Matyáš Lerch

Zobecnění vzorce Frullaniova

Rozpravy Čes. akademie, II. tř., 1 (1891), č. 8, 125–131

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501706

ZOBECNĚNÍ VZORCE FRULLANIOVA.

NAPSAL **M. LERCH.**

PŘEDLOŽENO DNE 30. ZÁŘÍ 1891.

1. Účelem krátké této úvahy jest dokázati a zobecniti vzorec *Frullani*ův

$$(1)\qquad \int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx=\left[f(0)-f(\infty)\right]\log\frac{b}{a},$$

jehož zvláštní případ

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{a}\,dx=\log\frac{b}{a}$$

má na př. v theorii integrálů Eulerových svůj význam.

Abychom dokázali vzorec (1), uvažme, že levá strana jest limitou výrazu

$$\lim_{\varepsilon=0,\ N=\infty}\int_\varepsilon^N \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx,$$

jejž lze též psáti

$$\lim_{\varepsilon=0,\ N=\infty}\left[\int_\varepsilon^N f(ax)\frac{dx}{x}-\int_\varepsilon^N f(bx)\frac{dx}{x}\right].$$

Transformujeme-li tyto integrály substitucemi x za ax, resp. za bx, obdrží náš výraz tento tvar:

$$\lim_{\varepsilon=0,\ N=\infty}\left[\int_{a\varepsilon}^{aN} f(x)\frac{dx}{x}-\int_{b\varepsilon}^{bN} f(bx)\frac{dx}{x}\right].$$

Předpokládajíce $0<a<b$, rozložme prvý i druhý integrál ve dva jiné:

$$\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}+\int_{b\varepsilon}^{aN},\qquad \int_{b\varepsilon}^{aN}+\int_{aN}^{bN};$$

pak v rozdílu zruší se oba členy prostřední a zbude jakožto hodnota integrálu (1):

$$\lim_{\varepsilon=0,\ N=\infty}\left(\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} f(x)\frac{dx}{x}-\int_{aN}^{bN} f(x)\frac{dx}{x}\right).$$

Dosazením εx, resp. $N x$ za x do těchto integrálů obdrží výraz tento tvar:

$$\lim_{\varepsilon = 0,\, N = \infty} \int_a^b \frac{f(\varepsilon x) - f(N x)}{x}\, dx.$$

Jelikož a, b jsou kladné, jest funkce $\frac{1}{x}$ konečnou a spojitou v mezeře $(a \dots b)$. *Předpokládáme-li o funkci $f(x)$, že jest na místech $x = 0$, $x = \infty$ spojitou*, máme

$$f(\varepsilon x) = f(0) + \delta,$$
$$f(N x) = f(\infty) + \delta',$$

kde veličiny δ, δ' jsou tak malé, jak libo, jsou-li jen veličny ε, $\frac{1}{N}$ dosti malé.

Dle toho bude pak výraz (1) roven veličině

$$\left[f(0) - f(\infty)\right] \int_a^b \frac{dx}{x} + \lim_{\varepsilon = 0,\, N = \infty} \int_a^b \frac{\delta - \delta'}{x}\, dx.$$

a poněvadž z uvedené vlastnosti funkcí δ a δ' plyne, že poslední limita jest nullou, máme konečně jakožto hodnotu integrálu (1) výraz

$$\left[f(0) - f(\infty)\right] \int_a^b \frac{dx}{x},$$

jenž se právě rovná pravé straně rovnice (1), která tedy tím jest dokázána.

Podotkněme ještě, že uvedený důkaz předpokládá u funkce $f(x)$ pouze schopnosť integrace (integrabilitu) a spojitosť její na místech $x = 0$, $x = \infty$.

2. Klademe-li v integrálu Frullaniově $a = 1$, $b = c$, což není nikterak obecnosti na újmu $\left(\text{ano lze vždy klásti } a x = z, \frac{b}{a} = c\right)$, obdržíme vzorec

$$\int_0^\infty \left(\frac{f(x)}{x} - \frac{f(c x)}{c x}\, c\right) dx = \left[f(0) - f(\infty)\right] \log c;$$

levá strana jest však pouhým zvláštním případem integrálu

$$J = \int_a^b \left[f(x) - f(\varphi)\, \varphi'(x)\right] dx,$$

a sice vznikne odtud dosazením $c x$ za $\varphi(x)$, $\frac{f(x)}{x}$ za $f(x)$ a volbou $a = 0$, $b = \infty$.

