Matyáš Lerch

Theorie funkce gamma. [III.]

Věstník Čes. Akademie cís. Fr. Jos. pro vědy, slovesnost a umění v Praze 2 (1893), 382–398

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501772

co v obou jest správného. Polytheismus snížil Boha, rozštěpiv jej na jednotlivé zosobněné stránky činnosti jeho; v tom však pravdu měl, že vhroužil tuto činnost v život světa, že dechem božským proniknut byl celý svět. Monotheismus povýšil Boha, sjednotiv různé ony stránky činnosti božské v jedinou bytost; proti nízkostem bohů pohanských nevěděl však jiné rady, než že Boha svého povýšil tak, že svět se stal pouhou podnoží jeho.

(T. 11): „Zde jest všeobecnější a hlubší příčina názoru noci. Aby Boha před pohanským rozptýlením ve světové jednotlivosti zachránila a nad nízkost jejich povýšila, oddestillovala ho theologie od světa, v odporu ovšem s výroky vlastních pramenů svých a sama sobě vždy znova odporujíc, proměnila bohy ve sloužící anděly a povznesla i tyto nad hvězdy. A nyní tu zůstal svět, nejen božství zbavený, nýbrž i z Boha s přídavkem mechanických sil propuštěný, ano od Boha hříšně odpadlý, co caput mortuum pro měření a experimenty fysiků, pro lukubrace filosofů, pro hádky theologů. Tak ztratilo božské vědomí svůj obsah z dola, smyslný zjev svou souvislost s hora, ono se rozprchlo v nepochopitelno, tento zmizel až na některé zbytky.“

Nápravu má poskytnouti názor dne. Vychází ovšem od pouhé hypothesy, že smyslný zjev mimo jednotlivá stvoření jde celým světem; ale opačný názor noci, že svět mezi jednotlivými bytostmi jest tmavý a němý, též jest pouhou hypothesou, a domněnka první daleko jest utěšenější druhé, souhlasí lépe s přirozeným názorem a poskytuje více možnosti k souvislému a sobě neodporujícímu pojímání světa. (Dokončení.)

Theorie funkce gamma.

Napsal *M. Lerch.*

(Pokračování.)

4. V odst. 2. dokázali jsme vzorec (7)

$$\int_0^1 \log \Gamma(x)\, dx = \log \sqrt{2\pi}\,;$$

vzorec ten jest zvláštním případem obecnějšího vzorce Raabeova, jejž ihned odvodíme. Zabývejme se integrálem

$$J = \int_0^1 \log \Gamma(u+x)\, dx\,,$$

kde možno zatím předpokládati, že u jest kladné.

Píšeme-li jej ve tvaru

$$J = \int_u^{u+1} \log \Gamma(x)\, dx\,,$$

máme differencováním

$$\frac{dJ}{du} = \log \Gamma\,(u+1) - \log \Gamma\,(u) = \log \frac{\Gamma(u+1)}{\Gamma(u)} = \log u$$

a odtud

$$J = \int \log u\, du = A + u \log u - u\,,$$

kde A značí integrační konstantu; položíme-li $u=0$, přejde J v integrál (7) a tedy obdržíme

$$(a)\qquad A=\int_0^1 \log\Gamma(x)\,dx=\log\sqrt{2\pi}$$

a následkem toho hledaný vzorec Raabeův

$$(18)\qquad \int_0^1 \log\Gamma(u+x)\,dx=u\log u-u+\log\sqrt{2\pi}.$$

Jednoduchost této methody spočívá v okolnosti, že konstantu A znán e z úvah dřívějších. Leč i kdyby toho nebylo, můžeme hodnotu tohoto integrálu obdržeti na základě Eulerovy věty

$$\Gamma(a)\,\Gamma(1-a)=\frac{\pi}{\sin a\pi},$$

jak následuje.

V integrálu (a) pišme $x=1-y$, i bude

$$A=\int_0^1 \log\Gamma(1-y)\,dy,$$

tedy sečtením obou tvarů

$$2A=\int_0^1 [\log\Gamma(x)+\log\Gamma(1-x)]\,dx;$$

dle věty Eulerovy jest obsah závorky [ ] patrně

$$\log\pi-\log\sin x\pi$$

a tedy máme

$$2A=\log\pi-\int_0^1 \log\sin x\pi\,.\,dx.$$

Abychom určili tento integrál, uvažme, že platí

$$2\sin\frac{x\pi}{2}\,.\,\sin\frac{(x+1)\pi}{2}=\sin x\pi,$$

a tedy

$$\log 2+\log\sin\frac{x\pi}{2}+\log\sin\frac{(x+1)\pi}{2}=\log\sin x\pi,$$

z čehož plyne integrací

$$\log 2+\int_0^1 \log\sin\frac{x\pi}{2}\,dx+\int_0^1 \log\sin\frac{(x+1)\pi}{2}\,dx=\int_0^1 \log\sin x\pi\,dx.$$

Substitucemi $x = 2y$, resp. $x + 1 = 2y$ vychází

$$\log 2 + 2\int_0^{\frac{1}{2}} \log \sin y\pi\, dy + 2\int_{\frac{1}{2}}^{1} \log \sin y\pi\, dy = \int_0^1 \log \sin x\pi\, dx$$

čili

$$\log 2 + 2\int_0^1 \log \sin y\pi \,.\, dy = \int_0^1 \log \sin x\pi\, dx\,;$$

odtud plyne

$$(19)\qquad \int_0^1 \log \sin x\pi \,.\, dx = -\log 2\,,$$

a tedy $2A = \log \pi + \log 2$, z čehož konečně $A = \log \sqrt{2\pi}$, což jest právé vzorec (7), který tedy na novo dokázán.[1])

