Matyáš Lerch
Studie v oboru Malmsténovských řad a invariantů forem kvadratických

Rozpravy Čes. akademie, II. tř., 2 (1893), 8.4, 1–12

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501754

ROZPRAVY
ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ V PRAZE

ROČNÍK II. TŘÍDA II. ČÍSLO 4.

STUDIE

V OBORU

MALMSTÉNOVSKÝCH ŘAD

A INVARIANTŮ FOREM KVADRATICKÝCH.

NAPSAL

M. LERCH.

PŘEDLOŽENO DNE 14. ŘÍJNA 1892.

V PRAZE.
NÁKLADEM ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ.
1893.

Tiskem J. Otty v Praze.

V následujícím chceme vyložiti některé výsledky, jež jsme si při redakci svých »Základů theorie Malmsténovských řad«*) ponechali na pozdější příležitosť.

1. V §. 9 na str. 50 a násl. citované rozpravy dokázali jsme, že celistvá funkce proměnné s definovaná prvkem

$$Z(v,s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n v \pi}{n^s}$$

začíná svůj Maclaurinovský rozvoj členy

$$(\alpha)\quad Z(v,s)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\left(-2\log 2\pi+2\Gamma'(1)-\frac{\Gamma'(v)}{\Gamma(v)}-\frac{\Gamma'(1-v)}{\Gamma(1-v)}\right)s+\dots$$

V následujícím rozvineme přímo začáteční členy tohoto rozvoje, čímž vznikne nový výraz pro funkci obsaženou v závorce posledně psaného členu.

Vycházíme při tom od vzorce

$$Z(v,s)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty}\frac{e^x\cos 2v\pi-1}{e^{2x}-2e^x\cos 2v\pi+1}x^{s-1}\,dx\,;$$

pišme k vůli pohodlí

$$f(x)=\frac{e^x\cos 2v\pi-1}{e^{2x}-2e^x\cos 2v\pi+1},$$

a proveďme rozklad

$$Z(v,s)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{\omega}f(x)\,x^{s-1}\,dx+\frac{1}{\Gamma(s)}\int_{\omega}^{\infty}f(x)\,x^{s-1}\,dx\,,$$

kde ω značí malou kladnou veličinu. Prvý integrál bude lze určiti na základě rozvoje

$$f(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\dots,\qquad c_0=-\frac{1}{2},$$

*) Rozpravy České Akademie, ročn. I, třída II, čís. 27.

1*

a tak obdržíme

$$Z(v,s)=\frac{1}{\Gamma(s)}c_0\frac{\omega^s}{s}+\frac{1}{\Gamma(s)}\left[\sum_{\nu=1}^{\infty}c_\nu\frac{\omega^{s+\nu}}{s+\nu}+\int_\omega^\infty f(x)\,x^{s-1}\,dx\right].$$

Veličina v závorce [ ] je konečná pro $s=0$, a tedy začíná rozvoj druhého výrazu členem

$$s\left[\sum_{\nu=1}^{\infty}c_\nu\frac{\omega^\nu}{\nu}+\int_\omega^\infty f(x)\frac{dx}{x}\right];$$

dále jest

$$\frac{1}{\Gamma(s)}c_0\frac{\omega^s}{s}=-\frac{1}{2}\frac{\omega^s}{\Gamma(1+s)}=-\frac{1}{2}(1+s\log\omega+\ldots)(1-\Gamma'(1).s+\ldots)$$

$$=-\frac{1}{2}\left[1+s\left(\log\omega-\Gamma'(1)\right)+\ldots\right]$$

a tedy obdržíme

$$Z(v,s)=-\frac{1}{2}+\frac{s}{2}\left[\log\omega-\Gamma'(1)+2\int_\omega^\infty f(x)\frac{dx}{x}+2\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{c_\nu\,\omega^\nu}{\nu}\right]+\ldots$$