My vyčíslíme integrál J za supposice, že $\varphi(x)$ znamená konečnou a spojitou funkci na mezeře $(a \dots . b)$ (kde $a < b$), která hoví podmínkám $\varphi(a) = a$, $\varphi(b) = b$, a má v této mezeře kladnou derivaci $\varphi'(x)$, jež je v ní schopnou integrace.

Funkce $f(x)$ jako v případě předešlém má býti podrobena pouze té podmínce, aby připouštěla integraci v mezeře $(a \ldots b)$ a aby výrazy

$$\lim_{x=a} (x-a) f(x) = A, \quad \lim_{x=b} (x-b) f(x) = B$$

byly určité konečné veličiny.

Píšeme-li za J limitu

$$J = \lim_{\varepsilon=0,\ \varepsilon'=0} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon'} \left[f(x) - f(\varphi)\varphi'(x) \right] dx$$

$$= \lim_{\varepsilon=0,\ \varepsilon'=0} \left\{ \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon'} f(x)\, dx - \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon'} f(\varphi)\, d\varphi(x) \right\},$$

a transformujeme druhý integrál substitucí x za $\varphi(x)$, máme:

$$J = \lim_{\varepsilon=0,\ \varepsilon'=0} \left\{ \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon'} f(x)\, dx - \int_{\varphi(a+\varepsilon)}^{\varphi(b-\varepsilon')} f(x) dx \right\},$$

čili po jednoduché transformaci pravé strany:

$$J = \lim_{\varepsilon=0,\ \varepsilon'=0} \left\{ \int_{a+\varepsilon}^{\varphi(a+\varepsilon)} f(x)\, dx - \int_{b-\varepsilon'}^{\varphi(b-\varepsilon')} f(x) dx \right\}.$$

Znamenáme-li $g(x) = (x-a) f(x)$, bude existovati $\lim_{x=a} g(x) = A$, a my obdržíme, kladouce $g(x) = A + \vartheta(x)$,

$$\int_{a+\varepsilon}^{\varphi(a+\varepsilon)} f(x)\, dx = \int_{a+\varepsilon}^{\varphi(a+\varepsilon)} \frac{g(x) dx}{x-a} = A \int_{a+\varepsilon}^{\varphi(a+\varepsilon)} \frac{dx}{x-a} + \int_{a+\varepsilon}^{\varphi(a+\varepsilon)} \frac{\vartheta(x)\, dx}{x-a}$$

Funkce $\vartheta(x)$ je nekonečně malá v nekonečně blízkém sousedství místa $x = a$, a poněvadž intervall $[a + \varepsilon \ldots \varphi(a+\varepsilon)]$ je pro malá ε velmi malý a blízký místu a, bude $\vartheta(x)$ nekonečně malou zároveň s ε; je-li ϑ_ε největší absolutní hodnota této funkce v mezeře $[a + \varepsilon \ldots \varphi(a+\varepsilon)]$, máme patrně

$$\int_{a+\varepsilon}^{\varphi(a+\varepsilon)} f(x)\, dx = \left(A + \Theta\vartheta_\varepsilon\right) \log \frac{\varphi(a+\varepsilon)-a}{\varepsilon},$$

kde Θ značí pravý zlomek, t. j. $-1 \leqq \Theta \leqq 1$.

Odtud máme

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_{a+\varepsilon}^{\varphi(a+\varepsilon)} f(x)\, dx = A \log \left(\lim_{\varepsilon=0} \frac{\varphi(a+\varepsilon)-a}{\varepsilon} \right).$$

Jelikož dle supposice $\varphi(a) = a$, bude

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{\varphi(a+\varepsilon)-a}{\varepsilon} = \varphi'(a),$$

a tedy konečně

$$\lim_{\varepsilon = 0} \int_{a+\varepsilon}^{\varphi(a+\varepsilon)} f(x)\,dx = A \log \varphi'(a).$$

Zcela podobně obdržíme

$$\lim_{\varepsilon' = 0} \int_{b-\varepsilon'}^{\varphi(b-\varepsilon')} f(x)\,dx = B \log \varphi'(b),$$

takže hodnota integrálu J bude

$$(2) \qquad \int_a^b \left[f(x) - f(\varphi)\,\varphi'(x)\right] dx = A \log \varphi'(a) - B \log \varphi'(b),$$

kde, jak výše poznamenáno,

$$(3) \qquad A = \lim_{x=a} (x-a)\,f(x), \qquad B = \lim_{x=b} (x-b)\,f(x).$$

Že tu ve Frullaniově případě $\varphi(x) = cx$, $a = 0$, $b = \infty$ pravá strana obdrží tvar $[f(0) - f(\infty)] \log c$, je přímo patrno.

