

Matyáš Lerch

Základové theorie Malmsténovských řad

Rozpravy Čes. akademie, II. tř., 1 (1892), č. 27, 525–592

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/501734>

Terms of use:

© Akademie věd ČR, 1892

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

ROZPRAVY
ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ V PRAZE.

ROČNÍK I.

TŘÍDA II.

ČÍSLO 27.

ZÁKLADOVÉ THEORIE
MALMSTÉNOVSKÝCH ŘAD.

NAPSAL

M. LERCH.

PŘEDLOŽENO DNE 24. PROSINCE 1891.

V PRAZE.

NÁKLADEM ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ.

1892.

Předmětem úvah našich bude hlavně zvláštní druh řad, z něhož se vyskytly v literatuře jen jednotlivé případy neb typy, namnoze toliko ojediněle. Ačkoli prvé počátky sahají až k *Eulerovi*, mám za to, že *Malmstén* byl prvním, jemuž v tom oboru bylo učiniti první důležité kroky. Po něm následují jména *Schlömilch*, *Lipschitz*, *Riemann*, jímž se inspirovali pp. *Hurwitz* a *Stieltjes*. Nejobecnější z těchto řad studovali Malmstén a Lipschitz; p. *Appell* zabýval se výrazy na první pohled druhu různého od oněch, ale tyto vedly nás (byliť jsme se dříve zabývali výrazy Riemannovými jiným směrem) k zobecnění, od něhož vede jen malý krok ke konečnému typu, jenž tvoří předmět přítomné práce.

Vědecká cena přítomného spisu vězí — jak za to mám — v methodě velmi elementarné, pomocí které zde vyvinuty základní vlastnosti veličin, jichž důležitost měřiti bude moci teprve budoucnost. Velká část obecnstva, která hledí hlavně k elegantním výsledkům, bude však váhu práce spatřovati v aplikacích, jež zde připojeny hlavně k vůli zvýšení interessu. Skutečně podařilo se nám pomocí našich vzorců odvoditi s překvapující jednoduchostí některé znamenité výsledky pana *Kroneckera*, jichž význam správně vytčen ve spise p. *H. Webera* (*Elliptische Functionen und algebraische Zahlen*, §. 112 a násl.) a kromě toho mohli jsme dospěti k jiným výsledkům analogickým, z nichž uvedli jsme ovšem jen případy jednoduché, poněvadž nejzajímavější. Za důležité považujeme též stanovisko, s něhož jsme *Kroneckerovské* řady studovali, poněvadž toto se od onoho předchůdců našich podstatně liší, a v něm tkví příčina jednoduchosti našich method.

Začátečnickové uvítají nový důkaz Riemannovy reciprocity při funkci $\zeta(s)$, který jsme vyložili v §. 1, abychom dobře hned spředu naznačili povahu naší práce, důkaz, jenž jest nejelementarnější ze všech dosavadních.

Uvádíme zde seznam prací, jež nám o řadách našich jsou známy. Jsou to:

1. Malmstén, De integralibus quibusdam definitis, seriëbusque infinitis. *Journal für die reine und angew. Mathematik*, sv. 38, 1849.
2. Schlömilch, *Zeitschrift f. Math. u. Phys.*, 1849.
3. Lipschitz, *Journal für die reine und angew. Mathematik*, sv. 54.
4. Riemann, Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse. *Monatsberichte der Akad. d. Wiss. zu Berlin*, 1859.

5. Hurwitz, Zeitschrift f. Mathematik und Phys., sv. 27; 1882.
6. Stieltjes, Sur quelques intégrales définies. Verslagen en Mededeelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen, Amsterdam 1886.
7. Appell, Développement en séries trigonométriques de certaines fonctions périodiques vérifiant l'équation $\Delta F = 0$. Journal de Mathématiques pures et appliquées, 1886.
8. Lerch, O jistém integrálu omezeném. Věstník král. čes. společnosti nauk z r. 1886; hlavně pak
9. Sur certains développements en séries trigonométriques. Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, sv. III. Dopis zaslaný p. Appelovi, datovaný ze dne 23. února 1887. Tuto práci pro náš předmět důležitou citovati budu krátce: Lerch, dopis.

Malmsténovým a Lipschitzovým případem zabývá se též poznámka:

10. Lerch, Note sur la fonction $\mathfrak{R}(\tau, x, s)$. Acta mathematica, sv. 11.
11. Lipschitz, Untersuchung der Eigenschaften einer Gattung von unendlichen Reihen. Journal für die reine und angewandte Mathematik, sv. 105.

Řady Kroneckerovské, do jisté míry již Dirichletem uvažované, které budou předmětem aplikací, studovány p. *Kroneckerem* v řadě pojednání:

12. Zur Theorie der elliptischen Functionen. Berl. Sitzungsberichte 1883, 1886, 1889.
13. H. Weber, Elliptische Functionen und algebraische Zahlen. Braunschweig, 1891 (str. 454 a násl.) aneb
Zur Theorie der complexen Multiplication elliptischer Functionen. Mathematische Annalen, sv. 33.

Abychom naznačili obsah prací citovaných autorů, poznamenejme, že *Malmstén* v pojednání pod 1. uvedeném dokázal pěkný vzorec

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{au} - e^{-au}}{e^{\pi u} - e^{-\pi u}} \frac{\cos(s \operatorname{arctg} \frac{u}{x})}{(x^2 + u^2)^{1+s}} du = \frac{\sin a}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{e^{-tx} t^{s-1} dt}{t^s + 2 \cos a + e^{-t}}$$

jenž vyjádřen jsa řadami (které *Malmstén* ovšem vytkl jen ve zvláštních případech), obdrží tvar:

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{\sin 2v\tau\pi}{(x+v)^s} \\ = (2\pi)^{s-1} \Gamma(1-s) \sum_{v=0}^{\infty} \left[\frac{\cos(2vx + 2\tau x + \frac{s}{2})\pi}{(w+v)^{1-s}} - \frac{\cos(2vx + 2\tau'x + \frac{s}{2})\pi}{(\tau'+v)^{1-s}} \right],$$

kde jsme k vůli eleganci nahradili literu a výrazem $2\tau\pi - \pi$ a kladli $w' = 1 - w$, předpokládajíce veličiny w, x v mezích 0 a 1, podobně jako realnou část veličiny s .

Řada *Lipschitzova* byla (v našem označení)

$$\mathfrak{R}(w, x, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2nx\pi i}}{(w+n)^s},$$

a její pomyslná část splývá (až na označení liter) s levou stranou Malmsténovské relace. Řady Schlömilchova, Riemannova, Hurwitzova, Stieltjesova jsou zvláštní případy výrazu Lipschitzova. Řada studovaná v našem dopisu zní

$$F(x, s, u) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{[(x - m)^2 + u]^{\frac{1}{2}s}},$$

řady Appellovy pak vzniknou odtud specialisováním hodnot s . Od této řady nevalně se liší následující naše řada

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2n\nu\pi i}}{[(w + n)^2 + u^2]^{\frac{1}{2}s}},$$

kteřou však dlužno uvažovati vůči krásným aplikacím, o nichž učiněna zmínka výše. Mám za to, že bylo správné nazvati tuto řadu na oslavu švédského matematika, jehož zásluhy o tento druh výrazů dosud zůstaly nepovšimnuty, řadou Malmsténovskou a označiti ji $Ml. (v, w, u, s)$.

§. 1. Riemannova funkce $\zeta(s)$.

Klademeli v samozřejmém vzorci

$$\int_0^{\infty} f(x) x^{s-1} dx = a^s \int_0^{\infty} f(ax) x^{s-1} dx$$

jednou $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, podruhé $f(x) = e^{-x}$, obdržíme rovnice

$$\frac{1}{a^s} = \frac{\int_0^{\infty} \frac{x^{s-1} dx}{1+a^2 x^2}}{\int_0^{\infty} \frac{x^{s-1} dx}{1+x^2}},$$

$$(1) \quad \frac{1}{a^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} e^{-ax} x^{s-1} dx.$$

Integrál ve jmenovateli pravé strany prvé z těchto rovnic má hodnotu

$$\frac{\pi}{2 \sin \frac{s\pi}{2}},$$

a čítel se substitucí $x = \frac{1}{z}$ přetvoří tak, aby vznikl vzorec

$$(2) \quad \frac{1}{a^s} = \frac{2 \sin \frac{s\pi}{2}}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{x^{1-s} dx}{a^2 + x^2}.$$

Těchto vzorců (1) a (2) uijeme k vyšetření vlastností funkce definované pro $\text{Real. } s > 1$ řadou Riemannovou

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

jež za učiněné podmínky $\text{Real. } s > 1$ konverguje absolutně.

Jelikož dle (2)

$$\frac{1}{k^s} = \frac{2 \sin \frac{s\pi}{2}}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{x^{1-s} dx}{k^2 + x^2},$$

pokud $\text{Real. } s < 2$, máme za této supposice

$$\zeta(s) = \frac{2 \sin \frac{s\pi}{2}}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{x^{1-s} dx}{k^2 + x^2}.$$

Ukážeme dodatečně, že tu dovoleno provésti sčítání pod znaméním integrace, t. j. že

$$(a) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{x^{1-s} dx}{k^2 + x^2} = \int_0^{\infty} dx \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{1-s}}{k^2 + x^2},$$

načež obdržíme užitím známého vzorce

$$\pi \frac{e^{2\pi x} + 1}{e^{2\pi x} - 1} = \frac{1}{x} + 2x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + x^2}$$

hodnotu součtu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + x^2} = \left(\pi \frac{e^{2\pi x} + 1}{e^{2\pi x} - 1} - \frac{1}{x} \right) \frac{1}{2x},$$

a tedy

$$\zeta(s) = \frac{\sin \frac{s\pi}{2}}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\pi \frac{e^{2\pi x} + 1}{e^{2\pi x} - 1} - \frac{1}{x} \right) x^{-s} dx;$$

píšeme-li při integraci $\frac{x}{2\pi}$ místo x , máme posléze

$$(3) \quad \zeta(s) = (2\pi)^{s-1} \sin \frac{s\pi}{2} \int_0^{\infty} \left(\frac{e^x + 1}{e^x - 1} - \frac{2}{x} \right) x^{-s} dx,$$

pokud $1 < \text{Real. } s < 2$.

Že integrál v pravo existuje pouze při $\text{Real. } s > 1$, plyne odtud, že pro nekonečně veliká x integrovaná funkce se redukuje na x^{-s} , a že podmínka $\text{Real. } s < 2$ je nutnou, plyne z okolnosti, že pro dosti malá x platí rozvoj

$$\left(\frac{e^x + 1}{e^x - 1} - \frac{2}{x} \right) x^{-s} = \frac{1}{2} x^{1-s} + \dots$$

Jedná se nyní o přesný důkaz rovnice (a). Tu můžeme se omezit na reálná s , poněvadž obě strany rovnice jsou funkce analytické, jež splynou pro všechna s , jakmile splynou pro všechna s sebe menšího intervallu reálného.

Z nerovnosti patrné

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 + x^2} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + x^2} = \left(\pi \frac{e^{2\pi x} + 1}{e^{2\pi x} - 1} - \frac{1}{x} \right) \frac{1}{2x}$$

plyne

$$\sum_{k=1}^n \int_0^{\infty} \frac{x^{1-s} dx}{k^2 + x^2} < \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left(\pi \frac{e^{2\pi x} + 1}{e^{2\pi x} - 1} - \frac{1}{x} \right) x^{-s} dx;$$

poněvadž pravá strana je veličina konečná nezávislá n , a řada v levo sestává z kladných členů, plyne odtud především konvergence levé strany pro $n = \infty$, a mimo to nerovnost

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{x^{1-s} dx}{k^2 + x^2} \leq \int_0^{\infty} dx \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{1-s}}{k^2 + x^2}.$$

Levá strana je však větší než

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^N \frac{x^{1-s} dx}{k^2 + x^2} = \int_0^N dx \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{1-s}}{k^2 + x^2},$$

kde N značí libovolnou kladnou veličinu; máme tedy

$$\int_0^N dx \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{1-s}}{k^2 + x^2} < \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{x^{1-s} dx}{k^2 + x^2} \leq \int_0^{\infty} dx \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{1-s}}{k^2 + x^2}.$$

První a třetí z těchto veličin se liší o tak málo, jak libo, jeli N dosti veliké, a proto se druhá liší od třetí o veličinu libovolně malou; jelikož pak veličiny ty nezávisí na N , musí tu nastati úplná rovnost, t. j. musí platiti rovnice (a).

Jiného výrazu pro funkci $\zeta(s)$ nabudeme, užijemeli vzorce (1), t. j.

$$\frac{1}{k^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} e^{-kx} x^{s-1} dx;$$

tu bude

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} e^{-kx} x^{s-1} dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(s)} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{1 + e^{-Nx}}{e^x - 1} x^{s-1} dx. \end{aligned}$$

Pokud je reálná část s větší než 1, máme

$$\lim_{N=\infty} \int_0^{\infty} \frac{e^{-Nx} x^{s-1} dx}{e^x - 1} = 0,$$

a tedy

$$(4) \quad \zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1} dx}{e^x - 1}.$$

Integrály (3) a (4) nejsou způsobilé poučiti nás přímo o povaze funkce $\zeta(s)$ pro argumenty, jichž reálná část je ≤ 1 . Abychom toho docílili, rozdělme tyto integrály vždy ve dva dle schematu $\int_0^{\omega} + \int_{\omega}^{\infty}$, kde ω značí kladnou veličinu menší než 2π . Pak máme ze (3) a (4)

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= (2\pi)^{s-1} \sin \frac{s\pi}{2} \left\{ \int_0^{\omega} \left(\frac{e^x + 1}{e^x - 1} - \frac{2}{x} \right) x^{-s} dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{\omega}^{\infty} \left(\frac{e^x + 1}{e^x - 1} - \frac{2}{x} \right) x^{-s} dx \right\}, \\ \zeta(s) &= \frac{1}{\Gamma(s)} \left\{ \int_0^{\omega} \frac{x^{s-1} dx}{e^x - 1} + \int_{\omega}^{\infty} \frac{x^{s-1} dx}{e^x - 1} \right\}. \end{aligned}$$

Pokud $|x| < 2\pi$, konvergují, jak z elementů známo, rozvoje

$$\begin{aligned} \frac{e^x + 1}{e^x - 1} - \frac{2}{x} &= c_1 x + c_2 x^3 + c_3 x^5 + \dots + c_n x^{2n-1} + \dots, \\ \frac{2}{e^x - 1} &= \frac{2}{x} - 1 + c_1 x + c_2 x^3 + c_3 x^5 + \dots + c_n x^{2n-1} + \dots, \end{aligned}$$

z nichž plyne

$$\begin{aligned} \int_0^{\omega} \left(\frac{e^x + 1}{e^x - 1} - \frac{2}{x} \right) x^{-s} dx &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{\omega^{2n-s}}{2n-s}, \\ \int_{\omega}^{\infty} \frac{2x^{s-1} dx}{e^x - 1} &= -\frac{2\omega^{s-1}}{1-s} - \frac{\omega^s}{s} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{\omega^{s+2n-1}}{s+2n-1}. \end{aligned}$$

Tyto výrazy vložíme do hořejších vzorců pro $\zeta(s)$ a mimo to při prvé z nich všimněme si té okolnosti, že vůči supposici $\text{Real } s < 2$ platí

$$\int_{\omega}^{\infty} \left(\frac{e^x + 1}{e^x - 1} - \frac{2}{x} \right) x^{-s} dx = \int_{\omega}^{\infty} \frac{2x^{-s} dx}{e^x - 1} - \frac{\omega^{1-s}}{1-s} - \frac{2\omega^{-s}}{s};$$

tím obdržíme výsledky následující:

$$(3^*) \quad \zeta(s) = (2\pi)^{s-1} \sin \frac{s\pi}{2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n \omega^{2n-s}}{2n-s} - \frac{\omega^{1-s}}{1-s} - \frac{2\omega^{-s}}{s} + 2 \int_{\omega}^{\infty} \frac{x^{-s} dx}{e^x - 1} \right\},$$

$$(4^*) \quad \zeta(s) = \frac{1}{2\Gamma(s)} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n \omega^{s+2n-1}}{s+2n-1} - \frac{2\omega^{s-1}}{1-s} - \frac{\omega^s}{s} + 2 \int_{\omega}^{\infty} \frac{x^{s-1} dx}{e^x - 1} \right\}.$$

Integrály

$$\int_{\omega}^{\infty} \frac{x^{s-1} dx}{e^x - 1}, \quad \int_{\omega}^{\infty} \frac{x^{-s} dx}{e^x - 1}$$

konvergují pro všechna konečná s a definují celistvé funkce transcendentní této proměnné; nekonečné řady obsažené v závorkách $\{ \}$ pak konvergují rovněž pro všechna s a definují funkce jednoznačné, jichž póly jsou $s = 2n, 1, 0$ resp. $1 - 2n, 1, 0$.

Z toho následuje, že výrazy (3*) a (4*) jest $\zeta(s)$ definována pro všechna komplexní s jakožto funkce jednoznačná. Kromě toho poznáváme snadno, že funkce $\zeta(s)$ se na všech místech chová pravidelně, mimo na místě $s = 1$, kde ji lze uvést na tvar*)

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \mathfrak{B}(s-1).$$

Z rovnic (3*) a (4*) plyne dále přímo *Riemannův* klassický vztah; klademe-li totiž ve (4*) $1-s$ za s , přejde závorka u (4*) v závorku u (3*) a bude

$$(5^a) \quad \zeta(1-s) = \frac{\zeta(s)}{2(2\pi)^{s-1} \sin \frac{s\pi}{2} \Gamma(1-s)},$$

rovnice, jež přejde v hledanou relaci Riemannovu

$$(5) \quad \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-\frac{s}{2}} \zeta(s) = \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \pi^{\frac{s-1}{2}} \zeta(1-s),$$

užijeme-li známých vztahů elementárných

$$\Gamma(1-s) = \frac{2^{-s}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right),$$

$$\sin \frac{s\pi}{2} = \frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)}.$$

*) Symbolem $\mathfrak{B}(x)$ vždy znamenáme řadu tvaru $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$ konvergentní v určitém oboru.

§. 2. Řady Malmsténovské.

Řady, jež Malmstén a po něm uvedení matematikové studovali, jsou zvláštní případy výrazu

$$(1) \quad \text{Ml. } (\tau, \tau\omega, u, s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2nv\pi i}}{[(\tau\omega + n)^2 + u^2]^{\frac{s}{2}}},$$

jejž na oslavu švédského matematika nazvu řadou *Malmsténovskou*. Ukážeme především, že ji lze vyjádřiti omezeným integrálem. K tomu účelu nám podá vzorec (2) §. 1 rovnici

$$\frac{e^{2nv\pi i}}{[(\tau\omega + n)^2 + u^2]^{\frac{s}{2}}} = \frac{2 \sin \frac{s\pi}{2}}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{2nv\pi i} x^{1-s} dx}{(\tau\omega + n)^2 + u^2 + x^2},$$

v níž musí realná část veličiny s býti obsažena v mezích 1 a 2, a při tom ostatní litery značí veličiny reálné. Ukážeme dodatečně, že jest

$$(a) \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{e^{2nv\pi i} x^{1-s} dx}{(\tau\omega + n)^2 + u^2 + x^2} = \int_0^{\infty} dx \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2nv\pi i} x^{1-s}}{(\tau\omega + n)^2 + u^2 + x^2},$$

a užijeme-li známého vzorce

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2nv\pi i}}{(\tau\omega + n)^2 + a^2} = \frac{\pi}{a} e^{-2v\omega\pi i} \left(\frac{e^{2\pi(a'v + \omega i)}}{e^{2\pi(a' + \omega i)} - 1} + \frac{e^{2\pi a'v}}{e^{2\pi(a' - \omega i)} - 1} \right),$$

kde psáno $v' = 1 - v$ a předpokládáno $0 < v < 1$, máme hledaný výraz :

$$(2) \quad \text{Ml. } (v, \tau\omega, u, s) \\ = 2 \sin \frac{s\pi}{2} e^{-2v\omega\pi i} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{e^{2\pi(\omega i + v\sqrt{u^2 + x^2})}}{e^{2\pi(\omega i + \sqrt{u^2 + x^2})} - 1} + \frac{e^{2\pi v\sqrt{u^2 + x^2}}}{e^{2\pi(-\omega i + \sqrt{u^2 + x^2})} - 1} \right\} x^{1-s} dx,$$

platný za supposice

$$1 < \text{Real. } s < 2; \quad 0 < v < 1; \quad v' = 1 - v; \quad u \text{ reálné.}$$

Zbývá ještě dokázati identitu (a). Obě strany rovnice té konvergují pro $1 < \text{Real. } s < 2$; neboť o levé straně je to patřno, pravá pak liší se od integrálu (2) pouze určitým činitelem.

Rovnice (a) bude dokázána, jakmile ukážeme, že rozdíl veličin

$$(b) \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_N^{\infty} \frac{e^{2nv\pi i} x^{1-s} dx}{(\tau\omega + n)^2 + u^2 + x^2}, \quad \int_N^{\infty} dx \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2nv\pi i} x^{1-s}}{(\tau\omega + n)^2 + u^2 + x^2}$$

blíží se nule, rosteli N přes všechny meze. Avšak veličiny tyto jsou absolutně menší než veličiny — omezujeme se na reálná s —

$$(b') \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_N^{\infty} \frac{x^{1-s} dx}{(w+n)^2 + u^2 + x^2}, \quad \int_N^{\infty} dx \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{x^{1-s}}{(w+n)^2 + u^2 + x^2}.$$

Poněvadž ale

$$\sum_{n=-v}^v \frac{1}{(w+n)^2 + u^2 + x^2} < \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(w+n)^2 + u^2 + x^2},$$

máme též

$$\sum_{n=-v}^v \int_N^{\infty} \frac{x^{1-s} dx}{(w+n)^2 + u^2 + x^2} < \int_N^{\infty} dx \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{x^{1-s}}{(w+n)^2 + u^2 + x^2}$$

pro všechna v ; z nerovnosti té plyne pak, že prvý z výrazů (b') nepřevyší druhý z nich, a poněvadž tento je nekonečně malý zároveň s $\frac{1}{N}$, je dokázáno, že rozdíl veličin (b) blíží se nule pro $\lim N = \infty$, a následkem toho rovnice (a) je správná.

