Matyáš Lerch
Elementárné stanovení asymptotické hodnoty Legendrových mnohočlenů

Rozpravy Čes. akademie, II. tř., 1 (1891), č. 8, 149–158

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501686

ELEMENTÁRNÉ STANOVENÍ

ASYMPTOTICKÉ HODNOTY LEGENDREOVÝCH MNOHOČLENŮ.

NAPSAL **M. LERCH.**

PŘEDLOŽENO DNE 10. ŘÍJNA 1891.

1. Maclaurinovským rozvojem funkce proměnné α

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}}=1+X_1\alpha+X_2\alpha^2+\ldots+X_n\alpha^n+\ldots. \tag{1}$$

definované polynomy $X_1, X_2, \ldots X_n, \ldots$ slují *Legendre*ovými; je tu totiž X_n celistvou funkcí x stupně n, a sice sudou neb lichou, jak jest n sudé neb liché.

Značí-li ϱ_1, ϱ_2 kořeny rovnice kvadratické

$$1-2\alpha x+\alpha^2=0,$$

takže $\varrho_1\,\varrho_2=1$, bude

$$1-2\alpha x+\alpha^2=(1-\varrho_1\alpha)(1-\varrho_2\alpha)$$

a rovnici (1) lze psáti

$$\frac{1}{\sqrt{1-\varrho_1\alpha}\sqrt{1-\varrho_2\alpha}}=\sum_{n=0}^{\infty}X_n\alpha^n\,, \tag{1'}$$

kde za odmocniny $\sqrt{1-\varrho_1\alpha}$, $\sqrt{1-\varrho_2\alpha}$ dlužno voliti t. zv. hodnoty *hlavní*, jichž části realné jsou kladny.

Úkolem naším bude odvoditi vzorec, kterým se dá X_n pro veliká n sblíženě vystihnouti.

Za tím účelem differencujme rovnici (1) neb (1'):

$$\frac{x-\alpha}{(1-\varrho_1\alpha)^{\frac{3}{2}}(1-\varrho_2\alpha)^{\frac{3}{2}}}=\sum_{n=1}^{\infty}nX_n\alpha^{n-1}=V\,,$$

a utvořme rozvoj výrazu

$$\frac{V}{(1-\varrho_2\alpha)^{\frac{1}{2}}}=\frac{x-\alpha}{(1-\varrho_2\alpha)^2(1-\varrho_1\alpha)^{\frac{3}{2}}}=\frac{a}{(1-\varrho_2\alpha)^2}+\frac{a'}{1-\varrho_2\alpha}+U\,,$$

kde U jest řada obsahující vesměs kladné mocnosti veličiny $1-\varrho_2\,\alpha$. *Při tom předpokládáme, že* $|\varrho_1|<1<|\varrho_2|$, takže U jest holomorfní uvnitř kruhu $|\alpha|=|\varrho_2|$, a řada tamtéž absolutně konverguje. Veličina a, jež jediné nás bude zajímati, má hodnotu

$$\lim_{\alpha=\frac{1}{\varrho_2}}V(1-\varrho_2\alpha)^{\frac{3}{2}}=\lim_{\alpha=\varrho_1}\frac{x-\alpha}{(1-\varrho_1\alpha)^{\frac{3}{2}}},$$

t. j.

$$(2) \qquad a = \frac{x - \varrho_1}{(1-\varrho_1^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Funkci U lze rozvinouti v řadu

$$U = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \alpha^\nu$$

jež konverguje absolutně uvnitř kruhu $|\alpha| = |\varrho_2|$, a tedy též pro $\alpha = \varrho_1$; binomialní řada $\sqrt{1-\varrho_2\alpha} = \Sigma c'_\nu \alpha^\nu$ konverguje pak ještě na místě $\alpha = \varrho_1$, a sice absolutně, takže součin

$$U\sqrt{1-\varrho_2\alpha} = \sum_{\mu,\nu} c_\mu c'_\nu \alpha^{\mu+\nu}$$

bude dvojnásobnou řadou absolutně konvergentní.

Odtud plyne vůči nerovnosti

$$\Big|\sum_{\mu+\nu=n} |c_\mu c'_\nu| \leqq \sum_{\mu+\nu=n} c_\mu c'_\nu\Big|,$$

že též mocninový rozvoj

$$U\sqrt{1-\varrho_2\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \alpha^n$$

konverguje absolutně na místě $\alpha = \varrho_1$.