Ze vzorce Raabeova (18) plyne velmi jednoduše rozvoj, jenž byl předmětem zajímavých úvah. Pišme integrál Raabeův ve tvaru

$$J = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \log \Gamma\left(a + \frac{1}{2} + x\right) dx\,,$$

i obdržíme částečnou integrací

$$J = \frac{1}{2}\log \Gamma(a+1) + \frac{1}{2}\log \Gamma(a) - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x\, d\log \Gamma\left(a + \frac{1}{2} + x\right)$$

čili

$$J = \log \Gamma(a) + \frac{1}{2}\log a - \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) d\log \Gamma(a+x)\,;$$

obdržíme tedy po dosazení hodnoty za J

$$(20)\int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)\frac{\Gamma'(a+x)}{\Gamma(a+x)}\,dx = \log \Gamma(a) - \left(a - \frac{1}{2}\right)\log a + a - \log\sqrt{2\pi}\,.$$

---

[1]) Vyložený zde důkaz uveřejnili jsme před několika lety v 26. svazku Giornale di Matematiche (red. Bataglini).
Důkaz ten byl přejat do přednášek p. Hermitea konaných na Sorbonně (Cours de M. Hermite, rédigé par. M Andoyer, 4. édition, 1891; Paris, A. Hermann).
Kromě toho byl přeložen do portugalštiny v 9. sv. Jornal de Sciencias mathematicas, a přešel do spisu F. Gomes Teixeira, Curso de Analyse infinitesimal, Calculo integral, 2a parte, p. 104.
Viz též naši práci „O hlavních vlastnostech integrálů Eulerových". (Věstník král. české spol. nauk z r. 1889.)

Hodnotu tohoto integrálu znamenejme $\varpi(a)$, t. j. položme

$$(20^a)\qquad \varpi(a)=\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)\frac{\Gamma'(a+x)}{\Gamma(a+x)}\,dx\,.$$

Klademe-li sem řadu

$$\frac{\Gamma'(a+x)}{\Gamma(a+x)}=\Gamma'(1)+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+a+x}\right),$$

můžeme za příčinou stejnoměrnosti konvergence integrovati po členech; poněvadž jest

$$\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)dx=0\,,$$

máme řadu [1])

$$(21)\qquad \varpi(a)=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1\frac{\left(\frac{1}{2}-x\right)dx}{n+a+x}\,.$$

Vypočteme-li integrály v pravo, máme řadu Gudermannovu

$$(22)\qquad \varpi(a)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(a+n+\frac{1}{2}\right)\log\frac{a+n+1}{a+n}-1\right];$$

připomeňme, že dle (20) a (20^a)

$$(22^a)\qquad \log\Gamma(a)=\left(a-\frac{1}{2}\right)\log a-a+\log\sqrt{2\pi}+\varpi(a)\,.$$

Přirovnáme-li k rovnici (17^a) a (17^b), obdržíme

$$(23)\qquad \varpi(a)=\int_0^{\infty}\frac{2\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\,dx}{e^{2x\pi}-1}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{a\,dx}{a^2+x^2}\log\left(\frac{1}{1-e^{-2x\pi}}\right).$$

Jiný Binetův výraz pro funkci $\varpi(a)$ dovozuje pan Hermite takto.[2])

Slavný mathematik francouzský vychází z Cauchyova vzorce (13^a)

$$\log\Gamma(u)=\int_{-\infty}^{0}\left[\frac{e^{ut}-e^t}{e^t-1}-(u-1)\,e^t\right]\frac{dt}{t}\,,$$

---

[1]) Ph. Gilbert, Recherches sur le développement de la fonction Γ. (Mémoires de l'Acad. royale de Belgique, sv. 41, 1875). Dále Stieltjes, Sur le développement de log $\Gamma(a)$. (Journal de Mathématiques pures et appliquées, 4. série, t. V, 1889).

[2]) V dopisu mi zaslaném a otištěném ve Věstníku král. české společnosti nauk z r. 1888.

z něhož plyne

$$J = \int_a^{a+1} \log \Gamma(u)\, du = \int_{-\infty}^0 \frac{dt}{t} \int_a^{a+1} du \left[\frac{e^{ut} - e^t}{e^t - 1} - (u-1)\, e^t \right],$$

a poněvadž

$$\int_a^{a+1} \frac{e^{ut}\, du}{e^t - 1} = \frac{1}{e^t - 1} \cdot \frac{e^{(a+1)t} - e^{at}}{t} = \frac{e^{at}}{t},$$

$$\int_a^{a+1} (u-1)\, du = a - \frac{1}{2},$$

máme

$$J = \int_{-\infty}^0 \left[\frac{e^{at}}{t} - \frac{e^t}{e^t - 1} - \left(a - \frac{1}{2}\right) e^t \right] \frac{dt}{t};$$

tento vzorec odečteme od (13[a])

$$\log \Gamma(a) = \int_{-\infty}^0 \left[\frac{e^{at}}{e^t - 1} - \frac{e^t}{e^t - 1} - (a-1)\, e^t \right] \frac{dt}{t},$$

abychom měli

$$\log \Gamma(a) - J = \int_{-\infty}^0 \left[\frac{e^{at}}{e^t - 1} - \frac{e^{at}}{t} + \frac{1}{2}\, e^t \right] \frac{dt}{t}.$$

