Matyáš Lerch

O stanovení kanonických tvarů binárních forem

Zprávy Král. Čes. spol. nauk, II. tř., 1883, 447–449

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501656

43.

O stanovení kanonických tvarů binarních forem.

Přednášel **Matyáš Lerch** dne 21. prosince 1883.

V následujícím dovoluji si poukázati na Cayleyovo stanovení tvarů kanonických, jež uvedl v Crelle-Borchardtově Journalu, sv. 54, str. 48, při čemž budu míti příležitost oceniti výhody, jaké tu poskytuje zkrácená symbolika Aronholdova.

1. Budiž $a_x^n = b_x^n = \ldots = k_x^n = l_x^n$ symbolem libovolně dané binarní formy lichého stupně $n = 2m - 1$, kterou uvésti chceme na tvar kanonický

$$a_x^n = \lambda_x^n + \mu_x^n + \ldots + \tau_x^n \tag{1}$$

kde $\lambda_x, \mu_x, \ldots \tau_x$ značí m linearných forem binarních. Stanovení těchto provede se určením koefficientů formy

$$\alpha_x^m = \lambda_x \mu_x \ldots \tau_x . \text{ —} \tag{2}$$

Symbolický výraz $(\alpha\lambda)^m$ mizí identicky. Neboť obdržíme jej z (2), nahradímeli x_1, x_2 resp. hodnotami λ_2, $-\lambda_1$, takže pak

$$(\alpha\lambda)^m = (\lambda\lambda)(\mu\lambda) \ldots (\tau\lambda) = 0,$$

poněvadž prvý činitel mizí.

Z rovnice (1) obdržíme tedy identitu

$$(\alpha a)^m a_x^{m-1} = (\alpha\lambda)^m \lambda_x^{m-1} + (\alpha\mu)^m \mu_x^{m-1} + \ldots + (\alpha\tau)^m \tau_x^{m-1} = 0,$$

která se rozpadá v m rovnic

$$(3) \ldots (\alpha a)^m a_1^{m-1} = 0, (\alpha a)^m a_1^{m-2} a_2 = 0, (\alpha a)^m a_1^{m-3} a_2^2 = 0, \ldots (\alpha a)^m a_2^{m-1} = 0,$$

z nichž stanoviti lze řešením poměry koefficientů formy (2); dosazením obdržíme pak (až na stálý faktor) následující výsledek:

$$\alpha_x^m = a_1^{m-1} b_1^{m-2} b_2 c_1^{m-3} c_2^2 \ldots l_2^{m-1} \begin{vmatrix} a_1^m, & a_1^{m-1} a_2, & a_1^{m-2} a_2^2, & \ldots a_2^m \\ b_1^m, & b_1^{m-1} b_2, & b_1^{m-2} b_2^2, & \ldots b_2^m \\ c_1^m, & c_1^{m-1} c_2, & c_1^{m-2} c_2^2, & \ldots c_2^m \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ l_1^m, & l_1^{m-1} l_2, & l_1^{m-2} l_2^2, & \ldots l_2^m \\ m_1^m, & m_1^{m-1} m_2, & m_1^{m-2} m_2^2, & \ldots m_2^m \end{vmatrix}$$

kde třeba klásti $m_1 = x_2$, $m_2 = -x_1$.

Vyraz tento se nezmění, provedemeli v něm libovolnou záměnu liter $a, b, c, \ldots l$; provedemeli tedy všech možných $m!$ záměn, a sečtemeli, obdržíme patrně

$$
m!\,a_x^m = \begin{vmatrix} a_1^{m-1}, & a_1^{m-2}a_2, & a_1^{m-3}a_2^2, & \ldots & a_2^{m-1} \\ b_1^{m-1}, & b_1^{m-2}b_2, & b_1^{m-3}b_2^2, & \ldots & b_2^{m-1} \\ c_1^{m-1}, & c_1^{m-2}c_2, & c_1^{m-3}c_2^2, & \ldots & c_2^{m-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ l_1^{m-1}, & l_1^{m-2}l_2, & l_1^{m-3}l_2^2, & \ldots & l_2^{m-1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1^m, & a_1^{m-1}a_2, & a_1^{m-2}a_2^2, & \ldots & a_2^m \\ b_1^m, & b_1^{m-1}b_2, & b_1^{m-2}b_2^2, & \ldots & b_2^m \\ c_1^m, & c_1^{m-1}c_2, & c_1^{m-2}c_2^2, & \ldots & c_2^m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ l_1^m, & l_1^{m-1}l_2, & l_1^{m-2}l_2^2, & \ldots & l_2^m \\ m_1^m, & m_1^{m-1}m_2, & m_1^{m-2}m_2^2, & \ldots & m_2^m \end{vmatrix}
$$

Užijemeli tu známého rozkladu determinantu složeného z mocnin řady prvků v součin rozdílů těchto, obdržíme patrně součin výrazů napsaných v následujícím schematu:

$$
\begin{array}{r|r}
(ab)(ac)(ad)\ldots(al) & (ab)(ac)(ad)\ldots(al)(am) \\
(bc)(bd)\ldots(bl) & (bc)(bd)\ldots(bl)(bm) \\
(cd)\ldots(cl) & (cd)\ldots(cl)(cm) \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
(kl) & (kl)(km) \\
 & (lm)
\end{array}
$$

