Matyáš Lerch
Zpodobování roviny na základě reálných kuželoseček

Zprávy Král. Čes. spol. nauk, II. tř., 1884, 90–95

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501744

Tetragonolobus siliquosus Roth. Prag: Wiesen oberhalb Motol häufig (R).
Astragalus cicer L. Kopaninský Revier bei Smečno (Vs)!
Astragalus danicus Retz. Grossdorf bei Korycan (J)! Grasige Hügelmulde oberhalb Malešic bei Hrdlořez nächst Prag (Č. fil.)!
† Vicia narbonnensis L. Auch bei Sloupnic bei Leitomyschl gebaut (Fl)!
Vicia dumetorum L. Gebüsch unter dem Gipfel des Schossenberges bei Wolfersdorf (H)! Geltsch bei Haida (Pč)! Bečkovský vrch bei Mühlhausen (V); diese Angabe für die sonst nur nordböhmische Art etwas verwunderlich.
Vicia pisiformis L. Jungferbřežan (J)! Oborský Revier bei Smečno (Vs)! Chudenic: auch auf der Doubrava (Č. fil.)! Moldauthal bei Worlík und Klingenberg (V).
Vicia silvatica L. Chudenic: am Řičej, auf der Doubrava! Um Mühlhausen häufig (V). Sloupnic bei Leitomyschl (Fl)!
Vicia cassubica L. Klíčany (J)!
Vicia tenuifolia Roth. Klíčavathal bei Pürglitz (Fr).
Vicia villosa Roth. Modřan bei Prag (V).
Vicia tetrasperma Mönch. Lidic bei Schlan (B)!
Vicia monantha Desf. Schlan: bei Hrdliv im Wickenfelde (B)!
Lathyrus silvestris L. Lauer Thiergarten bei Neuhof (Vs)! Im Moldauthal von Klingenberg bis Kamejk, auch bei Mühlhausen (V).
Lathyrus tuberosus L. Haferfeld bei Reichenau (Hs)!
Lathyrus palustris L. Bei Všetat an der Bahn gegen Dříš, und hinter Dříš unweit der Elbe auf nassen Wiesen in grosser Menge!
Lathyrus montanus Bernh. Im Erzgebirge auch bei Neudek (Sch)!

9.

Zpodobování roviny na základě realných kuželoseček.

Sdělil **Matyaš Lerch** dne 8. února 1884.

Je známo, že se v každé rovině realné nalezají dva stálé pomyslné body v nekonečnu, kterými procházejí všecky kruhy oné roviny, a které slují *kruhové body v nekonečnu;* znamenejme je i_1 i_2.
Každá pomyslná přímka procházející jedním z těchto bodů svírá s libovolnou realnou přímkou roviny nekonečně velký pomyslný

úhel, jehož tangenta je $+i$ neb $-i$ ($i = \sqrt{-1}$), jak prochází přímka ta bodem i_1 neb i_2. Přímky takové nazývejme *kruhosměrnými* (isotropickými dle **Laguerrea**) **prvé** či **druhé soustavy**. Předpokládáme tu jistý směr rotace v rovině za **kladný**, na př. onen, jenž je opačný se směrem hodinových ručiček, a v témž smyslu volíme pořádek pravoúhlých os X, Y.

Každým pomyslným neb realným bodem v rovině procházejí dvě přímky kruhosměrné, jedna prvé, druhá pak druhé soustavy; každá z nich obsahuje jediný realný bod, který nazývejme *kruhosměrným průmětem* prvým neb druhým pomyslného bodu; je-li tento realný, splývají v něm kruhosměrné jeho průměty.

Svými kruhosměrnými průměty je každý bod roviny jednoznačně určen. Bod s ním spřežitý má tytéž průměty, ale v pořádku obráceném.

Souřadnice kruhových bodů v nekonečnu jsou v libovolné pravoúhlé soustavě následující:

$$x = \infty,\ y = \infty,\ \frac{y}{x} = i,\ -i.$$

Zaveďme po příkladu *Laguerreově* t. zv. *souřadnice kruhosměrné* (coordonnées isotropes) u, v rovnicemi

$$u = x + iy, \quad v = x - iy;$$

přímky $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ jsou kruhosměrné soustavy prvé, resp. druhé.

Prvý (druhý) průmět kruhosměrný bodu (u, v) má pravoúhlé souřadnice rovny členům komplexní hodnoty u ($\bar{v}$),*) t. j. prvý kruhosměrný průmět bodu toho znázorňuje dle Gausse hodnotu u, druhý hodnotu $\bar{v}$ spřežitou s hodnotou v.