Abychom odstranili z integrálu stálý člen $\frac{1}{2}\, e^t$, užijeme známého vzorce elementarného [1])

$$\log a = \int_{-\infty}^0 \frac{e^{at} - e^t}{t}\, dt;$$

násobme jej $\frac{1}{2}$ a přičtěme k předchozímu, i vznikne

$$\log \Gamma(a) - J + \frac{1}{2} \log a = \int_{-\infty}^0 \left(\frac{e^{at}}{e^t - 1} - \frac{e^{at}}{t} + \frac{e^{at}}{2} \right) \frac{dt}{t}$$

---

[1]) Lze jej psáti

$$\log a = \int_0^1 \frac{x^{a-1} - 1}{\log x}\, dx,$$

a obdrží se z rovnice

$$\frac{1}{a} = \int_0^1 x^{a-1}\, dx$$

integrováním.

čili po dosazení hodnoty za Raabeův integrál J

$$(24)\quad \begin{cases} \log \Gamma(a) = \left(a - \frac{1}{2}\right)\log a - a + \log\sqrt{2\pi} \\ \qquad + \int\limits_{-\infty}^{0} \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right)\frac{e^{at}\,dt}{t} \end{cases}$$

a odtud druhý vzorec Binetův [1])

$$(24^a)\qquad \varpi(a) = \int\limits_{-\infty}^{0} \left(\frac{1}{e^t - t} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right)\frac{e^{at}\,dt}{t},$$

jenž panem Hermitem takto byl dokázán s nebývalou jednoduchostí.

Z nalezených takto výrazů pro funkci $\varpi(a)$ plyne, že pro veliká kladná a tato funkce jest malou, t. j. že $\lim\limits_{n=\infty} \varpi(a+n) = 0$. Z řady Gudermannovy (22) plyne dále

$$\varpi(a) = \left(a + \frac{1}{2}\right)\log\frac{a+1}{a} - 1 + \varpi(a+1).$$

Tyto dvě vlastnosti funkci $\varpi(a)$ úplně charakterisují, t. j. **každá jiná funkce** $\varpi(a)$, **pro niž platí**

$$(25)\quad \begin{cases} \varpi(a+1) = \varpi(a) + 1 - \left(a + \frac{1}{2}\right)\log\frac{a+1}{a} \\ \lim\limits_{n=\infty} \varpi(a+n) = 0, \end{cases}$$

splývá nutně s naší funkcí Binetovou $\varpi(a)$. Neboť z rovnice prvé snadno se odvodí

$$\varpi(a) = \sum_{\nu=0}^{n-1}\left[\left(a + \nu + \frac{1}{2}\right)\log\frac{a+\nu+1}{a+\nu} - 1\right] + \varpi(a+n),$$

a z druhé rovnice $\lim \varpi(a+n) = 0$ plyne, že $\varpi(a)$ rovná se řadě (22), jak tvrzeno.

Abychom obdrželi další vyjádření funkce $\varpi(a)$, uvažme, že z (22^a) plyne

$$\varpi(a) = \log\Gamma(a) - \left(a - \frac{1}{2}\right)\log a + a - \log\sqrt{2\pi},$$

$$\varpi\left(a + \frac{1}{2}\right) = \log\Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right) - a\log\left(a + \frac{1}{2}\right) + a + \frac{1}{2} - \log\sqrt{2\pi},$$

$$-\varpi(2a) = -\log\Gamma(2a) + \left(2a - \frac{1}{2}\right)\log 2a - 2a + \log\sqrt{2\pi};$$

[1]) Funkci $\varpi(a)$ zavedl již dříve Plana (Memoiry akademie Turinské, sv. 24.).

sečteme-li tyto rovnice, a užijeme-li Legendreova vzorce transformačního (6*) pro případ $n=2$:

$$\frac{\Gamma(a)\,\Gamma(a+\frac{1}{2})}{\Gamma(2a)} = \sqrt{2\pi}\,.\,2^{\frac{1}{2}-2a},$$

vyjde

$$\varpi(a)+\varpi\left(a+\frac{1}{2}\right)-\varpi(2a)=\frac{1}{2}-a\log\frac{2a+1}{2a}. \tag{26}$$

Tohoto výsledku užijeme k následujícímu přetvoření Binetova vzorce (23). Ze vzorce (23) totiž plyne užitím identity $1-e^{-2x\pi}=(1-e^{-x\pi})(1+e^{-x\pi})$

$$\varpi(a)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{a\,dx}{a^2+x^2}\log\frac{1}{1-e^{-x\pi}}+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{a\,dx}{a^2+x^2}\log\frac{1}{1+e^{-x\pi}};$$

píšeme-li zde $2a$ za a, $2x$ za x, máme

$$\varpi(2a)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{a\,dx}{a^2+x^2}\log\frac{1}{1-e^{-2x\pi}}+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{a\,dx}{a^2+x^2}\log\frac{1}{1+e^{-2x\pi}}.$$

a tedy, poněvadž prvý člen jest $\varpi(a)$,

$$\varpi(2a)-\varpi(a)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{a\,dx}{a^2+x^2}\log\frac{1}{1+e^{-2x\pi}}.$$

Levá strana má dle (26) hodnotu

$$\varpi\left(a+\frac{1}{2}\right)+a\log\frac{2a+1}{2a}+\frac{1}{2}.$$

tak že nacházíme

$$\varpi\left(a+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}-a\log\frac{2a+1}{2a}+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{a\,dx}{a^2+x^2}\log\frac{1}{1+e^{-2x\pi}}, \tag{27}$$

vzorec to s Binetovým analogický.