Poněvadž pak

$$V = \frac{a}{(1-\varrho_2\alpha)^{\frac{3}{2}}} + \frac{a'}{(1-\varrho_2\alpha)^{\frac{1}{2}}} + U\sqrt{1-\varrho_2\alpha},$$

obdržíme dosazením rozvojů za jednotlivé členy:

$$\sum n X_n \alpha^{n-1} = \sum \frac{3.5.7\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n-2)} a\varrho_2^{n-1}\alpha^{n-1}$$

$$+ \sum \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots(2n-2)} a'\varrho_2^{n-1}\alpha^{n-1}$$

$$+ \sum a_n \alpha^n$$

a odtud porovnáním součinitelů při α^{n-1}:

$$\varrho_1^{n-1} n X_n = \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots(2n-2)} [(2n-1)a + a'] + a_{n-1}\varrho_1^{n-1}$$

Tu jest ale, jak známo,*

$$\frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots(2n-2)} = \frac{1+\delta_n}{\sqrt{n\pi}}, \quad \lim_{n=\infty} \delta_n = 0,$$

a tedy

$$\varrho_1^{n-1}\, n X_n = 2a\sqrt{\frac{n}{\pi}}\left(1-\frac{1}{2n}\right)(1+\delta_n) + \left[\frac{a'(1+\delta_n)}{\sqrt{n\pi}} + a_{n-1}\,\varrho_1^{n-1}\right].$$

Veličina v závorce [ ] blíží se nulle pro veliká n a tedy lze ji psáti ve tvaru $2a\sqrt{\frac{n}{\pi}}\,\delta'_n$, kde $\lim\limits_{n=\infty} \delta'_n = 0$; bude tedy

$$(\alpha) \qquad \varrho_1^{n-1}\, n X_n = 2a\sqrt{\frac{n}{\pi}}(1+\varepsilon_n),$$

kde položeno

$$1+\varepsilon_n = \left(1-\frac{1}{2n}\right)(1+\delta_n) + \delta'_n,$$

a tedy

$$\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0.$$

Klademeli, jak z kvadratické rovnice plyne řešením,

$$\varrho_1 = x - \sqrt{x^2-1},\ \varrho_2 = x + \sqrt{x^2-1},$$

takže dlužno předpokládati

$$(4) \qquad |x+\sqrt{x^2-1}| > 1,$$

bude

$$a = \frac{x-\varrho_1}{(1-\varrho_1^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{(1-\varrho_1^2)^{\frac{3}{2}}},$$

kde jmenovatel má realnou část kladnou. Avšak

$$1-\varrho_1^2 = 2\varrho_1(\varrho_2-x) = 2\varrho_1\sqrt{x^2-1},$$

tedy

$$(1-\varrho_1^2)^{\frac{3}{2}} = 2\varrho_1\sqrt{x^2-1}\sqrt{2\varrho_1\sqrt{x^2-1}},$$

kde odmocnina má realnou část kladnou. Z toho plyne

$$a = \frac{\varrho_2}{2\sqrt{2}\sqrt{\varrho_1\sqrt{x^2-1}}},$$

kde jmenovatel je kladný ve své části realné.

---

* Viz na př. Cours de M. Hermite, 4. vyd., 1891 (Paříž, A. Hermann), p. 116, kde výsledek ten dokázán způsobem velmi zajímavým.

Dle toho obdrží výsledek α) tvar

$$X_n = \frac{\varrho_2^{\,n}}{\sqrt{2n\pi}\,\sqrt{\varrho_1\,\sqrt{x^2-1}}}\,(1+\varepsilon_n),$$

aneb

$$(3)\qquad X_n = \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^n}{\sqrt{2n\pi}}\cdot\sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}}\,(1+\varepsilon_n),$$

s podmínkami

$$\left|\,x+\sqrt{x^2-1}\,\right| > 1,\ \text{real. č.}\ \sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x_2-1}}} > 0,$$

při čemž ε_n značí neznámou veličinu, která jest ale pro veliká n velmi malou.