Dána-li křivka realná neb pomyslná rovnicí

$$f(x, y) = 0,$$

obdržíme dosazením $x = \dfrac{u+v}{2}$, $y = \dfrac{u-v}{2i}$ rovnici její v soustavě souřadnic kruhosměrných

$$\varphi(u, v) = 0,$$

která je v případu čar algebraických patrně téhož stupně.

Jeden z průmětů bodu křivky možno libovolně vytknouti, načež druhý lze ustanoviti za pomoci poslední rovnice. Obecně mu jich přísluší více.

*) Symbolem $\bar{v}$ budeme v tomto pojednání značiti hodnotu spřežitou s v.

Každá křivka realná neb pomyslná dává takto podnět k dvěma na vzájem souvislým soustavám rovinným, o nichž pravíme, že jsou *spřízněny* křivkou řečenou, neb vespolek příbuzny vzhledem k této. Jedna soustava sestává z bodů u, druhá z přiřaděných bodů v.

Soustavy spřízněné vespolek přímkou realnou jsou symmetrické vzhledem k ní, kdežto soustavy spřízněné přímkou pomyslnou jsou si obráceně podobny.

Soustavy příbuzné na vzájem vzhledem k libovolné křivce jsou si v nekonečně malých rozměrech podobny obráceně, nehledíme-li k několika *zvláštním* bodům, které v tom ohledu tvoří výjimku.

Tyto zvláštní body jsou isotropické průměty bodů, jichž tečny jsou kruhosměrné, a nazýváme je **ohnisky prvé a druhé soustavy**, jak jsou tyto tečny soustavy prvé neb druhé. Je-li křivka realnou stupně n, má $n(n-1)-2\delta-3\varkappa$ ohnisek, která jsou zároveň prvé i druhé soustavy, při čemž značí δ počet bodů dvojných, $\varkappa$ počet vratů. Je patrno, že pro spojité křivky, zvlášť algebraické, platí podmínky

$$\frac{du}{dv}=0, \quad \frac{dv}{du}=0,$$

aby bylo u neb v ohniskem soustavy prvé resp. druhé.

Prochází-li křivka body kruhovými i_1 i_2, aneb má-li v nich body vícenásobné, nazýváme realné body jich tečen *ohnisky kruhovými* č. *cirkularnými* té které soustavy; jsou to tedy realné body kruhosměrných assymptot čáry uvažované. Tak na př. je střed kružnice jejím cirkularným ohniskem.

Rovnice kruhu jakožto kuželosečky obsahující body i_1 i_2 musí býti tvaru

$$\alpha uv+\beta u+\gamma v+\delta=0,$$

kde $\alpha\beta\gamma\delta$ značí realné neb soujemné stálé. Tuto „kruhovou“ souvislost mezi u a v nazval **Möbius** vhodně „Kreisverwandtschaft“. Tato se ničím neliší od obyčejné prometnosti na přímce, pouze se stanoviska geometrické representace lze ji považovati za zevšeobecnění prometnosti; ve smyslu tom spatřujeme ji u **Bellavitise**.

Méně jednoduchou se jeví býti příbuznosť *kuželosečková*, která vyjádřena rovnicí tvaru

$$A_{11}u^2+2A_{12}uv+A_{22}v^2+2A_{13}u+2A_{23}v+A_{33}=0.$$

Tentokráte omezím se na kuželosečky realné, vzhledem k nimž chci rovinu *zpodobiti*, t. j. sestrojiti útvar $(\bar{v})$ odvozený ze soustavy (u), který jemu bude v nekonečně malých částech obráceně podoben.

2. Budiž dána libovolná kuželosečka realná C_2; kterýkoli její pomyslný bod u udán jest vytknutím svého prvého neb druhého průmětu kruhosměrného, ovšem dvojznačně, poněvadž každá přímka vůbec a tedy také kruhosměrná protíná křivku C_2 ve dvou bodech. Libovolně daným realným bodem u_1 procházejí dvě přímky kruhosměrné obou soustav, které spolu tvoří čáru 2. stupně Γ_2, tak zvaný kruh O v nekonečně malém poloměru; průseky čar Γ_2 C_2 jsou po dvou sdruženy; nazývejme je $u\,u'\,u''\,u'''$, a sice nechť se nalezají $u\,u'$ na přímce prvé soustavy $u_1\,i_1$, $u''\,u'''$ na přímce soustavy druhé $u_1\,i_2$, a nechť jsou $u\,u''$ a $u'\,u'''$ body spolu pomyslně sdružené. Značíme-li symbolem (x_1, x_2) bod, jehož prvý a druhý kruhosměrný průmět je resp. x_1, x_2, budeme míti následující schema:

$$u \equiv (u_1, u_2),\; u' \equiv (u_1, u'_2),\; u'' \equiv (u_2, u_1),\; u''' \equiv (u'_1, u_2),$$

v němž je význam litery $u_2\,u'_2$ patrný.