5. Vlastnost funkce gamma vyjádřená rovnicemi (22) a (22[a]) jest základní důležitosti pro theorii této funkce. Je zajímavo, že ji lze obdržeti přímo z definice funkce gamma cestou elementarnou, která vyžaduje toliko nejobyčejnějších prostředků algebraické analyse.

Z definice funkce $\Gamma(a)$, t. j.

$$\Gamma(a)=\frac{1}{a}\prod_{\nu=1}^{\infty}\frac{(1+\frac{1}{\nu})^a}{1+\frac{a}{\nu}},$$

plyne totiž

$$\log\Gamma(a)+\log a=\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[a\log\left(1+\frac{1}{\nu}\right)-\log\frac{a+\nu}{\nu}\right].$$

K transformaci této řady užijme identity

$$\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu = \sum_{\nu=1}^{n-1} \nu\,(b_\nu - b_{\nu+1}) + n\,b_n\,,$$

znamenajíce

$$b_\nu = a \log\left(1 + \frac{1}{\nu}\right) - \log\frac{a+\nu}{\nu}\,.$$

Poněvadž zde

$$n\,b_n = n\left[\frac{a}{n} - \frac{a}{2n^2} + \ldots - \frac{a}{n} + \frac{a^2}{2n^2} - \ldots\right],$$

máme $\lim n\,b = 0$ a tedy

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu\,(b_\nu - b_{\nu+1})\,.$$

Poněvadž zároveň $\log \Gamma(a) + \log a = \log \Gamma(a+1)$, máme po této transformaci

$$\log \Gamma(a+1) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu\left[a \log\left(\frac{\nu+1}{\nu}\cdot\frac{\nu+1}{\nu+2}\right) + \log\frac{a+\nu+1}{a+\nu} - \log\frac{\nu+1}{\nu}\right].$$

Píšeme-li v tomto vzorci $a-1$ místo a, $\nu+1$ místo ν, máme

$$(\alpha)\qquad \log \Gamma(a) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1)\left[(a-1)\log\left(\frac{\nu+2}{\nu+1}\cdot\frac{\nu+2}{\nu+3}\right)\right.$$
$$\left. + \log\frac{a+\nu+1}{a+\nu} - \log\frac{\nu+2}{\nu+1}\right].$$

Abychom přeměnili pravou stranu, užijme identity

$$\sum_{\nu=0}^{n-1}\left[\log\frac{a+\nu+1}{a+\nu} - \log\frac{\nu+2}{\nu+1}\right] = \log\frac{a+n}{a} - \log(n+1)$$

pro $n = \infty$; tím vznikne

$$-\log a = \sum_{\nu=0}^{\infty}\left[\log\frac{a+\nu+1}{a+\nu} - \log\frac{\nu+2}{\nu+1}\right].$$

Tuto rovnici násobme $\left(a - \frac{1}{2}\right)$ a přičtěme k (α), i obdržíme

$$(\beta)\qquad \log \Gamma(a) - \left(a - \frac{1}{2}\right)\log a$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty}\left\{\left(a + \nu + \frac{1}{2}\right)\log\frac{a+\nu+1}{a+\nu} + (\nu+1)(a-1)\log\left(\frac{\nu+2}{\nu+1}\cdot\frac{\nu+2}{\nu+3}\right)\right.$$
$$\left. - \left(a + \nu + \frac{1}{2}\right)\log\frac{\nu+2}{\nu+1}\right\}.$$

Pro veliká $a+\nu$ platí

$$\left(a+\nu+\frac{1}{2}\right)\log\frac{a+\nu+1}{a+\nu}$$

$$=\left(a+\nu+\frac{1}{2}\right)\left[\frac{1}{a+\nu}-\frac{1}{2}\frac{1}{(a+\nu)^2}+\frac{1}{3}\frac{1}{(a+\nu)^3}-\dots\right]$$

$$=1+\frac{1}{2}\frac{1}{a+\nu}-\left(a+\nu+\frac{1}{2}\right)\left[\frac{1}{2}\frac{1}{(a+\nu)^2}-\frac{1}{3}\frac{1}{(a+\nu)^3}+\dots\right],$$

tedy

$$\left(a+\nu+\frac{1}{2}\right)\log\frac{a+\nu+1}{a+\nu}-1=\frac{\varepsilon_\nu}{(a+\nu)^2},$$

kde ε_ν je konečné pro $a+\nu=\infty$. Odtud plyne, že řada

$$(\gamma)\qquad \varpi(a)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\left[\left(a+\nu+\frac{1}{2}\right)\log\frac{a+\nu+1}{a+\nu}-1\right]$$

konverguje absolutně i stejnoměrně, načež obdržíme z (β)

$$\Gamma(a)-\left(a-\frac{1}{2}\right)\log a-\varpi(a)$$

$$=\sum_{\nu=0}^{\infty}\left\{1-\left(a+\nu+\frac{1}{2}\right)\log\frac{\nu+2}{\nu+1}+(\nu+1)(a-1)\log\left(\frac{\nu+2}{\nu+1}\cdot\frac{\nu+2}{\nu+3}\right)\right\},$$

kteréžto veličina je tvaru $A(a-1)+B$, kde položeno

$$A=\sum_{\nu=0}^{\infty}\left[(\nu+1)\log\left(\frac{\nu+2}{\nu+1}\cdot\frac{\nu+2}{\nu+3}\right)-\log\frac{\nu+2}{\nu+1}\right],$$

