_1 x_2 \dots x_{n-1}}\right)}$$

$$\times\, x_1^{\frac{1}{n}-1}\, x_2^{\frac{2}{n}-1} \dots x_{n-1}^{\frac{n-1}{n}-1} \frac{dx_1\, dx_2 \dots dx_{n-1}}{x_1\, x_2 \dots x_{n-1}}$$

Tento integrál počítejme tak, že nejprve integrujeme dle x_1; při tom jsou $x_2, \dots x_{n-1}$ konstanty; zavedeme místo x_1 novou integrační proměnnou x_n substitucí

$$x_1 = \frac{k^n}{x_2\, x_3 \dots x_n},$$

čímž vznikne $x_1^{\frac{1}{n}-2}\, dx_1 = -\frac{k^{1-n}}{(x_2 \dots x_{n-1})^{\frac{1}{n}-1}}\, x_n^{-\frac{1}{n}}\, dx_n$, tedy

$$\frac{dJ}{dk} = -n \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty e^{-\left(x_2+x_3+\dots+x_n+\frac{k^n}{x_2 x_3 \dots x_n}\right)}$$

$$\times\, x_2^{\frac{1}{n}-1}\, x_3^{\frac{2}{n}-1} \dots x_n^{\frac{n-1}{n}-1}\, dx_2\, dx_3 \dots dx_n;$$

tento integrál liší se však pouze označením integračních liter od původního $J(k)$, a tedy

$$\frac{dJ}{dk} = -nJ, \quad \frac{dJ}{J} = -n\, dk, \quad \log J = \log C - nk$$

čili

$$(\gamma) \qquad J(k) = C e^{-nk}.$$

Zbývá ještě určiti konstantu C; klademe-li $k = 0$, máme

$$J(0) = \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty e^{-x_1-x_2-\dots-x_{n-1}}\, x_1^{\frac{1}{n}-1}\, x_2^{\frac{2}{n}-1} \dots x_{n-1}^{\frac{n-1}{n}-1}\, dx_1\, dx_2 \dots dx_{n-1},$$

což jest patrně součin integrálů

$$\int_0^\infty e^{-x_\nu} x_\nu^{\frac{\nu}{n}-1} dx_\nu, \quad (\nu = 1, 2, \dots n-1);$$

tedy

$$C = J(0) = \prod_{\nu=1}^{n-1} \Gamma\left(\frac{\nu}{n}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \dots \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right).$$

Z rovnice (γ) plyne

$$\int_0^\infty J(k) k^{a-1} dk = C \int_0^\infty e^{-nk} k^{a-1} dk = \frac{C\Gamma(a)}{n^a}$$

a tedy, provedeme-li první integrál,

$$\frac{C\Gamma(a)}{n^a} = \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x_1 - x_2 - \dots - x_{n-1} - \frac{k^n}{x_1 x_2 \dots x_{n-1}}}$$

$$\times k^{a-1} x_1^{\frac{1}{n}-1} x_2^{\frac{2}{n}-1} \dots x_{n-1}^{\frac{n-1}{n}-1} dk\, dx_1 \dots dx_{n-1}\,.\,,$$

Proveďme první integraci dle k; tu bude po substituci $k = z^{\frac{1}{n}}$,

$$\int_0^\infty e^{-\frac{k^n}{x_1 \dots x_{n-1}}} k^{a-1} dk = \frac{1}{n} \int_0^\infty e^{-\frac{z}{x_1 \dots x_{n-1}}} z^{\frac{a}{n}-1} dz$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \Gamma\left(\frac{a}{n}\right) \cdot (x_1 x_2 \dots x_{n-1})^{\frac{a}{n}}$$

a tedy mnohonásobný integrál má hodnotu

$$\frac{C\Gamma(a)}{n^a} = \frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{a}{n}\right) \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty e^{-x_1 - x_2 - \dots - x_{n-1}}$$

$$\times x_1^{\frac{a+1}{n}-1} x_2^{\frac{a+2}{n}-1} \dots x_{n-1}^{\frac{a+n-1}{n}-1} dx_1\, dx_2 \dots dx_{n-1},$$

a poněvadž tento mnohonásobný integrál patrně je součinem integrálů tvaru

$$\int_0^\infty e^{-x_\nu} x_\nu^{\frac{a+\nu}{n}-1} dx_\nu = \Gamma\left(\frac{a+\nu}{n}\right),$$

máme

$$\frac{C\Gamma(a)}{n^a} = \frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{a}{n}\right) \Gamma\left(\frac{a+1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{a+2}{n}\right) \dots \Gamma\left(\frac{a+n-1}{n}\right)$$

a odtud vzorec Legendre-ův (6), určíme-li v něm konstantu C. Tím tedy také tento veledůležitý vzorec dokázán prostředky počtu integrálnímu vlastními.