2. Vzorec (3) vyjadřuje t. z. asymptotickou hodnotu funkce X_n (pro veliká n). Výsledek ten lze rozmanitým způsobem zobecniti. Tak na př. můžeme zcela podobnou cestou dospěti k asymptotické hodnotě veličiny Y_n definované rozvojem

$$(4)\qquad \frac{1}{\sqrt{(1-\varrho_1\alpha)(1-\varrho_2\alpha)\ldots\left(1-\varrho_p\alpha\right)}} = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n\,\alpha^n,$$

kde $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_p$ jsou konstanty, z nichž ϱ_1 má největší a ϱ_2 nejblíže menší absolutní hodnotu.

Píšemeli

$$\prod_{\sigma=1}^{p}(1-\varrho_\sigma\,\alpha) = 1 + r_1\,\alpha + r_2\,\alpha^2 + \ldots + r_p\,\alpha^p,$$

obdržíme differencováním ze (4)

$$-\frac{r_1 + 2r_2\alpha + 3r_3\alpha^2 + \ldots + p\,r_p\,\alpha^{p-1}}{\prod_{\sigma=1}^{p}(1-\varrho_\sigma\,\alpha)^{\frac{3}{2}}} = 2\sum n\,Y_n\,\alpha^{n-1} = V.$$

Podíl

$$\frac{V}{\sqrt{1-\varrho_1\alpha}}$$

jest jednoznačným uvnitř kruhu $|\alpha| = \left|\frac{1}{\varrho_2}\right|$, uvnitř něhož leží též bod $\frac{1}{\varrho_1}$. Ustanovímeli tedy vhodně konstanty a, a', bude rozdíl

$$U = \frac{V}{\sqrt{1-\varrho_1\alpha}} - \frac{a}{(1-\varrho_1\alpha)^2} - \frac{a'}{1-\varrho_1\alpha}$$

holomorfní funkcí uvnitř tohoto kruhu, a dá se tedy vyjádřiti řadou $\Sigma\, c_\nu\,\alpha^\nu$ absolutně konvergentní uvnitř tohoto oboru. Z toho se snadno odvodí, že rozvoj funkce

$$U\sqrt{1-\varrho_1\alpha} = \sum a_n\,\alpha^n$$

konverguje absolutně na místě $\alpha = \frac{1}{\varrho_1}$.

Jelikož pak

$$V = \frac{a}{(1-\varrho_1\alpha)^{\frac{3}{2}}} + \frac{a'}{(1-\varrho_1\alpha)^{\frac{1}{2}}} + U\sqrt{1-\varrho_1\alpha},$$

máme po dosazení rozvojů

$$2\sum n\,Y_n\,\alpha^{n-1} = \sum \frac{3.5.7\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n-2)}\,a\varrho_1^{\,n-1}\alpha^{n-1}$$

$$+\sum \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots(2n-2)}\,a'\varrho_1^{\,n-1}\alpha^{n-1}$$

$$+\sum a_{n-1}\,\alpha^{n-1},$$

a odtud

$$2n\,Y_n = \frac{1.3.5.7\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots(2n-2)}\,\varrho_1^{\,n-1}\left((2n-1)a+a'\right) + a_{n-1};$$

jelikož

$$\sum \frac{a_{n-1}}{\varrho_1^{\,n-1}}$$

konverguje absolutně, soudíme z toho podobně jako předešle, že bude

$$Y_n = \frac{a}{\sqrt{n\pi}}\,\varrho_1^{\,n-1}\,(1+\varepsilon_n),$$

kde $\lim \varepsilon_n = 0$.

Avšak

$$a = \lim_{1-\varrho_1\alpha=0} V.(1-\varrho_1\alpha)^{\frac{3}{2}} = -\frac{r_1+2r_2\varrho_1^{-1}+\ldots+p\,r_p\,\varrho_1^{-p+1}}{\prod\limits_{\sigma=2}^{p}\left(1-\varrho_\sigma\,\varrho_1^{-1}\right)^{\frac{3}{2}}},$$

a tu

$$r_1+2r_2\varrho_1^{-1}+3r_3\varrho_1^{-2}+\ldots+p\,r_p\,\varrho_1^{-p+1} = -\varrho_1\prod_{\sigma=2}^{p}\left(1-\frac{\varrho_\sigma}{\varrho_1}\right),$$

takže

$$a = \varrho_1\prod_{\sigma=2}^{p}\sqrt{\frac{\varrho_1}{\varrho_1-\varrho_\sigma}},$$

kde odmocniny jsou kladny ve svých částech realných.