a podobně patrný je význam veličiny B. V řadě A možno psáti obecný člen takto: $\nu\log\frac{\nu+2}{\nu+1}-(\nu+1)\log\frac{\nu+3}{\nu+2}$, a tedy součet prvých členů až po $\nu=n-1$ bude $-n\log\frac{n+2}{n+1}$, limita jeho tedy $A=-1$. Nacházíme tak vzorec

$$(\gamma')\qquad \log\Gamma(a)=\left(a-\frac{1}{2}\right)\log a-a+(1+B)+\varpi(a),$$

kde ještě jde o konstantu B. Stanoviti tuto přímo z její definice nějakým obratem sotva se podaří. Proto vypočteme řadu (γ) pro $a=\frac{1}{2}$; obdržíme

$$\varpi\left(\frac{1}{2}\right)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\left[(\nu+1)\log\frac{2\nu+3}{2\nu+1}-1\right]=\frac{1}{2}\sum_{m}\left[(m+2)\log\frac{m+3}{m+1}-1\right],$$

$$(m=0,2,4,6,\dots).$$

Dále máme pro $a=1$

$$\varpi(1)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{2\nu+3}{2}\log\frac{2\nu+4}{2\nu+3}-1\right)=\sum_{n}\left(\frac{n+2}{2}\log\frac{n+3}{n+1}-1\right),$$

$$(n=1,3,5,7,\dots).$$

Obě řady $\varpi\left(\frac{1}{2}\right)$ i $\varpi(1)$ mají členy stejného tvaru, jediné s tím rozdílem, že v první probíhá index sudé, v druhé pak liché hodnoty; součet musí tedy býti

$$\varpi\left(\frac{1}{2}\right)+\varpi(1)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{\nu+2}{2}\log\frac{\nu+3}{\nu+1}-1\right);$$

odečteme-li odtud řadu $\varpi(1)$, zbude

$$\varpi\left(\frac{1}{2}\right)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\left[\frac{\nu+2}{2}\log\frac{\nu+3}{\nu+1}-\left(\nu+\frac{3}{2}\right)\log\frac{\nu+2}{\nu+1}\right].$$

Tuto lze sečísti; pišme ji za tím účelem ve tvaru

$$\frac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left[(\nu+2)\log(\nu+3)-2\left(\nu+\frac{3}{2}\right)\log(\nu+2)+(\nu+1)\log(\nu+1)\right]$$

a pokládejme ji za limitu pro $n=\infty$ výrazu

$$\frac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{n-1}\left[(\nu+2)\log(\nu+3)-(2\nu+3)\log(\nu+2)+(\nu+1)\log(\nu+1)\right],$$

jenž je totožný s rozdílem

$$\frac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{n-1}\left[(\nu+2)\log(\nu+3)-(\nu+1)\log(\nu+2)\right]$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{n-1}\left[(\nu+2)\log(\nu+2)-(\nu+1)\log(\nu+1)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[(n+1)\log(n+2)-\log 2-(n+1)\log(n+1)\right]$$

$$=\frac{1}{2}(n+1)\log\frac{n+2}{n+1}-\frac{1}{2}\log 2;$$

limita pro $n=\infty$ bude tedy

$$\varpi\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\log 2;$$

vzorec (γ') pak poskytne pro $a=\frac{1}{2}$:

$$\log\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\log\sqrt{\pi}=-\frac{1}{2}+(B+1)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\log 2\right),$$

tedy

$$B+1=\frac{1}{2}\log 2+\log\sqrt{\pi}=\log\sqrt{2\pi},$$

čímž vzorec (γ') obdrží tvar

$$\log\Gamma(a)=\left(a-\frac{1}{2}\right)\log a-a+\log\sqrt{2\pi}+\varpi(a), \tag{22ᵃ}$$

kde funkce $\varpi(a)$ definována řadou Gudermannovou

$$(22)\qquad \varpi(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(a+n+\frac{1}{2}\right)\log\frac{a+n+1}{a+n} - 1\right],$$

kteroužto větu jsme chtěli cestou elementarnou odvoditi.

Průběhem úvahy viděli jsme, že obecný člen této řady je tvaru $\frac{\varepsilon_n}{(a+n)^2}$, kde ε_n je konečné pro $a+n=\infty$. Značí-li tedy M veličinu nezávislou na n, která převyšuje všecka ε_n, máme

$$(\mathrm{a})\qquad |\varpi(a)| < M \,.\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{|a+n|^2}\,.$$

Při této redukci jsme mlčky předpokládali, že a jest realné a kladné. Zbývá rozšířiti platnost této věty též na komplexní a. Vylučme ze svých úvah negativní realné hodnoty a; pro ostatní realné i komplexní hodnoty a budou pak logarithmy veličin $a+n+1$, $a+n$, $1+\frac{a}{n}$ dány jednoznačně podmínkou, aby jich pomyslné části byly v mezích $-\pi$ a π.

Totéž bude platiti o logarithmu

$$\log\frac{a+n+1}{a+n} = \log(a+n+1) - \log(a+n)\,;$$

vyloučíme-li tedy pomocí řezu $(-\infty\ldots 0)$ z roviny komplexní proměnné a všecky realné záporné hodnoty a, bude za učiněné konvence funkce $\varpi(a)$ dána jednoznačně v celé rovině opatřené řezem $(-\infty\ldots 0)$. Rovněž řada

$$-\log a + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a\log\left(1+\frac{1}{n}\right) - \log\left(1+\frac{a}{n}\right)\right]$$

bude dána jednoznačně v takto rozdělené rovině $[a]$, a bude v ní definovati *analytickou funkci jednoznačnou* (ve smyslu omezené proměnnosti veličiny a za příčinou existence řezu) proměnné a. Součet této řady budeme nazývati $\log \Gamma(a)$; splývá s obyčejným arithmetickým (realným) logarithmem veličiny $\Gamma(a)$, je-li a realné (kladné).