Správnosť vzorce (2) jest podmíněna existencí limit (3).

Je-li však $\varphi'(a) = 1$, lze připustiti $A = \infty$, an tu prvý člen pravé strany se objeví ve tvaru neurčitém $\infty \,.\, 0$.

V tomto případě $\varphi'(a) = 1$ možno předpokládati pouze existenci limity

$$(3') \qquad A' = \lim_{x=a} (x-a)^2 f(x),$$

jestliže existuje druhá derivace funkce $\varphi(x)$ a jest spojitou v místě $x = a$. Neb pak bude při $h(x) = (x-a)^2 f(x)$

$$\int_{a+\varepsilon}^{\varphi(a+\varepsilon)} f(x)\,dx = \int_{a+\varepsilon}^{\varphi(a+\varepsilon)} \frac{h(x)\,dx}{(x-a)^2}$$

a značí-li ε_0 určitou hodnotu z mezery $[\varepsilon \ldots \varphi(a+\varepsilon) - a]$, bude pravá strana míti hodnotu*)

$$h(a+\varepsilon_0) \int_{a+\varepsilon}^{\varphi(a+\varepsilon)} \frac{dx}{(x-a)^2} = h(a+\varepsilon_0) \left[\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varphi(a+\varepsilon) - a}\right]$$

$$= h(a+\varepsilon_0)\, \frac{\varphi(a+\varepsilon) - \varphi(a) - \varphi'(a)\,\varepsilon}{\varepsilon\,[\varphi(a+\varepsilon) - \varphi(a)]},$$

kde brán zřetel k okolnostem $\varphi(a) = a$, $\varphi'(a) = 1$.

* Není-li funkce $f(x) \,.\, (x-a)^2 = h(x)$ spojitou v sousedství bodu $x = a$, dlužno výrazem $h(a+\varepsilon_0)$ rozuměti veličinu obsaženou mezi horní a dolní mezí funkce $h(x)$ na intervallu $[a+\varepsilon \ldots \varphi(a+\varepsilon)]$.

Tato veličina však má, jak známo, za limitu

$$h(a)\ \frac{\varphi''(a)}{2\,.\,\varphi'(a)} = \frac{1}{2} A'\,\varphi''(a)$$

a tedy bude v našem případě

$$(2') \qquad \lim_{\varepsilon = 0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{\varphi(a+\varepsilon)} f(x)\,dx = \frac{1}{2} A'\,.\,\varphi''(a),$$

kterýžto výraz nastoupí na místo prvého členu pravé strany v (2), je-li $\varphi'(a) = 1$, $\lim\limits_{x=a} (x-a)^2 f(x) = A'$.

3. Budiž nyní funkce $\varphi(x)$ taková, že rovnice $\varphi(x) - x = 0$ má v jistém intervallu určitý počet kořenů $a_1 < a_2 < \ldots < a_m < \ldots$ a že v tomto intervallu derivace $\varphi'(x)$ je kladnou. Dále buď $F(x)$ funkce nekonečná pouze na místech $a_1, a_2, \ldots$, a to ve stupni prvém; znamenáme-li pak

$$\lim_{x=a_\nu} F(x)(x-a_\nu) = A_\nu,$$

bude dle věty právě dokázané

$$\int\limits_{a_\mu}^{a_\nu} \Big[F(x) - F(\varphi)\,\varphi'(x) \Big]\,dx = A_\mu \log \varphi'(a_\mu) - A_{\mu+1} \log \varphi'(A_{\mu+1});$$

sečteme-li tyto výsledky pro $\mu = m, m+1, \ldots n-1$, máme

$$(4) \qquad \int\limits_{a_m}^{a_n} \Big[F(x) - F(\varphi)\,\varphi'(x) \Big]\,dx = A_m \log \varphi'(a_m) - A_n \log \varphi'(a_n).$$

Jakožto příklad volme zde

$$F(x) = \frac{\Phi(x)}{\psi(x) - x},$$

kde funkce ψ je dána rovnicí $\varphi(\psi) = x$, a $\Phi(x)$ je konečná v mezích integrace. Tu nám dá rovnice (4)

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\int\limits_{a_m}^{a_n} \left[\frac{\Phi(x)}{\psi(x) - x} + \frac{\Phi(\varphi)\,\varphi'(x)}{\varphi(x) - x} \right] dx \\ &= \Phi(a_m)\,\frac{\log \varphi'(a_m)}{\psi'(a_m) - 1} - \Phi(a_n)\,\frac{\log \varphi'(a_n)}{\psi'(a_n) - 1}, \end{aligned} \right.$$

kde, jak zřejmo, $\psi'(a_\nu) = \dfrac{1}{\varphi'(a_\nu)}$.