Máme tedy

$$(4^*)\qquad Y_n = \frac{\varrho_1^{\,n}}{\sqrt{n\pi}}\prod_{\sigma=2}^{p}\sqrt{\frac{\varrho_1}{\varrho_1-\varrho_\sigma}}\,(1+\varepsilon_n),\quad \lim \varepsilon_n = 0\,.$$

Připomeňme, že z rovnice

$$\frac{1}{\sqrt{1+r_1\alpha+r_2\alpha^2+\ldots+r_p\,\alpha^p}} = \sum Y_n\,\alpha^n$$

plyne, že Y_n jest celistvá racionalná funkce veličin $r_1, r_2, \ldots r_p$; ϱ_1 jest reciproká hodnota absolutně nejmenšího kořene rovnice

$$1 + r_1 \alpha + r_2 \alpha^2 + \ldots + r_p \alpha^p = 0;$$

z rovnice (4^*) pak máme

$$\varrho_1 = \lim_{n=\infty} Y_n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n=\infty} \frac{Y_{n+1}}{Y_n}.$$

3. Abychom naznačili jiný způsob generalisace výsledku (3), uvažujme celistvé funkce Z_n definované rozvojem

$$\frac{1}{(1-2\alpha x + \alpha^2)^\mu} = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n \alpha^n. \tag{5}$$

Differencováním obdržíme odtud

$$2\mu \frac{x-\alpha}{(1-2\alpha x+\alpha^2)^{\mu+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} n Z_n \alpha^{n-1} = V.$$

Jmenovatele levé strany možno psáti

$$(1-\varrho_1\alpha)^{\mu+1} (1-\varrho_2\alpha)^{\mu+1},$$

kde ϱ_1, ϱ_2 mají týž význam jako v odstavci 1. a mocnosti značí hodnotu hlavní (danou rozvojem binomialným).

Funkce

$$U = \frac{V}{(1-\varrho_2\alpha)^{1-\mu}} - \frac{a}{(1-\varrho_2\alpha)^2} - \frac{a'}{1-\varrho_1\alpha}$$

bude za supposice $|\varrho_2| > |\varrho_1|$ při vhodně volených a, a' holomorfní uvnitř kruhu $|\alpha| = |\varrho_2|$ a rozvoj Maclaurinovský funkce

$$U(1-\varrho_2\alpha)^{1-\mu} = \sum a_n \alpha^n$$

bude konvergovati absolutně na místě $\alpha = \varrho_1$, předpokládaje, že veličina $1-\mu$ jest realnou a kladnou. Pak ale máme

$$V = \frac{a}{(1-\varrho_1\alpha)^{\mu+1}} + \frac{a'}{(1-\varrho_2\alpha)^\mu} + (1-\varrho_2\alpha)^{1-\mu} U,$$

aneb po dosazení řad a porovnání součinitelů:

$$n Z_n = (-1)^{n-1} \binom{-\mu-1}{n-1} a \varrho_2^{n-1} + (-1)^{n-1} \binom{-\mu}{n-1} a' \varrho_2^{n-1} + a_{n-1}.$$

Avšak

$$\binom{-\mu-1}{n-1} = (-1)^{n-1} \frac{\Gamma(\mu+n)}{\Gamma(n)\Gamma(\mu+1)},$$

$$\binom{-\mu}{n-1} = (-1)^{n-1} \frac{\Gamma(\mu+n-1)}{\Gamma(n)\Gamma(\mu)},$$

a dále:

$$\frac{\Gamma(\mu+n)}{\Gamma(n)} = n^{\mu}\left(1+\delta_n\right), \quad \lim_{n=\infty} \delta_n = 0 .$$

