Matyáš Lerch
Sur une formule d'Arithmétique

C. R. Acad. Sci., Paris 106 (1888), 186–187

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501648

» Dans le troisième groupe sont les seules surfaces du second degré. On vérifie bien en effet, conformément à la théorie, que, si on les rapporte à leurs deux systèmes de génératrices rectilignes, l'équation différentielle des lignes de courbure est une équation d'Euler.

» Restent les surfaces à plan directeur : le cône des tangentes asymptotiques est remplacé par un plan. Si ce plan est tangent au cône isotrope, les surfaces sont imaginaires, étant excepté le paraboloïde elliptique. Si les lignes à normales isotropes sont minima, on a l'hélicoïde à plan directeur. Dans les autres cas, le paraboloïde est la seule surface réelle. Si la surface est développable ou à génératrices isotropes, on a immédiatement les lignes de courbure. »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur une formule d'Arithmétique.* Note de M. Lerch, présentée par M. Hermite.

« L'équation

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x^{k\nu}}{(1-x^{\nu})(1-x^{a+\nu})} = \frac{1}{1-x^{a}} \sum_{\nu=1}^{a} \frac{x^{\nu}}{1-x^{\nu}} - \sum_{\lambda=1}^{k-1} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x^{\lambda\nu}}{1-x^{a+\nu}},$$

facile à obtenir, conduit à la formule

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} &\sum_{\sigma=0}^{\left(\frac{m}{a}\right)} [\psi(m-\sigma a, k+\sigma-1) - \chi(m-\sigma a, a)] \\ &+ \sum_{\lambda=1}^{k-1} [\psi(m+\lambda a, \lambda-1) - \chi(m+\lambda a, a)] = 0, \end{aligned} \right.$$

dans laquelle $\psi(p, q)$ représente le nombre des diviseurs de p supérieurs à q et $\chi(p, q)$ celui des diviseurs de p non supérieurs à q et où le symbole $\left(\frac{m}{a}\right)$ représente le plus grand nombre entier inférieur à $\frac{m}{a}$, de sorte que $\left(\frac{m}{a}\right) = \frac{m}{a} - 1$, si m est un multiple de a. On suppose ensuite $k \geqq 2$, $m \geqq k$.

» Posant $a = 1$ et changeant k en $k+1$, cette formule devient

$$(2)\quad \sum_{\sigma=0}^{m-1} \psi(m-\sigma, k+\sigma) + \sum_{\lambda=1}^{k} \psi(m+\lambda, \lambda-1) = k+m, \qquad k \geqq 1,$$

et de cette formule on déduit aisément les deux suivantes

$$(3)\qquad \sum_{\alpha=0}^{m-1}\psi(m-\alpha,\alpha)=m,\qquad \sum_{\alpha=0}^{m}\psi(m+\alpha,\alpha)=2m.$$

» La première des formules (3) ne diffère que par la forme d'un théorème de M. Catalan qui se trouve établi dans une Note de M. Cesaro (*Mémoires de la Société de Liège*, 2e série, t. X, p. 263).

» Remarquons que les formules (2) et (3) s'obtiennent aisément par une considération purement arithmétique, différente de celle qui a été employée dans la Note citée. »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les systèmes d'équations linéaires qui sont identiques à leur adjoint.* Note de M. E. **Goursat**, présentée par M. Darboux.

« Considérons le système d'équations linéaires du premier ordre

$$(1)\qquad \frac{dy_i}{dx}=A_{i1}y_1+A_{i2}y_2+\ldots+A_{in}y_n,\qquad (i=1,2,\ldots,n),$$

où les coefficients A_{ik} sont des fonctions quelconques de la variable x, et le système adjoint

$$(2)\qquad \frac{du_i}{dx}=-A_{1i}u_1-A_{2i}u_2-\ldots-A_{ni}u_n,\qquad (i=1,2,\ldots,n).$$

» Pour que les systèmes (1) et (2) deviennent identiques quand on remplace y_i par u_i, il faut et il suffit que l'on ait

$$A_{ii}=0\qquad \text{et}\qquad A_{ik}+A_{ki}=0,$$

lorsque i est différent de k. Supposons ces relations vérifiées; le système (1) ainsi obtenu s'est déjà présenté, lorsque n est égal à 3, dans l'étude du mouvement d'un corps solide qui a un point fixe et dans plusieurs autres questions de Géométrie. Ce système jouit de propriétés remarquables qui sont aujourd'hui bien connues (voir Darboux, *Leçons sur la Théorie générale des surfaces*, Chap. II). Les systèmes d'équations de la forme particulière qui vient d'être définie, lorsque n est quelconque, possèdent des propriétés analogues dont la démonstration ne présente pas de difficulté.