Matyáš Lerch

Příspěvky k theorii funkcí elliptických, nekonečných řad a integrálů omezených. [II.]

Rozpravy Čes. akademie, II. tř., 1 (1892), č. 25, 483–486

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501720

ROZPRAVY
ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ V PRAZE.

ROČNÍK I. TŘÍDA II. ČÍSLO 25.

PŘÍSPĚVKY K THEORII FUNKCÍ ELLIPTICKÝCH, NEKONEČNÝCH ŘAD A INTEGRÁLŮ OMEZENÝCH.

(POKRAČOVÁNÍ.)

NAPSAL

M. LERCH.

PŘEDLOŽENO DNE 13. LISTOPADU 1891.

V PRAZE.
NÁKLADEM ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ.

1892.

Tiskem J. Otty v Praze.

II.

Při problému rovnováhy elektrické na dvou vodivých koulích vyskytují se řady tvaru *)

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{\sqrt{a + b q^{2n} + c q^{4n}}},$$

kde q je ryzý kladný zlomek; tyto řady jsou jen zvláštní případ výrazů tvaru

$$(1) \qquad S = \sum_{n=1}^{\infty} q^n \left(a + b q^{2n} + c q^{4n}\right)^{\sigma},$$

které chceme redukovati na integraci transcendent elliptických.

Rozviňme za tím účelem jednotlivé členy řady (1) dle vzorce

$$(a + bx + cx^2)^{\sigma} = \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^m,$$

i obdržíme tak dvojnásobnou řadu nekonečnou

$$S = \sum_{m,n} C_m q^{(2m+1)n},$$

která konverguje absolutně, jeli q dosti malé.

Provedemeli v ní sčítání vůči n, obdržíme

$$S = \sum_{m=0}^{\infty} C_m \frac{q^{2m+1}}{1 - q^{2m+1}}.$$

Tento výraz přetvoří se snadno v omezený integrál na základě následujícího principu, s nímž se v pozdějších článcích opětně shledáme:

Konvergujíli řady

$$F(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} A_\nu e^{2\nu x \pi i}, \quad \varphi(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu e^{-2\nu x \pi i}$$

stejnoměrně v celém intervallu $(0 \ldots 1)$, bude

$$\int_0^1 F(x)\, \varphi(x)\, dx = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu a_\nu.$$

---

*) Viz na př. Mathieu, Théorie du potentiel et ses applications à l'électrostatique et au magnétisme; Paris, 1886. Díl II., str. 61.

1*

Pro stanovení součtu S bude třeba tento přepsati na tvar

$$S = \sum_{m=0}^{\infty} C_m \gamma^m \cdot \frac{\gamma^{-m} q^{2m+1}}{1 - q^{2m+1}},$$

a klásti

$$(a) \qquad F(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\gamma^{-m} q^{2m+1}}{1 - q^{2m+1}} e^{2mx\pi i},$$

$$(b) \qquad \varphi(x) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m \gamma^m e^{-2mx\pi i},$$

a γ voliti tak, aby obě řady konvergovaly stejnoměrně. Avšak z poslední rovnice plyne patrně

$$\varphi(x) = (a + b\gamma e^{-2x\pi i} + c\gamma^2 e^{-4x\pi i})^\sigma,$$

takže bude

$$(c) \qquad S = \int_0^1 F(x)\,(a + b\gamma e^{-2x\pi i} + c\gamma^2 e^{-4x\pi i})^\sigma\, dx,$$

i nezbývá leč vyjádřiti hodnotu řady (a) transcendentami elliptickými.

K tomu cíli vyšetřme řadu

$$(a') \qquad \Phi(u) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2mu\pi i}}{1 - q^{2m+1}};$$

znamenáme-li $q = e^{\tau\pi i}$, bude konvergenční podmínka vyžadovati $0 < \mathrm{Im}.u < \mathrm{Im}.\tau$. Rozložme tuto řadu ve dvě sestávající ze členů $m \geqq 0$ a z členů $m < 0$,

$$\Phi(u) = \sum_0^{\infty} \frac{e^{2mu\pi i}}{1 - q^{2m+1}} - \sum_1^{\infty} \frac{q^{2m-1} e^{-2mu\pi i}}{1 - q^{2m-1}},$$

a rozviňme členy obou částí v řady geometrické; i vzniknou tak absolutně konvergentní výrazy

$$\Phi(u) = \sum_{m,n} q^{(2m+1)n} e^{2mu\pi i} - \sum_{m',n'} q^{(2m'-1)n'} e^{-2m'u\pi i},$$

$$\begin{pmatrix} m, n = 0, 1, 2, 3, \ldots \\ m', n' = 1, 2, 3, 4, \ldots \end{pmatrix};$$

provedeme-li v obou dvojnásobných řadách sčítání vůči m, obdržíme

$$\Phi(u) = \sum_0^{\infty} \frac{q^n}{1 - q^{2n} e^{2u\pi i}} - \sum_1^{\infty} \frac{q^n e^{-2u\pi i}}{1 - q^{2n} e^{-2u\pi i}},$$

t. j.

