Matyáš Lerch

Sur le développement en séries de certaines fonctions arithmétiques

C. R. Acad. Sci., Paris 108 (1889), 171–174

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501672

mètre les lignes comprises entre deux sommets successifs; suivant que les lignes sont dirigées à droite ou à gauche du dernier trait prolongé, elles s'additionnent ou se retranchent. La somme algébrique de ces nombres donne la *mesure* de la figure. De la somme algébrique des nombres marquant les angles, on retranche la somme algébrique des nombres marquant les lignes. La différence doit être un nombre rythmique.

» En général, comme je puis le montrer sur de nombreux spécimens, une forme est d'autant plus (subjectivement) agréable, (physiologiquement) dynamogène, que chacun de ses éléments, angle et ligne, que les sommes algébriques successives, les sommes algébriques finales de ses éléments, sont rythmiques. »

CORRESPONDANCE.

M. le **Secrétaire perpétuel** signale, parmi les pièces imprimées de la Correspondance :

1° Le tome V (Botanique) des publications de la Mission scientifique du cap Horn, 1882-1883. (Présenté par M. A. Milne-Edwards.)

2° La 2e édition du « Recueil d'exercices sur la Mécanique rationnelle » par M. *A. de Saint-Germain*.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur le développement en série de certaines fonctions arithmétiques*. Note de M. **Lerch**, présentée par M. Hermite.

« 1. M. Hermite a donné une formule d'Arithmétique dans laquelle figure une variable continue, à savoir

$$\sum_{\alpha=0}^{n-1} \mathrm{E}\left(x+\frac{\alpha}{n}\right)=\mathrm{E}(nx).$$

» Cette formule a été généralisée par M. Stern sous la forme

$$\sum_{\alpha=0}^{n-1} \mathrm{E}\left(x+\frac{\alpha m}{n}\right)=\tfrac{1}{2}(m-1)(n-1)+\tfrac{1}{2}(d-1)+d\mathrm{E}\left(\frac{nx}{d}\right),$$

où d représente le plus grand commun diviseur des nombres m, n. Ces deux théorèmes peuvent s'établir en employant le développement connu

$$\mathrm{E}^*(x) = x - \tfrac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin 2\nu x\pi}{\nu\pi},$$

où $\mathrm{E}^*(x) = \mathrm{E}(x)$, si x est positif et fractionnaire, et $\mathrm{E}^*(x) = x - \frac{1}{2}$, si x est un entier quelconque; cette fonction s'étend aux valeurs négatives de x par la formule $\mathrm{E}^*(-x) = -\mathrm{E}^*(x) - 1$.

» Des considérations analogues conduisent à plusieurs formules dont je vais signaler quelques-unes. Elles s'obtiennent à l'aide des développements

$$\mathrm{R}^*(x) = -\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{\sin 2\nu x\pi}{\nu\pi}, \qquad \operatorname{sgn}\mathrm{R}^*(x) = 4\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\sin(4\nu+2)x\pi}{(2\nu+1)\pi},$$

$$|\mathrm{R}(x)| = \tfrac{1}{4} - 2\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\cos(4\nu+2)x\pi}{(2\nu+1)^2\pi^2},$$

où $\mathrm{R}(x)$ représente le reste qu'on obtient en retranchant de x un entier le plus approché, de sorte que $-\frac{1}{2} \leqq \mathrm{R}(x) \leqq \frac{1}{2}$, et où en général $\mathrm{R}^*(x) = \mathrm{R}(x)$; seulement on doit prendre $\mathrm{R}^*(x) = 0$, lorsque $x = \frac{1}{2} +$ entier; le symbole $|\mathrm{R}(x)|$ représente la valeur absolue de $\mathrm{R}(x)$ et enfin la quantité $\operatorname{sgn}\mathrm{R}^*(x)$ équivaut à $+1, 0$ ou -1 suivant que $\mathrm{R}^*(x)$ est positif, nul ou négatif; en d'autres termes, c'est le *signe* de $\mathrm{R}^*(x)$.

» Les formules en question sont les suivantes, la première ne différant pas au fond de celle de M. Stern,

$$\sum \mathrm{E}^*\left(x + \frac{\alpha m}{n}\right) = \tfrac{1}{2}(m-1)(n-1) + \tfrac{1}{2}(d-1) + d\mathrm{E}^*\left(\frac{nx}{d}\right),$$

$$\sum \mathrm{R}^*\left(x + \frac{\alpha m}{n}\right) = \begin{cases} d\mathrm{R}^*\left(\dfrac{nx}{d}\right), & \text{lorsque } \dfrac{n}{d} \text{ est impair,} \\ nx - \dfrac{d}{2} - d\mathrm{E}^*\left(\dfrac{nx}{d}\right), & \text{lorsque } \dfrac{n}{d} \text{ est pair;} \end{cases}$$

$$\sum \operatorname{sgn}\mathrm{R}^*\left(x + \frac{\alpha m}{n}\right) = \begin{cases} 0, \text{ lorsque } \dfrac{n}{d} \text{ est pair,} \\ d \operatorname{sgn}\mathrm{R}^*\left(\dfrac{nx}{d}\right), \text{ lorsque } \dfrac{n}{d} \text{ est impair;} \end{cases}$$

$$\sum \left|\mathrm{R}\left(x + \frac{\alpha m}{n}\right)\right| = \begin{cases} \dfrac{n}{4}, \text{ lorsque } \dfrac{n}{d} \text{ est pair,} \\ \dfrac{n^2-d^2}{4n} + \dfrac{d^2}{n}\left|\mathrm{R}\left(\dfrac{nx}{d}\right)\right|, \text{ lorsque } \dfrac{n}{d} \text{ est impair;} \end{cases}$$

l'indice sommatoire α étant $\alpha = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ et d représentant le plus grand commun diviseur des nombres m, n.