Zc vzorce (2) obdržíme snadno trigonometrický rozvoj funkce $\text{Ml}(v, w, u, s)$ vůči proměnné w . Je tu totiž, ano $v' = 1 - v$,

$$\frac{e^{2\pi(wi + v\sqrt{u^2 + x^2})}}{e^{2\pi(wi + \sqrt{u^2 + x^2})} - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2nw\pi i - 2\pi(n+v)\sqrt{u^2 + x^2}},$$

$$\frac{e^{2\pi v\sqrt{u^2 + x^2}}}{e^{2\pi(-wi + \sqrt{u^2 + x^2})} - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{2nw\pi i - \pi(n-v)\sqrt{u^2 + x^2}}.$$

Následkem toho plyne z (2) rozvoj:

$$(3) \quad e^{2vw\pi i} \text{Ml}(v, w, u, s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{2nw\pi i},$$

kde zavedeno označení

$$(4) \quad A_n = 2 \sin \frac{s\pi}{2} \int_0^{\infty} e^{-2\pi|n-v|\sqrt{u^2 + x^2}} \frac{x^{1-s} dx}{\sqrt{u^2 + x^2}},$$

při čemž $|n-v|$ dle způsobu Weierstrassova značí prostou (absolutní) hodnotu veličiny $n-v$, t. j.

$$|n-v| = \begin{cases} n-v & \text{pro } n > 0 \\ v-n & \text{pro } n < 0 \end{cases}.$$

Abychom poznali funkční povahu veličiny A_n , musíme studovati výraz

$$y = \int_0^{\infty} e^{-c\sqrt{u^2+x^2}} \frac{x^{1-s} dx}{\sqrt{u^2+x^2}};$$

píšeme při integraci ux za $\sqrt{u^2+x^2}$, obdržíme

$$y = u^{1-s} \int_1^{\infty} e^{-cux} (x^2 - 1)^{-\frac{s}{2}} dx.$$

Položme pak

$$(5) \quad J = \int_1^{\infty} e^{-vx} (x^2 - 1)^{\sigma-1} dx,$$

kde σ je veličina kladná; diferencujeme pod znaméním integračním, obdržíme

$$\frac{dJ}{dv} = - \int_1^{\infty} e^{-vx} x (x^2 - 1)^{\sigma-1} dx,$$

$$\frac{d^2J}{dv^2} = \int_1^{\infty} e^{-vx} x^2 (x^2 - 1)^{\sigma-1} dx.$$

Integrací identity

$$d[e^{-vx}(x^2 - 1)^{\sigma}] = \{-v e^{-vx}(x^2 - 1)^{\sigma} + 2\sigma e^{-vx} x (x^2 - 1)^{\sigma-1}\} dx$$

v mezích 1 a ∞ obdržíme však

$$0 = -v \int_1^{\infty} e^{-vx} (x^2 - 1)^{\sigma} dx + 2\sigma \int_1^{\infty} e^{-vx} x (x^2 - 1)^{\sigma-1} dx,$$

a vložíme sem hodnoty nalezené, posléze

$$-v \left(\frac{d^2J}{dv^2} - J \right) - 2\sigma \frac{dJ}{dv} = 0,$$

čili

$$(6) \quad v \frac{d^2J}{dv^2} + 2\sigma \frac{dJ}{dv} - vJ = 0.$$

Této differencialné rovnici lze vyhověti řadou mocninovou

$$J = \sum_{v=0}^{\infty} C_v v^{\nu},$$

jejíž součinitelé se ustanoví z identity plynoucí z (6):

$$\sum \nu(\nu-1) C_{\nu} v^{\nu-1} + \sum 2\sigma \nu C_{\nu} v^{\nu-1} - \sum C_{\nu} v^{\nu+1} = 0,$$

kteřá má za následek

$$r(r-1+2\sigma)C_r = C_{r-2}; \quad (r = 0, 1, 2, \dots),$$

kde $C_{-1} = C_{-2} = 0$. Obdržíme tu $C_1 = C_3 = C_5 = \dots = 0$, a pak

$$C_2 = \frac{C_0}{2(2\sigma+1)}, \quad C_4 = \frac{C_0}{2 \cdot 4(2\sigma+1)(2\sigma+3)}, \dots$$

$$C_{2n} = \frac{C_0}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n(2\sigma+1)(2\sigma+3)\dots(2\sigma+2n-1)}.$$

Zavedme pro snazší přehled označení

$$(s, n) = s(s+1)(s+2)\dots(s+n-1),$$

tedy

$$(s, 0) = 1, (s, 1) = s, (s, 2) = s(s+1), \dots$$

a volme $C_0 = 1$. Tím obdržíme jako první partikulární integrál rovnice (6) řadu

$$J' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v^{2n}}{2^{2n} n! (\sigma + \frac{1}{2}, n)}.$$

Druhé řešení diff. rovnice (6) nám poskytne substituce

$$J = \sum_{r=0}^{\infty} C'_r v^{r+1-2\sigma}$$

vedoucí k podmínkám

$$(r+1-2\sigma)rC'_r = C'_{r-2}; \quad (r = 0, 1, 2, \dots),$$

$C'_{-1} = C'_{-2} = 0$; nalezneme

$$C'_{2n+1} = 0, \quad C'_{2n} = \frac{C'_0}{2^{2n} n! (\frac{3}{2} - \sigma, n)},$$

tak že druhé řešení partikulární diferenciální rovnice (6) zní

$$J'' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v^{2n+1-2\sigma}}{2^{2n} n! (\frac{3}{2} - \sigma, n)}.$$

Nalezená řešení budou různá, pokud σ není rovno $\frac{1}{2}$ a existují, pokud σ se liší od $\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \dots$ a od $-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, \dots$

Pokud tedy 2σ není celistvé číslo liché, bude obecné řešení diferenciální rovnice (6) zníti

$$J = C' J' + C'' J'',$$

kde C', C'' značí dvě konstanty, které musíme ustanoviti tak, aby tento výraz přešel v integrál (5).

Jeli především σ obsaženo v mezeře $(0 \dots \frac{1}{2})$, bude $1 - 2\sigma > 0$, a tedy $J'' = 0$ pro $v = 0$; obdržíme tak

$$C' = J = \int_1^{\infty} (x^2 - 1)^{\sigma-1} dx,$$

a třeba jen vyčísliti poslední integrál. Klademeli zde $x = z^{-\frac{1}{2}}$, obdržíme

$$C' = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-z)^{\sigma-1} z^{-\frac{1}{2}-\sigma} dz = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\sigma) \Gamma(\frac{1}{2}-\sigma)}{\sqrt{\pi}}.$$

Abychom ustanovili C'' , přetvoříme J substitucí $x = \frac{z}{v}$, čímž vznikne

$$J = v^{1-2\sigma} \int_v^{\infty} e^{-z} (z^2 - v^2)^{\sigma-1} dz,$$

a předpokládejme $\frac{1}{2} < \sigma < 1$. Pak bude $1 - 2\sigma < 0$ a tedy u výrazu

$$Jv^{2\sigma-1} = C' J' v^{2\sigma-1} + C'' J'' v^{2\sigma-1}$$

odpadne pro $v = 0$ prvý člen, tak že zbude

$$\int_0^{\infty} e^{-z} z^{2\sigma-1} dz = C'',$$

čili

$$C'' = \Gamma(2\sigma - 1).$$

Dle toho máme pro integrál (5) výraz

$$(5^*) \quad J = \frac{\Gamma(\sigma) \Gamma(\frac{1}{2}-\sigma)}{2\sqrt{\pi}} J' + \Gamma(2\sigma - 1) J''.$$

Tato dedukce postrádá přesnosti, ani součinitelé C' , C'' ustanoveni byli při různých hodnotách σ ; proto zde dodáváme důkaz přesný.

Integrál

$$v^{2\sigma-1} J = \int_v^{\infty} e^{-x} (x^2 - v^2)^{\sigma-1} dx = \bar{J}$$

rozdělme ve dva

$$K = \int_0^1 e^{-x} (x^2 - v^2)^{\sigma-1} dx, \quad K_1 = \int_1^{\infty} e^{-x} (x^2 - v^2)^{\sigma-1} dx,$$

předpokládajíce $v < 1$. Tu je bezprostředně jasno, že lze K_1 rozvinouti v obyčejnou řadu mocninovou, jejíž stálý člen bude

$$K_1^{(v=0)} = \int_1^{\infty} e^{-x} x^{2\sigma-2} dx = Q(2\sigma - 1),$$

takže máme*)

$$K_1 = Q(2\sigma - 1) + v \mathfrak{P}_1(v).$$

Při tom předpokládejme σ reálným a > 1 aneb aspoň $\text{Re} \sigma > 1$; pak bude binomialní rozvoj

$$(x^2 - v^2)^{\sigma-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{\sigma-1}{n} v^{2n} x^{2\sigma-2n-2}$$

absolutně konvergentní (a zároveň stejnoměrně) uvnitř oboru $(v \dots 1)$, a tedy též součin

$$e^{-x} (x^2 - v^2)^{\sigma-1} = \sum_{m,n} (-1)^{m+n} \frac{\binom{\sigma-1}{n}}{m!} x^{2\sigma+m-2n-2} v^{2n} e^{-x},$$

$$(m, n = 0, 1, 2, \dots)$$

a odtud plyne integrací

$$K = - \sum_{m,n} (-1)^{m+n} \frac{\binom{\sigma-1}{n}}{m!} v^{2n} \cdot \frac{v^{2\sigma+m-2n-1}}{2\sigma+m-2n-1} e^{-v^2},$$

$$(m, n = 0, 1, 2, \dots)$$

Výraz ten lze přetvořit následovně

$$K = - \sum_{m,n} (-1)^{m+n} \frac{\binom{\sigma-1}{n}}{m!} \frac{v^{2\sigma+m-1}}{2\sigma+m-2n-1} e^{-v^2}$$

$$+ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{1}{2\sigma+m-1} + v \mathfrak{P}_2(v).$$

Máme tudíž

$$J = K + K_1 = - \sum_{m,n} (-1)^{m+n} \frac{\binom{\sigma-1}{n}}{m!} \frac{v^{2\sigma+m-1}}{2\sigma+m-2n-1} e^{-v^2}$$

$$+ \left[Q(2\sigma - 1) + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m v^m}{m! (2\sigma + m - 1)} \right] + v \mathfrak{P}(v),$$

kde $\mathfrak{P}(v) = \mathfrak{P}_1(v) + \mathfrak{P}_2(v)$. Výraz obsažený uvnitř závorky [] splývá však s obecnou definicí funkce $\Gamma(2\sigma - 1)$; máme tak konečně

$$J = - \sum_{m,n} (-1)^{m+n} \frac{\binom{\sigma-1}{n}}{m!} \frac{v^m}{2\sigma+m-2n-1} + v^{1-2\sigma} (\Gamma(2\sigma - 1) + v \mathfrak{P}(v)).$$

*) Jak již jednou poznamenáno, znamenáme $\mathfrak{P}(v)$ řady tvaru $a_0 + a_1 v + a_2 v^2 + \dots$

Veličina tato musí býti tvaru $C'J' + C''J''$, a poněvadž J' obsahuje vesměs celistvé mocnosti v , J'' pak těchto neobsahuje, musí býti prvý součet tvaru $C'J'$, druhý výraz pak tvaru $C''J''$. Porovnáme-li pak v stejných funkcích koeficienty při v^0 , resp. $v^{1-2\sigma}$, obdržíme

$$C' = - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\binom{\sigma-1}{n}}{2\sigma - 2n - 1}, \quad C'' = \Gamma(2\sigma - 1),$$

a odtud, jak snadno se verifikuje,

$$C' = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-x)^{\sigma-1} x^{-\frac{1}{2}-\sigma} dx = \frac{\Gamma(\sigma) \Gamma(\frac{1}{2}-\sigma)}{2\sqrt{\pi}}.$$

Abychom dosavadní výsledky vztahující se k integrálu (5) přehledněji vyjádřili, zavedme celistvou funkci transcendentní dvou proměnných x, s :

$$(7) \quad E(x, s) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m! \Gamma(s+m+1)}.$$

Pak bude patrně

$$J' = \Gamma(\sigma + \frac{1}{2}) E(\frac{v^2}{4}, \sigma - \frac{1}{2}), \quad J'' = v^{1-2\sigma} \Gamma(\frac{3}{2} - \sigma) E(\frac{v^2}{4}, \frac{1}{2} - \sigma)$$

a tedy

$$J = \frac{\Gamma(\sigma) \Gamma(\frac{1}{2}-\sigma) \Gamma(\frac{1}{2}+\sigma)}{2\sqrt{\pi}} E(\frac{v^2}{4}, \sigma - \frac{1}{2}) + v^{1-2\sigma} \Gamma(2\sigma-1) \Gamma(\frac{3}{2}-\sigma) E(\frac{v^2}{4}, \frac{1}{2}-\sigma),$$

aneb:

$$J = \frac{\Gamma(\sigma) \Gamma(\frac{1}{2}-\sigma) \Gamma(\frac{1}{2}+\sigma)}{2\sqrt{\pi}} E(\frac{v^2}{4}, \sigma - \frac{1}{2}) - v^{1-2\sigma} \frac{\Gamma(2\sigma) \Gamma(\frac{1}{2}-\sigma)}{2} E(\frac{v^2}{4}, \frac{1}{2}-\sigma).$$

Avšak

$$\frac{\Gamma(\sigma) \Gamma(\frac{1}{2}-\sigma)}{2\sqrt{\pi}} = \Gamma(2\sigma) 2^{-2\sigma},$$

takže máme posléze

$$(5^b) \quad J = \frac{1}{2} \Gamma(2\sigma) \Gamma(\frac{1}{2}-\sigma) \left[2^{1-2\sigma} E(\frac{v^2}{4}, \sigma - \frac{1}{2}) - v^{1-2\sigma} E(\frac{v^2}{4}, \frac{1}{2}-\sigma) \right].$$

Náš integrál A_n bude dle toho dán výrazem

$$A_n = \sin \frac{s\pi}{2} \Gamma(2-s) \Gamma(\frac{s-1}{2}) u^{1-s} \left\{ 2^{s-1} E(k^2, \frac{1-s}{2}) - 2^{s-1} k^{s-1} E(k^2, \frac{s-1}{2}) \right\},$$

kde položeno $k = n | n - v | u$.

Užijeme zde identity

$$2^{s-1} \sin \frac{s\pi}{2} \Gamma(2-s) \Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right) = - \frac{\pi \sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \cos \frac{s\pi}{2}},$$

obdržíme konečně:

$$(4^*) \quad A_n = \frac{\pi \sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \cos \frac{s\pi}{2}} \left[(\pi|v-n|)^{s-1} E\{u^2 \pi^2 (v-n)^2, \frac{s-1}{2}\} \right. \\ \left. - u^{1-s} E\{u^2 \pi^2 (v-n)^2, \frac{1-s}{2}\} \right],$$

vzorec, který ještě jiným způsobem odvodíme.

§. 3. Řada Malmstén-Lipschitzova.

Pokud w jest ryzím zlomkem, bude funkce obsažená v závorce $\{ \}$ pod znaméním integračním vzorce (2) §. 2 konečnou v integračním oboru i tehdy, jeli $u=0$. Poněvadž funkce ta zmizí v prvním stupni při $x=0$, zůstává integrál konečným pro $u=0$, a obdržíme tedy

$$\text{Ml.}(v, w, 0, s) = 2 \sin \frac{s\pi}{2} e^{-2vw\pi i} \int_0^\infty \left\{ \frac{e^{2\pi(wi+v'x)}}{e^{2\pi(wi+x)} - 1} + \frac{e^{2\pi vx}}{e^{2\pi(-wi+x)} - 1} \right\} x^{-s} dx.$$

Tento integrál konverguje však i tehdy, jeli $0 < \text{Real. } s < 2$, při čemž řada v levo

$$\text{Ml.}(v, w, 0, s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2nv\pi i}}{[(w+n)^2]^{\frac{s}{2}}}$$

konverguje ovšem pouze *podmínečně*, pokud $\text{Real. } s < 1$; ku konvergenci té je však třeba ještě, aby v nebylo číslem celistvým; neboť jeli v celistvé, řada ta diverguje při $\text{Real. } s < 1$.

Znamenáme symbolem $\{w+n\}$ veličinu $w+n$ při $n \geq 0$, ale veličinu $-n-w$ při $n < 0$, máme $[(w+n)^2]^{\frac{s}{2}} = \{w+n\}^s$, a naši rovnici lze psáti

$$(1) \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2nv\pi i}}{\{w+n\}^s} = 2 \sin \frac{s\pi}{2} e^{-2vw\pi i} \int_0^\infty \left(\frac{e^{2\pi(wi+v'x)}}{e^{2\pi(wi+x)} - 1} + \frac{e^{2\pi vx}}{e^{2\pi(-wi+x)} - 1} \right) x^{-s} dx,$$

kde splněny býti mají podmínky $0 < w < 1$, $0 < v < 1$, $0 < \text{Real. } s < 2$, $v' = 1 - v$. V krajním případě $v=0$ však musí býti $1 < \text{Real. } s < 2$.

Avšak

$$\frac{e^{2\pi(wi+vx)}}{e^{2\pi(wi+x)}-1} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2n\omega\pi i - 2\pi(n+v)x},$$

$$\frac{e^{2\pi vx}}{e^{2\pi(-wi+x)}-1} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{2n\nu\pi i - 2\pi(n-v)x},$$

takže nacházíme z (1):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2n\nu\pi i}}{|\tau\omega+n|^s} = 2 \sin \frac{s\pi}{2} e^{-2\nu\omega\pi i} \int_0^{\infty} x^{-s} dx \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2n\omega\pi i - 2\pi x(v+n)}.$$

Provedeme integraci za supposice $0 < \text{Real } s < 1$, máme:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2n\nu\pi i}}{|\tau\omega+n|^s} = 2 \sin \frac{s\pi}{2} \cdot e^{-2\nu\omega\pi i} \frac{\Gamma(1-s)}{(2\pi)^{1-s}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2n\omega\pi i}}{|\tau\omega+n|^{1-s}}.$$

Klademe tedy

$$(2) \quad Z(\nu, \tau\omega, s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2n\nu\pi i}}{|\tau\omega+n|^s},$$

nacházíme tak zajímavý vztah:

$$(3) \quad e^{2\nu\omega\pi i} Z(\nu, \tau\omega, s) = (2\pi)^{s-1} 2 \sin \frac{s\pi}{2} \Gamma(1-s) Z(1-\tau\omega, \nu, 1-s),$$

jenž má konkrétní význam ovšem jen tak dalece, pokud realná část veličiny s je pravým kladným zlomkem, a pokud $0 < \nu < 1$, $0 < \tau\omega < 1$. Ze vztahu toho však patrně, že lze funkci $Z(\nu, \omega, s)$ definovat i též pro komplexní s , jichž realná část jest ≤ 0 . Transformujme integrál (1) substitucí x místo $2x\pi$, takže

$$(1^*) \quad e^{2\nu\omega\pi i} Z(\nu, \omega, s) = (2\pi)^{s-1} \cdot 2 \sin \frac{s\pi}{2} \int_0^{\infty} \left(\frac{e^{2\nu\omega\pi i + vx}}{e^{2\nu\omega\pi i + x} - 1} + \frac{e^{vx}}{e^{-2\nu\omega\pi i + x} - 1} \right) x^{-s} dx;$$

odtud máme dosazením hodnot vzorec:

$$e^{2\nu(1-\omega)\pi i} Z(1-\tau\omega, \nu, 1-s) = (2\pi)^{-s} 2 \cos \frac{s\pi}{2} \int_0^{\infty} \left(\frac{e^{2\nu\pi i + wx}}{e^{2\nu\pi i + x} - 1} + \frac{e^{(1-\omega)x}}{e^{-2\nu\pi i + x} - 1} \right) x^{s-1} dx,$$

a rovnice (3) obdrží tvar:

$$(3^*) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(1-s)} \int_0^{\infty} \left(\frac{e^{2\nu\omega\pi i + (1-\nu)x}}{e^{2\nu\omega\pi i + x} - 1} + \frac{e^{vx}}{e^{-2\nu\omega\pi i + x} - 1} \right) x^{-s} dx \\ & = (2\pi)^{-s} 2 \cos \frac{s\pi}{2} e^{-2\nu(1-\omega)\pi i} \int_0^{\infty} \left(\frac{e^{2\nu\pi i + wx}}{e^{2\nu\pi i + x} - 1} + \frac{e^{(1-\omega)x}}{e^{-2\nu\pi i + x} - 1} \right) x^{s-1} dx. \end{aligned} \right.$$

Znamenejme k vůli snazšímu přehledu

$$f(z, v) = \frac{e^{vz}}{e^z - 1}, \quad f'(z, v) = \frac{\partial f}{\partial z},$$

čímž naše relace obdrží tvar:

$$(a) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(1-s)} \int_0^\infty \left(\frac{e^{2w\pi i + (1-v)x}}{e^{2w\pi i + x} - 1} + \frac{e^{vx}}{e^{-2w\pi i + x} - 1} \right) x^{-s} dx \\ & = (2\pi)^{-s} 2 \cos \frac{s\pi}{2} \int_0^\infty [f(x + 2v\pi i, w) + f(x - 2v\pi i, 1-w)] x^{s-1} dx. \end{aligned} \right.$$

Differencováním dle v obdržíme odtud

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(1-s)} \int_0^\infty \left(\frac{e^{vx}}{e^{x-2w\pi i} - 1} - \frac{e^{2w\pi i + (1-v)x}}{e^{x+2w\pi i} - 1} \right) x^{1-s} dx \\ & = 2\pi i (2\pi)^{-s} 2 \cos \frac{s\pi}{2} \int_0^\infty [f'(x + 2v\pi i, w) - f'(x - 2v\pi i, 1-w)] x^{s-1} dx. \end{aligned}$$

Obě strany této rovnice mají význam i tehdy, předpokládáme-li $\text{Real. } s > 1$, a jakožto funkce analytické jsou si rovny i v tomto případě. Za této supposice však možno v pravo provést integraci částečnou, a obdrží se jakožto hodnota pravé strany výraz

$$(1-s) \cdot 2\pi i \cdot (2\pi)^{-s} 2 \cos \frac{s\pi}{2} \int_0^\infty [f(x + 2v\pi i, w) - f(x - 2v\pi i, 1-w)] x^{s-2} dx.$$

Píšeme zde $s - 1 = \sigma$, máme tak výsledek

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(1-\sigma)} \int_0^\infty \left(\frac{e^{vx}}{e^{x-2w\pi i} - 1} - \frac{e^{2w\pi i + (1-v)x}}{e^{x+2w\pi i} - 1} \right) x^{-\sigma} dx \\ & = - (2\pi)^{-\sigma} \cdot 2i \sin \frac{\sigma\pi}{2} \int_0^\infty [f(x + 2v\pi i, w) - f(x - 2v\pi i, 1-w)] x^{\sigma-1} dx. \end{aligned}$$

V tomto vzorci píšeme s místo σ a sečtíme se vzorcem (a); tím vznikne

$$\begin{aligned} & \frac{(2\pi)^s}{\Gamma(1-s)} \int_0^\infty \frac{e^{vx} x^{-s} dx}{e^{x-2w\pi i} - 1} = e^{-\frac{1}{2}s\pi i} \int_0^\infty f(v + 2v\pi i, w) x^{s-1} dx \\ & + e^{-\frac{1}{2}s\pi i} \int_0^\infty f(x - 2v\pi i, 1-w) x^{s-1} dx. \end{aligned}$$

Avšak

$$\frac{e^{vz}}{e^{z-2w\pi i}-1} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{2nw\pi i - (n-v)z},$$

tedy

$$\frac{1}{\Gamma(1-s)} \int_0^{\infty} \frac{e^{vz} x^{-s} dx}{e^{z-2w\pi i}-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2nw\pi i}}{(n-v)^{1-s}}.$$

Zde naskytá se příležitost zavést funkci

$$(4) \quad \mathfrak{R}(w, x, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2nx\pi i}}{(w+n)^s},$$

při kterémžto označení máme patrně

$$\frac{1}{\Gamma(1-s)} \int_0^{\infty} \frac{e^{vz} x^{-s} dx}{e^{z-2w\pi i}-1} = \mathfrak{R}(1-v, w, 1-s) e^{2w\pi i};$$

podobně vypočteme

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f(x+2v\pi i, w) x^{s-1} dx &= \int_0^{\infty} \frac{e^{wx+2vw\pi i} x^{s-1} dx}{e^{z+2v\pi i}-1} \\ &= \Gamma(s) e^{2vw\pi i - 2v\pi i} \mathfrak{R}(1-w, 1-v, s), \end{aligned}$$

a dále

$$\int_0^{\infty} f(x-2v\pi i, 1-w) x^{s-1} dx = \Gamma(s) e^{2vw\pi i} \mathfrak{R}(w, v, s),$$

takže náš výsledek bude

$$\begin{aligned} &\frac{(2\pi)^s}{\Gamma(s)} \mathfrak{R}(1-v, w, 1-s) e^{2w\pi i} \\ &= e^{-\frac{1}{2}s\pi i + vw\pi i - 2v\pi i} \mathfrak{R}(1-w, 1-v, s) + e^{\frac{1}{2}s\pi i + 2vw\pi i} \mathfrak{R}(w, v, s). \end{aligned}$$

Píšeme-li zde w, x místo $1-v, w$, máme konečně

$$(5) \quad \frac{(2\pi)^s}{\Gamma(s)} \mathfrak{R}(w, x, 1-s) = e^{\pi i(\frac{1}{2}s - 2wx)} \mathfrak{R}(x, 1-w, s) + e^{\pi i(-\frac{1}{2}s + 2w(1-x))} \mathfrak{R}(1-x, w, s),$$

vzorec *Lipschitzem* poprvé odvozený, po té ve zvláštních případech *Riemannem*, *Hurwitzem* a *Stieltjesem* studovaný a námi znovu jinou cestou nalezený.