$$\Phi(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{q^n}{1 - q^{2n} e^{2u\pi i}}.$$

Uvážímeli, že tato funkce jest jednoznačná v celé rovině (u), že hoví rovnicím

$$\Phi(u+1) = \Phi(u)\,, \qquad \Phi(u+\tau) = e^{-\tau\pi i}\Phi(u)\,,$$

a že součin $\vartheta_1(u\,|\,\tau)\,\Phi(u)$ je celistvá funkce transcendentní hovící podmínkám

$$\psi(u+1) = -\psi(u)\,, \qquad \psi(u+\tau) = -\psi(u)\,e^{-\pi i(2u+2\tau)}\,,$$

obdržíme přihlédnuvše zároveň k hodnotě residua při $u = 0$:

$$\Phi(u) = -\frac{\vartheta'_1}{2\pi i}\,\frac{\vartheta_1\left(u+\frac{\tau}{2}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\tau}{2}\right)\vartheta_1(u)}$$

čili

$$(a'') \qquad \Phi(u) = \tfrac{1}{2}\,i\,\vartheta_2\,\vartheta_3\,\frac{\vartheta_0(u)}{\vartheta_1(u)}\,e^{-u\pi i}\,.$$

Porovnáním vzorců (a), (a') však máme

$$F(x) = q\,\Phi(x-\alpha+\tau)\,, \qquad \text{kde } e^{2\alpha\pi i} = \gamma\,,$$

a tedy dle (a''):

$$F(x) = \tfrac{1}{2}\,i\,\vartheta_2\,\vartheta_3\,\frac{\vartheta_0(x-\alpha)}{\vartheta_1(x-\alpha)}\,e^{2\pi i(a-x)}\,,$$

takže hledaný vztah zní

$$(2) \qquad \left\{\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} q^n\left(a+bq^{2n}+cq^{4n}\right)^{\sigma} \\ &= \tfrac{1}{2}\,i\,\vartheta_2\,\vartheta_3\int_0^1 \frac{\vartheta_0(x-\alpha)}{\vartheta_1(x-\alpha)}\,e^{2\pi i(a-x)}\left(a+b\,e^{2\pi i(a-x)}+c\,e^{4\pi\sigma i(a-x)}\right)^{\sigma}dx \end{aligned}\right.$$

čili

$$= \tfrac{1}{2}\,i\,\vartheta_2\,\vartheta_3\int_{-a}^{1-a} \frac{\vartheta_0(x)}{\vartheta_1(x)}\,e^{-2x\pi i}\left(a+b\,e^{-2x\pi i}+c\,e^{-4x\pi i}\right)^{\sigma}dx\,.$$

Při tom značí α veličinu podrobenou jediné té podmínce, aby řady (a), (b) konvergovaly pro $\gamma = e^{2\alpha\pi i}$ při realném x. Prvá z nich konverguje, jakmile

$$0 < \operatorname{Im}.\alpha < \operatorname{Im}.\tau\,,$$

konvergence druhé řady pak vyžaduje, aby $\gamma = e^{2\alpha\pi i}$ bylo absolutně menší než kořeny rovnice kvadratické

$$a + bx + cx^2 = 0\,,$$

t. j.

$$\left|e^{2\alpha\pi i}\right| < \left|\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2c}\right|.$$

Vzorec (2) je tedy správným, jsouli splněny podmínky

$$(3) \qquad \begin{cases} |e^{2a\pi i}| < \left| \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c} \right| . \\ 0 < \text{Im.}\, \alpha < \text{Im.}\, \tau\, , \end{cases}$$

takže se ho dá užiti jen tehdy, jeli

$$(3^a) \qquad |q^2| < \left| \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c} \right| .$$

Podmínkám těm lze vyhověti při všech q, jsouli a, b, c realné a $b^2 - 4ac < 0$.

Příbuznou povahu mají výrazy, k nimž při řešení zmíněného problému elektrostatického dospěl p. *Mehler**) a které jinou cestou verifikoval *Heine*.**)

Zcela podobnou methodou dal by se řešiti úkol převedení řady obecnější

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n (a + bq^{2n} + cq^{4n})^{\sigma} e^{2nu\pi i}$$

na tvar integrálu, kterýžto problém ponechán buď jednomu z článků následujících této práce.

*) Zur Theorie der Vertheilung der Elektricität in leitenden Körpern. Jahresbericht des Elbinger Gymnasiums, 1879. Otištěno v Mathematische Annalen, sv. 18.

**) Handbuch der Kugelfunctionen, 2. vyd., II. díl, str. 57 a násl.