Jelikož $Z(v,s)$ nezávisí na ω, je též veličina v závorce [ ] nezávislou na ω a tedy máme přechodem k $\omega=0$:

$$Z(v,s)=-\frac{1}{2}+\frac{s}{2}\left\{-\Gamma'(1)+\lim_{\omega=0}\left(\log\omega+2\int_\omega^\infty f(x)\frac{dx}{x}\right)\right\}+\ldots$$

a odtud plyne porovnáním s rovnicí (α):

$$(\beta)\quad\left\{\begin{aligned}&-2\log 2\pi+2\Gamma'(1)-\frac{\Gamma'(v)}{\Gamma(v)}-\frac{\Gamma'(1-v)}{\Gamma(1-v)}\\&\qquad=-2\Gamma'(1)+2\lim_{\omega=0}\left(\log\omega+2\int_\omega^\infty f(x)\frac{dx}{x}\right).\end{aligned}\right.$$

Kladme zde $v=\frac{1}{2}$ a odečtěme výsledky, i obdržíme

$$2\Gamma'(\tfrac{1}{2})-\frac{\Gamma'(v)}{\Gamma(v)}-\frac{\Gamma'(1-v)}{\Gamma(1-v)}=4\lim_{\omega=0}\int_\omega^\infty\left[f(x,v)-f(x,\tfrac{1}{2})\right]\frac{dx}{x},$$

čili

$$(1)\quad\left\{\begin{aligned}&\int_0^\infty\left(\frac{1}{e^x+1}-\frac{1-e^x\cos 2v\pi}{1-2e^x\cos 2v\pi+e^{2x}}\right)\frac{dx}{x}\\&\qquad=\frac{1}{4}\left[2\Gamma'(\tfrac{1}{2})-\frac{\Gamma'(v)}{\Gamma(v)}-\frac{\Gamma'(1-v)}{\Gamma(1-v)}\right].\end{aligned}\right.$$

Levá strana je zdánlivě periodickou vůči v; že jí není v podstatě, plyne odtud, že integrál neexistuje pro hodnoty v, jichž realná část je celistvá, a že tedy dlužno v našem vzorci voliti $0 < \mathrm{Real.}\, v < 1$.

Poznamenejme ještě, že pomocí vzorce

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \Gamma'(1) + \int_0^1 \frac{1 - t^{a-1}}{1-t}\, dt$$

obdržíme pro $a = \frac{1}{2}$:

$$\Gamma'(\tfrac{1}{2}) = -2 \log 2 + \Gamma'(1).$$

2. Jestliže do vzorce

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2n\tau\pi i}}{(w+n)^2 + u^2} = \frac{\pi}{u}\, e^{-2\tau w\pi i} \left(\frac{e^{2\pi(u - u\tau + wi)}}{e^{2\pi(u+wi)} - 1} + \frac{e^{2\pi u\tau}}{e^{2\pi(u-wi)} - 1} \right),$$

v němž u jest veličina kladná, a τ pravý zlomek, a jejž lze rozmanitým způsobem dokázati, klademe

$$w = \frac{bm}{c}, \qquad u = \sqrt{\frac{\Delta m^2}{c^2} + \frac{x}{c}},$$

a násobivše obě strany $e^{2m\sigma\pi i}$ sečteme vůči $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, obdržíme:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i(m\sigma + n\tau)}}{c\left(n + \dfrac{bm}{c}\right)^2 + \dfrac{\Delta m^2}{c} + x}$$

$$= \pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{2m\pi i}{c}(c\sigma - b\tau)}}{\sqrt{\Delta m^2 + cx}} \left| \frac{e^{\frac{2\pi}{c}\left(bmi + (1-\tau)\sqrt{\Delta m^2 + cx}\right)}}{e^{\frac{2\pi}{c}(bmi + \sqrt{\Delta m^2 + cx})} - 1} + \frac{e^{\frac{2\pi\tau}{c}\sqrt{\Delta m^2 + cx}}}{e^{\frac{2\pi}{c}(-bmi + \sqrt{\Delta m^2 + cx})} - 1} \right|.$$

Při tom je σ realné a nikoli celistvé, x kladné, a Δ značí výraz $\Delta = ac - b^2 > 0$, kde $a > 0$, $c > 0$, takže pak $f(\xi, \eta) = a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2$ je kladná forma o záporném determinantu $-\Delta$.