Řada (4) konverguje a jest jednoznačnou i pro komplexní x , pokud pomyslná část $\text{Im. } x$ této veličiny jest kladnou, takže jest jí definována $\mathfrak{R}(w, x, s)$ v celé kladné polovici roviny (x). Rovněž můžeme rozšířit pojem funkce \mathfrak{R} i pro komplexní w .

Funkce $(w+n)^s$ je vůči komplexní proměnné w víceznačnou, pokud s je libovolné, t. j. nikoli celistvé; u funkcí víceznačných bývá záhodno ustáliti jednu z nekonečného počtu hodnot, aby úvahy vztahovaly se k veličinám

zcela určitým. Jeli $w + n$ kladné realné, rozuměli jsme výrazem $(w + n)^s$ veličinu $e^{s \log(w+n)}$, kde logarithmus je realný. My budeme nadále znamenati $(w + n)^s$ onu hodnotu napsaného výrazu exponencialného, kde pomyslná část logarithmu jest obsažena v mezích $(-\pi i \dots \pi i)$, takže bude $(w + n)^s$ veličina zcela určitá, pokud $w + n$ není realnou veličinou zápornou. Předpokládámeli tedy, že w není záporná realná veličina, definuje pak řada (4) veličinu zcela určitou, jež jest analytickou funkcí proměnné w , pravidelnou na všech místech položených mimo zápornou část osy realné. Jeli zároveň $\text{Im. } x > 0$, konverguje řada (4) pro všechna s a je celistvou funkcí transcendentní proměnné s .

Jak výše uvedeno, jest

$$(6) \quad \mathfrak{R}(w, x, s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{e^{(1-w)t - 2x\pi i}}{e^{t-2x\pi i} - 1} t^{s-1} dt;$$

tento vzorec je především odůvodněn pro realná x, w oboru $(0 \dots 1)$ a pro $\text{Real. } s > 0$; lze jej bezprostředně verifikovati též pro $\text{Im. } x > 0$, a rovněž pro komplexní w hovicí podmínce $\text{Real. } w > 0$, která jest nutna ke konvergenci integrálu.

Výraz na pravé straně existuje pro všechna x mimo ona, pro něž $e^{2x\pi i}$ jest realné a ≥ 1 , tedy pro něž $2x\pi i$ je tvaru $2\pi y + 2k\pi i$, kde k je celistvé a $y \geq 0$. Dlužno tedy z roviny (x) vyloučiti pomocí řezů veškerý hodnoty x tvaru $k - iy$, kde y je realné a kladné a k probíhá hodnoty $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$; řezy ty vycházejí z bodů $x = \dots - 2, -1, 0, 1, 2, \dots$ a jdou rovnoběžně se záporným směrem osy pomyslné do nekonečna. Rovinu x takto řezy opatřenou znamenejme $[x]$; tato jest plochou souvislou. V rovině $[x]$ je pak $\mathfrak{R}(w, x, s)$ integrálem (6) definováno jako jednoznačná analytická funkce komplexní proměnné x , chovající se na všech místech uvnitř $[x]$ pravidelně.

Dosud jsme musili předpokládati $\text{Real. } w > 0$; abychom obdrželi pro \mathfrak{R} výraz nezávislý na této podmínce, uvažme, že ze (4) plyne

$$\mathfrak{R}(w, x, s) = \sum_{v=0}^{n-1} \frac{e^{2vx\pi i}}{(w+v)^s} + e^{2nx\pi i} \mathfrak{R}(w+n, x, s).$$

Volímeli n dosti veliké, bude $\text{Real. } (w+n) > 0$ a pak dle (6) platí rovnice

$$(6^a) \quad \mathfrak{R}(w, x, s) = \sum_{v=0}^{n-1} \frac{e^{2vx\pi i}}{(w+v)^s} + \frac{e^{2nx\pi i}}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{e^{(1-w-n)t - 2x\pi i} t^{s-1} dt}{e^{t-2x\pi i} - 1}.$$

Tímto vzorcem dána funkce \mathfrak{R} pro všechna realná i komplexní w, x , mimo x položená na řezích, t. j. mimo x tvaru $k - iy$; při tom ale musí býti $\text{Real. } s > 0$.

Jedná se ještě o uvolnění proměnné s . Za tím účelem rozdělme integrál ve dva

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{(1-w-n)t} t^{s-1} dt}{e^{t-2x\pi i} - 1} + \int_0^{\infty} \frac{e^{(1-w-n)t - 2x\pi i} t^{s-1} dt}{e^{t-2x\pi i} - 1},$$

kde ω značí malou kladnou veličinu; jeli ω menší než nejmenší z veličin $2\pi i(x+k)$, ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$), bude lze užiti rozvoje Maclaurinova

$$\frac{e^{(1-\omega-n)t-2\pi i}}{e^{t-2\pi i}-1} = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \dots,$$

načež plyne integrací:

$$(a) \quad \int_0^{\omega} \frac{e^{(1-\omega-n)t-2\pi i} t^{s-1} dt}{e^{t-2\pi i}-1} = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{A_{\alpha} \omega^{s+\alpha}}{s+\alpha} = P_n(\tau\omega, x, s | \omega).$$

Znaménámei ještě

$$(b) \quad \int_{\omega}^{\infty} \frac{e^{(1-\omega-n)t-2\pi i} t^{s-1} dt}{e^{t-2\pi i}-1} = Q_n(\tau\omega, x, s | \omega)$$

máme patrně ze (6^a):

$$(6^b) \quad \mathfrak{R}(\tau\omega, x, s) = \sum_{r=0}^{n-1} \frac{e^{2r\pi i}}{(\tau\omega+r)^s} + \frac{e^{2n\pi i} P_n(\tau\omega, x, s | \omega)}{\Gamma(s)} + \frac{e^{2n\pi i} Q_n(\tau\omega, x, s | \omega)}{\Gamma(s)}$$

Z nekonečné řady (a), která definuje funkci P_n pro všechna s , je patrné, že P_n jest jednoznačnou funkcí s nemající jiných singularit mimo póly stupně prvního $s=0, -1, -2, \dots$ takže podíl $\frac{P_n}{\Gamma(s)}$ je nutně celistvou funkcí s . Věc ta je dále samozřejma při integrálu (b), takže z (6^b) plyne, že *analytická funkce s daná elementem (6) je celistvou transcendentní*.

Vzorec (6^b) definuje funkci \mathfrak{R} pro všechny hodnoty $s, \tau\omega, x$, mimo hodnoty x položené na řezích, a dalo by se dokázati, že třeba se vyhnouti toliko místům $x=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, v nichž řezy začínají.

Můžeme si lehce zjednati výraz pro $\mathfrak{R}(\tau\omega, x, s)$ ve tvaru omezeného integrálu platný pro hodnoty s , jichž reálná část je v mezích $(0 \dots 1)$, neb $(-1 \dots -2)$, $(-2 \dots 3)$ atd. Jeli totiž integrál

$$\int_0^{\infty} f(t) t^{s-1} dt = \psi(s)$$

konvergentní pouze pro $\text{Real. } s > 0$, a mámei pro malá t

$$f(t) = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \dots,$$

pak jest $\psi(s)$ jednoznačná funkce komplexní proměnné s , která pro hodnoty s , u nichž $-n > \text{Real. } s > -n-1$, rovná se integrálu

$$\psi(s) = \int_0^{\infty} \left[f(t) - \sum_{r=0}^n A_r t^r \right] t^{s-1} dt,$$

jak již byl *Cauchy* ve svých *Exercices* poznamenal a na novo p. *Saalschütz* v nedávné době nalezl.

§. 4. Pokračování o funkci Ω . Integrál Malmsténův.

Zabýváme se nyní integrálem

$$(1) \quad J = \int_0^{\infty} \frac{e^{au} - e^{-au}}{e^{\pi u} - e^{-\pi u}} \frac{\cos(s \operatorname{arctg} \frac{u}{x})}{(x^2 + u^2)^{\frac{1}{2}s}} du,$$

kde a, x jsou reálné veličiny kladné. Jelikož funkce pod znaméním integračním je sudou, máme

$$2J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{au} - e^{-au}}{e^{\pi u} - e^{-\pi u}} \frac{e^{-is \operatorname{arctg} \frac{u}{x}}}{(x^2 + u^2)^{\frac{1}{2}s}} du$$

čili

$$(2) \quad 2J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{au} - e^{-au}}{e^{\pi u} - e^{-\pi u}} \frac{du}{(x + ui)^s}.$$

Předpokládáme-li $x < 1$, bude funkce $\frac{e^{au} - e^{-au}}{e^{\pi u} - e^{-\pi u}}$ konečná v pásu u mezi reálnou osou a rovnoběžkou vedenou bodem $u = ix$; předpokládáme-li dále Real. $s < 1$, budeme moci integrační cestu nahraditi novou cestou integrační $u = y + ix$, čímž vznikne

$$2J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ay} - e^{-ay}}{e^{\pi y} - e^{-\pi y}} \frac{dy}{(iy)^s}, \quad u = y + ix,$$

kde $(iy)^s = \lim_{a \rightarrow 0} (x + ui)^s = \lim_{a \rightarrow 0} (a + iy)^s$,

což jest
$$\begin{cases} e^{\frac{1}{2}s\pi i} y^s & \text{pro } y > 0 \\ e^{-\frac{1}{2}s\pi i} (-y)^s & \text{pro } y < 0. \end{cases}$$

Máme tedy

$$(2^a) \quad \begin{cases} 2J = e^{-\frac{1}{2}s\pi i} \int_0^{\infty} \frac{e^{ay+axi} - e^{-ay-axi}}{e^{\pi y+\pi xi} - e^{-\pi y-\pi xi}} y^{-s} dy \\ + e^{\frac{1}{2}s\pi i} \int_0^{\infty} \frac{e^{ay-axi} - e^{-ay+axi}}{e^{\pi y-\pi xi} - e^{-\pi y+\pi xi}} y^{-s} dy; \end{cases}$$

abychom obdrželi rozvoj tohoto integrálu uijíme řady

$$\frac{1}{e^{\pi y+\pi xi} - e^{-\pi y-\pi xi}} = \sum_{\lambda} e^{-\lambda\pi y + \lambda\pi xi}, \quad (\lambda = 1, 3, 5, 7, \dots)$$

načež obdržíme

$$2J = e^{\frac{1}{2}s\pi i} \left\{ \sum_{\lambda} \frac{\Gamma(1-s)e^{axi+\lambda x\pi i}}{(\lambda\pi - a)^{1-s}} - \sum_{\lambda} \frac{\Gamma(1-s)e^{axi+\lambda x\pi i}}{(\lambda\pi + a)^{1-s}} \right\} \\ + e^{-\frac{1}{2}s\pi i} \left\{ \sum_{\lambda} \frac{\Gamma(1-s)e^{axi-\lambda x\pi i}}{(\lambda\pi - a)^{1-s}} - \sum_{\lambda} \frac{\Gamma(1-s)e^{axi-\lambda x\pi i}}{(\lambda\pi + a)^{1-s}} \right\}.$$

a odtud

$$(3) \quad J = \Gamma(1-s) \sum_{\lambda} \left[\frac{\cos(\lambda x\pi - ax + \frac{1}{2}s\pi)}{(\lambda\pi - a)^{1-s}} - \frac{\cos(\lambda x\pi + ax + \frac{1}{2}s\pi)}{(\lambda\pi + a)^{1-s}} \right] \\ (\lambda = 1, 3, 5, 7, 9, \dots),$$

při čemž se předpokládá, že x náleží intervallu $(0 \dots 1)$. Integrál J však je patrně konečný pro všechna s a definuje celistvou funkci transcendentní této veličiny, jakmile $x \geq 0$.

Rovněž snadno dá se vyčísliti integrál na pravé straně Malmsténova vzorce, t. j.

$$J' = \int_0^{\infty} \frac{c^{-tx} t^{s-1} dt}{e^t + 2 \cos a + c^{-t}} = \int_0^{\infty} \frac{e^{t(1-x)} t^{s-1} dt}{(e^t + e^{ia})(e^t + e^{-ia})}.$$

Poněvadž rozkladem v částečné zlomky obdržíme

$$\frac{c^t}{(e^t + e^{ia})(e^t + e^{-ia})} = \frac{1}{2i \sin a} \left(\frac{e^{ia}}{e^t + e^{ia}} - \frac{e^{-ia}}{e^t + e^{-ia}} \right),$$

bude

$$2i \sin a J' = \int_0^{\infty} \frac{c^{-tx} t^{s-1} dt}{e^{t-ai} + 1} - \int_0^{\infty} \frac{e^{-tx} t^{s-1} dt}{e^{t+ai} + 1}.$$

Užijeme tedy opět geometrické řady

$$\frac{1}{e^{t \mp ai} + 1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} e^{-n(t \mp ai)},$$

máme

$$2i \sin a J' = \Gamma(s) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left[\frac{e^{nai}}{(n+x)^s} - \frac{e^{-nai}}{(n+x)^s} \right],$$

tedy

$$(3^a) \quad \frac{\sin a \cdot J'}{\Gamma(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin na}{(n+x)^s}.$$

Výhoda plynoucí z tvaru (1) integrálu J , v němž tento existuje pro všechna s , je patrna. Jedná se o to, abychom si zjednali podobný výraz pro funkci $\mathfrak{R}(w, x, s)$. Uvažujme za tím účelem integrál

$$(4) \quad K_n = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-w(\zeta - ai)} (z - ai)^{s-1} dz}{1 - e^{i2x\pi i - \zeta + ai}},$$

jehož hodnota je stálou vůči α , pokud změny této veličiny nedosáhnou určitého stupně. Značíli α_0 nejmenší z kladných veličin řady $2\pi \operatorname{Real}(-x+k)$, ($k=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$), bude K_α míti na mezeře $\alpha = (0 \dots \alpha_0)$ hodnotu stálou a tedy

$$K_\alpha = \lim_{\alpha=0} K_\alpha.$$

Poněvadž $\lim_{\alpha=0} (z - \alpha i)^{s-1}$ jest z^{s-1} neb $e^{-(s-1)\pi i} (-z)^{s-1}$, jak je z kladné neb záporné, máme

$$K_\alpha = \int_0^\infty \frac{e^{-w\tau} z^{s-1} dz}{1 - e^{2x\pi i - \tau}} - e^{-s\pi i} \int_0^\infty \frac{e^{w\tau} z^{s-1} dz}{1 - e^{2x\pi i + \tau}},$$

takže po rozvinutí obou integrálů v nekonečné řady obdržíme

$$K_\alpha = \Gamma(s) [\mathfrak{R}(w, x, s) + e^{-(s+2x)\pi i} \mathfrak{R}(1-w, 1-x, s)],$$

což dle vzorce Lipschitzova rovná se veličině

$$(2\pi)^s e^{-\frac{1}{2}s\pi i + 2wx'\pi i} \mathfrak{R}(1-x, w', 1-s), \quad (w' = 1-w),$$

a tedy máme vztah:

$$(5) \quad K_\alpha = (2\pi)^s e^{(-\frac{1}{2}s + 2w(1-x))\pi i} \mathfrak{R}(1-x, w, 1-s).$$

Tento vzorec lze však dokázat přímo z definice (4), čímž se obdrží zároveň nový důkaz vztahu Lipschitzova.

Předpokládejme za tím účelem, že v, x jsou pravé zlomky a že $\operatorname{Real} s < 1$; pak uvažujme integrál

$$\bar{K}_{M,N} = \int \frac{e^{-w(\tau-\alpha i)} (z-\alpha i)^{s-1} dz}{1 - e^{2x\pi i - \tau + \alpha i}}$$

vzatý podél přímých cest $(-M \dots M)$, $(M \dots M - Ni)$, $(M - Ni \dots -M - Ni)$, $(-M - Ni \dots -M)$, při čemž $N = -2\pi x - \alpha + (2k+1)\pi$, kde k je velké kladné číslo celistvé. Pro $\lim M = \infty$, $\lim k = \infty$ mizí poslední tři integrály částečné a máme tedy

$$\lim_{M=\infty, N=\infty} \bar{K}_{M,N} = K_\alpha.$$

Avšak dle známé věty Cauchyovy o residuích funkcí jednoznačných bude integrál $\bar{K}_{M,N}$ roven součinu $-2\pi i$ se součtem residuí funkce integrované na všech pólech obsažených uvnitř kontury integrační, která je zde rovnoběžníkem o vrcholech $\pm M$, $\pm M - Ni$. Póly funkce integrované jsou zde kořeny rovnice

$$1 - e^{2x\pi i - \tau + \alpha i} = 0,$$

tedy $z = 2x\pi i + \alpha i - 2n\pi i$, ($n = 1, 2, 3, \dots$)

Z těchto leží pouze $n = 1, 2, 3, \dots k$ uvnitř kontury integrační a příslušná residua jsou

$$e^{-w(2x\pi i - 2n\pi i)} (2x\pi i - 2n\pi i)^{s-1},$$

takže obdržíme

$$\bar{K}_{M,N} = -2\pi i \sum_{n=1}^k e^{2n\omega\pi i - 2wx\pi i} (2x\pi i - 2n\pi i)^{s-1}$$

a odtud přechodem k limitě pro $M = \infty$, $k = \infty$:

$$K_\alpha = -2\pi i \sum_{n=1}^{\infty} e^{2n\omega\pi i - 2wx\pi i} (2x\pi i - 2n\pi i)^{s-1}$$

Avšak

$$\begin{aligned} (2x\pi i - 2n\pi i)^{s-1} &= [-2\pi i(n-x)]^{s-1} \\ &= (2\pi)^{s-1} (n-x)^{s-1} e^{-\frac{1}{2}(s-1)\pi i}, \end{aligned}$$

následovně

$$K_\alpha = (2\pi)^s e^{-\frac{1}{2}s\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2n\omega\pi i - 2wx\pi i}}{(n-x)^{1-s}},$$

což jest právě výraz (5). Tím dokázána věta Lipschitzova podruhé.

Píšeme-li ve vzorci (5) $1 - \tau\omega, x, 1 - s$ místo $x, \tau\omega, s$, obdržíme

$$(5^*) \quad \mathfrak{R}(\tau\omega, x, s) = e^{-\pi i(\frac{s}{2} + 2wx)} (2\pi)^s \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x(\tau - \alpha i)(z - \alpha i)^{-s} dz}}{1 - e^{-2\omega\pi i - \tau + \alpha i}}$$

Zcela podobným způsobem dokážeme vzorec

$$(6) \quad \mathfrak{R}(\tau\omega, x, s) = e^{\pi i(\frac{s}{2} + 2(1-x)\omega)} (2\pi)^s \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(1-x)(\tau + \alpha i)(z + \alpha i)^{-s} dz}}{1 - e^{2\omega\pi i - \tau - \alpha i}}$$

kde α je kladná veličina, již možno udělit hodnoty jistého intervalu $(0 \dots \alpha_0)$, tak aby pro všechna α tohoto intervalu a pro všechna reálná z funkce $1 - e^{2\omega\pi i - \tau - \alpha i}$ stále byla od nuly různá. Na př. možno voliti $\alpha = \tau\omega\pi$; tím obdržíme

$$(6^a) \quad \mathfrak{R}(\tau\omega, x, s) = e^{\frac{1}{2}s\pi i + (1-x)\omega\pi i} (2\pi)^s \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(1-x)\tau(z + \tau\omega\pi i)^{-s} dz}}{1 - e^{\omega\pi i - \tau}}$$

Volíme-li ve vzorci (5*) — kde $0 < \alpha < 2\tau\omega\pi$ — hodnotu $\alpha = \tau\omega\pi$, máme vzorec podobný:

$$(6^b) \quad \mathfrak{R}(\tau\omega, x, s) = e^{-\frac{1}{2}s\pi i - \omega\pi i} (2\pi)^s \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x\tau(z - \tau\omega\pi i)^{-s} dz}}{1 - e^{-\omega\pi i - \tau}}$$

§. 5. Elementarné odvození vztahu Lipschitzova.

Předpokládáme, že pomyslná část veličiny x je kladná, bude řada

$$f(\omega) = e^{2\omega\pi i} \mathfrak{R}(\tau\omega, x, 1-s) = \sum_{n=0}^{\infty} (\tau\omega + n)^{s-1} e^{2x(\tau\omega + n)\pi i}$$

konvergovati absolutně a vůči ω stejnoměrně při všech s . Předpokládejme dále $\text{Real } s > 1$, aby výraz byl funkce konečná a spojitá proměnné ω v celém

intervallu $(0 \dots 1)$. Jakožto funkce analytická hová tato veličina Dirichletovským podmínkám pro konvergenci rozvoje Fourierova, a bude tedy lze ustanoviti stálé veličiny A_ν tak, aby v mezeře $(0 \dots 1)$ platil rozvoj

$$f(\tau w) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} A_\nu e^{2\nu w \pi i},$$

kde

$$A_\nu = \int_0^1 f(\tau w) e^{-2\nu w \pi i} d\tau w.$$

Dosadíme sem za $f(w)$ hořejší řadu, obdržíme

$$A_\nu = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 (\tau w + n)^{s-1} e^{2\pi i(\nu+n)\tau w - 2\nu w \pi i} d\tau w,$$

a transformujeme tento integrál substitucí $\tau w + n = z$, a uvážíme, že

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{n+1} = \int_0^{\infty}.$$

máme vzorec

$$A_\nu = \int_0^{\infty} z^{s-1} e^{2\pi i(\nu-i)z} dz;$$

poněvadž dle supposice $-ix$ je kladné ve své části reálné, máme

$$A_\nu = \int_0^{\infty} e^{-2\pi(-ix+iv)z} z^{s-1} dz = \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s (-ix+iv)^s}.$$

Hledaný rozvoj funkce $f(\tau w)$ zní tedy

$$(1) \quad e^{2w\pi i} \mathfrak{R}(\tau w, x, 1-s) = \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\nu w \pi i}}{(-ix+iv)^s}.$$

Podržili tu τw reálnou hodnotu z intervallu $(0 \dots 1)$, můžeme převést spojitém přechodem proměnnou s (aneb její část reálnou) a po té veličinu x v tutéž mezeru $(0 \dots 1)$, aniž vzorec postrádá platnosti. Poněvadž tu pak

$$(-ix+iv)^s = e^{\frac{1}{2}s\pi i} (v-x)^s, \quad v > 0,$$

$$(-ix-iv)^s = e^{-\frac{1}{2}s\pi i} (v+x)^s, \quad v \geq 0,$$

máme výsledek

$$e^{2w\pi i} \mathfrak{R}(\tau w, x, 1-s) = \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s} \left[e^{-\frac{1}{2}s\pi i} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{e^{2\nu w \pi i}}{(v-x)^s} + e^{\frac{1}{2}s\pi i} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{e^{-2\nu w \pi i}}{(v+x)^s} \right],$$

jenž splývá se známou reciprocitou Lipschitzovou.