Spojímeli stejné činitele v mocnosť a vrátímeli se k původnímu významu liter m_1, m_2, obdržíme nehledíce k stálému faktoru patrně

$$
(4) \qquad a_x^m = \left.\begin{array}{r} (ab)^2(ac)^2(ad)^2\ldots(al)^2 \\ (bc)^2(bd)^2\ldots(bl)^2 \\ (cd)^2\ldots(cl)^2 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ (kl)^2 \end{array}\right| a_x b_x c_x d_x \ldots k_x l_x
$$

2. Jeli předložená forma a_x^{2m} stupně sudého, uvedeme ji na tvar kanonicky stanovením součinu linearních faktorů

$$
\alpha_x^m = \lambda_x \mu_x \ldots \tau_x
$$

a určením formy m-tého stupně β_x^m, tak aby

$$
(5) \qquad a_x^{2m} = \lambda_x^{2m} + \mu_x^{2m} + \ldots + \tau_x^{2m} + \alpha_x^m \cdot \beta_x^m
$$

Položme

$$
(6) \qquad \gamma_x^{2m} = \alpha_x^m \cdot \beta_x^m
$$

a stanovme hodnotu m-tého přesmyku $(\gamma\alpha)^m \gamma_x^m$ forem α a γ. Tento obdržíme z m-té poláry $\gamma_x^m \gamma_y^m$ výrazu (6) substitucí α_2, $-\alpha_1$ za y_1, resp. y_2. Indukcí nalezneme pro tuto poláru symbolický výraz

$$
(2m)^{\underline{m}}\, \gamma_x^m \gamma_y^m = (m_1 \alpha_x \beta_y + m_2 \alpha_y \beta_x)^m,
$$

kde v pravo dlužno klásti $m_1^r = m_2^r = m^{\underline{r}} = m(m-1)\ldots(m-r+1)$. Uvedenou substitucí obdržíme odtud vzhledem k identitě $(\alpha\alpha) = 0$ následující výsledek

$$(7) \qquad (\gamma\alpha)^m \gamma_x^m = \frac{m_{|m}}{(2m)_{|m}} (\beta\alpha)^m \alpha_x^m ,$$

následkem čehož redukuje se m-tý přesmyk forem (5) a (6) na

$$(8) \qquad (\alpha a)^m a_x^m = \frac{1}{(2m)_m} (\alpha\beta)^m \alpha_x^m = \varkappa \alpha_x^m , \; \varkappa = \frac{(\alpha\beta)^m}{(2m)_m} ,$$

z kteréžto rovnice plyne soustava jiných

$$(8') \quad (\alpha a)^m a_1^m = \varkappa\alpha_1^m , \; (\alpha a)^m a_1^{m-1} a_2 = \varkappa\alpha_1^{m-1}\alpha_2 , \ldots (\alpha a)^m a_2^m = \varkappa\alpha_2^m .$$

Rozvedením závorek a elliminací α obdržíme odtud rovnici ve tvaru determinantním, v níž značí $a_i = a_1^{2m-i} a_2^i$, a sice

$$(9) \quad \begin{vmatrix} a_0 , a_1 , a_2 , & \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{m-2} , a_{m-1} , a_m - \varkappa \\ a_1 , a_2 , a_3 , & \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{m-1} , a_m + \frac{\varkappa}{(m)_1} , a_{m+1} \\ a_2 , a_3 , a_4 , & \ldots\ldots\ldots\ldots & a_m - \frac{\varkappa}{(m)_2} , a_{m+1} , a_{m+2} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{m-1} , a_m - \frac{(-1)^{m-1}\varkappa}{(m)_{m-1}} , a_{m+1} , & \ldots & a_{2m-3} , a_{2m-2} , a_{2m-1} \\ a_m - \frac{(-1)^m \varkappa}{(m)_m} , a_{m+1} , a_{m+2} , & \ldots\ldots & a_{2m-2} , a_{2m-1} , a_{2m} \end{vmatrix} = 0 ,$$

která rozvedením obdrží tvar

$$(9') \qquad K_0 + K_1\varkappa + \ldots + K_{m+1}\varkappa^{m+1} = 0 ,$$

v němž jsou koefficienty K různé invarianty dané formy. Jakmile tyto určíme, můžeme rovnici tuto řešiti, a ke každému kořenu $\varkappa$ stanoviti skupinu hodnot koefficientů α_i formy α_x^m.

Z rovnice (7) pak plyne identita

$$(10) \qquad (\alpha\gamma)^m \gamma_x^m = \varkappa\alpha_x^m ,$$

jež poskytuje soustavu rovnic

$$(10') \quad (\alpha\gamma)^m \gamma_1^m = \varkappa\alpha_1^m , \; (\alpha\gamma)^m \gamma_1^{m-1}\gamma_2 = \varkappa\alpha_1^{m-1}\alpha_2 , \ldots (\alpha\gamma)^m \gamma_2^m = \varkappa\alpha_2^m ,$$

z nichž možno ustanoviti koefficienty formy γ, a z nich známým a jednoduchým způsobem koefficienty formy β.

44.

O plochách sborcených a kuželosečkových.

Napsali: J. S. a M. N. Vaněček a předložil prof. dr. J. Krejčí dne 21. prosince 1883

1. V předešlém článku „Poznámka ku všeobecné inversi. O vyšetření čar a zvláštních ploch sborcených", který