Rovnici naši lze pak psáti

$$(2)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_m \sum_n \frac{e^{2\pi i(m\sigma + n\tau)}}{am^2 + 2bmn + cn^2 + x} \\ \displaystyle = \pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{2m\pi i}{c}(c\sigma - b\tau)}}{\sqrt{\Delta m^2 + cx}} \left| \frac{e^{\frac{2\pi}{c}\left(bmi + (1-\tau)\sqrt{\Delta m^2 + cx}\right)}}{e^{\frac{2\pi}{c}(bmi + \sqrt{\Delta m^2 + cx})} - 1} + \frac{e^{\frac{2\pi\tau}{c}\sqrt{\Delta m^2 + cx}}}{e^{\frac{2\pi}{c}(-bmi + \sqrt{\Delta m^2 + cx})} - 1} \right|. \end{cases}$$

Výsledek ten obdrží jednodušší tvar, znamenámeli

$$w_m = \frac{-bm + i\sqrt{\Delta m^2 + cx}}{c}, \qquad w'_m = \frac{bm + i\sqrt{\Delta m^2 + cx}}{c},$$

takže w_m, $-w'_m$ jsou kořeny kvadratické rovnice

$$am^2 + 2bm \cdot w + cw^2 + x = 0.$$

4.

Bude pak

$$
(2^a)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\sum_m \sum_n \frac{e^{2\pi i(m\sigma+n\tau)}}{am^2+2bmn+cn^2+x} \\
&= \frac{2\pi i}{c} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{2m\pi i}{c}(c\sigma-b\tau)}}{w_m+w'_m} \left\{ \frac{e^{\pi i\tau(w_m+w'_m)}}{1-e^{2w_m\pi i}} - \frac{e^{-\tau\pi i(w_m+w'_m)}}{1-e^{-2w'_m\pi i}} \right\}.
\end{aligned}
\right.
$$

Jelikož řada

$$
\sum_{m,n}{}' e^{2\pi i(m\sigma+n\tau)} \left[\frac{1}{am^2+2bmn+cn^2+x} - \frac{1}{am^2+2bmn+cn^2} \right]
$$

konverguje absolutně, a řada

$$
\sum_{m,n}{}' \frac{e^{2\pi i(m\sigma+n\tau)}}{am^2+2bmn+cn^2} = -\frac{\pi}{\sqrt{\Delta}} \log \Lambda(\sigma,\tau \mid w_1, w_2),
$$

kde

$$
w_1 = \frac{-b+i\sqrt{\Delta}}{c}, \qquad w_2 = \frac{b+i\sqrt{\Delta}}{b},
$$

plyne, že *výraz* (2) *jest invariantem soustav rovnomocných* $(a,b,c;\sigma,\tau)$.*) Ale ovšem dlužno zde vždy klásti ve (2) kladné zbytky veličiny τ místo τ.

Pro dvě rovnomocné soustavy

$$
(a,b,c;\sigma,\tau) \backsim (a',b',c';\sigma',\tau')
$$

platí rovnice

$$
\begin{aligned}
a' &= ak^2+2bkk'+ck'^2, \\
b' &= akl+b(kl'+k'l)+ck'l', \\
c' &= al^2+2bll'+cl'^2, \\
\sigma' &= k\sigma+k'\tau, \\
\tau' &= l\sigma+l'\tau,
\end{aligned}
$$

při čemž k, l, k', l' jsou čísla celistvá, podrobená podmínce $kl'-k'l=1$.

