Matyáš Lerch
Sur deux transcendantes considerées par Legendre

Věstník Král. čes. spol. nauk 1893, č. 25, 1–5

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501756

XXV.

Sur deux transcendantes considérées par Legendre.

Par M. Lerch à Prague-Vinohrady

(Présenté dans la séance du 19 Mai 1893)

Dans son Traité des fonctions elliptiques et des intégrales Eulériennes [1]) Legendre a considéré les intégrales

$$P = \int_0^1 \frac{\log^m y \, dy}{1 - y + y^2}, \quad Q = \int_0^1 \frac{\log^m y \, dy}{1 + y + y^2}$$

pour lesquelles il a trouvé la relation

$$P = \frac{2^m + 1}{2^m} Q.$$

Je me suis proposé d'étudier ces transcendantes pour m quelconque, et je pose

$$(1) \qquad \Phi(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1} \, dx}{e^x + e^{-x} - 1}, \quad \Psi(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1} \, dx}{e^x + e^{-x} + 1},$$

en supposant que la quantité s a une partie réelle positive; la relation donnée par Legendre s'écrira alors

$$(2) \qquad \Phi(s) - \Psi(s) = 2^{1-s} \Psi(s).$$

Pour évaluer $\Phi(s)$, je considère l'intégrale

$$(3) \qquad \varphi(s) = \int_{-\infty}^\infty \frac{(x + \varepsilon i)^{s-1} dx}{e^{x + \varepsilon i} + e^{-x - \varepsilon i} - 1},$$

ε étant une petite constante positive; la valeur de φ étant évidemment indépendante de ε, on trouve en passant à la limite de $\varepsilon = 0$,

---

[1]) Tome II, p. 400.

$$\varphi(s) = e^{(s-1)\pi i}\int_{-\infty}^{0} \frac{(-x)^{s-1}dx}{e^x+e^{-x}-1} + \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}dx}{e^x+e^{-x}-1},$$

ou bien

(4) $$\varphi(s) = (1 - e^{s\pi i})\Phi(s).$$

L'intégrale (3) étant valable quel que soit s la fonction $\varphi(s)$ est évidemment entière et l'équation (4) que nous venons d'obtenir donne une définition précise de la fonction analytique $\Phi(s)$ définie par l'élément (1); celle-ci est évidemment uniforme et n'a d'autre singularité à distance finie que les pôles du premier dégré $s = 0, -2, -4, -6, \ldots$ puisqu'il est aisé de voir que pour $s = 0, 2, 4, 6, \ldots$ l'intégrale (3) s'évanouit de la sorte que la fonction $\Phi(s)$ reste finie pour ces valeurs de s.

Pour obtenir une expression de $\Phi(s)$ considérons l'intégrale

$$J_R = \int \frac{z^{s-1}dz}{e^z+e^{-z}-1}$$

prise le long d'un contour composé du chemin rectiligne

$$(-R+\varepsilon i \ldots + R + \varepsilon i)$$

et du demi-cercle tracé dans le demi-plan positif autour du centre $z = 0$ avec le rayon R, cette quantité étant choisie de la manière que ledit cercle ne passe par aucun des pôles de la fonction sous le signe somme. Suivant le théorème de Cauchy la valeur de l'intégrale J_R sera $2\pi i$ fois la somme des résidus de la fonction intégrée correspondant aux pôles contenus à l'intérieur du contour de l'intégration. Ces pôles étant les points $z = \pm\frac{\pi i}{3} + 2n\pi i$ et les résidus ayant les valeurs

$$\frac{\left(\pm\frac{\pi i}{3} + 2n\pi i\right)^{s-1}}{\pm i\sqrt{3}},$$

nous aurons

$$J_R = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\sum_{n,\pm} \pm \left(\pm\frac{\pi i}{3} + 2n\pi i\right)^{s-1},$$

la somme s'étendant aux valeurs $n = 0, 1, 2, \ldots N$ pour le signe supérieur et aux valeurs $n = 1, 2, 3, \ldots N$ pour le signe inférieur; le nombre N dépend de R et croit avec R audelà de toute limite. Si alors la partie réelle de s est négative, la partie de l'intégrale

J_R qui est prise le long du demi-cercle devient infiniment petite pour R indéfiniment croissant, d'où il suit que l'on a $\lim\limits_{R=\infty} J_R = \varphi(s)$, et par conséquent

$$\varphi(s) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \sum_{n,\,\pm} \pm \left(\pm\frac{\pi i}{3} + 2n\pi i\right)^{s-1}$$

ou ce qui est la même chose,

$$\varphi(s) = \frac{2\pi^s}{\sqrt{3}}\,\frac{1}{i}\,e^{\frac{1}{2}s\pi i}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}+2n\right)^{s-1} - \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}+2n\right)^{s-1}\right\},$$

d'où l'on tire, à l'aide de la formule (4),

$$(5)\quad \Phi(s) = \frac{\pi^s}{3^{s-\frac{1}{2}}\sin\frac{s\pi}{2}}\left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(6n+1)^{1-s}} - \frac{1}{(6n-1)^{1-s}}\right]\right\}.$$