Podrůme supposice, řeř vedly ke vzorci (1), toliko veličina s buř v realné řásti kladnou, jinak libovolnou. Kladně v (1) $x = u + \mu \omega i$, kde u, ω jsou kladné, násobme obě strany $e^{2\mu v \pi i}$, kde $0 < v < 1$, a seřtěme výsledky pro $\mu = 1, 2, 3, \dots$. I obdrůíme tak vzorec následující:

$$(2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(u + n)^{s-1} e^{2u \pi i (u+n)}}{e^{2\omega \pi (u+n) - 2v \pi i} - 1} = \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s} \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{v=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i (\mu v + v u)}}{(u + \mu \omega i - v)^s}.$$

Vzorec ten vede k zajímavým výsledkům, omezíme se na celistvá $s = m$. Máme tak vzorec

$$(2^a) \quad (m-1)! \left(\frac{i}{2\pi}\right)^m \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{v=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i (\mu v + v u)}}{(u + \mu \omega i - v)^m} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(u + n)^{m-1} e^{2u \pi i (u+n)}}{e^{2\omega \pi (u+n) - 2v \pi i} - 1},$$

v němž m značí celistvé kladné říslo, u veličinu realnou aneb komplexní s kladnou řástí pomyslnou, a $0 < \omega < 1$; dále musí $\text{Real. } \omega > 0$, $\text{Im. } v \geq 0$

Pomocí vzorce (2^a) můžeme obdrůeti souřet řady dvojnásobné

$$(3) \quad \bar{S}(u, v, \omega, \omega)_m = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \sum_{v=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i (\mu v + v u)}}{(u + \mu \omega i - v)^m},$$

• která má význam pro realná v, ω , řeř obě buř obsařena v mezích (0...1), a pro libovolná komplexní u , řůzná od »period« $\mu \omega i - v$.

• Je totiž

$$\bar{S}(u)_m = \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{v=-\infty}^{\infty} + \sum_{\mu=-\infty}^{-1} \sum_{v=-\infty}^{\infty} + \sum_{\mu=0; (v=-\infty \dots \infty)},$$

kde pod znamením summačním stojí řeř výraz jako v (3). Avřak

$$\sum_{\mu=-\infty}^{-1} \sum_{v=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i (\mu v + v u)}}{(u + \mu \omega i - v)^m} = \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{v=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i (-\mu v + v(1-u))}}{(u - \mu \omega i - v)^m};$$

přšemeli zde $-v$ místo v a vylouříme v jmenovateli řinitele $(-1)^m$, obdrůíme poslední veličinu ve tvaru

$$(-1)^m \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{v=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i (-\mu v + v(1-u))}}{(u - \mu \omega i - v)^m}.$$

Volíme u realným, můžeme uřiti vzorce (2^a), takře

$$\sum_{\mu=-\infty}^{-1} \sum_{v=-\infty}^{\infty} = \frac{(-1)^m (-2\pi i)^m}{(m-1)!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1-u)^{m-1} e^{-2u \pi i (n+1-u)}}{e^{2\omega \pi (n+1-u) + 2v \pi i} - 1}.$$

Bude tedy

$$(3^*) \left\{ \begin{aligned} \bar{S}(u, v, w, \omega)_m &= \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\nu w \pi i}}{(u - \nu)^m} \\ + \frac{(-2\pi i)^m}{(m-1)!} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{(w+n)^{m-1} e^{2u\pi i(w+n)}}{e^{2\omega\pi(w+n) - 2\nu\pi i} - 1} - \frac{(w-n-1)^{m-1} e^{2u\pi i(w-n-1)}}{e^{2\omega\pi(n+1-w) + 2\nu\pi i} - 1} \right\} \end{aligned} \right.$$

Řada v pravo konverguje vlastně, pokud pomyslná část u leží v mezích $-\frac{\omega}{w}$ a $\frac{\omega}{w}$; pro tato komplexní u tedy platí vztah (3*).

Znamenejme nyní ω, ω' dvě komplexní veličiny, jichž poměr $\frac{\omega'}{\omega} = \tau$ je ve své pomyslné části kladným, v, v' buďte dva reálné pravé zlomky, a znamenejme při komplexním u

$$(4) \quad S(u; v, v'; \omega, \omega')_m = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i(\mu v + \nu v')}}{(u + 2\mu\omega + 2\nu\omega')^m}$$

Pak bude

$$S(u; v, v'; \omega, \omega')_m = \frac{1}{(2\omega)^m} \bar{S}\left(\frac{u}{2\omega}, v', 1 - v', \frac{\tau}{i}\right)_m,$$

tedy dle (3*)

$$(4^*) \quad S(u; v, v'; \omega, \omega')_m = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\mu v \pi i}}{(u + 2\mu\omega)^m} + \frac{1}{(m-1)!} \left(\frac{-\pi i}{\omega}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{(n+1-v)^{m-1} e^{(n+1-v)\frac{u\pi i}{\omega}}}{e^{-\frac{2\pi i}{\omega}(\omega'v - \omega v + (n+1)\omega')} - 1} + (-1)^m \frac{(n+v)^{m-1} e^{-(n+v)\frac{u\pi i}{\omega}}}{e^{-\frac{2\pi i}{\omega}(\omega'v - \omega v + n\omega')} - 1} \right\}.$$

Z řad tohoto typu byla uvažována ona, jež přísluší ku $m = 1$, p. Kroneckerem v jeho zajímavých pracích o funkcích elliptických.*

Slavný matematik uvažuje na jmenovaném místě řadu

$$\text{Ser. } (\xi, \eta, u, v, w) = \sum_{m, n} \frac{e^{2(m\xi + n\eta)\pi i}}{u + mv + n\tau w},$$

kterou bychom po našem způsobu označili $S(u; \xi, \eta; v, w)_1$. Naše řady $S(u)_m$ obdrží se odtud $(m-1)$ násobným differencováním vůči u , takže stačí se omeziti na případ Kroneckerův; nicméně zdálo se nám záhodno ukázati na uvedených příkladech, že lze Lipschitzovy funkce $\mathfrak{R}(w, n, s)$ také v theorii funkcí elliptických s prospěchem užívat, o čemž nám bude na jiném místě dána příležitost jednat.

*) Sitzungsberichte der preuss. Akademie der Wiss. 1889—1890, Článek XX, §. 5.

Náše řady konvergují bezpodmínečně teprve při $m > 2$. Za této suppo-
sice bude patrně

$$\begin{aligned} S(u + 2\omega) &= e^{-2v\pi i} S(u), \\ S(u + 2\omega') &= e^{-2v'\pi i} S(u), \end{aligned}$$

takže $S(u)_m$ je dvojperiodickou funkcí druhého způsobu, stupně m , a dá se
vyjádřiti pomocí funkcí sigma. Poznamenejme pouze, že pro $2\omega = 1$,
 $2\omega' = \tau$ bude součin

$$S(u; v, v'; \frac{1}{2}, \frac{\tau}{2})_m \cdot \vartheta_1(u | \tau)^m e^{(2r+m)u\pi i}$$

dán výrazem tvaru

$$\sum_{r=1}^m A_r e^{2ru\pi i} \vartheta_3(mu + v\tau - v' + m\frac{\tau+1}{2} + r\tau | m\tau),$$

kde $A_r \vartheta_1(v\tau - v' | \tau)$ je celistvá funkce transcendentní veličin v, v' .

§. 6. Trigonometrický rozvoj řady $Ml. (v, w, u, s)$.

Po tomto odbočení, k němuž nám zavdala podnět řada $\mathfrak{R}(w, x, s)$, vraťme
se k veličině uvažované v §. 2:

$$(1) \quad Ml. (v, w, u, s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2nv\pi i}}{[(w+n)^2 + u^2]^{\frac{1}{2}s}},$$

kterou hodláme rozšířiti i na komplexní w a podati její trigonometrický rozvoj
vůči w po způsobu, jenž nám jest znám již od r. 1887.

V naší řadě musí nade vši pochybnost v býti veličina reálná, kterou smíme
předpokládati v mezeře $(0 \dots 1)$; dále musí, máli řada býti absolutně konver-
gentní, reálná část veličiny s býti větší než 1; ke konvergenci vůbec stačí však
podmínka $\text{Real. } s > 0$, která je zároveň nutnou; při tom ale musí v posledním
případě v býti různu od krajních hodnot 0, 1.

Jelikož analytická funkce z^s je mnohoznačná, musíme ukázati, v jakých
mezích dlužno voliti proměnné u, w , aby členové řady byli funkce pravidelné
v jistém oboru.

Velichinu w chceme považovati za volně proměnnou uvnitř jistého pásu
obsahujícího osu reálnou. To by nebylo možným, kdyby u bylo ryze po-
myslným, poněvadž by pak na ose reálné existovalo nekonečně mnoho hodnot w ,
na nichž by členové řady $[(w+n)^2 - (\frac{u}{i})^2 = 0]$ stali se neurčitými aneb
nekonečnými. Položme tedy $u = a + bi$ a volme $a \geq 0$. Kritické body w
našeho výrazu budou pak dány rovnicemi $(w+n)^2 + u^2 = 0$, tedy

$w = -n + ui$, a budou tudíž rozloženy na dvou rovnoběžkách s osou reálnou vedených u vzdálenosti a po obou stranách od této. Pás obsažený mezi těmito rovnoběžkami (jichž rovnice jsou $y = a$, $y = -a$) nazveme hlavním a označíme (w).

Pro hodnoty w obsažené uvnitř hlavního pásu (w) žádná z veličin $(w + n)^2 + u^2$ není zápornou neb nullou. Klademeli totiž $w + n = \xi + i\eta$, $u = a + ib$, $a > 0$, máme

$$(w + n)^2 + u^2 = \xi^2 - b^2 + (a^2 - \eta^2) + 2i(\xi\eta + ab),$$

kterážto veličina stane se reálnou pouze pro $\xi = -\frac{a}{\eta}b$; pro tuto hodnotu ξ je však $\xi^2 - b^2$ kladným, ano $|\eta| < a$, a taktéž $a^2 - \eta^2$. Jeli tedy v oboru (w) výraz $(w + n)^2 + u^2$ reálným, jest nutně kladným.

Následkem této okolnosti bude

$$\log [(w + n)^2 + u^2],$$

kde logarithmus je přirozený a jednoznačně dán podmínkou, aby pomyslná část jeho byla v mezích $(-\pi \dots \pi)$, patrně funkcí pravidelnou, takže definujeme

$$[(w + n)^2 + u^2]^{\frac{s}{2}} = e^{\frac{s}{2} \log [(w + n)^2 + u^2]},$$

budou členové řady (1) funkce pravidelné v celém oboru (w).

Jedná se pouze o důkaz, že řada (1) konverguje *stejněměrně* vůči w v okolí každého místa uvnitř oboru (w), jakmile reálná část veličiny s je kladnou, a v pravý zlomek.

Za tím účelem uvažujme řadu

$$S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{e^{2nv\pi i}}{[(w + n)^2 + u^2]^{\frac{s}{2}}} - \frac{e^{2nv\pi i}}{[(w + n)^2]^{\frac{s}{2}}} \right\},$$

jejíž absolutní konvergence jest patrna. Zároveň konverguje tato řada *stejněměrně* vůči w v okolí každého místa uvnitř oboru (w), jež není celistvým.

Neboť její vzdálení členové jsou menší než příslušní členové řady $\sum \frac{c}{n^2}$, kde c značí určitou kladnou konstantu.

Dokážemeli tedy, že řada

$$\sum \frac{e^{2nv\pi i}}{[(w + n)^2]^{\frac{s}{2}}}$$

konverguje *stejněměrně* v okolí řečených míst, bude tím též dokázána *stejněměrná* konvergence řady (1).

Poslední řada však se skládá ze dvou jiných, jež jsou tvaru

$$\Re(\bar{w}, x, s) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{e^{2vx\pi i}}{(\bar{w} + v)^s},$$

kde $x = v$ neb $1 - v$, a $\bar{w} = w + m$ resp. $m - w$, $\text{Real. } \bar{w} > 0$; zajisté lze toho docílit po vyloučení konečného počtu členů z (1).

Jelikož $\text{Real. } \bar{w}$ i $\text{Real. } s$ jsou kladné, máme

$$\frac{1}{(\bar{w} + n)^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} e^{-(\bar{w} + n)\tau} \tau^{s-1} d\tau,$$

a tedy

$$S_r = \sum_{v=0}^{r-1} \frac{e^{2vx\pi i}}{(\bar{w} + v)^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} e^{-\bar{w}\tau} \tau^{s-1} \cdot \frac{1 - e^{r(2x\pi i - \tau)}}{1 - e^{2x\pi i - \tau}} d\tau.$$

Jelikož x není celistvé, bude jmenovatel funkce integrované vždy od nuly různým, takže integrál

$$K = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\bar{w}\tau} \tau^{s-1} d\tau}{1 - e^{2x\pi i - \tau}}$$

je veličinou zcela určitou; máme pak

$$S_r = \frac{K}{\Gamma(s)} - \frac{e^{2rx\pi i}}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\bar{w}\tau - r\tau} \tau^{s-1} d\tau}{1 - e^{2x\pi i - \tau}};$$

poslední integrál však blíží se nule, rosteli s přes všechny meze, a to patrně rychlostí nezávislou na \bar{w} ; t. j. řada S_r blíží se s rostoucím r stejnoměrně vůči w své hodnotě $\frac{K}{\Gamma(s)}$, čili jinými slovy, řada $\Re(\bar{w}, x, s)$ konverguje stejnoměrně. Tím dokázána též stejnoměrnost konvergence řady (1).

Bezprostředním následkem toho dle známé věty Weierstrassovy jest, že $\text{Ml.}(v, w, u, s)$ jest funkcí analytickou proměnné w , která se chová pravidelně v oboru (w).

Výraz

$$\Phi(w) = e^{2vw\pi i} \text{Ml.}(v, w, u, s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2(w+n)v\pi i}}{[(w+n)^2 + u^2]^{\frac{s}{2}}}$$

hová pak podmínce $\Phi(w+1) = \Phi(w)$ a dá se dle známé věty Laurentovy vyjádřití řadou tvaru

$$\Phi(w) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} A_v e^{2vw\pi i},$$

konvergentní v oboru (w). Součinitel A_v dán jest vzorcem

$$A_v = \int_0^1 \varphi(w) e^{-2vw\pi i} dw,$$

a obdrží se tedy po dosazení výrazu za $\varphi(w)$ ve tvaru nekonečné řady*)

$$A_v = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 \frac{e^{2v(w+n)\pi i - 2vw\pi i}}{[(w+n)^2 + u^2]^{\frac{s}{2}}} dw;$$

přetvoříme-li obecný člen substitucí $w+n=x$, a sečteme-li řadu dle vzorce

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_n^{n+1} = \int_{-\infty}^{\infty},$$

máme

$$(2) \quad A_v = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2x(v-n)\pi i}}{(x^2 + u^2)^{\frac{s}{2}}} dx,$$

při kterémžto označení platí rozvoj

$$(3) \quad e^{2vw\pi i} \text{Ml.}(v, w, u, s) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} A_v e^{2vw\pi i}.$$

Porovnáme-li tento výsledek se vzorci (3) a (4) §. 2, obdržíme

$$(4) \quad A_n = 2 \sin \frac{s\pi}{2} \int_0^{\infty} e^{-2\pi|n-v|\sqrt{u^2+x^2}} \frac{x^{1-s} dx}{\sqrt{u^2+x^2}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2x(v-n)\pi i} dx}{(x^2 + u^2)^{\frac{s}{2}}},$$

kde prvý integrál ovšem existuje pouze za supposice $\text{Real. } s < 2$.

§. 7. Transformace veličiny A_n . Funkce Besselovy.

Výraz A_n je tvaru

$$(1) \quad \varphi(z, u, s) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2tzi} dt}{(u^2 + t^2)^{\frac{s}{2}}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2zt dt}{(u^2 + t^2)^{\frac{s}{2}}},$$

a sice $A_n = \varphi(v\pi - n\pi, u, s)$ aneb, chceme-li zavésti kladná z ,

$$A_n = \varphi(\pi|v-n|, u, s).$$

*) Neb stejnoměrně konvergentní řady lze integrovati po členech.

Předpokládáme, že reálná část veličiny u^2 je kladná, můžeme výraz $\varphi(z, u, s)$ přetvořit takto: veličinu

$$\frac{1}{(u^2 + t^2)^{\frac{s}{2}}}$$

pod znaménkem integračním nahradíme vztahem

$$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \int_0^{\infty} e^{-(u^2 + t^2)x} x^{\frac{s}{2}-1} dx,$$

čímž vznikne dvojnásobný integrál

$$\varphi(z, u, s) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2it\tau} dt \int_0^{\infty} e^{-(u^2 + t^2)x} x^{\frac{s}{2}-1} dx,$$

a obrácením pořádku integračního:

$$\varphi(z, u, s) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \int_0^{\infty} e^{-u^2 x} x^{\frac{s}{2}-1} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2 x + 2it\tau} dt.$$

Vnitřní integraci lze provést dle vzorce

$$(2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2 + 2bit} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{b^2}{a}},$$

jež obdržíme buď užitím věty Cauchyovy aneb též jinými cestami; máme pak

$$(3) \quad \varphi(z, u, s) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \int_0^{\infty} e^{-u^2 x - \frac{x^2}{x}} x^{\frac{s-3}{2}} dx,$$

kterýžto výraz jest jedním z nejzajímavějších tvarů, v nichž lze integrál A_n vyjádřit. Všimněme si jen té okolnosti, že pokud reálné části veličin u^2 , z^2 jsou kladné (záporny býti nesmějí), *integrál tento konverguje pro všechna konečná s*:

Píšeme-li v integrálu (3) $x = \frac{t}{u}$, obdržíme tvar jednodušší

$$(3^a) \quad \varphi(z, u, s) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \left(\frac{1}{u}\right)^{\frac{s-1}{2}} \int_0^{\infty} e^{-u\tau\left(t + \frac{1}{t}\right)} t^{\frac{s-3}{2}} dt,$$

při čemž jsme předpokládali, že u , z jsou veličiny reálné a kladné. Jiného tvaru docílíme substitucí $t = t'^2$, násobíme obě strany $e^{-2u\tau}$; znamenáme-li pro pohodlí hodnotu integrálu literou J , máme tak píseček $uz = a$:

$$J \cdot e^{-2a} = 2 \int_0^{\infty} e^{-a\left(t + \frac{1}{t}\right)^2} t^{s-2} dt.$$

Rozložíme zde v $\int_0^1 + \int_1^\infty$, a klademe v obou částech $t + \frac{1}{t} = 2r$, tedy $t = r - \sqrt{r^2 - 1}$ v první, a $t = r + \sqrt{r^2 - 1}$ v druhé části, obdržíme tak výsledek

$$(4) \quad \varphi\left(s, u, s\right) = \frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \left(\frac{z}{u}\right)^{\frac{s-1}{2}} e^{2uz} \int_1^\infty e^{-4uzr^2} \frac{(r + \sqrt{r^2 - 1})^{s-1} + (r - \sqrt{r^2 - 1})^{s-1}}{\sqrt{r^2 - 1}} dr.$$

Kdybychom však byli integrál J násobili e^{2a} , obdrželi bychom

$$J e^{2a} = 2 \int_0^\infty e^{-a\left(t + \frac{1}{t}\right)^2} t^{s-2} dt;$$

zde můžeme klásti $t + \frac{1}{t} = 2r$, načež bude r probíhati intervall $(-\infty \dots \infty)$, a my obdržíme:

$$(5) \quad \varphi\left(s, u, s\right) = \frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \left(\frac{z}{u}\right)^{\frac{s-1}{2}} e^{-2uz} \int_{-\infty}^\infty e^{-4uzr^2} \frac{(r + \sqrt{r^2 + 1})^{s-1} dr}{\sqrt{r^2 + 1}}.$$

Přesměli v integrálu (3) $\frac{1}{x}$ za x , obdržíme

$$(6) \quad \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \varphi\left(s, u, s\right) = \Gamma\left(1 - \frac{s}{2}\right) \varphi\left(u, z, 2 - s\right),$$

kterážto relace vyjádřená pomocí integrálu (1) zní:

$$(6^a) \quad \Gamma(s) \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{2vvi} dv}{(u^2 + v^2)^s} = \Gamma(1 - s) \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{2uvi} dv}{(z^2 + v^2)^{1-s}},$$

při čemž jsme psali s místo $\frac{s}{2}$.

Další vlastnosti těchto transcendent plynou z diferenciální rovnice lineární druhého řádu, již hová funkce φ . Za tím účelem zavedme integrál

$$\Phi(u, v, s) = \int_0^\infty e^{-ut - \frac{v}{t}} t^{s-1} dt, \quad \text{Real. } u > 0, \quad \text{Real. } v > 0.$$

Diferencujeme pod znaméním integračním, obdržíme

$$D_u \Phi(u, v, s) = -\Phi(u, v, s + 1).$$

Integrací identity

$$d\left(e^{-ut - \frac{v}{t}} t^{s+1}\right) = -u e^{-ut - \frac{v}{t}} t^{s+1} dt + v e^{-ut - \frac{v}{t}} t^{s-1} dt + (s+1) e^{-ut - \frac{v}{t}} t^s dt$$

v mezích 0 a ∞ obdržíme

$$0 = -u \Phi(u, v, s + 2) + v \Phi(u, v, s) + (s + 1) \Phi(u, v, s + 1),$$

a odtud se zřetelem k rovnici posledně vyvozené

$$D_u^2 \Phi(u, v, s) + \frac{s+1}{u} D_u \Phi(u, v, s) - \frac{v}{u} \Phi(u, v, s) = 0,$$

t. j. výraz $x = \Phi(u, v, s)$ hovoří lineární rovnici diferenciální druhého řádu

$$(7) \quad \frac{d^2 x}{du^2} + \frac{s+1}{u} \frac{dx}{du} - \frac{v}{u} x = 0,$$

které vyhovují obě řady

$$x = E(uv, s), \quad x = u^{-s} E(uv, -s),$$

kde v soulasu s §. 2 znamená

$$E(z, s) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{z^\mu}{\mu! \Gamma(s + \mu + 1)}.$$

Okolnost tu lze počtem přímo verifikovati. Je totiž v prvním případě

$$x = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{u^\mu v^\mu}{\mu! \Gamma(s + \mu + 1)}, \quad \frac{dx}{du} = \sum_{\mu} \frac{u^\mu v^{\mu+1}}{\mu! \Gamma(s + \mu + 2)},$$

$$u \frac{d^2 x}{du^2} = \sum_{\mu} \frac{\mu u^\mu v^{\mu+1}}{\mu! \Gamma(s + \mu + 2)},$$

a tedy

$$u \frac{d^2 x}{du^2} + (s+1) \frac{dx}{du} - vx = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(u+s+1) u^\mu v^{\mu+1}}{\mu! \Gamma(s + \mu + 2)} - \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{u^\mu v^{\mu+1}}{\mu! \Gamma(s + \mu + 1)} = 0.$$

Nalezená řešení jsou různá, pokud s není číslo celistvé; že výrazy $E(uv, s)$, $u^{-s} E(uv, -s)$ splývají pro $s=0$, je přímo patrné; zbývá ukázati jich rovnost pro celistvá s od nuly různá, a sice stačí uvažovati toliko kladná s . Tu pak máme

$$E(z, -s) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{z^\mu}{\mu! \Gamma(-s + \mu + 1)} = \sum_{\mu=s}^{\infty} \frac{z^\mu}{\mu! (\mu - s)!},$$

což lze psáti

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{z^{\mu+s}}{(\mu+s)! \mu!} = z^s E(z, s).$$

V tomto případě se obě uvedená řešení rovnice (7) liší toliko stálým činitelem a nejsou podstatně různá. Tento případ chceme vyloučiti.

Pokud s není celistvé číslo, bude obecný integrál rovnice (7) dán výrazem

$$x = A E(uv, s) + B u^{-s} E(uv, -s),$$

kde A , B nezávisí na u . Tyto konstanty třeba tak ustanoviti, aby

$$\Phi(u, v, s) = A E(uv, s) + B u^{-s} E(uv, -s).$$

Volme zde $v = 1$, takže máme

$$(a) \quad \int_0^{\infty} e^{-ut - \frac{1}{t}} t^{s-1} dt = A E(u, s) + B u^{-s} E(u, -s).$$

Substitucí $\frac{1}{tu}$ za t přejde levá strana v

$$(b) \quad u^{-s} \int_0^{\infty} e^{-ut - \frac{1}{t}} t^{-s-1} dt = A' u^{-s} E(u, -s) + B' E(u, s),$$

kde A, B, A', B' závisejí toliko na s .