Zvláštní pozornosti zasluhuje případ, kde σ, τ jsou zlomky o jmenovateli r. Píšemeli pak $\frac{\sigma}{r}$, $\frac{\tau}{r}$ místo σ, τ, budou tato nová σ, τ čísla celistvá, a čísla rovnomocná budou

$$
\sigma' = k\sigma+k'\tau, \qquad \tau' = l\sigma+l'\tau.
$$

Znamenámeli výraz (2) při těchto σ, τ symbolem $F(a,b,c;\sigma,\tau;x)$, bude

$$
F(a',b',c';\sigma',\tau') = F(a',b',c';\sigma,\tau),
$$

jeli $\sigma' \equiv \sigma$, $\tau' \equiv \tau \pmod r$. Tato podmínka je splněna za supposice

$$
k \equiv l' \equiv 1, \qquad k' \equiv l \equiv 0 \pmod r
$$

čili dle obvyklé symboliky

$$
(3)\qquad \begin{pmatrix} k & l \\ k' & l' \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod r
$$

*) Tuto ekvivalenci dlužno rozuměti v témž smyslu jako v §. 9 naší citované rozpravy.

Transformujemeli formu $a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2$ substitucí $\xi = k\xi' + l\eta'$, $\eta = k'\xi' + l'\eta'$, která hoví podmínce (3), a ovšem také podmínce $kl' - k'l = 1$, obdržíme formu ekvivalentní (a', b', c'). Ekvivalence ta je však zvláštní: ne každé dvě prostě rovnomocné formy přejdou v sebe takovouto substitucí; z té příčiny pravíme, že formy (a, b, c), (a', b', c'), jež vzniknou jedna z druhé pomocí substituce typu (3), jsou rovnomocny v r-tém stupni (Stufe).

Funkce veličin (a, b, c), která se nemění, nahradímeli tyto veličiny soustavou s (a, b, c) v r-tém stupni rovnomocnou, slove pak *invariantem r-tého stupně.* Nacházíme pak, že *výraz*

$$
(2^*)\quad \left\{
\begin{aligned}
F_r(a, b, c; \sigma, \tau; x) &= \sum_{m,n} \frac{e^{\frac{2\pi i}{r}(m\sigma + n\tau)}}{x + am^2 + 2bmn + cn^2} \\
&= \pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{2m\pi i}{rc}(c\sigma - b\tau)}}{\sqrt{\Delta m^2 + cx}} \left| \frac{e^{-\frac{2\pi\tau}{rc}\sqrt{\Delta m^2 + cx}}}{1 - e^{-\frac{2\pi}{c}(bmi + \sqrt{\Delta m^2 + cx})}} - \frac{e^{\frac{2\pi\tau}{rc}\sqrt{\Delta m^2 + cx}}}{1 - e^{\frac{2\pi}{c}(-bmi + \sqrt{\Delta m^2 + cx})}} \right|,
\end{aligned}
\right.
$$

v němž σ, τ jsou dvě čísla celistvá kladná a menší než celistvé číslo r, *jest invariantem stupně r-tého,* a není stupně nižšího, jeli aspoň jedno z čísel σ, τ nesoudělno s r.

Probíháli soustava (a, b, c) všechny v obyčejném smyslu rovnomocné soustavy, obdrží výraz (2*) pouze konečný počet hodnot.

Vraťme se ku vzorci (2). Výraz ten jest — jako všechny invarianty námi v pojednání o řadách Malmsténovských studované — *invariantem též při ekvivalenci nevlastní,* kdy totiž determinant $kl' - k'l = -1$. Volímeli $k = 0 = l'$, $k' = 1 = l$, bude poslední podmínka splněna, a pak bude $a' = c$, $b' = b$, $c' = a$, $\sigma' = \tau$, $\tau' = \sigma$, a z vlastnosti invariantní výrazu (2) plyne

$$
\sum \frac{e^{\frac{2m\pi i}{c}(c\sigma - b\tau)}}{\sqrt{\Delta m^2 + cx}} \left| \frac{e^{-\frac{2\pi\tau}{c}\sqrt{\Delta m^2 + cx}}}{1 - e^{-\frac{2\pi}{c}(bmi + \sqrt{\Delta m^2 + cx})}} - \frac{e^{\frac{2\pi\tau}{c}\sqrt{\Delta m^2 + cx}}}{1 - e^{\frac{2\pi}{c}(-bmi + \sqrt{\Delta m^2 + cx})}} \right|
$$

$$
= \sum \frac{e^{\frac{2m\pi i}{a}(a\tau - b\sigma)}}{\sqrt{\Delta m^2 + ax}} \left| \frac{e^{-\frac{2\pi\sigma}{a}\sqrt{\Delta m^2 + ax}}}{1 - e^{-\frac{2\pi}{a}(bmi + \sqrt{\Delta m^2 + ax})}} - \frac{e^{\frac{2\pi\sigma}{a}\sqrt{\Delta m^2 + ax}}}{1 - e^{\frac{2\pi}{a}(-bmi + \sqrt{\Delta m^2 + ax})}} \right|.
$$