» 2. En employant l'équation connue

$$\sum_{\alpha=0}^{n-1} \left(\frac{\alpha}{n}\right) e^{\frac{2\alpha m \pi i}{n}} = \left(\frac{m}{n}\right) i^{\frac{1}{4}(n-1)^2} \sqrt{n},$$

dans laquelle $\left(\frac{k}{n}\right)$ est le symbole de Legendre généralisé par Jacobi, et le nombre positif impair n n'admet aucun diviseur carré. Les développements que nous venons de considérer conduisent aux formules suivantes, dont quelques cas particuliers ont été déjà signalés.

» I. $n \equiv 1 \pmod 4$; $(\alpha = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$.

$$\sum \left(\frac{n}{\alpha}\right) \mathrm{E}^*\left(x + \frac{\alpha m}{n}\right) = \left(\frac{m}{n}\right) \sqrt{n} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{\nu}{n}\right) \frac{\sin 2\nu x\pi}{\nu\pi},$$

$$\sum \left(\frac{\alpha}{n}\right) \operatorname{sgn} \mathrm{R}^*\left(x + \frac{\alpha m}{n}\right) = 4\left(\frac{m}{n}\right) \sqrt{n} \sum \left(\frac{\lambda}{n}\right) \frac{\sin 2\lambda x\pi}{\lambda\pi} \quad (\lambda = 1, 3, 5, \ldots),$$

$$\sum \left(\frac{\alpha}{n}\right) \mathrm{R}^*\left(x + \frac{\alpha m}{n}\right) = -\left(\frac{m}{n}\right) \sqrt{n} \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu \left(\frac{\nu}{n}\right) \frac{\sin 2\nu x\pi}{\nu\pi},$$

$$\sum \left(\frac{\alpha}{n}\right) \left|\mathrm{R}\left(x + \frac{\alpha m}{n}\right)\right| = -2\left(\frac{m}{n}\right) \sqrt{n} \sum \left(\frac{\lambda}{n}\right) \frac{\cos 2\lambda x\pi}{\lambda^2\pi^2} \quad (\lambda = 1, 3, 5, \ldots).$$

» II. $n \equiv -1 \pmod 4$.

» Dans ce cas, la première formule deviendra

$$\sum_{\alpha=0}^{n-1} \left(\frac{\alpha}{n}\right) \mathrm{E}^*\left(x + \frac{\alpha m}{n}\right) = \frac{m}{n} \sum_{\alpha=1}^{n-1} \alpha \left(\frac{\alpha}{n}\right) + \left(\frac{m}{n}\right) \sqrt{n} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{\nu}{n}\right) \frac{\cos 2\nu x\pi}{\nu\pi},$$

et les autres s'obtiennent en remplaçant, aux seconds membres, la fonction sin par cos et cos par $-$ sin. De ces développements I et II on déduit le théorème suivant :

» *Les sommes*

$$\sum \left(\frac{\alpha m}{n}\right) \operatorname{sgn} \mathrm{R}^*\left(x + \frac{\alpha m}{n}\right), \qquad \sum \left(\frac{\alpha m}{n}\right) \mathrm{R}^*\left(x + \frac{\alpha m}{n}\right), \qquad \sum \left(\frac{\alpha m}{n}\right) \left|\mathrm{R}\left(x + \frac{\alpha m}{n}\right)\right|$$

sont indépendantes du nombre m, pourvu qu'il soit premier avec n et que le *nombre positif impair n n'admette aucun diviseur carré; la même chose aura lieu pour la somme*

$$\sum_{\alpha=0}^{n-1}\left(\frac{\alpha m}{n}\right)\mathrm{E}^*\left(x+\frac{\alpha m}{n}\right),\qquad \text{si } n\equiv 1 \pmod{4}.$$

» On obtient quelques propriétés des sommes telles que

$$\sum_{\alpha=0}^{n-1}\mathrm{E}^*\left(x+\frac{\alpha^2 m}{n}\right),$$

en employant la formule suivante, qui donne la valeur des sommes de Gauss,

$$\sum_{\alpha=0}^{n-1} e^{\frac{2\alpha^2 m\pi i}{n}} = \left(\frac{m'}{n'}\right) i^{\frac{1}{4}(n'-1)^2} d\sqrt{n'},$$

où d est le plus grand commun diviseur de m et n, et où $m'=\frac{m}{d}$, $n'=\frac{n}{d}$, le nombre positif n étant supposé impair. »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les solutions régulières d'un système d'équations différentielles linéaires.* Note de M. **Sauvage**, présentée par M. Darboux.

« *Pour qu'un système d'équations différentielles linéaires et homogènes de la forme*

$$(1)\qquad y'_i = a_{i1}y_1+\ldots+a_{in}y_n \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

ait toutes ses solutions régulières dans le domaine de l'origine, il faut et il suffit que, par des substitutions successives de fonctions de la forme

$$z=\lambda_1 x^{\alpha_1}y_1+\ldots+\lambda_n x^{\alpha_n}y_n,$$

à l'une des inconnues y, les nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ étant entiers et les quantités $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ étant des constantes, on puisse ramener ce système à la forme qu'on peut appeler canonique, *où tous les produits xa_{ik} soient holomorphes dans le domaine de l'origine.*