V rozdělené rovině $[a]$ obě strany rovnice (22^{a}) jsou jednoznačné funkce analytické; poněvadž splývají pro realná a, splynou i pro ostatní hodnoty proměnné a. Rovnice (22^{a}) jest všeobecně platna.

Volme nyní

$$a = \xi + i\eta\,,\qquad 0 < \xi \leqq 1\,,$$

a hleďme vystihnouti veličinu $\varpi(a)$ pro veliká η. Z nerovnosti (a) plyne

$$|\varpi(\xi+i\eta)| < M\,.\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(\xi+n)^2+\eta^2} < M\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+\eta^2}\,.$$

Součet tento možno vyjádřiti v zakončeném tvaru; neboť jsme viděli, že

$$f(\eta) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+\eta^2} = \frac{\pi}{2\eta}\left(\frac{e^{\eta\pi}+e^{-\eta\pi}}{e^{\eta\pi}-e^{-\eta\pi}} - \frac{1}{\eta\pi}\right),$$

a tedy máme

$$|\varpi(\xi + i\eta)| < M\left[f(\eta) + \frac{1}{\eta^2}\right],$$

t. j.

$$|\varpi(\xi + i\eta)| < \frac{M\pi}{2\eta}\left(\frac{e^{\eta\pi} + e^{-\eta\pi}}{e^{\eta\pi} - e^{-\eta\pi}} + \frac{1}{\eta\pi}\right).$$

Pro veliká η je tato veličina typu

$$\frac{M\pi}{2|\eta|}\left(1 + \frac{1}{|\eta|\pi}\right),$$

a tedy

(28) $$|\varpi(\xi + i\eta)| < \frac{N}{|\eta|}, \qquad 0 \leqq \xi \leqq 1,$$

kde N je veličina na ξ, η nezávislá.

Pro veliká η bude tedy $\varpi(\xi + i\eta)$ nepatrné a proto máme z rovnice (22^a)

$$\Gamma(a) = a^{a-\frac{1}{2}} e^{-a} \sqrt{2\pi}\,(1 + \delta_a),$$

kde δ_a jest nepatrné pro veliká η.

Poněvadž

$$\log a = \log(\xi + i\eta) = \log\sqrt{\xi^2 + \eta^2} + i \operatorname{arctg}\frac{\eta}{\xi},$$

máme

$$a^{a-\frac{1}{2}} = (\sqrt{\xi^2 + \eta^2})^{\xi + i\eta - \frac{1}{2}}\, e^{(\xi - \frac{1}{2} + i\eta)\, i \operatorname{arctg}\frac{\eta}{\xi}}$$

a odtud

$$|a^{a-\frac{1}{2}}| = (\xi^2 + \eta^2)^{\frac{1}{2}\xi - \frac{1}{4}}\, e^{-\eta \operatorname{arctg}\frac{\eta}{\xi}},$$

a ježto

$$|e^{-a}| = e^{-\xi},$$

platí

(29) $$|\Gamma(\xi + i\eta)| = (\xi^2 + \eta^2)^{\frac{1}{2}\xi - \frac{1}{4}}\, e^{-\xi - \eta \operatorname{arctg}\frac{\eta}{\xi}}\,(1 + \delta_\eta),$$

kterýžto vzorec přesněji než (4) vyjadřuje povahu funkce $\Gamma(\xi + i\eta)$ pro veliká η a pro $0 \leqq \xi \leqq 1$.

II.

1. Vyvinuté zde výsledky tvoří základ další theorie funkce gamma, v níž budeme pokračovati v příštích článcích. Nyní vidí se nám vhodným porozhlédnouti se po nabytých vědomostech a zkoumati jiné methody k nalezení vět zde vyložených; neboť přirovnání method nejvíce přispívá k vypěstění ducha mathematického.

Vycházejme z definice

(1) $$\Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-x} x^{a-1}\, dx,$$

kde veličina a musí míti realnou část kladnou, aby integrál existoval. Dokázali jsme již pomocí rozkladu $\Gamma(a) = P(a) + Q(a)$, kde

$$P(a) = \int_0^1 e^{-x} x^{a-1} dx, \qquad Q(a) = \int_1^\infty e^{-x} x^{a-1} dx,$$

že $\Gamma(a)$ jest elementem funkce analytické jednoznačné, která nemá jiných míst zvláštních mimo poly $a = 0, -1, -2, -3, \ldots$ Dokázali jsme též, že řada

$$Q(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} e^{-x} x^{a-1} dx$$

konverguje stejnoměrně a její členové jsou funkce celistvé; dle známé věty Weierstrassovy bude

$$\frac{dQ(a)}{da} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{da} \int_n^{n+1} e^{-x} x^{a-1} dx,$$

pročež

$$\frac{dQ(a)}{da} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} e^{-x} x^{a-1} \log x \, dx,$$

čili

$$\frac{dQ(a)}{da} = \int_1^\infty e^{-x} x^{a-1} \log x \, dx,$$

t. j. derivaci funkce $Q(a)$ obdržíme differencováním pod znamením integračním. Totéž platí o $P(a)$ a následovně bude

$$\Gamma'(a) = \int_0^\infty e^{-x} x^{a-1} \log x \, dx, \tag{2}$$

vzorec, jehož jsme již jedenkráte užili; úvaha tato měla účelem přesný důkaz této rovnice formalně samozřejmé.