Vztah ten nabude zajímavosti ve zvláštním případě $b = 0$; pak jest $\Delta = ab$, a tedy máme

$$
\frac{1}{\sqrt{c}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2m\sigma\pi i}}{\sqrt{x + am^2}} \cdot \frac{e^{-2\pi\tau\sqrt{\frac{x + am^2}{c}}} + e^{-2\pi(1-\tau)\sqrt{\frac{x + am^2}{c}}}}{1 - e^{-2\pi\sqrt{\frac{x + am^2}{c}}}}
$$

$$
= \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2m\tau\pi i}}{\sqrt{x + cm^2}} \cdot \frac{e^{-2\pi\sigma\sqrt{\frac{x + cm^2}{a}}} + e^{-2\pi(1-\sigma)\sqrt{\frac{x + cm^2}{a}}}}{1 - e^{-2\pi\sqrt{\frac{x + cm^2}{a}}}}
$$

čili jinak psáno:

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{c}}\sum_m \frac{e^{2m\sigma\pi i}}{\sqrt{x+am^2}}\cdot\frac{\cos\text{hyp}\left(\pi(1-2\tau)\sqrt{\frac{x+am^2}{c}}\right)}{\sin\text{hyp}\left(\pi\sqrt{\frac{x+am^2}{c}}\right)}\\ =&\frac{1}{\sqrt{a}}\sum_m \frac{e^{2m\tau\pi i}}{\sqrt{x+cm^2}}\cdot\frac{\cos\text{hyp}\left(\pi(1-2\sigma)\sqrt{\frac{x+cm^2}{a}}\right)}{\sin\text{hyp}\left(\pi\sqrt{\frac{x+cm^2}{a}}\right)}\end{aligned}\right.$$

Klademeli zde $c = 1$, znamenajíce

$$(4^a)\quad \sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{e^{2m\sigma\pi i}}{\sqrt{x+am^2}}\,\frac{\cos\text{hyp}\,(\pi(1-2\sigma)\sqrt{x+am^2})}{\sin\text{hyp}\,(\pi\sqrt{x+am^2})} = f(x,a;\sigma,\tau),$$

obdržíme

$$(4^b)\quad f(x,a;\sigma,\tau) = \frac{1}{a}f\left(\frac{x}{a},\frac{1}{a};\tau,\sigma\right)$$

Jeli a velmi malé, bude $\frac{x}{a}, \frac{1}{a}$ velmi veliké a součet $f\left(\frac{x}{a},\frac{1}{a};\tau,\sigma\right)$ bude asymptoticky roven členu $m = 0$, jenž zní $\frac{1}{\sqrt{\frac{x}{a}}}$, tudíž

$$(4^c)\quad f(x,a;\sigma,\tau)\backsim\frac{1}{\sqrt{ax}}\qquad \text{pro malá } a.$$

Jinak vyjádřeno, máme

$$(4^d)\quad \sum_{m,n}\frac{e^{2\pi i(m\sigma+n\tau)}}{x+am^2+n^2}\backsim\frac{\pi}{\sqrt{ax}}\qquad \text{pro malá } a.$$