Přímky $\overline{u\,u''}$, $\overline{u'\,u'''}$ spojující body sdružené jsou realné; jakmile je sestrojíme, je problém representace bodu u řešen, poněvadž přímky ty protínají křivku Γ_2 v bodech $u\,u''$, resp. $u'\,u'''$, a tedy se body u_2, u'_2 obdrží jakožto zrcadlové obrazy bodu u_1 vzhledem k těmto přímkám.

K sestrojení těchto přímek $\overline{u\,u''}$, $\overline{u'\,u'''}$ užil **Chasles** vrcholů diagonalního trojúhelníka úplného čtyřhranu $u\,u'\,u''\,u'''$; jeden z těchto je patrně daný bod u_1, ostatní dva rovněž realné znamenejme.

$$\alpha \equiv (\overline{u\,u''}, \overline{u'\,u'''}),\; \beta \equiv (\overline{u\,u'''}, \overline{u'\,u''}).$$

Body $\alpha\,\beta$ nalezají se na poláře bodu u_1 vzhledem k C_2 a přímky $\overline{u_1\alpha}$, $\overline{u_1\beta}$ jsou harmonicky sdruženy vzhledem k oběma kuželosečkám C_2 Γ_2, t. j. ony tvoří pravoúhlou družinu harmonických polár kuželosečky C_2 vedených bodem u_1; tím podáno sestrojení bodů $\alpha\beta$.

Jedním z těchto bodů, který jsme nazvali α, procházejí přímky hledané $u\,u''$, $u'\,u'''$. Zvolme libovolný bod p a stanovme průsek p' jeho polár vzhledem ke křivkám C_2 Γ_2, a totéž učiňme pro další libovolný bod q. Přímky $u\,u'$, $u'\,u'''$ skládají křivku druhého stupně A_2, a poláry bodů p q vzhledem k této čáře jsou přímky $p'\alpha$, $q'\alpha$, tak že jsou přímky $\overline{\alpha u u''}$, $\overline{\alpha u' u'''}$ dvojnými paprsky involuce dané družinami αp, $\alpha p'$; αq, $\alpha q'$.

3. Vedeme-li libovolným bodem a v rovině svazek přímek realných, majíce na zřeteli vlastně toliko jeho část sestávající z přímek neprotínajících kuželosečku realnou C_2, bude každá přímka M tohoto svazku (t. j. části) protínati C_2 ve dvou pomyslných bodech $m\,m'$, jichž kruhosměrné průměty jsou m_1, m_2. Proběhne-li M řečenou část

svazku a, proběhnou tyto body m_1 m_2 jistou křivku, kterou nazveme *samodobnou*, poněvadž každému bodu jejímu m_1 odpovídá jediný s ním příbuzný bod m_2, který se také na ní nalézá, tak že se sama v sobě zpodobuje.

Geometrický process, kterým se tato křivka vytvořila, dá se takto formulovati: Křivka samodobná příslušná k bodu a jest geometrickým místem bodů m_1, m_2, v nichž se protínají kruhosměrné přímky $i_1 m$, $i_2 m'$, resp. $i_1 m'$, $i_2 m$, vedené z bodů $m\, m'$, v nichž protíná proměnný paprsek M svazku a kuželosečku C_2. Z toho ihned patrno, že křivka samodobná je 4. stupně s body dvojnými v bodech kruhosměrných i_1 i_2, jejíž dvě cyklická ohniska jsou kruhosměrnými průměty průseků paprsků vedených z bodu a k úběžným bodům kuželosečky C_2 s touto křivkou. Čtyry z pomyslných průseků obou křivek C_2 a samodobné leží na kruhu nekonečně malého poloměru se středem v a, a dva z ostatních čtyř jsou realné průseky poláry bodu a s kuželosečkou, a křivky se v nich protínají kolmo.

Nalezá-li se a na assymptotě kuželosečky C_2,*) přejde samodobná v cyklickou křivku stupně třetího, a je-li konečně a středem hyperboly, na křivku kvadratickou, která je nutně hyperbolou souosou s původní; má-li tato rovnici

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

má samodobná rovnici

$$a^2y^2 - b^2x^2 = a^2b^2.$$

Je-li C_2 parabolou, je samodobná cyklickou čarou kubickou.