Z této rovnice rozmanitým způsobem možno odvoditi výrazy pro $\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}$; ve své práci z r. 1889 (Věstník král. čes. spol. nauk) podali jsme takovou methodu, kterou zde v zjednodušeném tvaru hodláme reprodukovati.

V integrálu (1) a (2) pišme $x = wz$, i obdržíme

$$\Gamma(a) = w^a \int_0^\infty e^{-wz} z^{a-1} dz, \tag{1^a}$$

$$\Gamma'(a) = w^a \int_0^\infty e^{-wz} z^{a-1} \log z \, dz + w^a \log w \int_0^\infty e^{-wz} z^{a-1} dz$$

čili

$$\Gamma'(a) = \Gamma(a) \log w + w^a \int_0^\infty e^{-wz} z^{a-1} \log z \, dz.$$

Násobme na obou stranách $e^{-w}\,dw$ a integrujme dle w v mezích 0 a ∞, i bude

$$\Gamma'(a)\int_0^\infty e^{-w}\,dw = \Gamma(a)\int_0^\infty e^{-w}\log w\,dw + \int_0^\infty e^{-w} w^a\,dw \int_0^\infty e^{-wz} z^{a-1}\log z\,dz\,.$$

Tu je pak

$$\int_0^\infty e^{-w}\,dw = 1\,,\qquad \int_0^\infty e^{-w}\log w\,dw = \Gamma'(1)\,,$$

a předpokládáme-li, že a jest realné, je dvojnásobný integrál

$$\int_0^\infty dw \int_0^\infty e^{-w-wz}\,w^a z^{a-1}\log z\,dz$$

konečný, i když místo $\log z$ volíme jeho prostou hodnotu [$\log z$ je záporný v intervallu $z = (0\ldots 1)$]; t. j. dvojnásobný integrál konverguje absolutně, a tedy možno pořádek integrační zaměniti. I máme pak

$$\Gamma'(a) = \Gamma(a)\,.\,\Gamma'(1) + \int_0^\infty z^{a-1}\log z\,dz \int_0^\infty e^{-w(1+z)}\,w^a\,dw\,,$$

čili po provedení vnitřní integrace pomocí vzorce (1^a)

$$\Gamma'(a) = \Gamma(a)\,.\,\Gamma'(1) + \Gamma(a+1)\int_0^\infty \frac{z^{a-1}\log z\,dz}{(1+z)^{a+1}}\,.$$

Poněvadž, jak jsme dříve částečnou integrací nalezli, $\Gamma(a+1) = a\,\Gamma(a)$, máme odtud

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \Gamma'(1) + a\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\log x\,dx}{(1+x)^{a+1}}\,, \tag{3}$$

čímž již vzorec pro logarithmickou derivaci nalezen.

Tento integrál přetvořme substitucí

$$\frac{x}{x+1} = t\,,\qquad x = \frac{t}{1-t}\,,\qquad dx = \frac{dt}{(1-t)^2}\,,$$

čímž obdržíme

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \Gamma'(1) + a\int_0^1 t^{a-1}\log\frac{t}{1-t}\,dt\,.$$

Pravou stranu rozložme v

$$\Gamma'(1) + a\int_0^1 t^{a-1}\log t\,dt - a\int_0^1 t^{a-1}\log(1-t)\,dt\,;$$

prostřední člen má hodnotu $-\frac{1}{a}$, poněvadž

$$\int_0^1 t^{a-1}\,dt = \frac{1}{a},$$

a odtud differencováním plyne

$$\int_0^1 t^{a-1}\log t\,dt = -\frac{1}{a^2};$$

tedy, převedeme-li tento člen $-\frac{1}{a}$ na levou stranu a spojíme-li s $\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}$ pomocí vzorce[1]) $\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}+\frac{1}{a}=\frac{\Gamma'(a+1)}{\Gamma(a+1)}$, obdržíme

$$\frac{\Gamma'(a+1)}{\Gamma(a+1)} = \Gamma'(1) - a\int_0^1 t^{a-1}\log(1-t)\,dt. \tag{4}$$

Poslední integrál pokládejme za limitu integrálu

$$J_\varepsilon = a\int_0^\varepsilon t^{a-1}\log(1-t)\,dt$$

pro $\varepsilon = 1$ a tento přetvořme částečnou integrací; i obdržíme

$$J_\varepsilon = \varepsilon^a\log(1-\varepsilon) + \int_0^\varepsilon \frac{t^a\,dt}{1-t}.$$

Poněvadž

$$\int_0^\varepsilon \frac{dt}{1-t} = -\log(1-\varepsilon),$$

máme

$$J_\varepsilon = (\varepsilon^a - 1)\log(1-\varepsilon) + \int_0^\varepsilon \frac{t^a-1}{1-t}\,dt;$$

přechodem k limitě pro $\varepsilon = 1$ vychází odtud

$$a\int_0^\varepsilon t^{a-1}\log(1-t)\,dt = -\int_0^1 \frac{1-t^a}{1-t}\,dt,$$

čehož dosazením do (4) plyne, píšeme-li $a-1$ za a,

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \Gamma'(1) + \int_0^1 \frac{1-t^{a-1}}{1-t}\,dt, \tag{5}$$

jak jsme dříve nalezli na základě zcela jiné definice funkce Γ.