3. Dle věty vyslovené na str. 54 naší rozpravy jest součinitel při s v Maclaurinovském rozvoji funkce

$$K(a,b,c;\sigma,\tau;s) = {\sum_{m,n}}'\frac{e^{2\pi i(m\sigma+n\tau)}}{(am^2+2bmn+cn^2)^s}$$

dán výrazem

$$(5)\quad -2\log 2\pi + 2\Gamma'(1) - \frac{\Gamma'(\tau)}{\Gamma(\tau)} - \frac{\Gamma'(1-\tau)}{\Gamma(1-\tau)} + \log c + \Phi(\sigma,\tau,w_1) + \Phi(-\sigma,\tau,w_2)$$

kde položeno

$$(6)\quad \Phi(\sigma,\tau,w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\tau+n}\left\{\frac{1}{e^{\pi i(n+\tau)w-2\sigma\pi i}-1}+\frac{1-\text{sgn.}(n+\frac{1}{2})}{2}\right\}$$

a mimo to $w_1 = \frac{-b+i\sqrt{\Delta}}{c}$, $\quad w_2 = \frac{b+i\sqrt{\Delta}}{c}$

Dále bylo nalezeno

$$(7)\qquad \Phi(\sigma,\tau,w)=\frac{1}{1-e^{2\tau\pi i}}\int_0^1\left\{\frac{\vartheta'_1(0\,|\,w)\,\vartheta_1(x+\sigma+\tau w\,|\,w)}{\vartheta_1(\sigma+\tau w\,|\,w)\,\vartheta_1(x\,|\,w)}+\frac{2\pi i}{1-e^{2\sigma\pi i}}\right\}e^{2\tau x\pi i}\,dx\,.$$

Volme nyní $\sigma=\frac{\sigma_0}{r}$, $\tau=\frac{\tau_0}{r}$, kde σ_0, τ_0, r jsou čísla celistvá a $r>0$, po případě též $\sigma_0,\tau_0>0$.

Neníli ani σ_0 ani τ_0 dělitelno na r, přejděme od soustavy $(a,b,c;\sigma,\tau)$ k soustavě rovnomocné $(a',b',c';\sigma',\tau')$, kde bude $\sigma'=\frac{\sigma'_0}{r}$, $\tau'=\frac{\tau'_0}{r}$, a při tom

$$\sigma'_0=k\sigma_0+k'\tau_0\,,\qquad \tau'_0=l\sigma_0+l'\tau_0\,;\qquad kl'-k'l=1\,.$$

Ustanovme koefficienty $k\,k'\,l\,l'$ tak, aby τ'_0 obsahovalo r, t. j.

$$l\sigma_0+l'\tau_0\equiv 0\pmod r\,;$$

pak bude

$$K(a,b,c;\sigma,\tau;s)=K(a',b',c';\sigma',0;s)$$

a koefficient při s v Maclaurinovském rozvoji bude dle vzorce (3) str. 58

$$(5^{a})\qquad -2\log 2\pi-2\log\left\{\frac{1}{\sqrt{c'}}H(w'_1,\sigma')\,H(w'_2,\sigma')\right\},$$

a tedy máme vztah

$$(8)\qquad \left|\begin{aligned}&2\Gamma'(1)-\frac{\Gamma'(\frac{\tau_0}{r})}{\Gamma(\frac{\tau_0}{r})}-\frac{\Gamma'(\frac{r-\tau_0}{r})}{\Gamma(\frac{r-\tau_0}{r})}+\log c+\Phi\left(\frac{\sigma_0}{r},\frac{\tau_0}{r},w_1\right)\\&+\Phi\left(-\frac{\sigma_0}{r},\frac{\tau_0}{r},w_2\right)=-2\log\left\{\frac{1}{\sqrt{c'}}H\left(w'_1,\frac{\sigma'_0}{r}\right)H\left(w'_2,\frac{\sigma'_0}{r}\right)\right\}.\end{aligned}\right.$$

Zde značí w'_1, $-w'_2$ kořeny rovnice kvadratické $a'+2bw'+cw'^2=0$, (a',b',c') je kvadratická forma vzniklší z (a,b,c) substitucí $\begin{pmatrix}k & l\\ k' & l'\end{pmatrix}$, jež hoví podmínce

$$l\sigma_0+l'\tau_0\equiv 0\pmod r\,,$$

a ovšem též podmínce $kl'-k'l=1$; číslo σ'_0 má hodnotu $\sigma'_0=k\sigma_0+k'\tau_0$. Funkce Hermiteovská $H(w,\sigma)$ je dána součinem

$$(9)\qquad H(w,\sigma)=e^{\frac{w\pi i}{4\sin^2\sigma\pi}}\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-e^{2mw\pi i}\right)^{\cos 2m\sigma\pi},$$

a není třeba zvláště připomínati, že *výraz*

$$\frac{1}{\sqrt{c}}H\left(w_1,\frac{\sigma_0}{r}\right)H\left(w_2,\frac{\sigma_0}{r}\right)$$

jest invariantem stupně r.