Z rovnice (a) vyvodíme dvě jiné volbou $u = 1, 2$; z těchto rovnic se pak obdrží A, B jakožto určité funkce analytické $A(s), B(s)$ veličiny s , načež $A'(s) = A(-s), B'(s) = B(-s)$. Jelikož výrazy (a), (b) znamenají tutéž veličinu, máme porovnáním $A' = B, B' = A$, tedy

$$B(s) = A(-s).$$

Následkem toho stačí se omeziti na určení funkce $A(s)$ a poněvadž ta jest analytickou, stačí ji ustanoviti pro $s < 0$. Klademe-li v (a) nullu za u , máme

$$\frac{A(s)}{\Gamma(s+1)} = \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{t}} t^{s-1} dt = \Gamma(-s),$$

takže plyne

$$A(s) = -\frac{\pi}{\sin s\pi}, \quad B(s) = \frac{\pi}{\sin s\pi}.$$

Máme tak

$$-\frac{\sin s\pi}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-ut - \frac{1}{t}} t^{s-1} dt = E(u, s) - u^{-s} E(u, -s),$$

a píšeme-li $\frac{t}{v}$ za t , uv za u , máme konečně

$$(8) \quad -\frac{\sin s\pi}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-ut - \frac{v}{t}} t^{s-1} dt = v^s E(uv, s) - u^{-s} E(uv, -s),$$

dle kteréhožto vzorce obdržíme vůči relaci (3)

$$\varphi(z, u, s) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{s}{2})} \Phi(u^2, z^2, \frac{s-1}{2})$$

$$(8^a) \quad \varphi(z, u, s) = \frac{\pi \sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{s}{2}) \cos \frac{s\pi}{2}} \left[z^{s-1} E(u^2 z^2, \frac{s-1}{2}) - u^{1-s} E(u^2 z^2, \frac{1-s}{2}) \right].$$

Funkci $E(x, s)$ možno vyjádřit omezeným integrálem, jež obdržíme přímo z definice

$$E(x, s) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{x^{\mu}}{\mu! \Gamma(s + \mu + 1)} = \frac{\sin s\pi}{\pi} \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^{\mu+1} \Gamma(-s - \mu) \frac{x^{\mu}}{\mu!},$$

užijeli se známého vzorce:

$$\Gamma(-s - \mu) = -\frac{e^{s\pi i}}{2i \sin s\pi} \int_{(\infty, 0, \infty)} e^{-t} t^{-s-\mu-1} dt,$$

kde cesta integrační obkličuje kladnou část osy reálné obíhající jistý pruh ji obsahující v kladném směru. Na př. lze tu voliti za složky cesty integrační intervall $\infty \dots \omega$, kružnici $|t| = \omega$, a intervall $\omega \dots \infty$. Jiná cesta by byla parabola o rovnici v pravouhlé soustavě ξ, η :

$$\eta^2 = 2\rho(\xi + \omega), \quad t = \xi + i\eta.$$

Substitucí nalezeného integrálu do hořejší řady obdržíme

$$E(x, s) = \frac{e^{s\pi i}}{2\pi i} \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^{\mu}}{\mu!} \int_{(\infty, 0, \infty)} e^{-t} t^{-s-1} \left(\frac{x}{t}\right)^{\mu} dt,$$

a provedemeli součet pod znaméním integračním,

$$(9) \quad E(x, s) = \frac{e^{s\pi i}}{2\pi i} \int_{(\infty, 0, \infty)} e^{-t} \frac{x}{t} t^{-s-1} dt.$$

Připomeňme, že tu mocnost t^{-s} je dána jednoznačně rovnicí

$$t^{-s} = e^{-s \log t},$$

při čemž logarithmus má na severním břehu kladné osy reálné hodnotu reálnou a v ostatní rovině je spojitý a jednoznačný, takže na záporním (jižním) břehu kladné osy reálné má pomyslnou část rovnu $2\pi i$. Předpokládejme, že složky cesty integrační v (9) jsou $(\infty \dots \frac{1}{\omega})$, $|t| = \frac{1}{\omega}, (\frac{1}{\omega} \dots \infty)$, a transformujme integrál substitucí $t = \frac{1}{t'}$. Tu proměnná t' probíhá nejprve intervall $(0 \dots \omega)$, pak kružnici $|t'| = \omega$ ve směru záporném a konečně intervall $(\omega \dots 0)$. Tu pak $\log \frac{1}{t'}$ má na $(0 \dots \omega)$ pomyslnou část rovnu nulle, ale na $(\omega \dots 0)$ rovnu $2\pi i$, takže $\log t'$ má na první složce integrační cesty pomyslnou část rovnu rovněž nulle, ale na poslední složce $(\omega \dots 0)$ rovnu $-2\pi i$, jak skutečně vyžaduje spojitost funkce $\log t'$; vzorec (9) pak přejde v rovnici:

$$E(x, s) = -\frac{e^{s\pi i}}{2\pi i} \int e^{-\frac{1}{t'} - tx} t'^{s-1} dt',$$

kde integrace se děje podél cesty složené z úseku $(0 \dots \omega)$, z kružnice $|t'| = \omega$ ve směru záporném proběhnuté a z úseku $(\omega \dots 0)$, a logarithmus t' má na záporném břehu kladné osy reálné hodnotu reálnou.

Znamenejme nyní x kladnou veličinu reálnou a transformujme integrál pro $E(x^2, s)$ substitucí $\frac{t}{x}$ za t , čímž obdržíme, volíce $\omega = x$:

$$E(x^2, s) = -\frac{e^{s\pi i}}{2\pi i x^s} \int e^{-x(t + \frac{1}{t})} t^{s-1} dt,$$

kde t probíhá intervall $(0 \dots 1)$, záporný oběh kruhu $|t| = 1$, a konečně intervall $(1 \dots 0)$. V prostřední složce lze klásti $t = e^{-i\vartheta}$, kde ϑ probíhá intervall $(0 \dots 2\pi)$. Na první cestě $(0 \dots 1)$ je logarithmus t reálný, na druhé je $\log t = -i\vartheta$, na třetí $\log t = \log |t| - 2\pi i$, takže integrál sestává z částí

$$\int_0^1 e^{-x(t + \frac{1}{t})} t^{s-1} dt - i \int_0^{2\pi} e^{-x(e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta})} e^{-s i \vartheta} d\vartheta + \int_1^0 e^{-x(t + \frac{1}{t})} e^{-(s-1)2\pi i} t^{s-1} dt,$$

z čehož následuje

$$x^s E(x^2, s) = -\frac{\sin s\pi}{\pi} \int_0^1 e^{-x(t + \frac{1}{t})} t^{s-1} dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-2x \cos \vartheta + i s(\pi - \vartheta)} d\vartheta;$$

v posledním integrálu píšme ϑ místo $\pi - \vartheta$, a obdržíme

$$(10) \quad x^s E(x^2, s) = -\frac{\sin s\pi}{\pi} \int_0^1 e^{-x(t + \frac{1}{t})} t^{s-1} dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{2x \cos \vartheta} \cos s\vartheta d\vartheta.$$

Jiný výraz funkce E poskytne nám integrál

$$J = \int_{-1}^1 e^{vz} (1 - z^2)^{s-1} dz;$$

jeho rozvoj dle mocností v zní patrně

$$J = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{v^v}{v!} \int_{-1}^1 z^v (1 - z^2)^{s-1} dz;$$

součinitelé při lichých mocnostech v jsou patrně nullami a tedy zbývá

$$J = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{v^{2v}}{(2v)!} \int_{-1}^1 z^{2v} (1 - z^2)^{s-1} dz.$$

Avšak integrál

$$\int_{-1}^1 z^{2v} (1 - z^2)^{s-1} dz = 2 \int_0^1 z^{2v} (1 - z^2)^{s-1} dz$$

přejde substitucí \sqrt{z} za z ve tvar

$$\int_0^1 z^{v-\frac{1}{2}} (1 - z)^{s-1} dz = \frac{\Gamma(v + \frac{1}{2}) \Gamma(s)}{\Gamma(s + v + \frac{1}{2})},$$

takže bude

$$J = \Gamma(s) \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})}{(2\nu)! \Gamma(s + \nu + \frac{1}{2})} \nu^{2\nu}.$$

Avšak

$$\frac{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})}{(2\nu)!} = \frac{\sqrt{\pi}}{4^{\nu} \cdot \nu!},$$

a tedy bude

$$J = \Gamma(s) \sqrt{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\nu}{2}\right)^{2\nu}}{\nu! \Gamma(s + \frac{1}{2} + \nu)} = \sqrt{\pi} \Gamma(s) E\left(\frac{\nu^2}{4}, s - \frac{1}{2}\right),$$

čili

$$(11) \quad E(\nu^2, s) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \Gamma(s + \frac{1}{2})} \int_{-1}^1 e^{\nu^2 z} (1 - z^2)^{s - \frac{1}{2}} dz,$$

kde dlužno předpokládati $\text{Real } s > -\frac{1}{2}$.

Další způsob vyjádření funkce $E(x, s)$ obdržíme pomocí integrálu

$$J = \int_{\mathfrak{A}} e^{axi} (1 - \alpha^2)^{s-1} d\alpha,$$

vzatého v kladném směru po okraji oboru \mathfrak{A} , jenž sestává z půlkruhu sestaveného v severní polovici roviny (α) na průměrem ($-R \dots R$), z něhož vyloučeny malé půlkruhy o poloměru ε a středech $\alpha = 1, -1$. Funkce $(1 - \alpha^2)^s$ definována jest výrazem $e^{s \log(1 - \alpha^2)}$, kde logarithmus je reálným podél úseku ($-1 \dots 1$) a má býti spojitým uvnitř \mathfrak{A} . Z toho plyne, že

$$\begin{array}{ccc} \text{podél úseku } (-R \dots -1) & \text{jest } (1 - \alpha^2)^s = e^{s\pi i} (\alpha^2 - 1)^s, \\ \text{„ „ „ } (1 \dots R) & \text{„ „ „ } e^{-s\pi i} (\alpha^2 - 1)^s, \end{array}$$

při čemž mocnost $(\alpha^2 - 1)^s$ dlužno bráti ve smyslu arithmetickém.

Dle věty Cauchyovy o integraci v mezích komplexních bude integrál J nullou, a tedy

$$\begin{aligned} & - e^{s\pi i} \int_{-R}^{-1-\varepsilon} e^{axi} (\alpha^2 - 1)^{s-1} d\alpha + \int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} e^{axi} (1 - \alpha^2)^{s-1} d\alpha \\ & - e^{-s\pi i} \int_{1+\varepsilon}^R e^{axi} (\alpha^2 - 1)^{s-1} d\alpha + \left\{ \int_{(R)} + \int_{(1)} + \int_{(-1)} \right\} = 0, \end{aligned}$$

kde tři integrály v závorce $\{\}$ vzaty jsou podél půlkruhů o poloměrech $R, \varepsilon, \varepsilon$ a středech $0, 1, -1$.

Jeli pak x reálné a kladné, s kladné a menší než 1, mizí tyto tři integrály při přechodu k mezím pro $R = \infty, \varepsilon = 0$ a vychází tak vztah

$$\int_{-1}^1 e^{axi} (1 - \alpha^2)^{s-1} d\alpha = 2 \int_1^{\infty} \cos(\alpha x - s\pi) \cdot (\alpha^2 - 1)^{s-1} d\alpha,$$

od něhož lze přejít k rovnici

$$(12) \quad E\left(-\frac{v^2}{4}, s\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right)} \int_1^{\infty} \sin(v\alpha - s\pi) \cdot (\alpha^2 - 1)^{s-1} d\alpha.$$

Nepátrali jsme v literatuře, nakolik vyvozené zde vlastnosti funkcí Besselových jsou nové aneb novým způsobem dokázány; jsou zde tyto vlastnosti jen proto uvedeny, aby mladá naše intelligence mathematická našla zde vše, co pro studium Malmsténovských výrazů jest důležité.

§. 8. Funkční povaha řady Ml.

Vzorec (3) §. 6 obdrží po substituci hodnoty

$$A_n = \varphi(\pi |v - n|, u, s),$$

tedy na př.

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \int_0^{\infty} e^{-u^2 x - \frac{\pi^2(v-n)^2}{x}} x^{\frac{s-3}{2}} dx \\ &= \frac{2\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \left(\frac{|v-n|}{u}\right)^{\frac{s-1}{2}} e^{-2\pi u|v-n|} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4\pi u|v-n|r^2} \frac{(r + \sqrt{r^2+1})^{s-1} dr}{\sqrt{r^2+1}} \end{aligned}$$

tvář

$$(1^a) \quad e^{2vuw\pi i} \text{ Ml. } (v, w, u, s) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2nw\pi i} \int_0^{\infty} e^{-u^2 x - \frac{\pi^2(v-n)^2}{x}} x^{\frac{s-3}{2}} dx$$

aneb též

$$(1^b) \quad \left\{ \begin{aligned} &e^{2vuw\pi i} \text{ Ml. } (v, w, u, s) \\ &= \frac{2\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} u^{\frac{1-s}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |v-n|^{\frac{s-1}{2}} e^{2\pi i(nw + iu|v-n|)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4\pi u|v-n|r^2} \frac{(r + \sqrt{r^2+1})^{s-1} dr}{\sqrt{r^2+1}} \end{aligned} \right.$$

Ve vzorcích těchto veličina v předpokládána uvnitř mezery ($0 \dots 1$); veličina u má být kladna ve své části realné při (1^b), kdežto vzorec (1^a) vyžaduje totéž pro u^2 .

Lze ukázati, že za těchto okolností řady (1^a), (1^b) konvergují pro všechna konečná s . Konvergence jich dokázána dosud pro Real. $s > 0$ a zbývá tedy jen vyšetřiti případ Real. $s \leq 0$.

Pišme řadu (1^b) ve tvaru

$$\text{Ml. } (v, w, u, s) = \frac{2\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} u^{\frac{1-s}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i |n-v|(e_n w + iu)} |v-n|^{\frac{s-1}{2}} J_n,$$

kde ε_n udává znamení veličiny $n - v$, a kde položeno

$$J_n = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4\pi u |v-n|r^2} (r + \sqrt{r^2 + 1})^{s-1} \frac{dr}{\sqrt{r^2 + 1}};$$

tu jest pak

$$J_n(s) = \int_0^{\infty} e^{-4\pi u |v-n|r^2} \frac{(r + \sqrt{r^2 + 1})^{s-1} + (r + \sqrt{r^2 + 1})^{1-s}}{\sqrt{r^2 + 1}} dr,$$

tedy

$$J_n(s) = J_n(2-s);$$

jelikož při $\text{Real. } s < 0$ máme $\text{Real. } (2-s) > 2$, bude řada

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |v-n|^{\frac{s-1}{2}} e^{2\pi i |n-v|(\varepsilon_n w + u i)} J_n(2-s)$$

konvergovati, any její vzdálené členy jsou menší než členové řady absolutně konvergentní

$$\sum |v-n|^{\frac{1-s}{2}} e^{2\pi i |n-v|(\varepsilon_n w + u i)} J_n(2-s).$$

Odtud plyne, že

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \text{Ml.}(v, w, u, s)$$

je celistvou funkcí transcendentní proměnné s , jakmile reálná veličina v není číslem celistvým.

Že zde podmínku $\text{Real. } u > 0$ netřeba uváděti, je patrné z toho, že jsme případ ryze pomyslného u z předu vyloučili a že jedna z obou hodnot u , $-u$ má pak vždy reálnou část kladnou.

Obratme se nyní k meznímu případu $v = 0$. Tu bude vzorec (1^b) zníti

$$\text{Ml.}(0, w, u, s) = \frac{2\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} u^{\frac{1-s}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|^{\frac{s-1}{2}} e^{2\pi n i(w + \varepsilon_n u i)} J_n,$$

kde $\varepsilon_n = \text{sgn. } n$ značí znamení čísla n , t. j. $\varepsilon_0 = 0$, $\varepsilon_1 = 1, \dots$ a

$$J_n = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4\pi u |n|r^2} (r + \sqrt{r^2 + 1})^{s-1} \frac{dr}{\sqrt{r^2 + 1}}.$$

Avšak pro $n = 0$ integrál

$$J_0 = \int_{-\infty}^{\infty} (r + \sqrt{r^2 + 1})^{s-1} \frac{dr}{\sqrt{r^2 + 1}}$$

patrně nikdy neexistuje, takže výraz (1^b) v tomto případě $v=0$ stává se illusorním. Proto obrátíme se ku vzorci (1^a), v němž předpokládejme Real. $s > 1$, aby řada Ml. $(0, w, u, s)$ byla konvergentní. Přejdeme v (1^a) k mezím pro $v=0$, a obdržíme

$$(2) \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{[(w+n)^2 + u^2]^{\frac{s}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{s}{2})} \sum_{n=-\infty}^{\infty} K_n e^{2n\omega\pi i},$$

kde položeno

$$(3) \quad K_n = \int_0^{\infty} e^{-u^2 x - \frac{n^2 \pi^2}{x}} x^{\frac{s-3}{2}} dx.$$

Poněvadž

$$K_0 = \int_0^{\infty} e^{-u^2 x} x^{\frac{s-3}{2}} dx = \frac{\Gamma(\frac{s-1}{2})}{u^{s-1}},$$

nacházíme*)

$$(4) \quad \Gamma(\frac{s}{2}) \text{ Ml. } (0, w, u, s) = \Gamma(\frac{s-1}{2}) \sqrt{\pi} u^{1-s} + 2\sqrt{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} K_n \cos 2n\omega\pi.$$

Prvý člen pravé strany není celistvá funkce, za to ale nekonečná řada v druhém členu, okolnost to, jež pro aplikace je velmi důležitou.

§. 9. Řady Kroneckerovy.

Buďtež a, b, c reálné veličiny, které definují kladnou formu kvadratickou

$$f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2;$$

dále buď s komplexní proměnná s kladnou částí reálnou a větší než 1, takže dvojnásobná řada

$$(1) \quad K(a, b, c; \sigma, \tau; s) = \sum'_{m, n} \frac{e^{2\pi i(m\sigma + n\tau)}}{f(m, n)^s},$$

$$(m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots)$$

konverguje absolutně při reálných σ, τ . Čárka při znamení Σ' naznačuje, že se má vynechat člen $m = n = 0$.

Předpokládejme, že σ, τ jsou pravé kladné zlomky od nully různé; jelikož forma $f(x, y)$ je kladnou, musí

$$a > 0, \quad c > 0, \quad ac - b^2 = \Delta > 0.$$

*) Viz Lerch, dopis.

Značli \sqrt{A} kladnou druhou odmocninu z A , položme

$$\alpha = \frac{b}{c}, \quad \beta = \frac{\sqrt{A}}{c},$$

takže pak

$$f(x, y) = c[(\alpha x + y)^2 + \beta^2 x^2];$$

provedemeli nejprve sčítání vůči n , takže bude

$$K = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i(m\sigma + n\tau)}}{f(m, n)^s} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \cdot n\tau}}{f(0, n)^s}$$

čili

$$K = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i(m\sigma + n\tau)}}{c^s [(\alpha m + n)^2 + \beta^2 m^2]^s} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i n\tau}}{c^s (n^2)^s},$$

kde čárky při znamení Σ' vyjadřují vynechání členu $m=0$, resp. $n=0$, můžeme k vyčíslení řady užiti vzorce (1^a) §. 8, z něhož plyne

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i n\tau}}{[(\alpha m + n)^2 + \beta^2 m^2]^s} = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(s)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i(n\alpha - \tau\alpha)} \int_0^{\infty} e^{-\beta^2 m^2 x - \frac{\pi^2(n-\tau)^2}{x}} x^{s-\frac{1}{2}} dx;$$

a tedy

$$\begin{aligned} & \sum_m \sum_n \frac{e^{2\pi i(m\sigma + n\tau)}}{f(m, n)^s} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{c^s \Gamma(s)} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i(n\alpha - \tau\alpha + \sigma)} \int_0^{\infty} e^{-\beta^2 m^2 x - \frac{\pi^2(n-\tau)^2}{x}} x^{s-\frac{1}{2}} dx, \end{aligned}$$

kde dlužno vynechati člen $m=0$.

Dále jest

$$(a) \quad \sum_n \frac{e^{2\pi i \cdot n\tau}}{c^s (n^2)^s} = \frac{2}{c^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\tau\pi}{n^{2s}} = S,$$

takže obdržíme

$$(2^a) \quad \left\{ \begin{aligned} K(a, b, c; \sigma, \tau, s) &= \frac{2}{c^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\tau\pi}{n^{2s}} \\ &+ \frac{\sqrt{\pi}}{c^s \Gamma(s)} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i(n\alpha - \tau\alpha + \sigma)} \int_0^{\infty} e^{-\beta^2 m^2 x - \frac{\pi^2(n-\tau)^2}{x}} x^{s-\frac{1}{2}} dx. \end{aligned} \right.$$

Dvojnásobná řada v pravo konverguje velmi rychle, jak o tom svědčí vzorec (5) §. 7:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} e^{-\beta^2 m^2 x - \frac{\pi^2(n-\tau)^2}{x}} x^{s-\frac{1}{2}} dx = \\ & 2\pi^{s-\frac{1}{2}} \left| \frac{n-\tau}{\beta m} \right|^{s-\frac{1}{2}} e^{-2\beta\pi|m(n-\tau)|} \int_0^{\infty} e^{-4\beta\pi|m(n-\tau)|r} \frac{(r + \sqrt{r^2 + 1})^{2s-1} dr}{\sqrt{r^2 + 1}}; \end{aligned}$$

řada ta definuje pak celistvou funkci transcendentní proměnné s .