4. Obraťme se nyní ku vzorci

$$\int_0^\infty e^{-ux} x^{a-1}\, dx = \frac{\Gamma(a)}{u^a}\,.$$

Levá strana má hodnotu konečnou, je-li realná část veličiny u kladná, a lze snadně dokázati (rozkladem $\int_0^1 + \int_1^2 + \int_2^3 + \ldots$), že integrál ten jest funkce analytická proměnné u, která jest jednoznačnou a pravidelnou pro Real. $u > 0$. Definujeme-li pak $u^a = e^{a \log u}$, při čemž logarithmus má pomyslnou část v mezích $-\pi$ a π $\left(\text{zde dokonce } -\frac{\pi}{2} \text{ a } \frac{\pi}{2}\right)$, jsou obě strany naší rovnice v uvažovaném oboru (Real. $u > 0$) jednoznačné funkce analytické, a poněvadž rovnice platí pro realná u, platí pro všecka u bez rozdílu (v tomto oboru).

Volme tedy $u = \xi \pm i\eta$, $\xi > 0$, a máme

$$\int_0^\infty e^{-\xi x} \cos \eta x \,.\, x^{a-1} \mp i \int_0^\infty e^{-\xi x} \sin \eta x \,.\, x^{a-1}\, dx$$

$$= \Gamma(a)\, (\xi \pm i\eta)^{-a} = \frac{\Gamma(a)}{(\xi^2+\eta^2)^{\frac{a}{2}}}\, e^{\mp a i \operatorname{arc\,tg} \frac{\eta}{\xi}}$$

a tedy

$$(14)\quad \left\{ \begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\xi x} \cos \eta x \,.\, x^{a-1}\, dx &= \frac{\Gamma(a)}{(\xi^2+\eta^2)^{\frac{1}{2}a}} \cos\left(a \operatorname{arc\,tg} \frac{\eta}{\xi}\right) \\ \int_0^\infty e^{-\xi x} \sin \eta x \,.\, x^{a-1}\, dx &= \frac{\Gamma(a)}{(\xi^2+\eta^2)^{\frac{1}{2}a}} \sin\left(a \operatorname{arc\,tg} \frac{\eta}{\xi}\right). \end{aligned} \right.$$

Je-li však a ryzí zlomek, bude $0 < 1 - a < 1$, a integrál

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\xi x} \cos \eta x}{x^{1-a}}\, dx$$

bude existovati i pro $\xi = 0$, poněvadž funkce střídavě mění znamení a klesá, a sice bude

$$\lim_{\xi=0} \int_0^\infty \frac{e^{-\xi x} \cos \eta x}{x^{1-a}}\, dx = \int_0^\infty \frac{\cos \eta x}{x^{1-a}}\, dx\,.$$

Dokažme za tím účelem obecnější větu: Je-li funkce $f(x)$ konečná v každém bodě uvnitř intervallu $(0 \ldots \infty)$ a existují-li integrály

$$J = \int_0^\infty f(x)\,dx\,, \quad J_\xi = \int_0^\infty f(x)\,e^{-\xi x}\,dx\,,$$

pak $\lim J_\xi = J$, jest-li $f(\infty)$ konečné.

Na důkaz proveďme substituci $x = -\log z$, tak že

$$J = \int_0^1 f(-\log z)\,\frac{dz}{z} J\,, \quad J_\xi = \int_0^1 f(-\log z)\,\frac{dz^\xi}{z}\,.$$

Tu pak můžeme nalézti δ tak malé, že integrály

$$\int_0^\delta f(-\log z)\,.\,\int_{1-\delta}^1 f(-\log z)\,\frac{dz}{z}\,,\ \int_0^\delta f(-\log z)\,\frac{dz}{z}\,.\,z^\xi\,,\ \int_{1-\delta}^1 f(-\log z)\,\frac{dz}{z}\,.\,z^\xi$$

budou menší než předepsaná veličina ε, a to při všech kladných ξ.

Po té možno voliti ξ tak malé, aby integrál

$$\int_\delta^{1-\delta} f(-\log \xi)\,\frac{dz}{z}\,(z^\xi - 1)$$

byl menší než ε; neboť funkce je konečná v oboru integračním a je násobena činitelem $z^\xi - 1$, jejž lze učiniti libovolně malým. Pak bude rozdíl $J_\xi - J$ se skládati z pěti částí, z nichž každá je menší než ε, tedy sám bude menší než 5ε. Poněvadž možno ξ tak voliti, aby $|J_\xi - J| < 5\varepsilon$, je tím dokázán výsledek $\lim\limits_{\xi=0} J_\xi = J$.

Užijeme-li této věty na vzorcích (14), obdržíme

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} &\int_0^\infty \cos\eta x\,.\,x^{a-1}\,dx = \frac{\Gamma(a)}{\eta^a}\cos\frac{a\pi}{2}\,, \quad 0 < a < 1\,, \\ &\int_0^\infty \sin\eta x\,.\,x^{a-1}\,dx = \frac{\Gamma(a)}{\eta^a}\sin\frac{a\pi}{2}\,, \quad -1 < a < 1\,. \end{aligned}\right.$$