Následovně obdržíme

$$n Z_n = \frac{n^{\mu} a}{\Gamma(\mu+1)} \varrho_2^{\,n-1} \left(1+\delta_n\right) + \frac{n^{\mu-1} a'}{\Gamma(\mu)} \varrho_2^{\,n-1} \left(1+\delta'_n\right) + a_{n-1} ;$$

uvážímeli, že řada

$$\Sigma a_{n-1} \varrho_1^{\,n-1}$$

konverguje absolutně, a tedy

$$\lim a_{n-1} \varrho_1^{\,n-1} = 0,$$

nalezneme při $\mu > 0$ podobně jako v odst. 1.

$$n Z_n = \frac{n^{\mu} a}{\Gamma(\mu+1)} \varrho_2^{\,n-1} \left(1+\varepsilon_n\right), \quad \lim \varepsilon_n = 0 .$$

Dosadímeli sem za a hodnotu

$$a = \lim_{1-\varrho_2 \alpha = 0} V(1-\varrho_2 \alpha)^{\mu+1} = \lim_{\alpha = \varrho_1} 2\mu \frac{x-\alpha}{(1-\varrho_1 \alpha)^{\mu+1}},$$

tedy

$$a = 2\mu \frac{\sqrt{x^2-1}}{(1-\varrho_1^2)^{\mu+1}} = \frac{\mu}{\varrho_1} \frac{1}{(1-\varrho_1^2)^{\mu}},$$

kde ve jmenovateli přicházející mocnosť značí hodnotu hlavní, obdržíme

$$(5^*) \qquad Z_n = \frac{n^{\mu-1}}{2^{\mu}\,\Gamma(\mu)} \left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n \left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}\right)^{\mu} \left(1+\varepsilon_n\right),$$

kde

$$\left| x+\sqrt{x^2-1} \right| > 1 ,$$

a mocnosť

$$\left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}\right)^{\mu}$$

značí hodnotu hlavní.

Jak snadno nalezneme, jest

$$Z_n = (-1)^n \sum_{\sigma=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{-\mu}{n-\sigma} \binom{n-\sigma}{\sigma} (2x)^{n-2\sigma} ,$$

kde $\left[\frac{n}{2}\right]$ značí buď $\frac{n}{2}$ neb $\frac{n-1}{2}$, jak jest n sudé neb liché. Jinak psáno, bude

$$Z_n = \sum_{\sigma=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^{\sigma} \binom{\mu+n-\sigma-1}{n-\sigma} \binom{n-\sigma}{\sigma} (2x)^{n-2\sigma} .$$

Démonstration élémentaire de la formule asymptotique relative aux polynômes de Legendre.

Dans cette note nous avons considéré les polynômes X_n et Z_n donnés par les développements par la série de Maclaurin

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}}=\sum X_n \alpha^n ,$$

$$\frac{1}{(1-2\alpha x+\alpha^2)^{\mu}}=\sum Z_n \alpha^n , \quad 0<\mu<1 ,$$

et avons obtenu leur valeurs asymptotiques sous la forme

$$X_n \backsim \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^n}{\sqrt{2n\pi}} \sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}} ,$$

$$Z_n \backsim \frac{n^{\mu-1}}{2^{\mu}\,\Gamma(\mu)} (x+\sqrt{x^2-1})^n \left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}\right)^{\mu} ,$$

où l'on suppose $|x+\sqrt{x^2-1}|>1$, et les quantités

$$\sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}} , \quad \left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}\right)^{\mu}$$

représentent les valeurs fondamentales des puissances de la quantité

$$\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}$$

qui est bien définie par la condition appelée ci-dessus.

Nous avons démontré aussi que les fonctions entières Y_n données par le développement

$$\frac{1}{\sqrt{1+r_1\alpha+r_2\alpha^2+\ldots+r_p\alpha^p}}=\sum Y_n \alpha^n$$

ont pour valeur asymptotique l'expression

$$\frac{\varrho_1^n}{\sqrt{n\pi}} \prod_{\sigma=2}^{p} \sqrt{\frac{\varrho_1}{\varrho_1-\varrho_\sigma}} ,$$

ϱ_1^{-1} représentant la plus petite racine, en valeur absolue, de l'équation

$$1+r_1\alpha+\ldots+r_p\alpha^p=0$$

et ϱ_σ étant les inverses des autres racines de cette équation.

Nos démonstrations réposent uniquement sur la comparaison des coefficients dans les développements, par la série de Taylor, de certaines fonctions très simples.