Zbývá ještě stanovit analytickou povahu funkce S . Řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\tau\pi}{n^{2s}}$$

považovati možno při reálných s za reálnou část funkce

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-2n\tau\pi i}}{n^{2s}}.$$

Dle vzorce

$$\frac{1}{n^{2s}} = \frac{1}{\Gamma(2s)} \int_0^{\infty} e^{-nx} x^{2s-1} dx$$

obdržíme pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-2n\tau\pi i}}{n^{2s}} = \frac{1}{\Gamma(2s)} \int_0^{\infty} \frac{x^{2s-1} dx}{e^{x+2\tau\pi i} - 1},$$

takže

$$(A) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\tau\pi}{n^{2s}} = \frac{1}{\Gamma(2s)} \int_0^{\infty} \frac{e^x \cos 2\tau\pi - 1}{e^{2x} - 2e^x \cos 2\tau\pi + 1} x^{2s-1} dx,$$

kterýžto vzorec je správným též pro komplexní s . Vyšetření analytické povahy této funkce dalo by se provésti methodou zcela podobnou oné, již jsme vyložili při funkci $\zeta(s)$, ale státi se může též na základě metody Riemannovy, která spočívá v tom, že se od (A) přejde k integrálu

$$\int_0^{\infty} \frac{e^x \cos 2\tau\pi - 1}{e^{2x} - 2e^x \cos 2\tau\pi + 1} x^{2s-1} dx = \frac{1}{e^{4s\pi i} - 1} \int_{(\infty, 0, \infty)} \frac{e^x \cos 2\tau\pi - 1}{e^{2x} - 2e^x \cos 2\tau\pi + 1} x^{2s-1} dx,$$

kde integrační cesta zahrnuje celou kladnou polovici osy reálné, omezuje úzký pruh ji obsahující. Pak obdržíme

$$(A') \quad \sum \frac{\cos 2n\tau\pi}{n^{2s}} = e^{-2s\pi i} \Gamma(1-2s) \frac{1}{2\pi i} \int_{(\infty, 0, \infty)} \frac{e^x \cos 2\tau\pi - 1}{e^{2x} - 2e^x \cos 2\tau\pi + 1} x^{2s-1} dx.$$

Integrál v pravo je celistvá funkce proměnné s , která zmizí pro $2s = 1, 2, 3, \dots$, tedy právě na pólech funkce $\Gamma(1-2s)$, i plyne odtud, že veličina (A') je též celistvou funkcí transcendentní vůči s . Následkem toho platí věta:

Řada $K(a, b, c; \sigma, \tau; s)$ definuje celistvou funkci transcendentní proměnné s , kterou lze vyjádřiti při libovolném s řadou:

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} & K(a, b, c; \sigma, \tau; s) \\ & = c^{-s} e^{-2s\pi i} \Gamma(1-2s) \frac{1}{\pi i} \int_{(\infty, 0, \infty)} \frac{e^x \cos 2\tau\pi - 1}{e^{2x} - 2e^x \cos 2\tau\pi + 1} x^{2s-1} dx \\ & + \frac{\sqrt{\pi}}{c^s \Gamma(s)} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2m\pi i (na - \tau a + \sigma)} \int_0^{\infty} e^{-\beta^2 m^2 x - \frac{\pi^2 (n-\tau)^2}{x}} x^{s-1} dx. \end{aligned} \right.$$

Tuto vlastnost dlužno spojití s okolností, že řada (1) konverguje absolutně při $\text{Real. } s > 1$. Obdržíme všechny páry celistvých čísel m, n , a každý jen jednou, jestliže v rovnicích

$$\begin{aligned} m &= k\mu + l\nu, \\ n &= k'\mu + l'\nu, \end{aligned}$$

kde k, l, k', l' značí celistvá čísla podrobená podmínce

$$(3) \quad k'l' - k'l = 1,$$

udělíme číslům μ, ν všechny celistvé hodnoty. Tím ale přejdou $f(m, n)$, $m\sigma + n\tau$ v následující výrazy

$$\begin{aligned} f(m, n) &= f'(\mu, \nu) = a'\mu^2 + 2b'\mu\nu + c'\nu^2, \\ m\sigma + n\tau &= \mu\sigma' + \nu\tau', \end{aligned}$$

kde

$$(4) \quad \begin{cases} a' = ak^2 + 2bkk' + ck'^2 = f(k, k'), \\ b' = ak'l + b(k'l' + k'l) + ck'l', \\ c' = al^2 + 2bl'l' + cl'^2 = f(l, l'), \\ \sigma' = k\sigma + k'\tau, \quad \tau' = l\sigma + l'\tau, \end{cases}$$

i obdržíme

$$(5) \quad K(a, b, c; \sigma, \tau; s) = K(a', b', c'; \sigma', \tau'; s).$$

Soustavy veličin $(a, b, c; \sigma, \tau)$, $(a', b', c'; \sigma', \tau')$ související rovnicemi (4) slují *rovnomocnými* čili *ekvivalentními*, v písmě

$$(a, b, c; \sigma, \tau) \infty (a', b', c'; \sigma', \tau'),$$

a funkce K mající pro rovnomocné soustavy stejnou hodnotu nazývá se — jako každý toho druhu výraz — *invariantem ekvivalentních soustav* $(a, b, c; \sigma, \tau)$.

Buď nyní s_0 veličina nezávislá na a, b, c, σ, τ ; funkci $K(a, b, c; \sigma, \tau; s)$ bude lze rozvinouti v řadu stále konvergentní

$$K(a, b, c; \sigma, \tau; s) = \sum_{\nu=0}^{\infty} K_{\nu}(a, b, c; \sigma, \tau; s_0) (s - s_0)^{\nu},$$

podobně funkci

$$K(a', b', c'; \sigma', \tau'; s) = \sum_{\nu=0}^{\infty} K_{\nu}(a', b', c'; \sigma', \tau'; s_0) (s - s_0)^{\nu}.$$

Levé strany jsou si rovny pro všechna s , kde $\text{Real. } s > 1$, a tedy splynou pravé strany identicky, t. j. bude

$$K_{\nu}(a, b, c; \sigma, \tau; s_0) = K_{\nu}(a', b', c'; \sigma', \tau'; s_0),$$

t. j. funkce $K_{\nu}(a, b, c; \sigma, \tau; s_0)$ jsou rovněž invarianty rovnomocných soustav $(a, b, c; \sigma, \tau)$.

To platí tedy zejména o funkci $K(a, b, c; \sigma, \tau; 1)$, již studoval pan *Kronecker*. My ji obdržíme nejkratší a nejprirozenější cestou přímo z rovnice (2^a). Tu třeba stanovit hodnoty integrálů

$$\int_0^{\infty} e^{-\beta m^2 x - \frac{\pi^2 (n-\tau)^2}{x}} x^{-1} dx,$$

jež se obdrží pomocí vzorce*)

$$(a) \quad \int_0^{\infty} e^{-p^2 x - \frac{q^2}{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{\pi}}{p} e^{-2pq},$$

takže mají hodnotu

$$\frac{\sqrt{\pi}}{|\beta m|} e^{-2\pi\beta|m(n-\tau)|};$$

dále bude třeba sečísti řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\tau\pi}{n^2} = \int_0^{\infty} \frac{e^x \cos 2\tau\pi - 1}{e^{2x} - 2e^x \cos 2\tau\pi + 1} x dx,$$

jejíž hodnota zní

$$\pi^2 \left(\tau^2 - \tau + \frac{1}{6} \right),$$

o čemž bychom se differencováním snadno přesvědčili.

Vložení těchto hodnot do vzorce (2^a) se zřetelem k okolnosti, že β je kladné, obdržíme

$$\begin{aligned} K(a, b, c; \sigma, \tau; 1) &\doteq \frac{2\pi^2}{c} \left(\tau^2 - \tau + \frac{1}{6} \right) \\ &+ \frac{\pi}{c\beta} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{m} e^{2m\pi i(na - \tau a + \sigma) - 2\beta m\pi |n-\tau|} \\ &+ \frac{\pi}{c\beta} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{m} e^{-2m\pi i(na - \tau a + \sigma) - \beta m\pi |n-\tau|} \end{aligned}$$

*) Bylo totiž v §. 7, (5) ukázáno, že ($s=2$)

$$\int_0^{\infty} e^{-p^2 x - \frac{q^2}{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 \sqrt{\frac{q}{p}} e^{-2pq} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4pq r^2} \frac{r + \sqrt{r^2 + 1}}{\sqrt{r^2 + 1}} dr;$$

rozložíme tento integrál ve dva, zmizí jeden z nich a zbude

$$2 \sqrt{\frac{q}{p}} e^{-2pq} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4pq r^2} dr = \frac{\sqrt{\pi}}{p} e^{-2pq}.$$

Provedemeli sčítání vůči m , obdržíme;

$$K = \frac{2\pi^2}{c} \left(\tau^2 - \tau + \frac{1}{6} \right) - \frac{\pi}{c\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \log \left(1 - e^{2\pi i(na - \tau a + \sigma) - 2\beta\pi|n - \tau|} \right) + \log \left(1 - e^{-2\pi i(na - \tau a + \sigma) - 2\beta\pi|n - \tau|} \right) \right\}.$$

Jelikož předpokládáme, že τ je pravý kladný zlomek, obdržíme po zavedení označení

$$w_1 = -a + i\beta, \quad w_2 = a + i\beta,$$

rovnici:

$$\begin{aligned} K &= \frac{2\pi^2}{c} \left(\tau^2 - \tau + \frac{1}{6} \right) - \frac{\pi}{c\beta} \log \prod_{n=-\infty}^{\infty} \left(1 - e^{2\pi i(na - \tau a + \sigma) - 2\beta\pi|n - \tau|} \right) \\ &\quad \cdot \left(1 - e^{-2\pi i(na - \tau a + \sigma) - 2\beta\pi|n - \tau|} \right) \\ &= \frac{2\pi^2}{c} \left(\tau^2 - \tau + \frac{1}{6} \right) - \frac{\pi}{\sqrt{A}} \log \left\{ \left(1 - e^{2\pi i(\sigma - \tau a) - 2\beta\pi\tau} \right) \left(1 - e^{-2\pi i(\sigma - \tau a) - 2\beta\pi\tau} \right) \right. \\ &\quad \left. \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 - e^{2\pi i(nw_2 + \sigma - \tau w_2)} \right) \left(1 - e^{2\pi i(nw_1 + \sigma + \tau w_1)} \right) \left(1 - e^{2\pi i(nw_1 - \sigma - \tau w_1)} \right) \left(1 - e^{2\pi i(nw_2 - \sigma + \tau w_2)} \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Užijemeli známých vzorců

$$\vartheta_1(u|w) = 2e^{i w \pi i} \sin u \pi \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n}) (1 - q^{2n} e^{2u\pi i}) (1 - q^{2n} e^{-2u\pi i}),$$

kde psáno $q = e^{w\pi i}$, a znamenámeli po příkladu Kroneckerově

$$(6) \quad \mathcal{A}(\sigma, \tau | w_1, w_2) = e^{\tau^2(w_1 + w_2)\pi i} \frac{\vartheta_1(\sigma + \tau w_1 | w_1) \vartheta_1(\sigma - \tau w_2 | w_2)}{H(w_1) H(w_2)},$$

kde psáno

$$(7) \quad H(w) = e^{\frac{w\pi i}{12}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2n w \pi i}),$$

obdržíme vztah Kroneckerův

$$(8) \quad \frac{\sqrt{A}}{\pi} K(a, b, c; \sigma, \tau; 1) = -\log \mathcal{A}(\sigma, \tau | w_1, w_2);$$

při tom, jak opakujeme, znamená $A = ac - b^2$, a $w_1, -w_2$ jsou kořeny kvadratické rovnice

$$a + 2bw + cw^2 = 0,$$

totiž

$$w_1 = \frac{-b + i\sqrt{A}}{c}, \quad w_2 = \frac{b + i\sqrt{A}}{c}.$$

Vzorec (8) byl odvozen pro případ $0 < \sigma < 1$, $0 < \tau < 1$; aby se ukázalo, že platí obecně, stačí poznamenati, že dle (6) funkce A se nemění, zvětšili-li σ neb τ o celistvé číslo, takže rovnice

$$(8^a) \quad A(\sigma, \tau | w_1, w_2) = e^{-\frac{\sqrt{A}}{\pi} K(a, b, c; \sigma, \tau; 1)}$$

platí pro všechna reálná σ , τ , jež nejsou celistvá.

Poznamenejme, že z rovnic (4) plyne, že kořeny w'_1 , $-w'_2$ rovnice

$$a' + 2b'w' + c'w'^2 = 0$$

souvisejí s w_1 , $-w_2$ rovnicemi

$$(4^a) \quad w_1 = \frac{k' + l'w'_1}{k + l'w'_1}, \quad -w_2 = \frac{k' - l'w'_2}{k - l'w'_2}.$$

Veličiny w_1 , w_2 mají společnou část pomyslnou, která je kladná, a opačné části reálné. Zvolímeli je tak, aby tyto podmínky byly splněny, a zvolímeli kromě toho $A > 0$, budou tím a , b , c úplně dány, takže pak vzorec (8) vyjadřuje logarithmus funkce A o daných w nekonečnou řadou dvojnásobnou.

V případě $w_1 = w_2$ bude společná hodnota w těchto veličin ryze pomyslnou a tedy $b = 0$, $w = i\sqrt{\frac{a}{c}}$, a my obdržíme z (8) vzorec

$$(8^b) \quad \frac{\sqrt{ac}}{\pi} \sum_{m,n} \frac{e^{2\pi i(m\sigma + n\tau)}}{am^2 + cn^2} = -\log \left(\frac{e^{2\tau w \pi i} \vartheta_1(\sigma + \tau w) \vartheta_1(\sigma - \tau w)}{H(w)^2} \right),$$

kde transcendenty ϑ tvořeny na základě téhož parametru $w = i\sqrt{\frac{a}{c}}$.

Z rovnice (8^a) plyne dle výše uvedených vlastností veličiny $K(a, b, c; \sigma, \tau; 1)$, že funkce $A(\sigma, \tau | w_1, w_2)$ nemění se přechodem k soustavě hodnot rovnomocných

$$\begin{aligned} \sigma' &= k\sigma + k'\tau, & \tau' &= l\sigma + l'\tau, \\ w'_1 &= \frac{k w_1 - k'}{l' - l w_1}, & w'_2 &= \frac{k w_2 + k'}{l' + l w_2}, \end{aligned}$$

kde k, k', l, l' jsou celistvá čísla podrobená podmínce

$$k'l' - k'l = 1.$$

Jinak lze tuto větu též takto vyjádřiti:

Dvojnásobná řada

$$\sum_{m,n} \frac{e^{2\pi i(m\sigma + n\tau)}}{am^2 + 2bmn + cn^2}$$

konverguje toliko podmínečně, ale při všech seřaděních členů, která vzniknou, když v rovnicích

$$m = k\mu + l\nu, \quad n = k'\mu + l'\nu, \quad (k'l' - k'l = 1)$$

probíhá nejprve μ a po té ν všechna čísla celistvá, obdrží součet řady tutéž hodnotu.

Vzorec (2) neb (2^a) obsahuje uvedený výsledek Kroneckerův jako zvláštní případ a kromě toho může vésti k celé řadě speciálních invariantů, z nichž zajímavým je též $K_1(a, b, c; \sigma, \tau; 0)$, t. j. součinitel při s v Maclaurinovském rozvoji funkce K . K tomu účelu ustanovíme nejprve součinitele toho v rozvoji funkce

$$(9) \quad Z(v, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nv\pi}{n^s},$$

kde řada v pravo konverguje při $\text{Real. } s > 0$, jakmile $0 < v < 1$, což předpokládáme. Tu jest patrně

$$2Z(v, s) = e^{2v\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2nv\pi i}}{(n+1)^s} + e^{-2v\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-2nv\pi i}}{(n+1)^s},$$

čili dle dřívějšího označení

$$(9^a) \quad 2Z(v, s) = e^{2v\pi i} \mathfrak{R}(1, v, s) + e^{-2v\pi i} \mathfrak{R}(1, 1-v, s).$$

Dle vzorce (6^a) §. 4 jest $\mathfrak{R}(1, v, s)$ celistvou funkcí transcendentní proměnné s , a totéž tedy platí o funkci $Z(v, s)$.

Jestliže v Lipschitzově reciprocitě (5) §. 3 předpokládáme $\text{Real. } s > 1$, můžeme na obou stranách přejíti k limitě pro $w = 1$, čímž vznikne

$$\frac{(2\pi)^s}{\Gamma(s)} \mathfrak{R}(1, v, 1-s) \cdot e^{2v\pi i} = e^{\frac{s\pi i}{2}} \mathfrak{R}(v, 0, s) + e^{-\frac{s\pi i}{2}} \mathfrak{R}(1-v, 0, s),$$

a podobně

$$\frac{(2\pi)^s}{\Gamma(s)} \mathfrak{R}(1, 1-v, 1-s) e^{-2v\pi i} = e^{\frac{s\pi i}{2}} \mathfrak{R}(1-v, 0, s) + e^{-\frac{s\pi i}{2}} \mathfrak{R}(v, 0, s),$$

takže sečtením těchto výsledků obdržíme*)

$$(10) \quad \frac{(2\pi)^s}{\Gamma(s)} Z(v, 1-s) = \cos \frac{s\pi}{2} R(v, s),$$

kde psáno

$$(10^a) \quad R(v, s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\{v+n\}^s} = \mathfrak{R}(v, 0, s) + \mathfrak{R}(1-v, 0, s).$$

Užijemeli dříve odvozených vzorců, máme zde

$$(10^b) \quad R(v, s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{e^{(1-v)t} t^{s-1} dt}{e^t - 1} + \int_0^{\infty} \frac{e^{vt} t^{s-1} dt}{e^t - 1} \right\}.$$

U vzorci (10) píšme $s = 1 + \sigma$, čímž vznikne

$$(a) \quad (2\pi)^{1+\sigma} Z(v, -\sigma) = -\sin \frac{\sigma\pi}{2} \cdot \Gamma(1+\sigma) R(v, 1+\sigma),$$

*) Viz Lerch, dopis, vzorec (12).

kde pak dle (10^b)

$$\Gamma(1 + \sigma) R(v, 1 + \sigma) = \int_0^{\infty} \frac{e^{(1-v)t} t^{\sigma} dt}{e^t - 1} + \int_0^{\infty} \frac{e^{vt} t^{\sigma} dt}{e^t - 1}.$$

Rozložme

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{(1-v)t} t^{\sigma} dt}{e^t - 1} = \int_0^{\omega} \frac{e^{(1-v)t} t^{\sigma} dt}{e^t - 1} + \int_{\omega}^{\infty} \frac{e^{(1-v)t} t^{\sigma} dt}{e^t - 1},$$

kde ω je malý kladný zlomek; jelikož pro dosti malá t platí rozvoj

$$\frac{e^{(1-v)t}}{e^t - 1} = \frac{1}{t} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma_{\nu} t^{\nu},$$

obdržíme integraci

$$\int_0^{\omega} \frac{e^{(1-v)t} t^{\sigma} dt}{e^t - 1} = \frac{\omega^{\sigma}}{\sigma} + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\gamma_{\nu} \omega^{\sigma+\nu+1}}{\sigma + \nu + 1},$$

a tedy

$$J = \int_0^{\infty} \frac{e^{(1-v)t} t^{\sigma} dt}{e^t - 1} = \frac{\omega^{\sigma}}{\sigma} + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\gamma_{\nu} \omega^{\sigma+\nu+1}}{\sigma + \nu + 1} + \int_{\omega}^{\infty} \frac{e^{(1-v)t} t^{\sigma} dt}{e^t - 1};$$

znamenalí

$$J = \frac{1}{\sigma} + c'_0 + c'_1 \sigma + c'_2 \sigma^2 + \dots$$

mocninový rozvoj levé strany, bude patrně

$$c'_0 = \log \omega + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\gamma_{\nu} \omega^{\nu+1}}{\nu+1} + \int_{\omega}^{\infty} \frac{e^{(1-v)t} dt}{e^t - 1},$$

a poněvadž tato veličina nemůže záviseti na ω , máme přechodem k limitě $\omega = 0$:

$$c'_0 = \left\{ \log \omega + \int_{\omega}^{\infty} \frac{e^{(1-v)t} dt}{e^t - 1} \right\}_{\omega=0}$$

čili

$$(11) \quad c'_0 = \int_0^{\infty} \frac{e^{(1-v)t} - 1}{e^t - 1} dt,$$

poněvadž

$$\lim_{\omega=0} \left\{ \log \omega + \int_{\omega}^{\infty} \frac{dt}{e^t - 1} \right\} = 0.$$

Výraz (11) lze též psát

$$(11^a) \quad c'_0 = \sum_{v=0}^{\infty} \left(\frac{1}{v+v} - \frac{1}{v+1} \right);$$

znaménámei podobně

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{vt} t^{\sigma} dt}{e^t - 1} = \frac{1}{\sigma} + c''_0 + c''_1 \sigma + c''_2 \sigma^2 + \dots,$$

máme

$$(11^b) \quad c''_0 = \sum_{v=0}^{\infty} \left(\frac{1}{v+1-v} - \frac{1}{v+1} \right),$$

takže koeficient c_0 rozvoje

$$\Gamma(1+\sigma) R(v, 1+\sigma) = \frac{2}{\sigma} + c_0 + c_1 \sigma + c_2 \sigma^2 + \dots$$

bude dán vzorcem

$$(11^c) \quad c_0 = \sum_{v=0}^{\infty} \left(\frac{1}{v+v} + \frac{1}{v+1-v} - \frac{2}{v+1} \right),$$

výsledek správný pouze pro $0 < v < 1$. V ostatních případech $v > 1$ neb $v < 0$ dlužno v řadě psát zbytek veličiny v místo v .

Ze vzorce (a) plyne

$$\begin{aligned} 2\pi Z(v, -\sigma) &= -\sin \frac{\sigma\pi}{v} (1 - \sigma \log 2\pi + \dots) \left(\frac{2}{\sigma} + c_0 + \dots \right) \\ &= -\sin \frac{\sigma\pi}{v} \left(\frac{2}{\sigma} - 2 \log 2\pi + c_0 + \dots \right) \end{aligned}$$

a odtud konečně

$$-4Z(v, -\sigma) = 2 + (c_0 - 2 \log 2\pi) \sigma + \dots,$$

což jinak psáno zní:

$$(12) \quad 4Z(v, \sigma) = -2 + (c_0 - 2 \log 2\pi) \sigma + \dots$$

Budeme nyní potřebovatí rozvoj funkce

$$S = \frac{2}{c^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\tau\pi}{n^{2s}} = \frac{2}{c^s} Z(\tau, 2s)$$

dle mocností s . Tu máme dle (12)

$$(12^a) \quad S = -1 + [\log c + c_0 - 2 \log 2\pi] s + \dots,$$

kde dle (11^c)

$$c_0 = \sum_{v=0}^{\infty} \left(\frac{1}{v+\tau_0} + \frac{1}{v+1-\tau_0} - \frac{1}{1+v} \right),$$

kde τ_0 souvisí s τ podmínkami, aby $\tau - \tau_0$ bylo celistvé a při tom

$$0 < \tau_0 < 1.$$

Dle (12^a) soudíme z (2^a), že součinitel při s v Maclaurinovském rozvoji funkce $K(a, b, c; \sigma, \tau; s)$ bude

$$K_1(a, b, c; \sigma, \tau; 0) = \log c + c_0 - 2 \log 2\pi \\ + \sqrt{\pi} \sum'_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2m\pi i(n\alpha - \tau\alpha + \sigma)} \int_0^{\infty} e^{-\beta^2 m^2 x - \frac{\pi^2 (n-\tau)^2}{x}} x^{-\frac{1}{2}} dx.$$

Integrály na pravé straně ustanoví se tu dle vzorce

$$\int_0^{\infty} e^{-u^2 x - \frac{v^2}{x}} x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{z} e^{-2uv},$$

čímž dvojnásobná řada v pravo obdrží tvar

$$\bar{S} = \sum'_m \sum_n \frac{1}{|n-\tau|} e^{2m\pi i(n\alpha - \tau\alpha + \sigma) - 2\beta\pi m(n-\tau)}.$$

Provedeme-li nejdříve sčítání vůči m , obdržíme

$$S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\tau-n| \{e^{2\pi\beta|n-\tau| - 2\pi i(n\alpha - \tau\alpha + \sigma)} - 1\}} \\ + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\tau-n| \{e^{2\pi\beta|n-\tau| + 2\pi i(n\alpha - \tau\alpha + \sigma)} - 1\}}.$$

Za účelem přechodného přetvoření této řady zavedme celistvé číslo $[\tau]$ dané podmínkami

$$[\tau] < \tau < [\tau] + 1;$$

pak máme při dřívějším významu liter w_1, w_2 :

$$\bar{S} = \sum_{n=-[\tau]}^{\infty} \frac{1}{(n+\tau)(e^{-2\pi i(nw_1 + \sigma + \tau w_1)} - 1)} + \sum_{n=[\tau]+1}^{\infty} \frac{1}{(n-\tau)(e^{-2\pi i(nw_2 + \sigma - \tau w_2)} - 1)} \\ + \sum_{n=-[\tau]}^{\infty} \frac{1}{(n+\tau)(e^{-2\pi i(nw_2 - \sigma + \tau w_2)} - 1)} + \sum_{n=[\tau]+1}^{\infty} \frac{1}{(n-\tau)(e^{-2\pi i(nw_1 - \sigma - \tau w_1)} - 1)}.$$

Tuto řadu lze však přehledněji psát

$$\bar{S} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\tau+n} \left\{ \frac{1}{e^{-2\pi i(nw_1 + \sigma + \tau w_1)} - 1} + \frac{1 - \operatorname{sgn}(\tau+n)}{2} \right\} \\ + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\tau+n} \left\{ \frac{1}{e^{-2\pi i(nw_2 - \sigma + \tau w_2)} - 1} + \frac{1 - \operatorname{sgn}(\tau+n)}{2} \right\}.$$

Znamenáme-li pak

$$(13) \quad \bar{S} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\tau+n} \left\{ \frac{1}{e^{-2\pi i(nw_1 + \sigma + \tau w_1)} - 1} + \frac{1 - \operatorname{sgn}(n+\frac{1}{2})}{2} \right\} \\ + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\tau+n} \left\{ \frac{1}{e^{-2\pi i(nw_2 - \sigma + \tau w_2)} - 1} + \frac{1 - \operatorname{sgn}(n+\frac{1}{2})}{2} \right\},$$

bude součet

$$S - \bar{S} = 2 \sum_n \frac{1}{\tau + n} \left\{ \frac{1 - \operatorname{sgn}(\tau + n)}{2} - \frac{1 - \operatorname{sgn}(n + \frac{1}{2})}{2} \right\}$$

obsahovati toliko konečný počet členů od nuly různých; poněvadž

$$\bar{S} - S = \sum \frac{\operatorname{sgn}(n + \frac{1}{2}) - \operatorname{sgn}(n + \tau)}{\tau + n},$$

nalezneme snadno výsledek následující:

$$\text{pro } \tau > 0 \text{ je } \bar{S} - S = 2 \sum_{k=0}^{[\tau]} \frac{1}{k - \tau},$$

$$\text{pro } \tau < 0 \text{ je } S - \bar{S} = 2 \sum_{k=0}^{[\tau]} \frac{1}{k + \tau},$$

tedy obecně

$$(14) \quad \bar{S} - S = 2 \sum_{k=0}^{E(|\tau|)} \frac{1}{k - |\tau|}.$$

Poněvadž

$$K_1(a, b, c; \sigma, \tau; 0) = \log c - 2 \log 2\pi + S + \left(\sum_{v=0}^{\infty} \left(\frac{1}{v + \tau_0} + \frac{1}{v + 1 - \tau_0} - \frac{2}{1 + v} \right) + 2 \sum_{k=0}^{E(|\tau|)} \frac{1}{k - |\tau|} \right),$$

musíme dříve vystihnouti povahu výrazu v závorce, jenž vytvořen operacemi arithmetickými. Pišeme-li nejprve $\tau = \tau_0 + m$, kde $m > 0$, bude hodnota závorky patrně

$$\sum_{v=0}^{\infty} \left(\frac{1}{v + \tau} + \frac{1}{v + 1 - \tau} - \frac{2}{1 + v} \right);$$

totéž platí pro $\tau = \tau_0 - m$, a tedy nacházíme výsledek následující:

Koefficient při s v Maclaurinovském rozvoji funkce

$$K(a, b, c; \sigma, \tau; s) = \sum_{m, n} \frac{c^{2\pi i(m\sigma + n\tau)}}{(am^2 + 2bmn + cn^2)^s}$$

zní

$$(15) \quad K_1(a, b, c; \sigma, \tau; 0) = -2 \log 2\pi + 2\Gamma'(1) - \frac{\Gamma'(\tau)}{\Gamma(\tau)} - \frac{\Gamma'(1-\tau)}{\Gamma(1-\tau)} + \log c + \Psi(\sigma, \tau, w_1) + \Psi(-\sigma, \tau, w_2),$$

kde položeno

$$(16) \quad \Psi(\sigma, \tau, w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\tau + n} \left\{ \frac{1}{e^{-2\pi i(n+\tau)w} - 1} + \frac{1 - \operatorname{sgn}(n + \frac{1}{2})}{2} \right\}.$$

Pravá strana rovnice (15) je patrně jednoznačnou analytickou funkcí proměnných σ, τ ; a tato funkce má tu velmi zajímavou vlastnost, že jest *invariantem rovnomocných soustav* $(a, b, c; \sigma, \tau)$.