4. Vzorec (2) §. 11 naší rozpravy poskytuje bezprostředně reciprocitu

$$(10)\qquad \Gamma(s)\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{\pi}\right)^s K'(a,b,c;s) = \Gamma(1-s)\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{\pi}\right)^{1-s} K'(a,b,c;1-s),$$

zcela podobnou oněm, jež objevili Malmstén, Schlömilch, Lipschitz, Riemann, Hurwitz a Stieltjes.

Abychom to ukázali, pišme citovanou rovnici ve tvaru

$$(\mathrm{a})\quad \left\{\begin{aligned} &\Gamma(s)\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{\pi}\right)^s K'(a,b,c;s) \\ &= 2\Gamma(s)\pi^{-s}\zeta(2s)\beta^s + 2\Gamma(s-\tfrac{1}{2})\pi^{\frac{1}{2}-s}\zeta(2s-1)\beta^{1-s} \\ &+ 4\sqrt{\beta}\sum_{m,n}\cos 2mn\alpha\pi \,.\left(\frac{n}{m}\right)^{s-\frac{1}{2}}\int_0^\infty e^{-\beta mn\pi\left(z+\frac{1}{z}\right)} z^{s-\frac{3}{2}}\,dz, \end{aligned}\right.$$

kde součet vztahuje se k hodnotám $m, n = 1, 2, 3, 4, \ldots$

Tu pak jest

$$\int_0^\infty e^{-\beta mn\pi\left(z+\frac{1}{z}\right)} z^{s-\frac{3}{2}}\,dz = \int_0^\infty e^{-\beta mn\pi\left(z+\frac{1}{z}\right)} z^{-s-\frac{1}{2}}\,dz,$$

an prvý integrál přejde v druhý substitucí $\frac{1}{z}$ za z; nahradímeli tedy v (a) integrál posledně psaným tvarem, a vyměnímeli summační ukazatele m, n, obdržíme týž výsledek, jako kdybychom byli v řadě psali $1-s$ za s. Znamenámeli tedy na okamžik $f(s)$ veličinu (a), máme

$$\begin{aligned} f(s) - f(1-s) &= 2\beta^s\left[\Gamma(s)\pi^{-s}\zeta(2s) - \Gamma(\tfrac{1}{2}-s)\pi^{s-\frac{1}{2}}\zeta(1-2s)\right] \\ &+ 2\beta^{1-s}\left[\Gamma(s-\tfrac{1}{2})\pi^{-s+\frac{1}{2}}\zeta(2s-1) - \Gamma(1-s)\pi^{s-1}\zeta(2-2s)\right] \end{aligned}$$

a pravá strana je nullou, any obě závorky mizí na základě Riemannovy reciprocity

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s) = \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\pi^{\frac{s-1}{2}}\zeta(1-s).$$

Bude tedy $f(s) = f(1-s)$, což jest právě vzorec (10).

Vztah tento možno však dokázati ještě způsobem zcela podobným onomu, jehož Riemann užil při druhém důkazu svojí reciprocity.