---

[1]) Plyne přímo ze vzorce $\Gamma(a+1) = a\,\Gamma(a)$.

Píšeme-li zde

$$\frac{1}{1-t}=1+t+t^2+\ldots+t^{n-1}+\frac{t^n}{1-t},$$

máme

$$\frac{1-t^{a-1}}{1-t}=(1-t^{a-1})+(t-t^a)+\ldots+(t^{n-1}-t^{a+n-2})+\frac{(1-t^{a-1})\,t^n}{1-t},$$

odtud

$$\int\limits_0^1\frac{1-t^{a-1}}{1-t}\,dt=\left(1-\frac{1}{a}\right)+\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}\right)+\ldots$$

$$+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{a+n-1}\right)+\int\limits_0^1\frac{1-t^{a-1}}{1-t}\,t^n\,dt\,;$$

přechodem k limitě pro $n=\infty$ zmizí poslední integrál, a zbude pak známý nám výsledek

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}=\Gamma'(1)+\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\nu+1}-\frac{1}{\nu+a}\right).$$

Řadu lze pokládati za limitu výrazu

$$\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{a}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{a+1}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{a+2}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+a}\right)$$

$$=-\frac{1}{a}+\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{a+1}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{a+2}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+a}\right)+\frac{1}{n+1}$$

a tedy

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}=\Gamma'(1)-\frac{1}{a}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{a+\nu}\right);$$

píšeme-li $\Gamma'(1)=-C$, a převedeme-li $\frac{1}{a}$ na levou stranu, vyjde

$$\frac{\Gamma'(a+1)}{\Gamma(a+1)}=-C+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{a+\nu}\right);$$

integrací dle a v mezích $(0\ldots a)$ máme

$$\log\Gamma(a+1)=-Ca+\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{a}{\nu}-\log\frac{a+\nu}{\nu}\right)$$

a odtud

$$\Gamma(a+1)=e^{-Ca}\prod_{\nu=0}^{\infty}\frac{e^{\frac{a}{\nu}}}{1+\frac{a}{\nu}},$$

a poněvadž $\Gamma(a+1)=a\,\Gamma(a)$, konečně

(6) $$\Gamma(a)=e^{-Ca}\frac{1}{a}\prod_{\nu=0}^{\infty}\frac{e^{\frac{a}{\nu}}}{1+\frac{a}{\nu}},$$

kterýžto součin dříve byl vzat za definici funkce gamma.

Jiný výraz pro $\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}$ dá nám vzorec (5), jestliže v něm píšeme $t = 1 - x$; tím vznikne

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \Gamma'(1) + \int_0^1 \frac{1-(1-x)^{a-1}}{x}\, dx\,;$$

avšak

$$(1-x)^{a-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \binom{a-1}{n} x^n\,,$$

a tedy

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \Gamma'(1) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \binom{a-1}{n}\,, \tag{7}$$

kteréžto řada konverguje, pokud Real. $a > 0$.

(Dokončení.)

Ostwaldovy studie z oboru energetiky.

Referuje *O. Šulc.*

Pokrok každé vědy béře se dvojím směrem: jednak hromaděním dat pozorovacích a zkušeností pozorováním nabytých, jednak duševním zpracováním těchto výsledků. Rovnáme-li pak a třídíme-li poznatky vědecké, dospíváme k jistým větám v určitém oboru obecně platným. Týž pochod s těmito obecnějšími poznatky opakujíce stoupáme indukcí k větám vždy obecnějším, za to však stejnou měrou vždy abstraktnějším, čím více od skutečných jednotlivostí k myšleným obecnostem se uchylujeme. Tu duch spekulativní, třímaje pevně logiku, stoupá vždy výše, až zastavuje se u vrchních zákonů, jež stojíce na vrcholu našeho poznání, v jistou dobu stav vyspělosti určité vědy charakterisují. A z těchto několika málo svrchovaných poznatků dedukujeme zpět všecku tu ohromnou pestrost vnějšího dění, a nabývajíce shody mezi dedukcí a skutečností, zpět z toho na správnost vrchních vět, od nichž jsme vyšli, soudíme, nemohouce jich dovoditi přímo. Nesnadno říci, která z obou uvedených činností vědě více užitku přinesla: zda hromadění dat pokusných, či ona abstrakce; spíše tvrditi lze, že obě vespolek a nerozlučně tvoří podstatu činnosti skutečně vědecké. I jisto jest, že vědy exaktní, chtíce měřením číselně vystihnouti všechno dění ve světě vnějším, o společné vrchní zákony se opírati musí, neboť právě „dění“ jest všem společným předmětem pozorování. Tu pak každá věda poznatky svého druhu přispívá k tomu, aby na základě výtěžku všech duch spekulativní vrchní zákony všem oborům vědy společné abstrahoval, a jednotný názor vnějšího světa sestrojil. I nelze tu upříti, že chemie fysikální úspěchy svými i poznatky, jež na jevo vynesla, v prvé řadě moderních odvětví exaktní vědy místo zaujímá, ač mladou jest dosud ratolestí na stromě vědění lidského. W. Ostwald, veliký mistr tohoto odvětví, pokusil se s nevšedním zdarem na základě více méně již vyspělých úvah některých předchůdců svých, pozoruje, že jediná veličina, která veškerého dění ve světě vnějším se účastní a která jediná co do hodnoty při všech proměnách nepromĕnná trvajíc jen tvar svůj mění, jest energie, zbudovati na ní soustavu vět všem oborům vědy společnou, a tím učiniti