Klademeli na okamžik

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{e^{-2\pi i(nw + \sigma + \tau w)} - 1} + \frac{1 - \operatorname{sgn.}(n + \frac{1}{2})}{2} \right) e^{2n\pi i x},$$

bude

$$\Phi(\sigma, \tau, w) = \frac{2\pi i}{e^{2\tau\pi i} - 1} \int_0^1 f(x) e^{2\tau x\pi i} dx.$$

Abychom vyjádřili $f(x)$, položme

$$(17) \quad \varphi(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{e^{-2\tau i(nw + u)} - 1} + \frac{1 - \operatorname{sgn.}(u + \frac{1}{2})}{2} \right\} e^{2n\pi i u};$$

píšeme $n + 1$ za n , vznikne

$$\varphi(u) = \varphi(u + w) e^{2x\pi i} + \sum_n \left[\frac{1 - \operatorname{sgn.}(n + \frac{3}{2})}{2} - \frac{1 - \operatorname{sgn.}(n + \frac{1}{2})}{2} \right] e^{(2n+1)\pi i},$$

čili

$$\varphi(u) = \varphi(u + w) e^{2x\pi i} - 1.$$

Součin $\varphi(u) \vartheta_1(u|w) = \psi(u)$ je celistvá funkce hovící relacím

$$\psi(u) = -\psi(u + 1), \quad \psi(u) = -\psi(u + w) e^{\pi i(2u + 2x + w)} - \vartheta_1(u).$$

Tutéž vlastnost má funkce

$$\psi_1(u) = C' \vartheta_1(u + x) + \frac{\vartheta_1(u)}{e^{2x\pi i} - 1},$$

takže rozdíl

$$\psi(u) - \psi_1(u) = \chi(u)$$

hová rovnicím

$$\chi(u + 1) = -\chi(u), \quad \chi(u + w) = -e^{-\pi i(2u + 2x + w)} \chi(u),$$

z nichž plyne

$$\chi(u) = C'' \vartheta_1(u + x).$$

Píšeme $C' + C'' = C$, máme tedy

$$\psi(u) = C \vartheta_1(u + x) + \frac{\vartheta_1(u)}{e^{2x\pi i} - 1},$$

kde zbývá ještě ustanoviti konstantu C . Odtud pak nalezneme

$$\varphi(u) = C \frac{\vartheta_1(u + x)}{\vartheta_1(u)} + \frac{1}{e^{2x\pi i} - 1},$$

a porovnáme residua při $u = 0$:

$$-\frac{1}{2\pi i} = \frac{C \cdot \vartheta_1'(x)}{\vartheta_1'(0)},$$

máme

$$C = -\frac{\vartheta_1'(0)}{2\pi i} \cdot \frac{1}{\vartheta_1'(x)}$$

a tedy

$$(17^*) \quad \varphi(u) = -\frac{\vartheta'_1}{2\pi i} \frac{\vartheta_1(u+x)}{\vartheta_1(u)\vartheta_1(x)} + \frac{1}{e^{2\pi i} - 1}.$$

Dle toho bude

$$f(x) = -\frac{\vartheta'_1}{2\pi i} \frac{\vartheta_1(x+\sigma+\tau w)}{\vartheta_1(x)\vartheta_1(\sigma+\tau w)} + \frac{1}{e^{2\pi i} - 1},$$

takže

$$(18) \quad \psi(\sigma, \tau, w) = \frac{1}{1 - e^{2\pi i}} \int_0^1 \left\{ \frac{\vartheta'_1 \vartheta_1(x+\sigma+\tau w)}{\vartheta_1(\sigma+\tau w)\vartheta_1(x)} + \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i}} \right\} e^{2\pi i x} dx.$$

§. 10. Pokračování o řadách Kroneckerových.

V předchozích úvahách byl vyloučen případ, kdy jedna z obou veličin σ, τ se stane číslem celistvým, případ, jež dlužno uvažovati již z té příčiny že se může při racionálních σ, τ vyskytnouti po transformaci.

Uvažujme tedy řadu dvojnásobnou

$$K(a, b, c; \sigma, 0; s) = \sum'_{m, n} \frac{e^{2m\sigma\pi i}}{f(m, n)^s},$$

kterou převedeme na tvar následující, sčítající nejdříve vůči n :

$$K = \sum'_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{c^s (n^2)^s} + \sum'_{m=-\infty}^{\infty} \sum'_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2m\sigma\pi i}}{c^s [(am+n)^2 + \beta^2 m^2]^s}.$$

Prvá část jest patrně $2c^{-s} \zeta(2s)$ a druhou lze přetvořiti dle vzorce (4) §. 8, z něhož plyne

$$\begin{aligned} \sum'_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{[(am+n)^2 + \beta^2 m^2]^s} &= \frac{\Gamma(s - \frac{1}{2})}{\Gamma(s)} \sqrt{\pi} (\beta^2 m^2)^{\frac{1-2s}{2}} \\ &+ \frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma(s)} \sum_{n=1}^{\infty} \cos 2mna\pi \int_0^{\infty} e^{-\beta^2 m^2 x - \frac{n^2 \pi^2}{x}} x^{s-\frac{3}{2}} dx, \end{aligned}$$

a tedy

$$(1) \left\{ \begin{aligned} K(a, b, c; \sigma, 0; s) &= 2c^{-s} \zeta(2s) + 2\sqrt{\pi} \frac{\Gamma(s - \frac{1}{2})}{\Gamma(s)} c^{-s} \beta^{1-2s} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos 2m\sigma\pi}{m^{2s-1}} \\ &+ \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(s)} c^{-s} \sum'_{m=-\infty}^{\infty} \sum'_{n=-\infty}^{\infty} e^{2m(na+\sigma)\pi i} \int_0^{\infty} e^{-\beta^2 m^2 x - \frac{n^2 \pi^2}{x}} x^{s-\frac{3}{2}} dx, \end{aligned} \right.$$

kde význam liter α, β jest jako výše

$$\alpha = \frac{b}{c}, \quad \beta = \frac{\sqrt{d}}{c}.$$

Sečítámeli však dvojnásobnou řadu dříve vůči m , musíme zavést veličiny

$$\alpha' = \frac{b}{a}, \quad \beta' = \frac{\sqrt{A}}{a},$$

načež řada přejde v následující:

$$(1') \quad \left\{ \begin{aligned} K(a, b, c; \sigma, 0; s) &= 2a^{-s} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos 2m\sigma\pi}{m^{2s}} \\ &+ \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(s)} a^{-s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{2n\alpha'\pi i(m-\sigma)} \int_0^{\infty} e^{-\beta'^2 n^2 x - \frac{\pi^2(\sigma-m)^2}{x}} x^{s-\frac{1}{2}} dx. \end{aligned} \right.$$

Obě části pravé strany poslední rovnice jsou celistvé vůči s , a tedy *jest též* $K(a, b, c; \sigma, 0; s)$ *celistvou funkcí transcendentní proměnné* s .

Ustanovme nyní součinitele při s v Maclaurinovském rozvoji funkce $K(a, b, c; \sigma, 0; s)$.

Dle dřívějšího označení máme

$$Z(\sigma, 2s-1) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos 2m\sigma\pi}{m^{2s-1}};$$

dále

$$\int_0^{\infty} e^{-\beta'^2 m^2 x - \frac{\pi^2}{x}} x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{|n|\pi} e^{-2\beta'\pi|mn|},$$

a konečně

$$2c^{-s} \zeta(2s) = 2\zeta(0) + 2[2\zeta'(0) - \zeta(0) \log c] s + \dots$$

a tedy máme z (1) hledaného součinitele ve tvaru

$$\begin{aligned} K_1(a, b, c; \sigma, 0; 0) &= -2\zeta(0) \log c + 4\zeta'(0) - \frac{4\pi\sqrt{A}}{c} Z(\sigma, -1) \\ &+ \sum_{m, n} \frac{1}{|n|} e^{-2\beta'\pi|mn| + 2m(n\alpha + \sigma)\pi i}, \\ &(m, n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots) \end{aligned}$$

Tu pak máme dle vzorce (10) §. 9

$$Z(\sigma, -1) = -\frac{1}{4\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\sigma+n)^2} = -\frac{1}{4\sin^2 \sigma\pi},$$

dále máme z Riemannova vzorce

$$\zeta(s) = 2(2\pi)^{s-1} \sin \frac{s\pi}{2} \Gamma(1-s) \zeta(1-s);$$

užijemeli okolnosti

$$\Gamma(1-s) \zeta(1-s) = -\frac{1}{s} + c_1 s + c_2 s^2 + \dots,$$

již snadno můžeme verifikovati napodobice výše vyloženou metodu při funkci $R(v, s)$ (§. 9), plyne:

$$\zeta(s) = 2(2\pi)^{s-1} \left[-\frac{\sin \frac{s\pi}{2}}{s} - c_1 s^2 + \dots \right] = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log 2\pi \cdot s + \dots$$

takže

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}, \quad \zeta'(0) = -\frac{1}{2} \log 2\pi.$$

Obdržíme tedy

$$K_1(a, b, c; \sigma, 0; 0) = -2 \log 2\pi + \log c + \frac{\pi \sqrt{A}}{c \sin^2 \sigma \pi} - 2 \log \prod_{m=1}^{\infty} \left\{ (1 - e^{2m w_1 \pi i}) (1 - e^{2m w_2 \pi i}) \right\}^{\cos 2m \sigma \pi}.$$

Neboť dvojnásobná řada hořejší

$$\begin{aligned} & \sum_{m,n} \frac{1}{|n|} e^{-2\beta\pi |mn| + 2m(n\alpha + \sigma)\pi i} \\ &= \sum_m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-2\beta\pi |m|n + 2m(n\alpha + \sigma)\pi i} + \sum_m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-\beta\pi |m|n + 2m(-n\alpha + \sigma)\pi i} \\ &= - \sum_m \left\{ \log(1 - e^{-2\beta\pi |m| + 2m\alpha\pi i}) + \log(1 - e^{-2\beta\pi |m| - 2m\alpha\pi i}) \right\} e^{2m\sigma\pi i} \end{aligned}$$

přejde v záporný logarithmus čtverce výše psaného součinu.

Zavedeme označení

$$(2) \quad H(w, \sigma) = e^{\frac{w\pi i}{4 \sin^2 \sigma \pi}} \prod_{m=1}^{\infty} (1 - e^{2m w \pi i})^{\cos 2m \sigma \pi},$$

bude součinitel při s v Maclaurinovském rozvoji funkce $K(a, b, c; \sigma, 0; s)$ dán výrazem

$$(3) \quad K_1(a, b, c; \sigma, 0; 0) = -2 \log 2\pi - 2 \log \left\{ \frac{1}{\sqrt{c}} H(w_1, \sigma) H(w_2, \sigma) \right\}.$$

Výrazy (2) nazývám *Hermiteovskými*, poněvadž slavný matematik francouzský prvý uvažoval rozvoje podobné jich logarithmům.*) Na tyto vedou vždy výrazy $\Phi(\sigma, \tau, w)$, v nichž jsou σ, τ racionalná čísla.

Téhož součinitele $K_1(a, b, c; \sigma, 0; 0)$ obdržíme jiným způsobem a v jiném tvaru na základě řady (1').

Prvý člen pravé strany má rozvoj

$$2a^{-s} Z(\sigma, 2s) = 2a^{-s} \left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} (c_0 - 2 \log 2\pi) 2s + \dots \right],$$

*) Viz o tom referát p. Lipschitzův obsažený v článku »Bemerkungen über eine Gattung vielfacher Integrale (Journal für die reine und angewandte Mathematik, sv. 101). Mimo to poznámku na konci našeho článku uveřejněného v Acta math., sv. 12.

kde

$$c_0 = 2\Gamma'(1) - \frac{\Gamma'(\sigma_0)}{\Gamma(\sigma_0)} - \frac{\Gamma'(1-\sigma_0)}{\Gamma(1-\sigma_0)},$$

a při tom $0 < \sigma_0 < 1$, a $\sigma - \sigma_0$ je číslo celistvé.

Obdržíme tak

$$K_1 = c_0 - 2 \log 2\pi + \log a + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2n\alpha\pi i(m-\sigma) - 2\beta\pi|n(\sigma-m)|}}{|m-\sigma|}.$$

Dvojnásobná řada obdrží se podobně jako řada \bar{S} v §. 9 ve tvaru

$$2 \sum_{k=0}^{E(|\sigma|)} \frac{1}{k-|\sigma|} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma+m} \left\{ \frac{1}{e^{-2\pi i(m+\sigma)w_1} - 1} + \frac{1 - \operatorname{sgn.}(m+\frac{1}{2})}{2} \right\} \\ + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma+m} \left\{ \frac{1}{e^{-2\pi i(m+\sigma)w_2} - 1} + \frac{1 - \operatorname{sgn.}(m+\frac{1}{2})}{2} \right\},$$

kde

$$w'_1 = -\alpha' + \beta'i = \frac{-b + i\sqrt{A}}{a} = -\frac{1}{w_2},$$

$$w'_2 = \alpha' + \beta'i = \frac{b + i\sqrt{A}}{a} = -\frac{1}{w_1}.$$

Máme tedy konečně

$$(4) \left\{ \begin{aligned} K_1(a, b, c; \sigma, 0; 0) &= -2 \log 2\pi + 2\Gamma'(1) - \frac{\Gamma'(\sigma)}{\Gamma(\sigma)} - \frac{\Gamma'(1-\sigma)}{\Gamma(1-\sigma)} \\ &+ \log a + \psi\left(0, \sigma, -\frac{1}{w_1}\right) + \psi\left(0, \sigma, -\frac{1}{w_2}\right). \end{aligned} \right.$$

Klademe-li $b=0$, tedy $w_1 = w_2 = w = i\sqrt{\frac{a}{c}}$, máme porovnáním výsledků (3) a (4):

$$(5) \quad -4 \log \left(\sqrt{\frac{w}{i}} H(w, \sigma) \right) = 2\Gamma'(1) - \frac{\Gamma'(\sigma)}{\Gamma(\sigma)} - \frac{\Gamma'(1-\sigma)}{\Gamma(1-\sigma)} + 2\psi\left(0, \sigma, -\frac{1}{w}\right).$$

Volme na př. $\sigma = \frac{1}{2}$; pak bude

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \left\{ \frac{1}{e^{(2n+1)\frac{\pi i}{w}} - 1} + \frac{1 - \operatorname{sgn.}(n + \frac{1}{2})}{2} \right\} \\ = \Gamma'\left(\frac{1}{2}\right) - \Gamma'(1) - 2 \log \left\{ \sqrt{\frac{w}{i}} e^{\frac{1}{2}\pi i} \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1 - e^{4m\pi i}}{1 - e^{(4m-2)\pi i}} \right\}.$$

8*

§. 11. Kroneckerovy invarianty kvadratických forem.

Dvojnásobná řada

$$(1) \quad K'(a, b, c; s) = \sum'_{m, n} \frac{1}{(am^2 + 2bmn + cn^2)^s}$$

závisí vedle s toliko na koeficientech kladné formy kvadratické

$$f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

i obdrží tutéž hodnotu pro všechny formy rovnomocné, takže jest *invariantem* forem ekvivalentních s formou (a, b, c) .

Jedná se jako vždy dosud o vyšetření analytické povahy funkce K' . Klademeli jako dříve

$$A = ac - b^2, \quad \alpha = \frac{b}{c}, \quad \beta = \frac{\sqrt{A}}{c}, \quad w_1 = -\alpha + \beta i, \quad w_2 = \alpha + \beta i,$$

bude opět

$$am^2 + 2bmn + cn^2 = c[(n + \alpha m)^2 + \beta^2 m^2],$$

a tedy

$$K'(a, b, c, s) = \sum'_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(cn^2)^s} + \sum'_{m=-\infty}^{\infty} \sum'_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{c^s [(n + \alpha m)^2 + \beta^2 m^2]^s}.$$

Prvá část jest $2c^{-s} \zeta(2s)$, druhá dle §. 8 rovná se řadě

$$\frac{\Gamma(s - \frac{1}{2})}{\Gamma(s)} \frac{\sqrt{\pi}}{c^s} \sum'_{m=-\infty}^{\infty} (\beta^2 m^2)^{\frac{1}{2}-s} + \frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma(s)c^s} \sum'_{m=-\infty}^{\infty} \sum'_{n=1}^{\infty} \cos 2mn\alpha\pi \int_0^{\infty} e^{-\beta^2 m^2 x - \frac{n^2 \pi^2}{x}} x^{s-\frac{3}{2}} dx,$$

tedy

$$(2) \quad K'(a, b, c; s) = 2c^{-s} \zeta(2s) + \frac{2\sqrt{\pi} \Gamma(s - \frac{1}{2})}{\Gamma(s)} \zeta(2s - 1) c^{s-1} A^{\frac{1}{2}-s} + \frac{4\sqrt{\pi}}{\Gamma(s)} c^{-s} \sum'_{m, n} \cos 2mn\alpha\pi \int_0^{\infty} e^{-\beta^2 m^2 z - \frac{\pi^2 n^2}{z}} z^{s-\frac{3}{2}} dz, \\ (m, n = 1, 2, 3, \dots)$$

Poslední člen v pravo je celistvá funkce vůči s , a poněvadž $2c^{-s} \zeta(2s)$ má jediný pól $s = \frac{1}{2}$, v němž se chová jako funkce $\frac{1}{\sqrt{c}} \frac{1}{s - \frac{1}{2}}$, $\Gamma(s - \frac{1}{2}) \zeta(2s - 1)$ je konečno na místech $s = \frac{1}{2} - n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)

a pouze nekonečno na místech $s = \frac{1}{2}$, $s = 1$, kde se chová jako funkce

$$\zeta(0) \frac{1}{s - \frac{1}{2}}, \quad \text{resp.} \quad \frac{\pi}{\sqrt{A}} \cdot \frac{1}{s - 1}, \quad (\text{neboť } \zeta(0) = -\frac{1}{2}),$$

shledáváme, že se pravá strana chová na místě $s = \frac{1}{2}$ pravidelně, takže má jediný pól $s = 1$, kde se chová jako $\frac{\pi}{\sqrt{A}} \cdot \frac{1}{s - 1}$.

Rozdíl

$$K'(a, b, c; s) - \frac{\pi}{\sqrt{A}} \cdot \frac{1}{s - 1}$$

je celistvá funkce transcendentní, která jest invariantem rovnomocných forem (a, b, c) .

Z toho plyne bezprostředně, že též součinitelé rozvoju mocninových této funkce jsou invarianty. Tu zajímavý jsou zejména součinitelé rozvoje této funkce podlé mocností $s - 1$, z nichž pan *Kronecker* ustanovil člen stálý.*) Výsledek ten podá nám vzorec (2) opět přímo.

Úkol ten v podstatě splývá s podobným pro funkci

$$(a) \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} K'(a, b, c; s) (2\sqrt{A})^s \\ & = \frac{1}{\pi} \zeta(2s) \left(\frac{2\sqrt{A}}{c} \right)^s + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(s - \frac{1}{2})}{\Gamma(s)} \zeta(2s - 1) \left(\frac{2c}{\sqrt{A}} \right)^{s-1} \\ & + \frac{2^{s+1}}{\sqrt{\pi} \Gamma(s)} \beta^s \sum_{m, n} \cos 2mn\alpha\pi \int_0^{\infty} e^{-\beta^2 m^2 x - \frac{\pi^2 n^2}{x}} x^{s-\frac{1}{2}} dx. \end{aligned} \right.$$

Jedná se o první dva členy mocninového rozvoje vůči $s - 1$. Dle věty Riemannovy máme

$$\Gamma(s - \frac{1}{2}) \zeta(2s - 1) = \pi^{2s - \frac{1}{2}} \Gamma(1 - s) \zeta(2 - 2s),$$

takže druhý člen pravé strany rovnice (a) zní při označení $\sigma = s - 1$:

$$2 \frac{\Gamma(1 - s)}{\Gamma(s)} \zeta(2 - 2s) \left(\frac{2\pi^2 c}{\sqrt{A}} \right)^{s-1} \\ = -\frac{2}{\sigma} \left\{ 1 - 2\Gamma'(1)\sigma + \dots \right\} \cdot \left\{ \zeta(0) - \zeta'(0) \cdot 2\sigma + \dots \right\} \left\{ 1 + \sigma \log \frac{2\pi^2 c}{\sqrt{A}} + \dots \right\};$$

avšak $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$, $\zeta'(0) = -\frac{1}{4} \log 2\pi$, a tedy začíná rozvoj druhého členu v (a) takto:

$$\frac{1}{s-1} + (-2\Gamma'(1) - \log 2\sqrt{A} + \log c) + \dots;$$

*) Zur Theorie der elliptischen Functionen, XIII. (Sitzungsberichte der kön. preuss. Akademie der Wissenschaften 1889; Gesamtsitzung vom 21. Februar).

k tomu dlužno přičísti člen stálý

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \zeta(2) \frac{2\sqrt{A}}{c} + \frac{4\beta}{\sqrt{\pi}} \sum_{m,n} \cos 2mn\alpha\pi e^{-2\beta mn\pi} \\ &= \frac{\pi\sqrt{A}}{3c} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{m} e^{2mn\pi i(\alpha+\beta i)} + \frac{1}{m} e^{2mn\pi i(-\alpha+\beta i)} \right) \\ &= -\frac{\pi i}{6} (\omega_1 + \omega_2) - 2 \log \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2n\omega_1\pi i}) (1 - e^{2n\omega_2\pi i}) \\ &= -2 \log H(\omega_1) H(\omega_2). \end{aligned}$$

Nacházíme takto prvé dva členy rozvoje

$$(3) \left\{ \begin{aligned} & \frac{(2\sqrt{A})^s}{2\pi} K'(a, b, c; s) \\ &= \frac{1}{s-1} - 2\Gamma'(1) - \log 2\sqrt{A} - 2 \log \left(\frac{1}{\sqrt{c}} H(\omega_1) H(\omega_2) \right) + (s-1) \mathfrak{P}(s-1). \end{aligned} \right.$$

Výsledek odtud plynoucí, že

$$\frac{1}{\sqrt{c}} H(\omega_1) H(\omega_2)$$

jest invariantem rovnomocných forem (a, b, c) , dá se ovšem též přímo verifikovati.