Skutečné sestrojení bodů m_1 m_2 provede se na základě známé věty, že jsou pomyslné průseky $m\, m'$ přímky M s kuželosečkou dvojné body involuce harmonicky sdružených pólů na přímce M vzhledem ke kuželosečce. Střed této involuce je patrně průsek μ se směrem přímky M sdruženého průměru kuželosečky s touto přímkou M, a její jednu družinu tvoří bod a a průsek a_M jeho poláry s přímkou M. Dle základních vlastností involuce bude pak $\mu m = \sqrt{\mu a \,.\, \mu a_M} = i \,.\, \sqrt{a\mu \,.\, \mu a_M}$, $\mu m' = -i \sqrt{a\mu \,.\, \mu a_M}$, a následovně se body m_1 m_2 nalezají na kolmici vztýčené v bodě μ na přímku M na opačných stranách u vzdálenosti $\sqrt{a\mu \,.\, \mu a_M}$ od této, a obdržíme je jakožto průseky řečené kolmice s kružnicí opsanou nad průměrem $a a_M$.

Poněvadž bod μ rozpoluje vzdálenost $m\, m'$, probíhá kuželosečku (μ) podobnou a podobně položenou s C_2, která obsahuje bod a, střed

*) Tato pak musí býti hyperbolou.

kuželosečky C_2 a průseky této s polárou bodu a. Přímka $m_1\, m_2$ obaluje křivku třídy třetí, stupně čtvrtého. Páry $m_1\, m_2$ tvoří na křivce samodobné involuci, která má v průsecích s polárou bodu a dva realné body dvojné.

Problém zpodobení kuželosečkou realnou dá se tedy graficky řešiti způsobem dvojím: buď přímým, aneb za pomoci čar samodobných, kterých sestrojíme dostatečné množství, abychom obdrželi jakousi přiměřeně hustou síť, kterou bude pokryta celá rovina. Výhodno jest vždy sestrojiti čáry samodobné příslušné k bodům jedné z os kuželosečky.

4. Budiž dán trojúhelník realný abc, jehož strany protínají realnou kuželosečku v bodech pomyslných; poláry bodů $a\, b\, c$ znamenejme A, B, C. Znamenejme průseky přímky A se stranami ab, ac resp. c', b', průseky přímky B se stranami ba, bc resp. c'', a'', a průseky přímky C se stranami cb, ca resp. a''', b'''. Kružnice nad průměrem ac', bc'' protnou se v kruhosměrných průmětech $\gamma_1\, \gamma_2$ průseků přímky ab s kuželosečkou; podobně se protnou kružnice nad průměry ba'', ca''' v bodech $\alpha_1\, \alpha_2$, kružnice cb''', ab' v bodech $\beta_1\, \beta_2$, které jsou kruhosměrné průměty průseků přímky bc, resp. ca s kuželosečkou.

Značíme-li $(\alpha_1\, \alpha_2)$ bod, jehož prvý a druhý průmět kruhosměrný je pořadem $\alpha_1\, \alpha_2$, bude se dle věty Pascalovy protínati přímka spojivá bodů $(\alpha_1\, \alpha_2)\, (\beta_1\, \beta_2)$ s přímkou $(\alpha_2\, \alpha_1)\, (\beta_2\, \beta_1)$ v bodě patrně realném I, přímka $(\beta_1\, \beta_2)\, (\gamma_2\, \gamma_1)$ s přímkou $(\beta_2\, \beta_1)\, (\gamma_2\, \gamma_1)$ v realném bodě II, a přímka $(\gamma_1\, \gamma_2)\, (\alpha_2\, \alpha_1)$ s přímkou $(\gamma_2\, \gamma_1)\, (\alpha_1\, \alpha_2)$ v realném bodě III, a tyto tři realné body I, II, III náležejí téže realné přímce Pascalově. Bod I sestrojíme jakožto jediný realný bod pomyslné přímky $(\alpha_1\, \alpha_2)\, (\beta_1\, \beta_2)$; poněvadž tu musí trojúhelníky $\alpha_1\, \beta_1$ I, $\alpha_2\, \beta_2$ I býti obráceně podobny, plyne, že I je s t ř e d e m (samodružným bodem) obrácené podobnosti stanovené homologickými délkami $\alpha_1\, \beta_1$, $\alpha_2\, \beta_2$. Podobně sestrojíme body II a III jakožto středy obrácených podobností daných družinami délek $\beta_1\, \gamma_1$, $\beta_2\, \gamma_2$ a $\gamma_1\, \alpha_2$, $\gamma_2 \alpha_1$.

Vlastnosť tří takto stanovených bodů, že náležejí téže přímce, vyjadřuje však zároveň novou vlastnosť kuželoseček.