Předpokládejme, že realná část veličiny s převyšuje jednotku, aby řada

$$K'(a,b,c;s) = \sum_{m,n}{}' \frac{1}{(am^2+2bmn+cn^2)^s}, \qquad (m,n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

konvergovala. Pomocí vzorce

$$\Gamma(s)\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{\pi}\right)^s \frac{1}{(am^2+2bmn+cn^2)^s} = \int_0^\infty e^{-\frac{\pi x}{\sqrt{\Delta}}(am^2+2bmn+cn^2)} x^{s-1}\,dx$$

obdržíme pak

(b) $$\Gamma(s)\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{\pi}\right)^s K'(a,b,c;s) = \int_0^\infty f(x)\, x^{s-1}\, dx\,,$$

kde psáno

(c) $$f(x) = \sum_{m,n}{}' e^{-\frac{\pi x}{\sqrt{\Delta}}(am^2+2bmn+cn^2)}\,,$$

a v součtu Σ' vynechán člen $m = n = 0$.

Ze známého vztahu*)

$$\sum_{m,n} e^{-\frac{\pi x}{\sqrt{\Delta}}(am^2+2bmn+cn^2)+2\pi i(m\sigma+n\tau)} = \frac{1}{x}\sum_{m,n} e^{-\frac{\pi}{x\sqrt{\Delta}}\left[a(\tau+n)^2-2b(\tau+n)(\sigma+m)+c(\sigma+m)^2\right]}$$

obdržíme volbou $\sigma = \tau = 0$ a výměnou liter m, n za $-n, m$ na pravé straně rovnici:

$$1 + f(x) = \frac{1}{x}\left[1 + f\left(\tfrac{1}{x}\right)\right]$$

čili

(d) $$f\left(\tfrac{1}{x}\right) = x - 1 + x f(x)\,.$$

Rozložme nyní integrál (b) v součet

$$\int_0^1 f(x)\, x^{s-1}\, dx + \int_1^\infty f(x)\, x^{s-1}\, dx\,,$$

a v prvním klaďme $\frac{1}{x}$ za x, čímž obdržíme vzhledem k rovnici (d)

$$\int_0^1 f(x)\, x^{s-1} dx = \int_1^\infty f\left(\tfrac{1}{x}\right) x^{-s-1} dx = \int_1^\infty \left[x - 1 + x f(x)\right] x^{-s-1} dx$$

čili

$$\int_0^1 f(x)\, x^{s-1} dx = -\frac{1}{s} - \frac{1}{1-s} + \int_1^\infty f(x)\, x^{-s} dx\,,$$

a tedy bude rovnice (b) zníti:

(11) $$\Gamma(s)\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{\pi}\right)^s K'(a,b,c;s) = -\frac{1}{s} - \frac{1}{1-s} + \int_1^\infty f(x)\,(x^{s-1} + x^{-s})\, dx\,.$$

*) **Důkaz vede se velmi jednoduše pomocí Cauchyova vzorce transformačního; viz o tom na př. Kroneckerovu rozpravu v Sitzungsber. der kön. preuss. Akad. der Wiss., 21. února 1889, str. 123.**

Z rovnice té je patrno, že $K'(a,b,c;s)$ jest funkce jednoznačná, všude pravidelná, až na pól $s = 1$, kde má residuum $\frac{\pi}{\sqrt{\Delta}}$, a že funkce $K'(a,b,c;s)$ mizí na místech $s = -1, -2, -3, -4, -5, \ldots$, což ostatně vše plyne také z výrazu (a). Pravá strana vzorce (11) se nemění, píšemeli $1 - s$ za s, a tedy platí vztah (10), jenž tímto nanovo dokázán.

Upozornění. V rozpravě o řadách Malmsténovských uváděli jsme začasté supposici, že σ, τ jsou pravé zlomky. Tato supposice byla zbytečnou ve vzorcích (2), (3) §. 6, pak ve všech vzorcích §. 8, ve vzorcích (2^a), (2) §. 9 a rovněž v (1), (1') §. 10, jež byly oněch přímými důsledky.

Skupiny substituce, jež jsme výše charakterisovali shodou

$$\begin{pmatrix} k & l \\ k' & l' \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{r},$$

zavedl p. *Klein* do theorie funkcí elliptických a nazval je Congruenzgruppen; jemu náleží též zásluha o stanovení pojmu invariantů vyšších stupňů při funkcích modulových — jež ovšem jsou povahy rozdílné od invariantů forem kvadratických, ale jim analogické.