Zcela podobně bychom shledali, že *koefficient při s v Maclaurinovském rozvoji funkce (3) zní*

$$-2 \log 2\pi - 2 \log \left\{ \frac{1}{\sqrt{c}} H(\omega_1) H(\omega_2) \right\}.$$

§. 12. Zobecnění řad Kroneckerových.

Invariantem rovnomocných kladných forem kvadratických (a, b, c) je též řada

$$(1) \sum_{m,n} \left(\frac{2\sqrt{A}}{u + am^2 + 2bmn + cn^2} \right)^s, \\ (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots); \quad \Delta = ac - b^2,$$

v níž u jest buď kladné aneb aspoň větší než záporně vzaté minimum kladné formy $ax^2 + 2bxy + cy^2$.

Zavedeme-li opětne označení

$$\frac{b}{c} = \alpha, \quad \frac{\sqrt{A}}{c} = \beta, \quad -\alpha + \beta i = \omega_1, \quad \alpha + \beta i = \omega_2, \quad \frac{u}{c} = v,$$

můžeme řadu (1) psáti

$$(1^a) \sum_{m,n} \left(\frac{2\beta}{(\alpha m + n)^2 + \beta^2 m^2 + v} \right)^s;$$

na základě vzorce (4) §. 8 možno provéstí sčítání vůči n , čímž vznikne výraz pro tutěž veličinu

$$(1^b) \left\{ \begin{aligned} & \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(s - \frac{1}{2})}{\Gamma(s)} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(2\beta)^s}{(v + \beta^2 m^2)^{s-\frac{1}{2}}} \\ & + \frac{2\sqrt{\pi} (2\beta)^s}{\Gamma(s)} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \cos 2mn \alpha \pi \int_0^{\infty} e^{-(v+\beta^2 m^2)x} \frac{n^2 \pi^2}{x} x^{s-\frac{3}{2}} dx, \end{aligned} \right.$$

kde dlužno předpokládati $u > 0$.

Dle téhož vzorce (4) pak bude veličina

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(2\beta)^s}{(v + \beta^2 m^2)^{s-\frac{1}{2}}} = \left(\frac{2}{\beta}\right)^s \beta \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(m^2 + \frac{v}{\beta^2})^{s-\frac{1}{2}}}$$

dána řadou

$$\left(\frac{2}{\beta}\right)^s \beta \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(s-1)}{\Gamma(s-\frac{1}{2})} \left(\frac{v}{\beta^2}\right)^{1-s} + \frac{2\sqrt{\pi} \beta}{\Gamma(s-\frac{1}{2})} \left(\frac{2}{\beta}\right)^s \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\frac{v}{\beta^2} x - \frac{n^2 \pi^2}{x}} x^{s-2} dx,$$

a tedy bude řada (1) rovna vlničině

$$(2) \left\{ \begin{aligned} & \frac{2\pi}{s-1} \left(\frac{2\sqrt{A}}{u}\right)^{s-1} + \frac{4\pi}{\Gamma(s)} \left(\frac{2c}{\sqrt{A}}\right)^{s-1} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\frac{cu}{A} x - \frac{n^2 \pi^2}{x}} x^{s-2} dx \\ & + \frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma(s)} \left(\frac{2\sqrt{A}}{c}\right)^s \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \cos 2mn \frac{b\pi}{c} \int_0^{\infty} e^{-(cu+m^2) \frac{x}{c^2} - \frac{n^2 \pi^2}{x}} x^{s-\frac{3}{2}} dx. \end{aligned} \right.$$

Tato veličina jest jednoznačnou funkcí analytickou proměnné s , nemající v konečnu jiných míst zvláštních kromě pólu $s = 1$, na němž chová se jako $\frac{2\pi}{s-1}$.

Začasté bývá výhodnější zůstatí při vzorci (1^b). Hledejme na př. prvé dva členy mocninového rozvoje dle $(s-1)$. Tu nám bude především ustanoviti ony členy v rozvoji funkce

$$(2\beta)^s \beta^{1-2s} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(m^2 + \frac{v}{\beta^2})^{s-\frac{1}{2}}} = \left(\frac{2}{\beta}\right)^s \beta \text{Ml.} (0, 0, \sqrt{\frac{v}{\beta^2}}, 2s-1).$$

Avšak dle vzorce (2) §. 2 jest

$$\text{Ml.} (0, 0, u, \sigma) = 2 \sin \frac{\sigma \pi}{2} \int_0^{\infty} \frac{e^{2\pi \sqrt{u^2+x^2}} + 1}{e^{2\pi \sqrt{u^2+x^2}} - 1} \frac{x^{1-\sigma} dx}{\sqrt{u^2+x^2}}$$

a tedy

$$(a) \left\{ \begin{aligned} \text{Ml.} \left(0, 0, \sqrt{\frac{v}{\beta^2}}, 2s-1 \right) &= -2 \cos s \pi \int_0^{\infty} \frac{e^{2\pi \sqrt{\frac{v}{\beta^2} + x^2}} + 1}{e^{2\pi \sqrt{\frac{v}{\beta^2} + x^2}} - 1} \frac{x^{2-2s} dx}{\sqrt{\frac{v}{\beta^2} + x^2}} \\ &= -4 \cos s \pi \int_0^{\infty} \frac{1}{e^{2\pi \sqrt{\frac{v}{\beta^2} + x^2}} - 1} \frac{x^{2-2s} dx}{\sqrt{\frac{v}{\beta^2} + x^2}} - 2 \cos s \pi \int_0^{\infty} \frac{x^{2-2s} dx}{\sqrt{\frac{v}{\beta^2} + x^2}}. \end{aligned} \right.$$

V posledním integrálu kladme $x^2 = \frac{v}{\beta^2} y$, čímž obdržíme jej ve tvaru

$$\frac{1}{2} \left(\frac{v}{\beta^2} \right)^{1-s} \int_0^{\infty} \frac{y^{\frac{1}{2}-s} dy}{(1+y)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} \left(\frac{v}{\beta^2} \right)^{1-s} \frac{\Gamma(\frac{3}{2}-s) \Gamma(s-1)}{\Gamma(\frac{1}{2})},$$

předpokládáme-li $\frac{3}{2} > s > 1$.

Máme tedy

$$(b) \left\{ \begin{aligned} \text{Ml.} \left(0, 0, \sqrt{\frac{v}{\beta^2}}, 2s-1 \right) &= - \left(\frac{\beta^2}{v} \right)^{s-1} \frac{\Gamma(s-1) \Gamma(\frac{3}{2}-s)}{\sqrt{\pi}} \cos s \pi \\ &- 4 \cos s \pi \int_0^{\infty} \frac{1}{e^{2\pi \sqrt{\frac{v}{\beta^2} + x^2}} - 1} \frac{x^{2-2s} dx}{\sqrt{\frac{v}{\beta^2} + x^2}}. \end{aligned} \right.$$

Funkce, o jejíž začátek rozvoje dle mocností $(s-1)$ se jedná, zní:

$$(c) \left\{ \begin{aligned} &\frac{\sqrt{\pi} \Gamma(s-\frac{1}{2})}{\Gamma(s)} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(2\beta)^s}{(v + \beta^2 m^2)^{s-\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{2\pi}{s-1} \left(\frac{2\beta}{v} \right)^{s-1} - \frac{4\sqrt{\pi} \Gamma(s-\frac{1}{2}) \cos s \pi}{\Gamma(s)} \beta \left(\frac{2}{\beta} \right)^s \int_0^{\infty} \frac{1}{e^{2\pi \sqrt{\frac{v}{\beta^2} + x^2}} - 1} \frac{x^{2-2s} dx}{\sqrt{\frac{v}{\beta^2} + x^2}} \end{aligned} \right.$$

a prvé dva členy uvažovaného rozvoje budou

$$(A) \quad \frac{2\pi}{s-1} + 2\pi \log \frac{2\beta}{v} + 8\pi \int_0^{\infty} \frac{1}{e^{2\pi \sqrt{\frac{v}{\beta^2} + x^2}} - 1} \frac{dx}{\sqrt{\frac{v}{\beta^2} + x^2}},$$

kde poslední integrál lze též psáti

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{e^{2\pi x \sqrt{\frac{v}{\beta^2}} - 1} \sqrt{x^2 - 1}},$$

aneb po substituci $x + \sqrt{x^2 - 1} = e^t$,

$$\int_0^{\infty} \frac{dz}{e^{\pi \sqrt{\frac{v}{\beta^2}} (e^z + e^{-z})} - 1}.$$

Aby se obdrželi hledání členové rozvoje funkce (2), dlužno k výrazu (A) přičísti výraz

$$\begin{aligned} & 4\beta \sqrt{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \cos 2mn\alpha\pi \int_0^{\infty} e^{-(v+\beta^2 m^2)x - \frac{n^2 \pi^2}{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}} \\ &= 4\beta \pi \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2mn\alpha\pi \cdot e^{-2\pi n \sqrt{v+\beta^2 m^2}}}{\sqrt{v+\beta^2 m^2}}, \end{aligned}$$

takže nacházíme větu:

Prvé dva členy mocninového rozvoje dle $(s-1)$ analytické funkce dané elementem (1) snějí:

$$(3) \left\{ \begin{aligned} & \frac{2\pi}{s-1} + \left[2\pi \log \frac{2\sqrt{J}}{u} + 8\pi \int_0^{\infty} \frac{dz}{e^{2\pi \sqrt{\frac{cu}{J}} \cosh \text{hyp } z} - 1} \right. \\ & \left. + 4\pi \sqrt{J} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{cu + Jm^2} \left(e^{\frac{2\pi}{c} \sqrt{cu + Jm^2} + \frac{2mb\pi i}{c}} - 1 \right)} \right] \end{aligned} \right\}$$

a výraz obsažený v závorce $\{\}$ jest invariantem roznomocných forem (a, b, c) značící u veličinu na (a, b, c) nezávislou a kladnou.

Ustanovíme ještě součinitele při s v Maclaurinovském rozvoji funkce (1) čili (2). Pro tuto veličinu obdržíme výraz [dle (1^b) a (c)]:

$$\begin{aligned} & \frac{\pi u}{\sqrt{J}} \left(1 + \log \frac{2\sqrt{J}}{u} \right) + 8\pi \frac{\sqrt{J}}{c} \int_0^{\infty} \frac{1}{e^{2\pi \sqrt{\frac{cu}{J} + x^2}} - 1} \frac{x^2 dx}{\sqrt{\frac{cu}{J} + x^2}} \\ & + 2\sqrt{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{2mn b \pi}{c} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{c^2} (cu + Jm^2)x - \frac{n^2 \pi^2}{x}} x^{-\frac{3}{2}} dx. \end{aligned}$$

Prostřední člen přejde substitucí $x + \sqrt{x^2 + \frac{cu}{J}} = \sqrt{\frac{cu}{J}} e^t$ u výraz

$$\frac{u}{\sqrt{J}} 8\pi \int_0^{\infty} \frac{1}{e^{2\pi \sqrt{\frac{cu}{J}} \cosh \text{hyp } z} - 1} \sin^2 \text{hyp } z dz,$$

a uvažovaný součinitel rozvoje Maclaurinova zní

$$\begin{aligned} & \left(1 + \log \frac{2\sqrt{J}}{u}\right) \frac{\pi u}{\sqrt{J}} + \frac{8\pi u}{\sqrt{J}} \int_0^\infty \frac{\sin^2 \text{hyp } z \, dz}{e^{2\pi \sqrt{\frac{cu}{J}} \cosh \text{hyp } \tau} - 1} \\ & + 2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos \frac{2mnb\pi}{c} e^{-\frac{2n\pi}{c} \sqrt{cu + Jm^2}} \\ & = \left(1 + \log \frac{2\sqrt{J}}{u}\right) \frac{\pi u}{\sqrt{J}} + 8\pi \frac{u}{\sqrt{J}} \int_0^\infty \frac{\sin^2 \text{hyp } z \, dz}{e^{2\pi \sqrt{\frac{cu}{J}} \cosh \text{hyp } \tau} - 1} \\ & - 2 \log \prod_{m=-\infty}^{\infty} \left(1 - e^{\frac{2\pi i}{c} (mb + i \sqrt{cu + Jm^2})}\right). \end{aligned}$$

Odtud plyne, že funkce

$$(4) \quad e^{-\frac{2\pi u}{\sqrt{J}}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \text{hyp } \tau \, d\tau}{e^{2\pi \sqrt{\frac{cu}{J}} \cosh \text{hyp } \tau} - 1} \prod_{m=-\infty}^{\infty} \left(1 - e^{\frac{2\pi i}{c} (mb + i \sqrt{cu + Jm^2})}\right)$$

je invariantem rovnomocných forem kvadratických (a, b, c) .

§. 13. Zobecnění vztahu Malmstén-Lipschitzova.

Je patrné, jak lze buď pomocí přímých method elementárných aneb též pomocí transformačních vzorců funkcí theta v tvoření nových invariantů pokračovati a zejména rozšířiti tyto úvahy též na formy ternární, quaternární atd. Ačkoliv by nebylo prosto zajímavosti vyložiti zde výsledky, jichž jsme na tomto poli dosáhli již před více než pěti lety, nicméně přestáváme na těchto ukázkách, ponechávajíc sobě na jinou příležitost vrátiti se k těmto úvahám obírajícím se transcendentami tak málo přístupnými.

Chceme zakončiti tuto práci trigonometrickým rozvojem funkce

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} & S(w_1, w_2, \dots, w_p; v_1, v_2, \dots, v_p; c_1, c_2, \dots, c_p; u, s) \\ & = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_p} \frac{e^{2\pi i (n_1 v_1 + n_2 v_2 + \dots + n_p v_p)}}{[c_1 (w_1 + n_1)^2 + c_2 (w_2 + n_2)^2 + \dots + c_p (w_p + n_p)^2 + u]^s}, \end{aligned} \right.$$

kde s je v reálné části větší než $\frac{p}{2}$, aby řada konvergovala absolutně; veličiny v jsou ryzí zlomky, c_1, c_2, \dots, c_p , u kladné konstanty, w_1, w_2, \dots, w_p komplexní proměnné, vesměs obsažené uvnitř jistého pásu zahalujícího osu reálnou; součet vztahuje se ke všem soustavám celistvých hodnot n_1, n_2, \dots, n_p kladných i záporných.

Tuto funkci lze vyjádřit řadou*)

$$S = e^{-2\pi i \Sigma^* v_a w_a} \sum_{(m)} A_{m_1, m_2, \dots, m_p} e^{2\pi i \Sigma^* m_a w_a}, \quad (\alpha = 1, 2, \dots, p),$$

jejíž součinitelé se obdrží pomocí vzorce

$$A_{m_1, m_2, \dots, m_p} = \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 S e^{2\pi i \Sigma^* (v_a - m_a) w_a} dw_1 dw_2 \dots dw_p,$$

tedy

$$A_{m_1, m_2, \dots, m_p} = \sum_{(n)} \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 \frac{e^{2\pi i [\Sigma^* v_a (n_a + w_a) - \Sigma^* m_a w_a]}}{[u + \Sigma^* c_a (w_a + n_a)]^s} dw_1 dw_2 \dots dw_p.$$

Přetvoříme-li obecný člen substitucemi $w_a + n = x_a$, vznikne

$$A_{m_1, m_2, \dots, m_p} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \Sigma^* (v_a - m_a) x_a}}{(u + \Sigma^* c_a x_a^2)^s} dx_1 dx_2 \dots dx_p.$$

Užijeme-li tu vzorce

$$\frac{1}{(u + \Sigma^* c_a x_a^2)^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} e^{-(u + \Sigma^* c_a x_a^2) x} x^{s-1} dx,$$

obdržíme po změně pořádku integračního výsledek následující:

$$A_{m_1, m_2, \dots, m_p} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} e^{-ux} x^{s-1} dx \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\Sigma^* c_a x x_a^2 + 2\pi i \Sigma^* (v_a - m_a) x_a} dx_1 dx_2 \dots dx_p.$$

Avšak

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-c_a x x_a^2 + 2\pi i (v_a + m_a) x_a} dx_a = \sqrt{\frac{\pi}{c_a x}} e^{-\frac{\pi^2 (v_a - m_a)^2}{x c_a}},$$

z čehož vznikne

$$A_{m_1, m_2, \dots, m_p} = \frac{1}{\Gamma(s)} \frac{\pi^{\frac{p}{2}}}{\sqrt{c_1 c_2 \dots c_p}} \int_0^{\infty} e^{-ux - \frac{1}{x} \Sigma^* \frac{\pi^2 (v_a - m_a)^2}{c_a}} x^{s - \frac{p}{2} - 1} dx.$$

) Z důvodů typografických uvádíme při součtu Σ^ hvězdičku, abychom naznačili, že tento vztahuje se k příponě α , a sice pro hodnoty $\alpha = 1, 2, 3, \dots, p$.

Dosažením této hodnoty za $A_{m_1 \dots m_p}$ do hořejšího vzorce obdržíme

$$(2) \left\{ \begin{aligned} & S(w_1 \dots w_p; v_1 \dots v_p; c_1 \dots c_p; u, s) \\ &= \frac{\pi^{\frac{p}{2}}}{\sqrt{c_1 c_2 \dots c_p}} \frac{1}{\Gamma(s)} \sum_{m_1 \dots m_p} c^{2\pi i \sum^* (m_a - v_a) w_a} \int_0^\infty c^{-ux - \frac{\pi^2}{x} \sum^* \frac{(v_a - m_a)^2}{c_a}} x^{s - \frac{p}{2} - 1} dx. \end{aligned} \right.$$

Předpokládáme, že tato relace zůstane v platnosti i když $\text{Real. } s < \frac{p}{2}$, kdy tedy řada v levo konverguje pouze podmíněčně, takže tu třeba ustáliti pořádek summační tak, aby udávala propagaci funkce S , zůstane relace (2) stále platnou. Jestliže pak přejdeme k limitě pro $u = 0$, přejde pravá strana u výraz

$$\begin{aligned} & \frac{\pi^{-\frac{p}{2} + 2s}}{\sqrt{c_1 c_2 \dots c_p}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} p - s)}{\Gamma(s)} \sum_{m_1 \dots m_p} \frac{c^{2\pi i \sum^* (m_a - v_a) w_a}}{[c_1^{-1} (v_1 - m_1)^2 + c_2^{-1} (v_2 - m_2)^2 + \dots + c_p^{-1} (v_p - m_p)^2]^{\frac{1}{2} \Gamma^{-1}}} \\ &= \frac{\pi^{2s - \frac{p}{2}}}{\sqrt{c_1 c_2 \dots c_p}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} p - s)}{\Gamma(s)} c^{-2\pi i \sum^* v_a w_a} \end{aligned}$$

$$S(1 - v_1, 1 - v_2, \dots, 1 - v_p; w_1, w_2, \dots, w_p; c_1^{-1}, c_2^{-1}, \dots, c_p^{-1}; 0, \frac{1}{2} p - s),$$

takže máme reciprocitu

$$(3) \left\{ \begin{aligned} & \Gamma(s) S(w; v; c; 0, s) \\ &= \frac{\pi^{2s - \frac{p}{2}}}{\sqrt{c_1 c_2 \dots c_p}} c^{-2\pi i \sum^* v_a w_a} \Gamma(\frac{1}{2} p - s) S(1 - v; w; c^{-1}; 0, \frac{1}{2} p - s), \end{aligned} \right.$$

která zobecňuje značnou měrou relaci (3) §. 3, z níž jsme odvodili vztah Malmstén-Lipschitzův.

OPRAVY.

Na str. 10., řádce 7. čti $\frac{e^{2nu\pi i}}{[(\tau v + n)^2 + u^2]^{\frac{s}{2}}}$ místo $\frac{e^{2nv\pi i}}{[(\tau v + n)^2 + u^2]^{\frac{s}{2}}}$.

Na str. 11., řádce 5. v pravo čti $\sum_{n=-\infty}^{\infty}$ místo $\sum_{\pi=-\infty}^{\infty}$; tamtéž na řádce 8. čti »nepřevyšší« místo »nepřevýší«.

Na str. 15., řádce 4. z dola čti $Q(2\sigma - 1)$ místo $Q(2\sigma - 1)$.

Na str. 17., řádce 12. na konci čti $\int x^{-s} dx$ místo $\int x^{-s} dx$.

Na str. 19., v poslední řádce čti $e^{\frac{1}{2}s\pi i}$ místo $e^{-\frac{1}{2}s\pi i}$

Na str. 23. v poslední řádce čti $\sum_k e^{-\lambda\pi y \mp \lambda x\pi i}$ místo $\sum_k e^{-\lambda x y \mp \lambda x\pi i}$

Na str. 24. v 2. řádce zní prvý člen závorky $\{ \}$ takto: $\sum_k \frac{\Gamma(1-s) e^{-axi + \lambda x\pi i}}{(\lambda\pi - a)^{1-s}}$

Na str. 28 v 2. řádce čti: »kde μ, ω jsou kladné a u reálné« místo »kde u, ω jsou kladné«.

Na str. 29. v 3. řádce čti $\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{(\tau v + n)^{m-1} e^{2u\pi i(w+n)}}{e^{2\omega\pi(w+n) - 2v\pi i} - 1} \right.$ na místě $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{(\tau v + n)^{m-1} e^{2u\pi i(w+n)}}{e^{2\omega\pi(w+n) - 2v\pi i} - 1} \right.$,

tamtéž má začínati řádka 14 takto: $+\frac{1}{(m-1)!} \left(\frac{-\pi i}{\omega}\right)^m \sum_{n=0}^{\infty}$ místo $+\frac{1}{(m-1)!} \left(\frac{-\pi i}{\omega}\right)^m \sum_{n=0}^{\infty}$

Na str. 31., řádce 17. čti $[(\tau v + n)^2 + u^2]$ místo $[(\tau v + n)^2 + u^2]$.

Na str. 40., řádce 13. uprostřed čti »nad průměrem« místo »na průměrem«.

Na str. 44., řádce 17. čti $\sum_n' \frac{e^{2\pi i \cdot n\tau}}{c^s (n^2)^s}$ místo $\sum_n' \frac{c^{2\pi i \cdot n\tau}}{c^s (n^2)^s}$.

Na str. 46., řádce 6. z dola čti $K(a', b', c'; \sigma', \tau'; s)$ místo $K(a, b, c; \sigma, \tau; s)$.

Na str. 52., řádce 3. z dola čti na konci $-\frac{2}{1+r}$) místo $-\frac{1}{1+r}$).

Na str. 54., řádce 7. shora čti $\sum_{k=0}^{[-r]}$ místo $\sum_{k=0}^{[r]}$.