En employant des raisonnements tout à fait analogues on est conduit à introduire la fonction entière

$$(3^a)\qquad \psi(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+\varepsilon i)^{s-1}dx}{e^{x+\varepsilon i} + e^{-x-\varepsilon i} + 1},$$

pour obtenir la définition suivante de $\Psi(s)$

$$(4^a)\qquad \psi(s) = (1 - e^{s\pi i})\,\Psi(s),$$

et on trouve ensuite le développement

$$(5^a)\quad \Psi(s) = \frac{2^{s-1}\pi^s}{3^{s-\frac{1}{2}}\sin\frac{s\pi}{2}}\left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(3n+1)^{1-s}} - \frac{1}{(3n-1)^{1-s}}\right]\right\}.$$

Écrivons ensuite les intégrales (1) sous la forme

$$\Phi(s) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}(1+e^{-x})\,x^{s-1}dx}{1+e^{-3x}},$$

$$\Psi(s) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}(1-e^{-x})\,x^{s-1}dx}{1-e^{-3x}},$$

nous aurons

$$\Phi(s) = \int_0^\infty \frac{e^{-x} x^{s-1} dx}{1 + e^{-3x}} + \int_0^\infty \frac{e^{-2x} x^{s-1} dx}{1 + e^{-3x}}$$

d'où l'on tire, en employant le développement

$$\frac{1}{1 + e^{-3x}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu e^{-3\nu x},$$

$$\Phi(s) = \Gamma(s) \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{1}{(3\nu+1)^s} + \Gamma(s) \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{1}{(3\nu+2)^s},$$

ce qu'on peut écrire

$$\Phi(s) = \Gamma(s) \left\{ 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu \left[\frac{1}{(3\nu+1)^s} - \frac{1}{(3\nu-1)^s} \right] \right\}. \tag{6}$$

On trouve d'une manière analogue

$$\Psi(s) = \Gamma(s) \left\{ 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(3\nu+1)^s} - \frac{1}{(3\nu-1)^s} \right] \right\}. \tag{6^a}$$

De ces deux équations on tire

$$\Phi(s) + \Psi(s) = 2\Gamma(s) \left\{ 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(6\nu+1)^s} - \frac{1}{(6\nu-1)^s} \right] \right\}, \tag{6^b}$$

et on trouve, en comparant avec (5) et (5ª)

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} \Phi(s) &= \frac{\pi^s}{3^{s-\frac{1}{2}} \Gamma(1-s) \sin \frac{s\pi}{2}} \, \frac{\Phi(1-s) + \Psi(1-s)}{2}, \\ \Psi(s) &= \frac{2^{s-1} \pi^s}{3^{s-\frac{1}{2}} \Gamma(1-s) \sin \frac{s\pi}{2}} \, \Psi(1-s), \end{aligned} \right.$$

ce qui sont des relations analogues à celle que Riemann a trouvée pour la fonction $\zeta(s)$ et dont on trouve un grand nombre dans la théorie des séries que j'ai appelées Malmsténiennes.

Remarquons que la série (6ª) donne

$$\Psi(s) = \Gamma(s) \prod_p \frac{1}{1 - \frac{\operatorname{sgn}. R\left(\frac{p}{3}\right)}{p^s}}, \quad (p = 2, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots)$$

le produit étant étendu à tous les nombres premiers différents de 3, et le symbol $\operatorname{sgn}. R\left(\frac{p}{3}\right)$ représentant le signe du reste absolument moindre de $\frac{p}{3}$, à savoir l'unité positive lorsque $p = 3\nu + 1$ et l'unité négative lorsque $p = 3\nu - 1$.

On a de même

$$\Phi(s) + \Psi(s) = 2\Gamma(s) \prod_p \frac{1}{1 - \frac{\operatorname{sgn}. R\left(\frac{p}{6}\right)}{p^s}},$$

$$(p = 5, 7, 11, 13, 17, \ldots)$$

ce qui s'accorde avec la formule précédente à cause de la formule de Legendre

$$\Psi(s) = \frac{1}{1 + 2^{-s}} \frac{\Phi(s) + \Psi(s)}{2},$$

qu'on vérifie aisément soit à l'aide des formules (5) et (5^a) soit au moyen des séries (6) et (6^b).

Il est facile de voir que les fonctions $\Phi(s)$, $\Psi(s)$ s'expriment en nombres algébriques toutes les fois que s est un entier impair, comme cela découle de la formule

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\nu + a} - \frac{1}{\nu + 1 - a} \right) = \pi \cot a\pi$$

qui donne pour s impair

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(\nu + a)^s} - \frac{1}{(\nu + 1 - a)^s} \right) = \frac{\pi}{(s-1)!} D_a^{s-1} \cot a\pi.$$

Nákladem král. České společnosti nauk. — Tiskem dra. Edv. Grégra v Praze 1893.