Frullaniův vzorec (1) hodí se k vyjadřování limit a funkcí přetržitých; neboť pravá strana zní $\left[\lim_{x=\infty} f(x) - f(0)\right] \log \frac{a}{b}$, a tedy bude

$$(1^a) \qquad \lim_{x=\infty} f(x) = f(0) + \frac{1}{\log a} \int_0^\infty \frac{f(ax) - f(x)}{x} dx$$

Volme na př. $f(x) = \left(\sin^2 \frac{u\pi}{2}\right)^x$; pak integrál

$$\frac{1}{\log a} \int_0^\infty \frac{\left(\sin^2 \frac{u\pi}{2}\right)^{ax} - \left(\sin^2 \frac{u\pi}{2}\right)^x}{x} dx$$

má hodnotu 0, a jen v tom případě se rovná 1, kdy u je celistvé číslo liché. Dále výraz

$$\text{sgn.}\, u = \frac{1}{\log a} \int_0^\infty \left(\frac{e^{aux} - 1}{e^{aux} + 1} - \frac{e^{ux} - 1}{e^{ux} + 1}\right) \frac{dx}{x}$$

rovná se 1, 0, — 1, jak jest u kladné, 0, neb záporné, t. j. integrál ten podobně jako

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin ux}{x} dx$$

vyjadřuje znamení veličiny u (proto označení sgn. u).

Sur une extension de la formule de Frullani

Dans ce petit article nous avons développé une démonstration de la formule de Frullani

$$\int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = [f(0) - f(\infty)] \log \frac{b}{a}$$

et d'une formule plus générale

$$\int_a^b [f(x) - f(\varphi)\, \varphi'(x)]\, dx = A \log \varphi'(a) - B \log \varphi'(b),$$

où

$$A = \lim_{x=a} (x - a) f(x), \qquad B = \lim_{x=b} (x - b) f(x),$$

et où l'on suppose que la dérivée $\varphi'(x)$ est positive dans l'intervalle $(a \dots b)$.

En designant ensuite par $a_1, a_2, a_3 \ldots$ les racines de l'équation $\varphi(x) - x = 0$ nous en avons signalé cette conséquence

$$(4) \quad \int_{a_m}^{a_n} \left[F(x) - F(\varphi)\,\varphi'(x) \right] dx = A_m \log \varphi'(a_m) - A_n \log \varphi'(a_n),$$

où

$$A_\alpha = \lim_{x = a_\alpha} (x - a_\alpha)\, F(x),$$

et en prenant

$$F(x) = \frac{\Phi(x)}{\psi(x) - x},$$

où $\psi(x)$ est la fonction *inverse* de $\varphi(x)$ [c'est à dire $\varphi(\psi) = x$], et Φ étant finie, nous avons conclu la formule

$$\int_{a_m}^{a_n} \left[\frac{\Phi(x)}{\psi(x) - x} + \frac{\Phi(\varphi)\,\varphi'(x)}{\varphi(x) - x} \right] dx$$

$$= \Phi(a_m) \frac{\log \varphi'(a_m)}{\psi'(a_m) - 1} - \Phi(a_n) \frac{\log \varphi'(a_n)}{\psi'(a_n) - 1}.$$

La note termine avec cette remarque évidente que la formule de Frullani donne l'expression des limites sous la forme des intégrales; nous avons signalé en particulier l'expression

$$\operatorname{sgn} u = \frac{1}{\log a} \int_0^\infty \left(\frac{e^{aux} - 1}{e^{aux} + 1} - \frac{e^{ux} - 1}{e^{ux} + 1} \right) \frac{dx}{x}$$

qui représente le signe de la quantité réelle u; une autre intégrale

$$\frac{1}{\log a} \int_0^\infty \frac{\left(\sin^2 \frac{u\pi}{2} \right)^{ax} - \left(\sin^2 \frac{u\pi}{2} \right)^{x}}{x}\, dx$$

est égale à l'unité, si u est un entier impair et à zéro dans tous les autres cas.